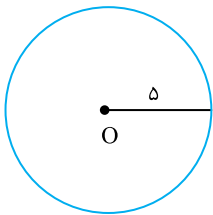


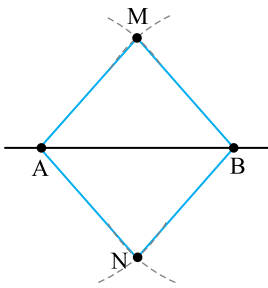
فصل اول: ترسیم‌های هندسی و استدلال

درس اول: ترسیم‌های هندسی

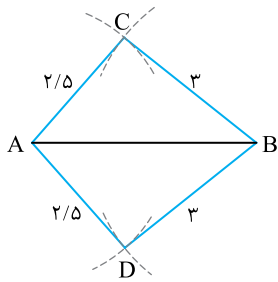
با این که در هندسه برای اثبات قضیه‌ها و حل کردن مسأله‌ها ترسیم شکل‌ها خیلی مهم است، اما خیلی مواقع ترسیم حدودی و غیر دقیق شکل‌ها هم برای برآوردن منظورمان کافی است. با این حال، مواردی پیش می‌آید که ترسیم دقیق مهم است، مثلاً هنگام ترسیم نقشه‌ی راه‌ها، نقشه‌ی ساختمان، یا حتی نقشه‌ی ابزار ساده یا پیچیده. در این درس، با ترسیم‌های مهم به کمک خط‌کش و پرگار آشنا می‌شویم.



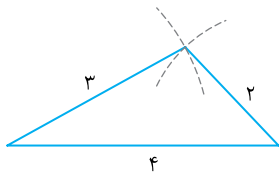
فرض کنید O نقطه‌ای در صفحه باشد. اگر به مرکز O دایره‌ای به شعاع 5 رسم کنیم، فاصله‌ی همه‌ی نقطه‌های روی این دایره تا نقطه‌ی O برابر با 5 است. در ضمن، هیچ نقطه‌ی دیگری در صفحه نیست که فاصله‌اش تا نقطه‌ی O برابر با 5 باشد.



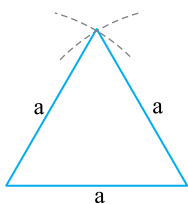
فرض کنید A و B دو نقطه در صفحه باشند. اگر دهانه‌ی پرگار را بیش از نصف طول پاره‌خط AB باز کنیم و یک بار به مرکز A و بار دیگر به مرکز B کمان بزنیم، این دو کمان یکدیگر را در دو نقطه قطع می‌کنند. این نقطه‌ها را M و N بنامید. در این صورت فاصله‌ی M و N از A و B یکسان است.



فرض کنید A و B دو نقطه در صفحه به فاصله‌ی 4 سانتی‌متر باشند. دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی 2/5 سانتی‌متر باز می‌کنیم و به مرکز نقطه‌ی A کمانی می‌زنیم. اکنون دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی 3 سانتی‌متر باز می‌کنیم و به مرکز نقطه‌ی B کمانی می‌زنیم. این دو کمان یکدیگر را در دو نقطه قطع می‌کنند. این دو نقطه را C و D بنامید. در این صورت فاصله‌ی نقطه‌ی C تا نقطه‌ی A برابر با 2/5 سانتی‌متر و تا نقطه‌ی B برابر با 3 سانتی‌متر است. همین‌طور، فاصله‌ی نقطه‌ی D تا نقطه‌ی A برابر با 2/5 سانتی‌متر و تا نقطه‌ی B برابر با 3 سانتی‌متر است.



مثال: می‌خواهیم مثلثی به طول ضلع‌های 2، 3 و 4 رسم کنیم. ابتدا پاره‌خطی به طول 4 رسم می‌کنیم. دو سر این پاره‌خط دو رأس مثلث مورد نظرند. سپس از یک سر آن کمانی به شعاع 2 و از سر دیگر آن کمانی به شعاع 3 رسم می‌کنیم. محل برخورد این دو کمان رأس سوم مثلث است.

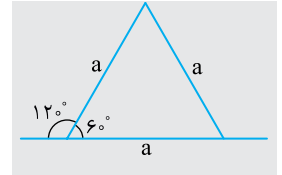


مثال: می‌خواهیم مثلثی متساوی‌الاضلاع رسم کنیم. ابتدا پاره‌خطی دلخواه رسم می‌کنیم. دو سر این پاره‌خط دو رأس مثلث مورد نظرند. سپس به مرکز هر یک از دو سر این پاره‌خط کمانی به شعاع طول پاره‌خط رسم شده می‌زنیم. محل برخورد این دو کمان رأس سوم مثلث متساوی‌الاضلاع مورد نظر است.

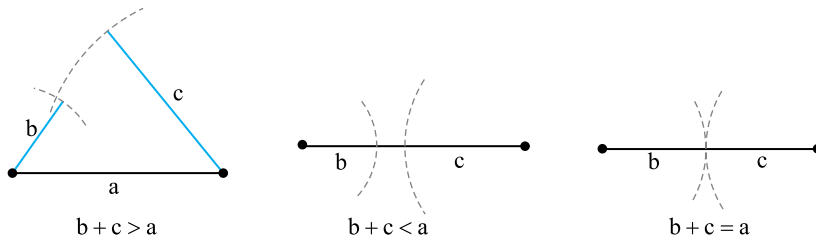
مثال: می‌خواهیم زاویه‌ای 60° رسم کنیم. ابتدا به روش مثال قبل مثلثی متساوی‌الاضلاع رسم می‌کنیم. در این صورت هر یک از زاویه‌های مثلث مورد نظر 60° است.

مسئله ۱ زاویه‌ای 120° رسم کنید.

راه‌حل: یک خط راست رسم کنید. سپس به روش مثال قبل زاویه‌ای 60° رسم کنید که رأس آن روی این خط باشد. به این ترتیب دو زاویه به‌دست می‌آوریم که یکی از آن‌ها 60° و دیگری 120° است.



مثال: پاره‌خطی به طول a در نظر بگیرید. دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی دلخواه، مثلاً b باز کنید و به مرکز یکی از دو سر پاره‌خطی که رسم کرده‌اید، کمانی بزنید. اکنون دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی دلخواه، مثلاً c باز کنید و به مرکز سر دیگر پاره‌خط، کمانی بزنید. در این صورت، برای این که کمان‌ها یکدیگر را در نقطه‌ای خارج پاره‌خط اولیه قطع کنند باید $b+c > a$.



توجه کنید که اگر ابتدا پاره‌خطی به طول b در نظر بگیریم و بعد کمان‌هایی به شعاع a و c بزنیم، برای این که کمان‌ها یکدیگر را در خارج پاره‌خط به طول b قطع کنند، باید $a+c > b$. همین‌طور، اگر ابتدا پاره‌خطی به طول c در نظر بگیریم و سپس کمان‌هایی به شعاع a و b بزنیم، برای این که کمان‌ها یکدیگر را در خارج پاره‌خط به طول c قطع کنند، باید $a+b > c$.

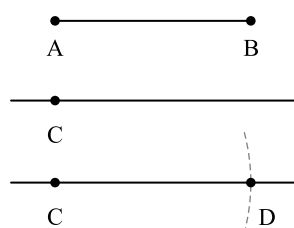
نتیجه فرض کنید a ، b و c عددهایی حقیقی و مثبت باشند. برای این که مثلثی به طول ضلع‌های a ، b و c وجود داشته باشد، باید

$$a+b > c, \quad b+c > a, \quad c+a > b$$

ترسیم‌های ساده

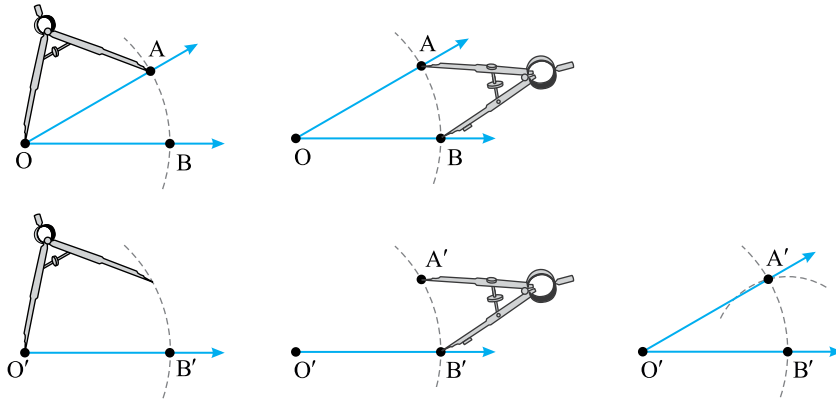
۱) ترسیم پاره‌خطی هم‌نهشت با پاره‌خطی مفروض

فرض کنید پاره‌خط AB داده شده است. می‌خواهیم پاره‌خطی هم‌نهشت با این پاره‌خط رسم کنیم. با خط‌کش خطی راست رسم می‌کنیم و یک نقطه مانند C روی آن مشخص می‌کنیم. دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی طول پاره‌خط AB باز می‌کنیم و به مرکز C کمانی رسم می‌کنیم. نقطه‌ی برخورد این کمان با خط کشیده شده را D می‌نامیم. پاره‌خط CD پاره‌خط مورد نظر است.



۲) ترسیم زاویه‌های هم‌نهشت با زاویه‌های مفروض

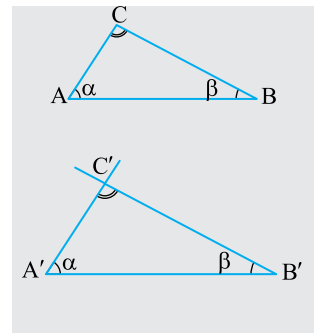
فرض کنید زاویه‌ای به رأس O داده شده است. می‌خواهیم زاویه‌ای هم‌نهشت با این زاویه رسم کنیم. با خط‌کش خطی راست رسم می‌کنیم و یک نقطه مانند O' روی آن مشخص می‌کنیم. به مرکز نقطه‌ی O کمانی دلخواه می‌زنیم تا ضلع‌های زاویه‌ی داده شده را در نقطه‌های A و B قطع کند. دهانه‌ی پرگار را تغییر نمی‌دهیم و به مرکز نقطه‌ی O' کمانی می‌زنیم تا خط کشیده شده را در نقطه‌ی B' قطع کند. اکنون دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی طول پاره‌خط AB باز می‌کنیم، سپس بدون این‌که دهانه را تغییر بدهیم، به مرکز نقطه‌ی B' کمانی می‌زنیم تا کمان اول را در نقطه‌ی A' قطع کند. اکنون اگر نقطه‌ی O' را به نقطه‌ی A' وصل کنیم، زاویه‌ی $A'O'B'$ با زاویه‌ی AOB برابر می‌شود، چراکه دو مثلث OAB و $O'A'B'$ هم‌نهشت هستند.



مثلی رسم کنید که زاویه‌هایش با زاویه‌های مثلثی مفروض برابر باشند، اما این دو مثلث هم‌نهشت نباشند.

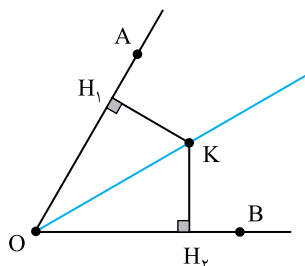
مسئله ۲

راه‌حل: فرض کنید مثلث مفروض ABC باشد. ابتدا پاره‌خطی مانند $A'B'$ رسم می‌کنیم که از بزرگ‌ترین ضلع مثلث ABC بزرگ‌تر باشد (این کار باعث می‌شود که اگر مثلثی مانند $A'B'C'$ رسم کنیم، مثلث‌های ABC و $A'B'C'$ هم‌نهشت نباشند). اکنون زاویه‌ای به رأس A' و هم‌نهشت با زاویه‌ی A و زاویه‌ای به رأس B' و هم‌نهشت با زاویه‌ی B رسم می‌کنیم. محل برخورد ضلع‌های غیر مشترک زاویه‌های رسم شده را C' بنامید (چون دست کم یکی از زاویه‌های A یا B حاده است، پس ضلع‌های غیر مشترک زاویه‌های رسم شده، متقاطع‌اند). اکنون توجه کنید که مثلث‌های ABC و $A'B'C'$ دو زاویه‌ی هم‌نهشت دارند و چون مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث 180° است، پس زاویه‌های سوم آن‌ها یعنی C و C' نیز هم‌نهشت‌اند.



خاصیت اصلی نیمساز و ترسیم نیمساز

زاویه‌ی AOB را در نظر بگیرید و فرض کنید K نقطه‌ای روی نیمساز آن باشد. از K عمودهای KH_1 و KH_2 را به ترتیب بر OA و OB رسم کنید. توجه کنید که مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی KH_1O و KH_2O یک ضلع مشترک دارند (KO) و دو زاویه‌ی حاده‌ی برابر هم دارند، زیرا OK نیمساز است، پس $H_1\hat{O}K = H_2\hat{O}K$. بنابراین مثلث‌های KH_1O و KH_2O به حالت وتر و یک زاویه‌ی حاده هم‌نهشت‌اند و در نتیجه $KH_1 = KH_2$. یعنی فاصله‌ی K تا ضلع‌های زاویه‌ی AOB برابر است.



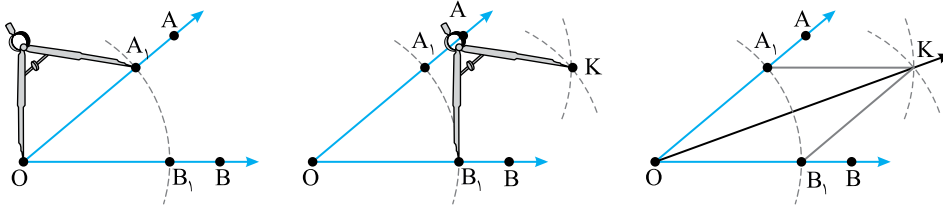
اکنون فرض کنید K نقطه‌ای درون زاویه‌ی AOB باشد و فاصله‌ی K از دو ضلع این زاویه برابر باشد. از K عمودهای KH_1 و KH_2 را به ترتیب بر ضلع‌های OA و OB رسم کنید. در این صورت $KH_1 = KH_2$. نقطه‌ی O را به نقطه‌ی K وصل کنید. توجه کنید که مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی KH_1O و KH_2O وتر مشترک و دو ضلع برابر دارند. در نتیجه این دو مثلث به حالت وتر و یک ضلع همنهشت‌اند. به این ترتیب $H_1\hat{O}K = H_2\hat{O}K$ ، یعنی K روی نیمساز زاویه‌ی AOB قرار دارد.

نتیجه

هر نقطه روی نیمساز زاویه از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است و هر نقطه که از دو ضلع زاویه به یک فاصله باشد، روی نیمساز این زاویه قرار دارد.

روش ترسیم نیمساز

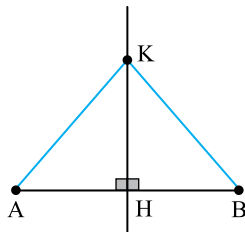
فرض کنید زاویه‌ی AOB (به رأس O) مفروض است. می‌خواهیم نیمساز این زاویه را رسم کنیم. ابتدا به مرکز O و شعاعی دلخواه کمانی می‌زنیم تا ضلع‌های OA و OB را به ترتیب در نقطه‌های A_1 و B_1 قطع کند. در این صورت $OA_1 = OB_1$. اکنون به مرکز A_1 و شعاعی بیش‌تر از نصف A_1B_1 کمانی بزنید و به همین شعاع و مرکز B_1 کمانی دیگر بزنید. محل برخورد این دو کمان را K بنامید. توجه کنید که $A_1K = B_1K$. به این ترتیب دو مثلث OA_1K و OB_1K همنهشت‌اند (ضضض). در نتیجه $A_1\hat{O}K = B_1\hat{O}K$ ، یعنی OK نیمساز زاویه‌ی AOB است.



مثال: می‌خواهیم زاویه‌ای 30° رسم کنیم. ابتدا زاویه‌ای 60° رسم می‌کنیم. اکنون اگر نیمساز این زاویه را رسم کنیم، دو زاویه‌ی 30° به دست می‌آوریم.

خاصیت اصلی عمودمنصف و ترسیم عمودمنصف

پاره‌خط AB را در نظر بگیرید و فرض کنید K نقطه‌ای روی عمودمنصف آن باشد. از K به A و B وصل کنید (شکل را ببینید). در این صورت مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی AHK و BHK یک ضلع مشترک دارند (KH). یک زاویه‌ی (قائم‌هی) برابر دارند ($A\hat{H}K = B\hat{H}K$) و دو ضلع برابر نیز دارند ($AH = BH$). بنابراین مثلث‌های AHK و BHK همنهشت‌اند (ضضض) و در نتیجه $KA = KB$. یعنی فاصله‌ی K تا دو سر پاره‌خط AB برابر است.



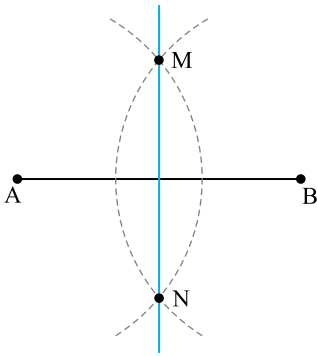
اکنون فرض کنید فاصله‌ی نقطه‌ی K تا دو سر پاره‌خط AB برابر باشد. فرض کنید H وسط پاره‌خط AB باشد و از K به A و B وصل کنید. در این صورت مثلث‌های AHK و BHK همنهشت‌اند (ضضض). بنابراین زاویه‌های AHK و BHK برابرند و چون این دو زاویه مکمل‌اند، پس $A\hat{H}K = B\hat{H}K = 90^\circ$ ، یعنی K روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارد.

نتیجه

هر نقطه روی عمودمنصف پاره‌خط، از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است و هر نقطه که از دو سر پاره‌خط به یک فاصله باشد، روی عمودمنصف آن پاره‌خط قرار دارد.

روش ترسیم عمودمنصف

اگر دو نقطه از خطی راست معلوم باشد، این خط به طور کامل مشخص می‌شود. بنابراین، اگر دو نقطه‌ی متمایز در صفحه پیدا کنیم که فاصله‌ی هر یک از آن‌ها تا دو سر پاره‌خط مفروض AB برابر باشد، چون این دو نقطه روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارند، می‌توانیم این عمودمنصف را رسم کنیم.

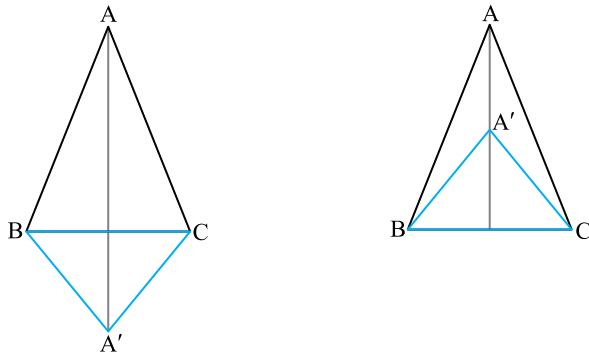


فرض کنید پاره‌خط AB داده شده است. دهانه‌ی پرگار را بیش از نصف AB باز کنید و یک بار به مرکز A و بار دیگر با همان شعاع و به مرکز B کمانی بزنید. فرض کنید این دو کمان یکدیگر را در نقطه‌های M و N قطع کنند. در این صورت فاصله‌های M و N از نقطه‌های A و B برابر است، پس این دو نقطه روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارند. بنابراین، خطی که از M و N می‌گذرد، عمودمنصف پاره‌خط AB است.

دو مثلث متساوی‌الساقین قاعده‌ای مشترک دارند. ثابت کنید خطی که از دو رأس این مثلث‌ها می‌گذرد، بر قاعده‌ی مشترک آن‌ها عمود است.

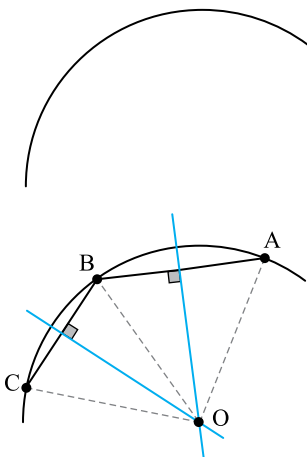
مسئله ۳

راه‌حل: فرض کنیم دو مثلث ABC و $A'BC$ متساوی‌الساقین باشند و BC قاعده‌ی مشترک هر دوی آن‌ها باشد. چون $AB=AC$ پس A روی عمودمنصف BC قرار دارد و چون $A'B=A'C$ در نتیجه A' روی عمودمنصف BC قرار دارد. بنابراین AA' عمودمنصف ضلع BC است. پس خط AA' بر BC عمود است.



در شکل روبه‌رو قسمتی از یک دایره را می‌بینید. چگونه می‌توان این دایره را کامل کرد؟

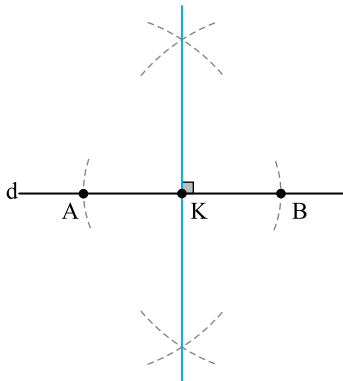
مسئله ۴



راه‌حل: سه نقطه‌ی A ، B و C را روی قسمت داده شده در نظر می‌گیریم (شکل را ببینید). عمودمنصف پاره‌خط‌های AB و BC را رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطه‌ی O قطع کنند. نقطه‌ی O از سه نقطه‌ی A ، B و C به یک فاصله است، پس مرکز دایره‌ی مورد نظر است. اکنون اگر به مرکز O و شعاع OA دایره‌ای رسم کنیم، این دایره، دایره‌ی مورد نظر است.

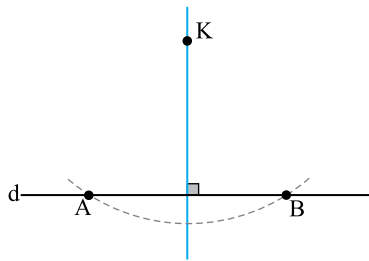
رسم خط عمود بر یک خط

خط d مفروض است. می‌خواهیم از نقطه‌ی K در صفحه، خطی عمود بر خط d رسم کنیم. دو حالت وجود دارد.



الف) نقطه‌ی K روی خط d است

به مرکز نقطه‌ی K و شعاعی دلخواه کمائی بزنید تا خط d را در نقطه‌های A و B قطع کند (شکل را ببینید). در این صورت K وسط پاره‌خط AB است. اکنون اگر عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم کنیم، حتماً از K می‌گذرد. به این ترتیب، خط مورد نظر، عمودمنصف پاره‌خط AB است.

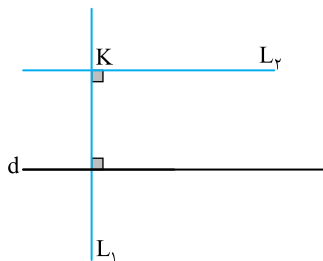


ب) نقطه‌ی K خارج خط d است

به مرکز نقطه‌ی K کمائی بزنید که خط d را در نقطه‌هایی مانند A و B قطع کند. در این صورت فاصله‌ی K از A و B برابر است، پس K روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارد. بنابراین اگر عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم کنیم، از نقطه‌ی K می‌گذرد. به این ترتیب، خط مورد نظر، عمودمنصف پاره‌خط AB است.

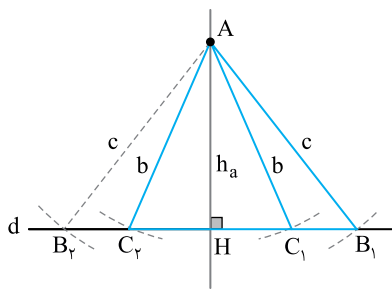
توجه: دقت کنید که در روش‌های بالا مهم نیست نقطه‌ی K روی خط باشد یا خیر، روش یکی است.

رسم خطی موازی یک خط از نقطه‌ای خارج آن



فرض کنید خط d داده شده و K نقطه‌ای خارج آن است. می‌خواهیم خطی رسم کنیم که از K بگذرد و با d موازی باشد. ابتدا L_1 را طوری رسم می‌کنیم که از K بگذرد و بر d عمود باشد. سپس خط L_2 را طوری رسم می‌کنیم که از K بگذرد و بر L_1 عمود باشد. در این صورت خط‌های d و L_2 بر خط L_1 عمودند، پس موازی‌اند.

مسئله ۵ از مثلثی طول دو ضلع (b و c) و طول ارتفاع نظیر ضلع سوم (h_a) معلوم است. این مثلث را رسم کنید.

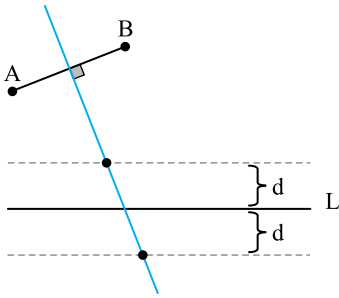


راه‌حل: خطی دلخواه مانند d بکشید و از نقطه‌ی دلخواه H روی آن، خطی عمود بر آن رسم کنید. به مرکز H و شعاع h_a کمائی بزنید تا این خط عمود را در نقطه‌ی A قطع کند (دو نقطه مانند A داریم، یکی را انتخاب کنید). اکنون به مرکز A و به شعاع b کمائی بزنید تا خط d را در نقطه‌های C_1 و C_2 قطع کند (شکل را ببینید). همین‌طور به مرکز A و به شعاع c کمائی بزنید تا خط d را در نقطه‌های B_1 و B_2 قطع کند (شکل را ببینید). مثلث‌های غیرهمنهشت AB_1C_1 و AB_2C_2 ویژگی‌های مورد نظر را دارند.

توجه: در مسئله‌های ترسیم، اگر تعداد شکل‌های قابل رسم را بخواهیم، منظور شکل‌های غیرهمنهشت است.

مسئله ۶

d عددی مثبت است. A و B دو نقطه در صفحه‌اند و L خطی راست است. همی نقطه‌هایی را پیدا کنید که فاصله‌ی آن‌ها از A و B برابر هم و فاصله‌ی آن‌ها از L برابر با d باشد.



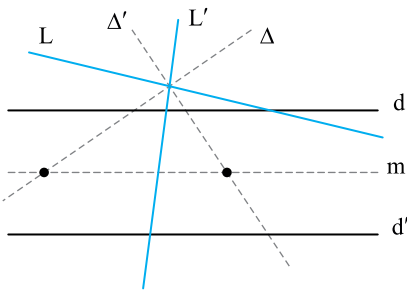
راه‌حل: نقطه‌هایی که از A و B به یک فاصله‌اند، روی عمودمنصف AB هستند و نقطه‌هایی که فاصله‌ی آن‌ها از L برابر d است، دو خط راست موازی با L و به فاصله‌ی d از L هستند. پس نقطه‌های مورد نظر، محل برخورد عمودمنصف AB و این دو خط موازی با L هستند.
بحث در تعداد جواب:
حالت (۱): اگر عمودمنصف AB با دو خط متقاطع باشد، دو جواب داریم.

حالت (۲): اگر عمودمنصف AB موازی با این دو خط باشد، جواب نداریم.

حالت (۳): اگر عمودمنصف AB بر یکی از این دو خط منطبق شود، تعداد نامتناهی جواب داریم.

مسئله ۷

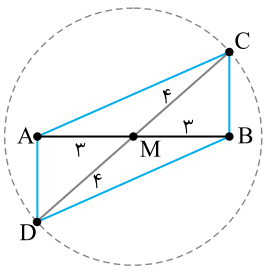
همی نقطه‌هایی را پیدا کنید که فاصله‌ی آن‌ها از دو خط موازی مفروض برابر باشد، در ضمن از دو خط متقاطع مفروض به یک فاصله باشد.



راه‌حل: دو خط موازی را d و d' و دو خط متقاطع را L و L' می‌نامیم. نقطه‌هایی که از دو خط d و d' به یک فاصله هستند، روی خط راستی موازی این دو خط هستند که به فاصله‌ی نصف فاصله‌ی دو خط d و d' ، در میان آن‌ها قرار دارد (خط m در شکل روبه‌رو). از طرف دیگر نقطه‌هایی که فاصله‌ی آن‌ها از دو خط متقاطع L و L' برابر است، روی نیمسازهای دو زاویه‌ای هستند که با این خط‌ها تشکیل می‌شوند (دو خط Δ و Δ' در شکل روبه‌رو). پس نقطه‌های مورد نظر، محل برخورد خط‌های Δ و Δ' با خط m هستند.

مسئله ۸

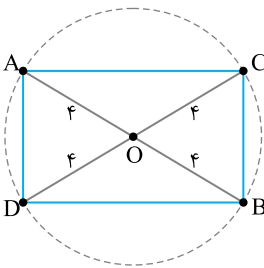
متوازی‌الاضلاعی رسم کنید که طول قطرهای آن ۶ و ۸ باشد. در تعداد جواب‌ها بحث کنید.



راه‌حل: می‌دانیم در متوازی‌الاضلاع قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند. اکنون مطابق شکل پاره‌خط AB را به طول ۶ رسم می‌کنیم. وسط پاره‌خط AB را M می‌نامیم. به مرکز M و شعاع $\frac{AB}{2} = 3$ دایره‌ای رسم می‌کنیم. اکنون، یکی از قطرهای دلخواه از این دایره را رسم می‌کنیم (مانند قطر CD در شکل). فقط دقت کنید که قطر مورد نظر از A و B عبور نکند. چهارضلعی $ACBD$ متوازی‌الاضلاع مورد نظر است.
واضح است که نامتناهی متوازی‌الاضلاع با این ویژگی‌ها می‌توان رسم کرد.

مسئله ۹

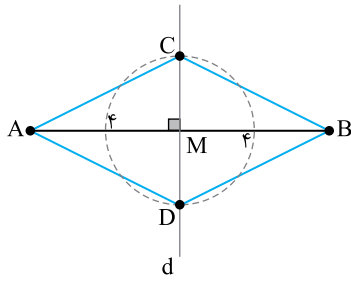
مستطیلی به طول قطر ۸ رسم کنید.



راه‌حل: می‌دانیم چهارضلعی‌ای که قطرهای آن با هم برابر و منصف یکدیگرند، مستطیل است. پس برای رسم مستطیل مورد نظر، نقطه‌ی دلخواه O را در صفحه در نظر می‌گیریم. به مرکز O و شعاع ۴ دایره‌ای رسم می‌کنیم. دو قطر دلخواه AB و CD را مطابق شکل در این دایره در نظر می‌گیریم. در چهارضلعی $ACBD$ ، قطرها با یکدیگر برابرند و یکدیگر را نصف می‌کنند، پس این چهارضلعی مستطیل مورد نظر است.

مسئله ۱۰

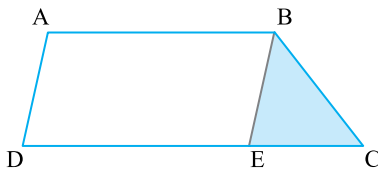
یک لوزی رسم کنید که طول قطرهای آن ۴ و ۸ باشد.



راه حل: می‌دانیم که برای لوزی بودن چهارضلعی کافی است قطرهای آن چهارضلعی عمودمنصف یکدیگر باشند. پس به صورت زیر لوزی را رسم می‌کنیم.
ابتدا پاره‌خط AB را به طول ۸ رسم می‌کنیم (شکل را ببینید). سپس عمودمنصف AB را رسم می‌کنیم (خط d در شکل). اکنون به مرکز M، وسط AB، دایره‌ای به شعاع $\frac{4}{2}=2$ رسم می‌کنیم تا خط d را در نقطه‌های C و D قطع کند. ACBD لوزی مورد نظر است.

مسئله ۱۱

دوزنقه‌ی ABCD را با معلوم بودن طول چهار ضلع رسم کنید.

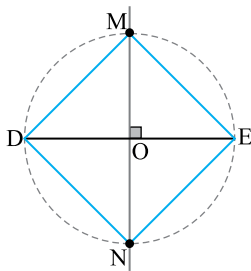
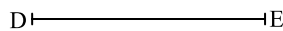


راه حل: مسئله را حل شده در نظر می‌گیریم (شکل روبه‌رو را ببینید).
از نقطه‌ی B خطی موازی ساق AD رسم می‌کنیم. چون ABED متوازی‌الاضلاع است، پس $AD=BE$ و $DE=AB$. مثلث BEC با معلوم بودن طول سه ضلع قابل رسم است:
 $CE=DC-AB$, $BE=AD$

پس از رسم این مثلث، از B خطی موازی CE رسم می‌کنیم و روی آن نقطه‌ی A را چنان در نظر می‌گیریم که AB برابر طول قاعده‌ی کوچک‌تر شود.
از A موازی BE خطی رسم می‌کنیم تا امتداد CE را در D قطع کند. چهارضلعی ABCD همان دوزنقه‌ی مورد نظر است.

مسئله ۱۲

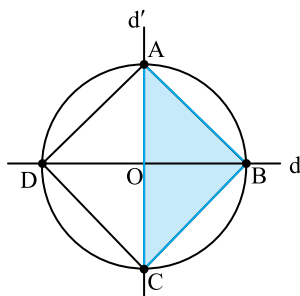
مربعی رسم کنید که پاره‌خط مفروض DE قطر آن باشد؟



راه حل: می‌دانیم در مربع قطرهای عمودمنصف یکدیگر هستند و دارای طول برابرند. پس ابتدا عمودمنصف پاره‌خط معلوم DE را رسم می‌کنیم.
سپس به مرکز نقطه‌ی O، وسط پاره‌خط DE و شعاع OE دایره‌ای رسم می‌کنیم. محل برخورد این دایره با عمودمنصف DE را M و N می‌نامیم. چهارضلعی MEND مربع مورد نظر است.

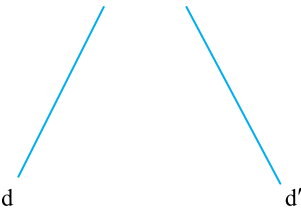
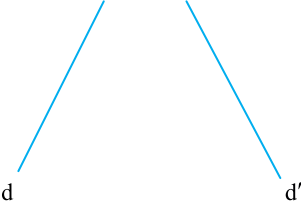
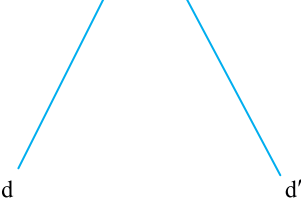
مسئله ۱۳

مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین به اندازه‌ی وتر $4\sqrt{2}$ رسم کنید.



راه حل: می‌دانیم در مربع، دو قطر مساوی و عمودمنصف یکدیگرند. پس دو خط عمود بر هم d و d' را رسم می‌کنیم. به مرکز O و شعاع $2\sqrt{2}$ دایره‌ای رسم می‌کنیم تا دو خط d و d' را در نقطه‌های A، B، C و D قطع کند. در این صورت ABCD مربع به قطر $4\sqrt{2}$ است. به این ترتیب مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC مثلث مورد نظر است.

تمرین

- ۱- در مثلث متساوی‌الساقین ABC ($AB=AC$) ضلع BC برابر ۸ و اندازه‌ی ارتفاع وارد بر ضلع BC مساوی ۵ است. این مثلث را رسم کنید.
- ۲- پاره‌خط AB را به طول ۸ سانتی‌متر رسم کنید.
الف) عمودمنصف آن را رسم کنید.
ب) چند نقطه روی عمودمنصف وجود دارند که از دو نقطه‌ی A و B به فاصله‌ی
(۱) ۸ سانتی‌متر هستند؟
(۲) ۴ سانتی‌متر هستند؟
(۳) ۳ سانتی‌متر هستند؟
- ۳- دو خط متقاطع d و d' و دایره‌ی C مفروض‌اند. روی دایره‌ی C چند نقطه وجود دارد که از خط‌های d و d' به یک فاصله هستند؟
- ۴- زاویه‌ای به رأس O و نقطه‌ی A درون آن مفروض است. از A خطی رسم کنید که با ضلع‌های زاویه‌ی O زاویه‌هایی برابر تشکیل دهد.
- ۵- دو نقطه‌ی A و B و خط d در یک صفحه واقع هستند. نقطه‌ای روی خط d بیابید که از دو نقطه‌ی A و B به یک فاصله باشد. مسئله چند جواب دارد؟
- ۶- خط d در صفحه‌ی P مفروض است. خط d' واقع در همان صفحه را طوری موازی خط d رسم کنید که فاصله‌ی آن‌ها از هم ۳ سانتی‌متر باشد.
- ۷- مطابق شکل، دو خط d و d' مفروض‌اند. همه‌ی نقطه‌هایی را به‌دست آورید که از d به فاصله‌ی ۳ و از d' به فاصله‌ی ۴ هستند.
- 
- ۸- دو خط d و d' مطابق شکل معلوم‌اند. نقطه‌ای را به‌دست آورید که از هر دو خط به فاصله‌ی ۲ باشد.
- 
- ۹- در شکل روبه‌رو d و d' قسمتی از دو ضلع یک زاویه هستند که رأس آن معلوم نیست. نیمساز این زاویه را رسم کنید.
- 
- ۱۰- مثلث ABC را با معلومات $\hat{A}=30^\circ$ و ارتفاع‌های $BH=3$ و $CH'=4$ رسم کنید.
- ۱۱- به کمک خط‌کش و پرگار، زاویه‌ای 15° رسم کنید.
- ۱۲- مثلثی قائم‌الزاویه را با داشتن دو ضلع قائمه‌اش رسم کنید.
- ۱۳- مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC را با معلوم بودن طول وتر $BC=10$ و طول یک ضلع زاویه‌ی قائمه‌ی $AB=5$ رسم کنید.
- ۱۴- مثلث متساوی‌الساقینی رسم کنید که محیط و ارتفاع وارد بر قاعده‌ی آن معلوم است.
- ۱۵- مثلث ABC را با معلومات $a=4$ ، $\hat{C}=30^\circ$ و میانه‌ی وارد از رأس A برابر با ۳ رسم کنید.
- ۱۶- طول قطر و یکی از ضلع‌های مستطیلی به ترتیب ۱۰ و ۶ هستند. این مستطیل را رسم کنید.

- ۱۷- زاویه‌ی xOy و نقطه‌ی A بیرون آن مفروض است. از A خطی رسم کنید که دو ضلع زاویه را در نقطه‌هایی مانند B و C قطع کند و $AB=BC$.
- ۱۸- نقطه‌ی A درون زاویه‌ای قرار دارد. از A پاره‌خطی محدود به ضلع‌های زاویه رسم کنید که وسطش نقطه‌ی A باشد.
- ۱۹- از متوازی‌الاضلاع طول دو قطر و یک ارتفاع معلوم است. این متوازی‌الاضلاع را رسم کنید.
- ۲۰- سه نقطه‌ی M ، N و P که روی یک خط نیستند، مفروض‌اند. متوازی‌الاضلاعی رسم کنید که این سه نقطه، وسط‌های سه ضلع آن باشند.
- ۲۱- متوازی‌الاضلاعی رسم کنید که طول ضلع‌های آن ۸ و ۵ و طول یک قطر آن ۴ باشد.
- ۲۲- طول ضلع یک لوزی ۴ و طول یکی از قطرهای آن ۶ است. این لوزی را رسم کنید.

فصل اول / درس اول: ترسیم‌های هندسی

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

- ۱- فرض کنید پاره خط AB و خط d بر هم عمود نیستند. روی خط d چند نقطه وجود دارد که از نقطه‌های A و B به یک فاصله‌اند؟
 (۱) ۲ (۲) ۱ (۳) صفر (۴) نامتناهی
- ۲- نقطه‌ی A و خط d در یک صفحه مفروض‌اند. در این صفحه چند نقطه وجود دارد که از A به فاصله‌ی معلوم k و از d به فاصله‌ی معلوم k' هستند؟
 (۱) ۴ نقطه (۲) ۲ نقطه (۳) حداکثر ۴ نقطه (۴) حداکثر ۲ نقطه
- ۳- دو نقطه‌ی A و B در یک صفحه مفروض‌اند. تعداد نقطه‌هایی از این صفحه که از خط d به فاصله‌ی L بوده و از دو نقطه‌ی A و B نیز به یک فاصله باشند، کدام یک نمی‌تواند باشد؟
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) صفر (۴) نامتناهی
- ۴- چند نقطه روی دایره‌ی مفروض C وجود دارند که از دو خط متقاطع D و D' به یک فاصله هستند؟
 (۱) حداکثر ۲ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) حداکثر ۴
- ۵- مرکز دایره‌هایی که بر دو خط متقاطع مماس هستند، چه شکلی درست می‌کنند؟
 (۱) دایره (۲) دو خط عمود بر هم (۳) دو خط موازی (۴) مستطیل
- ۶- چند نقطه روی دایره‌ی مفروض C وجود دارد که از نقطه‌های مفروض A و B به یک فاصله هستند؟
 (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) حداکثر ۲
- ۷- مرکز دایره‌هایی که از دو نقطه‌ی ثابت A و B می‌گذرند، چه شکلی درست می‌کنند؟
 (۱) دایره‌ای به قطر AB (۲) عمودمنصف AB (۳) دو خط موازی AB (۴) هر خط گذرنده از وسط AB
- ۸- سه نقطه‌ی A ، B و C روی دایره‌ای قرار دارند. کدام گزینه مرکز دایره را مشخص می‌کند؟
 (۱) نقطه‌ی برخورد عمودمنصف‌های AB و BC (۲) نقطه‌ی برخورد نیمسازهای زاویه‌های ACB و CAB
 (۳) نقطه‌ی برخورد عمودمنصف AB و نیمساز زاویه‌ی ACB (۴) رأس D در متوازی‌الاضلاع $ABCD$
 پاره‌خط AB به طول ۱۰ مفروض است. به ۳ تست بعدی پاسخ دهید:
- ۹- چند نقطه در صفحه وجود دارند که از A به فاصله‌ی ۷ و از B به فاصله‌ی ۲ هستند؟
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) نامتناهی (۴) صفر
- ۱۰- چند نقطه در صفحه وجود دارند که از A به فاصله‌ی ۳ و از B به فاصله‌ی ۷ هستند؟
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) نامتناهی (۴) صفر
- ۱۱- چند نقطه در صفحه وجود دارند که از A به فاصله‌ی ۵ و از B به فاصله‌ی ۶ هستند؟
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) بی‌شمار (۴) صفر
- ۱۲- فاصله‌ی دو خط موازی d و d' از یک‌دیگر ۵ است. مجموعه‌ی نقطه‌هایی از صفحه که مجموع فاصله‌های آن‌ها از این دو خط برابر ۵ است، کدام است؟
 (۱) دو خط موازی (۲) تهی (۳) ناحیه‌ی بین دو خط (۴) یک خط
- ۱۳- در تست قبل مجموعه‌ی نقطه‌هایی که مجموع فاصله‌های آن‌ها از دو خط برابر ۷ است، کدام است؟
 (۱) تهی (۲) دو خط موازی (۳) یک خط (۴) ناحیه‌ی بیرون دو خط
- ۱۴- با شرط‌های تست ۱۲، مجموعه‌ی نقطه‌هایی از صفحه که مجموع فاصله‌های آن‌ها از دو خط d و d' برابر ۳ است، کدام است؟
 (۱) تهی (۲) یک خط موازی d و d' (۳) دو خط (۴) محدوده‌ی خارج این دو خط

- ۱۵- در تست ۱۲، مجموعه‌ی نقطه‌هایی که تفاضل فاصله‌ی آن‌ها از این دو خط برابر ۵ است، کدام است؟
 (۱) تهی (۲) یک خط (۳) دو خط (۴) فضای خارج دو خط
- ۱۶- در تست ۱۲، مجموعه‌ی نقطه‌هایی که تفاضل فاصله‌ی آن‌ها از d و d' برابر ۳ است، کدام است؟
 (۱) تهی (۲) دو خط موازی (۳) محدوده‌ی بین دو خط (۴) یک خط
- ۱۷- چندتا از زاویه‌های ۶۰° ، ۴۵° ، ۳۰° ، ۱۵° و ۷۵° به کمک خط‌کش و پرگار قابل رسم‌اند؟
 (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵
- ۱۸- با معلوم بودن زاویه‌ی ۴۰° و داشتن خط‌کش و پرگار، کدام‌یک از زاویه‌های زیر قابل رسم نیست؟
 (۱) ۷۲° (۲) $۱۷/۵^\circ$ (۳) $۲۲/۵^\circ$ (۴) ۶۵°
- ۱۹- با معلومات $AB=۸$ ، $\hat{B}=۴۵^\circ$ و $AC=۸$ ، چند مثلث مانند ABC مشخص می‌شود؟
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) هیچ
- ۲۰- با معلومات $h_a=۱$ ، $c=۲$ و $b=۳$ (دو ضلع و ارتفاع وارد بر ضلع سوم) چند مثلث متمایز می‌توان رسم کرد؟
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) نامتناهی (۴) صفر
- ۲۱- تنها یک مثلث ABC با داده‌های دو ضلع $b=۷$ و $c=۴$ و ارتفاع وارد بر ضلع سوم h_a قابل رسم است. اندازه‌ی h_a برابر کدام است؟
 (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۷ (۴) ۸
- ۲۲- چند مثلث غیر همبند مانند ABC داریم که $\hat{A}=۳۰^\circ$ ، $h_b=۳$ و $h_c=۵$ ؟
 (۱) نامتناهی (۲) صفر (۳) ۱ (۴) ۲
- ۲۳- مثلث ABC مفروض است. اگر $AB=۳$ ، $AC=۴$ و $BC=۵$ ، چند دایره وجود دارد که مرکز آن‌ها روی ارتفاع نظیر ضلع BC است و از دو نقطه‌ی B و C می‌گذرند؟
 (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) نامتناهی
- ۲۴- نقطه‌های A و B در صفحه ثابت هستند و نقطه‌ی C طوری در صفحه تغییر می‌کند که $\hat{ABC} = 2\hat{BAC}$. محل برخورد نیمساز زاویه‌ی ABC با پاره‌خط AC وقتی نقطه‌ی C تغییر می‌کند چه شکلی درست می‌کند؟
 (۱) یک نقطه (۲) یک دایره (۳) خطی موازی با AB (۴) خطی عمود بر AB
- ۲۵- پاره‌خط AB به طول ۱۰ مفروض است. دهانه‌ی پرگار را یک بار به اندازه‌ی a و بار دیگر به اندازه‌ی b باز می‌کنیم و از نقطه‌ی A دو کمان می‌زنیم. سپس با همان اندازه‌ها، کمان‌هایی از نقطه‌ی B می‌زنیم و مانند شکل، دو نقطه‌ی برخورد را C و D می‌نامیم. با کدام شرط $ACBD$ می‌تواند متوازی‌الاضلاع باشد؟
 (۱) $b=۱۸$ و $a=۵$
 (۲) $a+b=۹$
 (۳) $b=۷$ و $a=۶$
 (۴) همواره متوازی‌الاضلاع است.
- ۲۶- لوزی با طول ضلع ۵ و طول قطر $۴m+۲$ قابل رسم است. چند مقدار صحیح برای m وجود دارد؟
 (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

