فصل اول: پدیده‌های تصادفی و احتمال

درسنامه

پدیده‌ی تصادفی

به آزمایشی می‌گوییم که نتیجه‌ی آن از قبل مشخص نباشد. توجه کنید که در پدیده‌ی تصادفی همه‌ی حالت‌های ممکن در به وقوع پیوستن آن، بر ما مشخص است.

مثال: پرتاب یک تاس پدیده‌ای تصادفی است زیرا قبل از پرتاب به طور قطعی نمی‌توانیم بگوییم کدام عدد ظاهر می‌شود.

مثال: اگر روی شش وجه یک تاس عدد ۶ حک شده باشد و تاس را پرتاب کنیم، این پدیده، تصادفی نمی‌باشد زیرا قبل از انجام آن نتیجه مشخص است.

فضای نمونه‌ای: به مجموعه‌ای که شامل همه‌ی حالت‌های ممکن در به وقوع پیوستن یک پدیده‌ی تصادفی است، فضای نمونه‌ای می‌گوییم و آن را با S نمایش می‌دهیم. به هر یک از اعضای فضای نمونه‌ای، یک «برآمد» می‌گوییم. اگر اعضای S قابل شمارش باشند، آن را یک فضای نمونه‌ای گسسته می‌نامیم.

مثال: فضای نمونه‌ای پرتاب یک تاس به صورت $S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ است.

مثال: فضای نمونه‌ای پرتاب دو سکه‌ی متمایز به صورت $S=\{$ (رو، پشت) , (پشت، رو) , (رو، رو) , (پشت، پشت) $\}$ است.

تذکر تعداد اعضای فضای نمونه‌ای را با $n(S)$ نمایش می‌دهیم. در مثال قبل می‌توان نوشت $n(S)=۴$.

مثال: در کیسه‌ای ۳ مهره‌ی قرمز و ۴ مهره‌ای آبی است. پدیده‌ای تصادفی به صورت «انتخاب دو مهره از کیسه» مطرح می‌شود. تعداد اعضای فضای نمونه‌ای این آزمایش برابر است با تعداد کل حالت‌هایی که می‌توان از بین ۷ مهره، ۲ مهره را انتخاب کرد. پس $n(S)=\binom{۷}{۲}=۲۱$.

تست ۱: اگر پدیده‌ی تصادفی انتخاب یکی از جایگشت‌های ۵ شیء متمایز باشد، تعداد اعضای فضای نمونه‌ای کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۱۲۰ ۳) $۵^۵$ ۴) ۲۵

پاسخ: می‌دانیم تعداد کل جایگشت‌های ۵ شیء متمایز برابر $۵!=۱۲۰$ است. لذا تعداد کل حالت‌هایی که می‌توان یکی از این جایگشت‌ها را انتخاب کرد برابر است با:

$$n(S)=\binom{۱۲۰}{۱}=۱۲۰$$

بنابراین گزینه‌ی (۲) درست است.

پیشامد تصادفی: به هر زیرمجموعه‌ی یک فضای نمونه‌ای، یک پیشامد تصادفی می‌گوییم.

مثال: فرض کنید تاسی را پرتاب می‌کنیم، در این صورت می‌دانیم فضای نمونه‌ای آن به صورت $S=\{۱,...,۶\}$ است.

چند تا از پیشامدهای ممکن برای این فضای نمونه‌ای را به صورت زیر می‌نویسیم:

$A=\{۱,۲\}$, $B=\{۶\}$, $C=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$

مثال: فرض کنید دو تاس را پرتاب کرده‌ایم. اگر پیشامد A را «حالت‌هایی که مجموع اعداد دو تاس عدد ۹ است» در نظر بگیریم، آن‌گاه این پیشامد به صورت روبه‌رو می‌باشد:

$A=\{(۳,۶),(۶,۳),(۴,۵),(۵,۴)\}$

تذکر تعداد اعضای پیشامد A را با نماد $n(A)$ یا $|A|$ نمایش می‌دهیم. در مثال قبل می‌توان نوشت $n(A)=۴$.

تست ۲: تاسـی را ۴ بار پرتاب می‌کنیم. اگر پیشـامد A را «حالت‌هایی که ۳ بار عدد ۵ و یک بار عدد ۴ ظاهر شـود» در نظر بگیریم، $n(A)$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۸

پاسخ: اعضای پیشامد A را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$A=\{(۵,۵,۵,۴),(۵,۵,۴,۵),(۵,۴,۵,۵),(۴,۵,۵,۵)\}$$

پس می‌توان گفت $n(A)=۴$.

بنابراین گزینه‌ی (۲) درست است.

نکته: فرض کنید تعداد اعضای فضای نمونه‌ای یک پدیده‌ی تصادفی برابر $n(S)$ است. می‌دانیم همه‌ی پیشامدهایی که برای این پدیده می‌توان نوشت، همان زیرمجموعه‌های S است. پس تعداد کل پیشامدهایی که در این فضای نمونه‌ای می‌توان نوشت برابر $۲^{n(S)}$ است.

مثال: می‌دانیم در آزمایش پرتاب سکه فضای نمونه‌ای به صورت $S=\{\text{رو , پشت}\}$ است. پس تعداد کل پیشامدهایی که می‌توان در این فضای نمونه‌ای نوشت برابر $۲^{n(S)}=۲^۲=۴$ است. این پیشامدها را در زیر نوشته‌ایم.

$A_۱=\{\text{پشت}\}$, $A_۲=\{\text{رو}\}$, $A_۳=\{\text{رو , پشت}\}$, $A_۴=\{\,\}$

تذکر به پیشامد $A_۳=S$، «پیشامد حتمی» و به پیشامد $A_۴=\{\,\}$، «پیشامد نشدنی یا غیرممکن» می‌گوییم.

مثال: می‌دانیم اگر تاسی را دو بار پرتاب کنیم تعداد اعضای فضای نمونه‌ای به صورت $n(S)=۶^۲=۳۶$ است. پس تعداد کل پیشامدهایی که می‌توان برای این آزمایش نوشت برابر $۲^{n(S)}=۲^{۳۶}$ است.

تست ۳: تاسی را ۳ بار پرتاب می‌کنیم. تعداد پیشامدهای ناتهی که می‌توان برای این پدیده‌ی تصادفی نوشت، کدام است؟

۱) ۲۱۵ ۲) $۲^{۲۱۵}$ ۳) $۲^{۲۱۶}-۱$ ۴) $۲^{۲۱۵}-۱$

پاسخ: می‌دانیم اگر تاسـی را ۳ بار پرتاب کنیم، تعداد اعضای فضای نمونه‌ای برابر $n(S)=۶^۳=۲۱۶$ اسـت. پس می‌توان گفت تعداد کل پیشـامدهایی که می‌توان برای این پدیده‌ی تصادفی نوشـت برابر $۲^{۲۱۶}$ اسـت که یکی از آن‌ها پیشـامد تهی است. پس تعداد کل پیشامدهای ناتهی برابر $۲^{۲۱۶}-۱$ است.

بنابراین گزینه‌ی (۳) درست است.

تذکر اگر تعداد اعضای فضای نمونه‌ای برابر $n(S)$ باشد، تعداد پیشامدهای k عضوی برابر $\binom{n(S)}{k}$ است.

مثال: در آزمایش پرتاب تاس، می‌دانیم $n(S)=۶$. پس می‌توان گفت در این آزمایش، تعداد پیشامدهای ۲ عضوی برابر $\binom{۶}{۲}=۱۵$ است.

مثال: در آزمایش پرتاب دو تاس متمایز، می‌دانیم $n(S)=۳۶$. پس می‌توان گفت در این آزمایش، تعداد پیشامدهای ۵ عضوی برابر $\binom{۳۶}{۵}=۳۷۶۹۹۲$ است.

تست ۴: در آزمایش پرتاب یک تاس، تعداد پیشامدهای سه عضوی شامل ۲ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۰

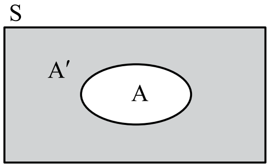
پاسخ: می‌دانیم فضای نمونه‌ای آزمایش پرتاب یک تاس به صورت $S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ است. اکنون پیشامدهای سه عضوی که صورت $\{۲,?,?\}$ هستند مورد نظر است. پس می‌توان گفت به $\binom{۵}{۲}=۱۰$ حالت می‌توان دو عضو باقیمانده‌ی این پیشامد را از فضای نمونه‌ای انتخاب کرد.

بنابراین گزینه‌ی (۴) درست است.

اعمال روی پیشامدها

متمم یک پیشامد

به پیشامد «رخ ندادن A» پیشامد متمم A می‌گوییم و آن را با A' نمایش می‌دهیم. بنابراین پیشامد A' زمانی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ ندهد.



تذکر با توجه به تعریف متمم یک پیشامد می‌توان نوشت: $A\cup A'=S$, $A\cap A'=\varnothing$.

مثال: در آزمایش پرتاب تاس می‌دانیم $S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$. بنابراین با فرض $A=\{۱,۲\}$ می‌توان گفت $A'=\{۳,۴,۵,۶\}$.

تذکر در بعضی از مسائل، شمارش تعداد اعضای مجموعه‌ی A دشوار است. در این‌گونه مسائل، می‌توانیم تعداد اعضای A' را بشماریم و سپس با کم کردن این تعداد از تعداد اعضای فضای نمونه‌ای، به تعداد اعضای A پی ببریم. پس:

$$n(A)=n(S)-n(A')$$

مثال: از بین ۱۰ نفر، ۳ نفر را به تصادف انتخاب می‌کنیم. پس $n(S)=\binom{۱۰}{۳}=۱۲۰$. اگر پیشامد A را «حالت‌هایی که حداقل یکی از نفرات a و b در بین این ۳ نفر هستند» در نظر بگیریم، محاسبه‌ی تعداد اعضای A کمی طولانی است.

اما می‌توان گفت که پیشامد A' «حالت‌هایی است که هیچ‌کدام از ۳ نفر انتخاب شده، نفرات a و b نیستند». پس می‌توان نوشت:

$$n(A')=\binom{۸}{۳}=۵۶$$

که در نتیجه خواهیم داشت: $n(A)=n(S)-n(A')=\binom{۱۰}{۳}-\binom{۸}{۳}=۱۲۰-۵۶=۶۴$

پیشامدهای ناسازگار

دو پیشامد A و B را ناسازگار می‌گوییم هرگاه اشتراک آن‌ها تهی باشد. درواقع اگر A و B دو پیشامد ناسازگار باشند، آن‌گاه A و B با هم رُخ نمی‌دهند.

تذکر اگر دو پیشامد A و B ناسازگار باشند می‌توان نوشت:

A و B ناسازگار $\Leftrightarrow$ $A\cap B=\varnothing$

تذکر هر پیشامد و متمم آن ناسازگارند. هر پیشامد و پیشامد نشدنی ناسازگارند.

مثال: در آزمایش پرتاب یک تاس، دو پیشامد $A=\{۱,۲\}$ و $B=\{۴,۵,۶\}$ ناسازگارند.

تست ۵: در آزمایش پرتاب یک تاس، تعداد پیشامدهای ناسازگار با پیشامد $A=\{۱,۲,۳\}$ کدام است؟

۱) ۶ **۲)** ۷ **۳)** ۸ **۴)** ۹

پاسخ: می‌دانیم در آزمایش پرتاب یک تاس، فضای نمونه‌ای به صورت $S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ اسـت. اکنون پیشـامدهایی مورد نظرمان است که با پیشامد A ناسازگار باشند. پس در این پیشامدها، هیچ‌کدام از اعداد ۱، ۲ و ۳ حضور ندارند (یعنی این اعداد یک حالت دارند)، ولی هر کدام از اعداد ۴، ۵ و ۶ می‌توانند عضو این پیشامدها باشند یا نباشند (یعنی هر کدام ۲ حالت دارند). پس تعداد کل پیشامدهای ناسازگار با A برابر است با: $۱\times۱\times۱\times۲\times۲\times۲=۸$.

بنابراین گزینه‌ی (۳) درست است.

نکته: اگر پیشامدهای $A_۱$، $A_۲$، $A_۳$، ... و A_n دوبه‌دو ناسازگار باشند، می‌توان نوشت:

$$P(A_۱\cup A_۲\cup A_۳\cup\ldots\cup A_n)=P(A_۱)+P(A_۲)+P(A_۳)+\cdots+P(A_n)$$

مثال: اگر پیشامدهای A، B و C دوبه‌دو ناسازگار باشند، $P(A)=\frac{۱}{۵}$، $P(B)=\frac{۱}{۱۰}$ و $P(C)=\frac{۱}{۲}$، می‌توان نوشت:

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)=\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۱۰}+\frac{۱}{۲۰}=\frac{۷}{۲۰}$$

تست ۶: اگر پیشامدهای A، B و C دوبه‌دو ناسازگار باشند و $P(A\cup B\cup C)=۲P(A)=۳P(B)=\frac{۱}{۲}$، مقدار $P(C)$ کدام است؟

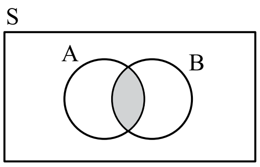
۱) $\frac{۱}{۶}$ **۲)** $\frac{۳}{۸}$ **۳)** $\frac{۱}{۱۲}$ **۴)** $\frac{۵}{۱۲}$

پاسخ: از صورت سـؤال داریم $P(A\cup B\cup C)=\frac{۱}{۲}$، $P(A)=\frac{۱}{۴}$ و $P(B)=\frac{۱}{۶}$. اکنون با توجه به این که پیشـامدهای A، B و C دوبه‌دو ناسازگارند، می‌توان نوشت:

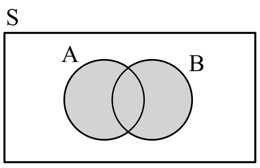
$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)\Rightarrow\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۶}+P(C)\Rightarrow P(C)=\frac{۱}{۱۲}$$

بنابراین گزینه‌ی (۳) درست است.

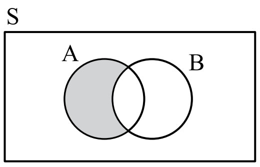
اشتراک دو پیشامد: پیشامد $A\cap B$ به معنای آن است که هر دو پیشامد A و B رخ دهند.



اجتماع دو پیشامد: پیشامد $A\cup B$ به معنای آن است که حداقل یکی از پیشامدهای A و B رخ دهند.

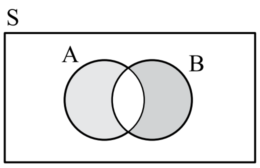


تفاضل دو پیشـامد: پیشـامد $A-B$ به معنای آن است که پیشامد A رخ دهد و پیشامد B رخ ندهد. توجه کنید که $A-B=A\cap B'$.



تفاضل متقارن دو پیشـامد: پیشـامد $A\Delta B$ به معنای آن اسـت که فقط یکی از دو پیشامد A و B رخ دهد. بنابراین

$$A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)=(A\cup B)-(A\cap B)$$



احتمال رخداد یک پیشامد تصادفی

اگر S یک فضای نمونه‌ای گسسته و A یک پیشامد تصادفی در S باشد، احتمال رخ دادن پیشامد A را با $P(A)$ نمایش می‌دهیم و داریم:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\text{تعداد حالت های مطلوب}}{\text{تعداد حالت های ممکن}}$$

تذکر از رابطه‌ی بالا می‌توان سه نتیجه‌ی زیر را بیان کرد:

۱) $۰ \le P(A) \le ۱$ ۲) $P(\varnothing)=\frac{n(\varnothing)}{n(S)}=۰$ ۳) $P(S)=\frac{n(S)}{n(S)}=۱$

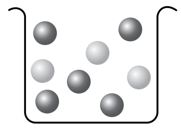
مثال: در آزمایش پرتاب تاس می‌دانیم $n(S)=۶$. اگر پیشامد A را «حالت‌هایی که عدد روشده مضرب ۳ باشد» در نظر بگیریم، می‌توان نوشت:

$$A=\{۳,۶\} \qquad \Rightarrow \qquad P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}$$

مثال: از مجموعه‌ی $A=\{۱,۲,۳,...,۲۰\}$، عددی به تصادف انتخاب می‌کنیم. واضح است که $n(S)=\binom{۲۰}{۱}=۲۰$. اکنون اگر پیشامد A را «حالت‌هایی که عدد روشده اول باشد» در نظر بگیریم، می‌توان نوشت:

$$A=\{۲,۳,۵,۷,۱۱,۱۳,۱۷,۱۹\}\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۸}{۲۰}=\frac{۲}{۵}$$

مسأله ۱ **از جعبه‌ی مقابل، به تصادف ۲ مهره برمی‌داریم. احتمال آن که هر دو مهره هم‌رنگ باشند چقدر است؟**



۵ مهره آبی ۳ مهره قرمز

راه‌حل: تعداد مهره‌های جعبه ۸ است. اکنون تعداد کل حالت‌هایی را که می‌توان از این ۸ مهره، ۲ مهره برداشت، محاسبه می‌کنیم:

$$n(S)=\binom{۸}{۲}=۲۸$$

اگر پیشامد A را «حالت‌هایی که هر دو مهره هم‌رنگ (هر دو قرمز یا هر دو آبی) باشند» در نظر بگیریم، می‌توان نوشت:

$$n(A)=\binom{۳}{۲}+\binom{۵}{۲}=۳+۱۰=۱۳$$

پس می‌توان نتیجه گرفت:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۳}{۲۸}$$

مسأله ۲ **همه‌ی جایگشت‌های حروف کلمه‌ی** computer **را می‌نویسیم و یکی از آن‌ها را به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال آن که در این جایگشت کلمه‌ی «put» باشد چقدر است؟**

راه‌حل: ابتدا توجه کنید که تعداد جایگشت‌ها حروف کلمه‌ی computer برابر است با: $n(S)=۸!$

اکنون اگر پیشامد A را «جایگشت‌هایی از حروف کلمه‌ی computer که شامل put است» در نظر بگیریم، برای شمارش تعداد اعضای A، کلمه‌ی «put» را به عنوان یک عضو و بقیه‌ی حروف را به صورت مجزا به شکل ۵ عضو در نظر می‌گیریم که در این صورت تعداد جایگشت‌های این ۶ عضو برابر است با $n(A)=۶!$. پس می‌توان نوشت: $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۶!}{۸!}=\frac{۱}{۵۶}$

فصل اول: پدیده‌های تصادفی و احتمال

پرسش‌های چهار گزینه‌ای

پدیده‌ی تصادفی، فضای نمونه‌ای و پیشامد تصادفی

۱- چند تا از پدیده‌های زیر تصادفی است؟

الف) انداختن یک تاس که روی هر ۶ وجه آن عدد ۱ حک شده است

ب) انداختن دو تاس سالم با هم

پ) پرتاب کردن سه سکه‌ی متمایز

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۲- کدام‌یک پدیده‌ی تصادفی نمی‌باشد؟

۱) در یک خانواده‌ی ۳ فرزندی، فرزند دوم پسر باشد.

۲) در پرتاب دو تاس، جمع اعداد ظاهرشده عددی زوج باشد.

۳) در یک خانواده‌ی ۲ فرزندی، هر ۲ فرزند دختر باشند.

۴) در پرتاب دو تاس، جمع اعداد ظاهرشده عددی طبیعی باشد.

۳- فضای نمونه‌ای آزمایش «پرتاب دو سکه» کدام است؟

۱) {ر , پ}

۲) {(ر , ر) , (پ , پ) , (ر , پ)}

۳) {(ر , ر) , (پ , ر) , (ر , پ) , (پ , پ)}

۴) {(ر , پ) , (پ , ر)}

۴- فرض کنید $S=\{-۱,۲/۵,۴,۶\}$ کدام مجموعه‌ی زیر یک پیشامد از این فضای نمونه‌ای است؟

۱) $\{-۱,۵\}$ ۲) $\{۱/۵,۶\}$ ۳) $\{۲/۵,۴\}$ ۴) $\{۳,۶\}$

۵- اگر $S=\{۱,۲,۳,۴\}$ فضای نمونه‌ای و $A=\{۱,۲,۳\}$ و $B=\{۱,۲\}$ دو پیشامد از S باشند، پیشامد $(A\cap B')'\cup(A\cap B')$ کدام است؟

۱) $\{۱,۲,۳,۴\}$ ۲) $\{۱,۲,۴\}$ ۳) $\{۳,۴\}$ ۴) $\{۳\}$

۶- تاسی را پرتاب کرده‌ایم و عدد ۲ ظاهر شده است. چند تا از پیشامدهای زیر رخ داده است؟

الف) $A=\{۱\}$ **ب)** $B=\{۱,۲\}$ **پ)** $C=\{۲,۳,۴\}$

۱) صفر ۲) یک ۳) دو ۴) سه

۷- دو تاس را با هم می‌اندازیم. پیشامد B را به صورت «مجموع اعداد دو تاس ۷ باشد» تعریف می‌کنیم. این پیشامد چند عضو دارد؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۴

۸- خانواده‌ای دارای ۳ فرزند است. اگر پیشامد A هم‌جنس بودن دو فرزند اول باشد، این پیشامد چند عضو دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۹- دو تاس را پرتاب می‌کنیم. کدام یک از گزینه‌های زیر یک پیشامد این پدیده‌ی تصادفی است؟

۱) $\{۱,۲\}$ ۲) $(۱,۲)$ ۳) $\{(۱,۲)\}$ ۴) $\{۶\}$

۱۰- در پدیده‌ی تصادفی «پرتاب یک تاس» کدام یک از پیشامدهای زیر «پیشامد نشدنی» است؟

۱) $\{۱,۲\}$ ۲) $\{۶\}$ ۳) $\{\ \}$ ۴) $\{۱,۲,۳,۴\}$

۱۱- در پدیده‌ی تصادفی «پرتاب دو سکه» کدام‌یک از پیشامدهای زیر «پیشامد حتمی» است؟

۱) {(پ , پ) , (ر , ر)}

۲) { }

۳) {(ر , ر) , (پ , پ) , (ر , پ) , (پ , ر)}

۴) {(ر , پ) , (پ , ر)}

۱۲- دو عدد با جایگذاری از مجموعه‌ی $\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ انتخاب می‌کنیم. کدام‌یک از پیشامدهای زیر «پیشامد حتمی» است؟

۱) حاصل‌ضرب اعداد انتخاب شده عددی اول است.

۲) قدرمطلق تفاضل اعداد انتخاب شده بیش‌تر از ۷ است.

۳) تفاضل اعداد انتخاب شده کم‌تر از ۶ است.

۴) مجموع اعداد انتخاب شده ۲ است.

۱۳- فضای نمونه‌ای آزمایش «انتخاب تصادفی دو حرف از بین حروف a ، b ، c و d بدون در نظر گرفتن ترتیب» دارای چند عضو است؟

۱) ۱۶ ۲) ۱۲ ۳) ۶ ۴) ۸

۱۴- فضای نمونه‌ای آزمایش «انتخاب تصادفی ۲ رقم (بدون تکرار) از بین ارقام ۱ ، ۲ ، ۴ و ۶ و ساختن عدد ۲ رقمی» دارای چند عضو است؟

۱) ۱۶ ۲) ۱۲ ۳) ۶ ۴) ۱۰

۱۵- سکه‌ای را پرتاب می‌کنیم. اگر رو بیاید، همین سکه را سه بار دیگر پرتاب می‌کنیم و اگر پشت بیاید، تاسی را ۲ بار پرتاب می‌کنیم. تعداد اعضای فضای نمونه‌ای کدام است؟

۱) ۴۴ ۲) ۲۸۸ ۳) $۸^{۳۶}$ ۴) $۳۶^{۸}$

۱۶- سکه‌ای را پرتاب می‌کنیم. اگر پشت بیاید، دو سکه‌ی دیگر را پرتاب می‌کنیم و اگر رو بیاید، یک تاس پرتاب می‌کنیم. کدام یک از گزینه‌های زیر یک برآمد از این آزمایش تصادفی است؟

۱) (۱ , پ , پ) ۲) (ر , ۲ , پ) ۳) (۶ , ر) ۴) (۲ , ۱ , ر)

۱۷- در کیسه‌ای، سه مهره‌ی قرمز، دو مهره‌ی آبی و پنج مهره‌ی سبز قرار دارد. از این کیسه سه مهره به صورت متوالی و بدون جایگذاری برمی‌داریم. تعداد اعضای فضای نمونه‌ای کدام است؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۷۲۰ ۳) ۱۰۰۰ ۴) $۳^{۱۰}$

۱۸- در تست قبل، اگر مهره‌ها را با جایگذاری برداریم، تعداد اعضای فضای نمونه‌ای کدام است؟

۱) ۱۰۰۰ ۲) ۷۲۰ ۳) ۱۲۰ ۴) $۳^{۱۰}$

۱۹- در کیسه‌ی A، سه مهره‌ی قرمز و پنج مهره‌ی آبی و در کیسه‌ی B، پنج مهره‌ی قرمز و چهار مهره‌ی آبی قرار دارد. از کیسه‌ی A، ۲ مهره و از کیسه‌ی B ، ۳ مهره برمی‌داریم. تعداد اعضای فضای نمونه‌ای کدام است؟

۱) $\binom{۱۷}{۵}$ ۲) ۶۴×۷۲۹ ۳) $\binom{۸}{۲}+\binom{۹}{۳}$ ۴) $\binom{۸}{۲}\binom{۹}{۳}$

۲۰- در پرتاب یک سکه و یک تاس، تعداد پیشامدها کدام است؟

۱) $۲^{۱۲}$ ۲) $۲^{۲۴}$ ۳) $۲^{۱۰}$ ۴) $۲^{۱۸}$

۲۱- سکه‌ای را ۴ بار پرتاب می‌کنیم. تعداد کل پیشامدهایی که می‌توان در این آزمایش نوشت کدام است؟

۱) $۲^{۴}$ ۲) $۲^{۸}$ ۳) $۲^{۱۶}$ ۴) $۲^{۳۲}$

۲۲- اگر برای فضای نمونه‌ای S بتوان ۶۴ پیشامد تعریف کرد، $n(S)$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۰

۲۳- خانواده‌ای دارای ۴ فرزند است. پیشامد C که در آن «تعداد فرزندان دختر از تعداد فرزندان پسر بیش‌تر باشد»، دارای چند عضو است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۵

۲۴- در یک خانواده‌ی ۶ فرزندی، کدام پیشامد اعضای بیش‌تری دارد؟

۱) هر ۶ فرزند دختر یا هر ۶ فرزند پسر باشند.
۲) سه فرزند دختر باشند.
۳) لااقل ۵ فرزند دختر باشند.
۴) تعداد فرزندان پسر زوج باشد.

۲۵- در یک آزمایش، $S=\{۱,۲,...,۱۰\}$. اگر دو پیشامد $A=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ و $B=\{۲,۴,۶,۸\}$ را در نظر بگیریم، پیشامد $(A-B)\cup(B-A)$ چند عضوی است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۲۶- خانواده‌ای دارای ۳ فرزند است. A پیشامد آن است که لااقل ۲ فرزند دختر باشند. B پیشامد آن است که حداکثر ۲ فرزند پسر باشد. $A-B$ یک پیشامد چند عضوی است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۲۷- اگر در یک آزمایش، فضای نمونه‌ای $S=\{۱,۲,...,۱۰\}$ باشد، تعداد پیشامدهایی که شامل عضو ۱ هستند اما ۲ را ندارند، چندتاست؟

۱) $۲^{۶}$ ۲) $۲^{۷}$ ۳) $۲^{۸}$ ۴) $۲^{۹}$

۲۸- اگر در یک آزمایش، فضای نمونه‌ای $S=\{۱,۲,۳,...,۱۰\}$ باشد، تعداد پیشامدهایی که حداقل ۲ عضو دارند کدام است؟

۱) ۱۰۲۳ ۲) ۱۰۱۳ ۳) ۱۰۱۲ ۴) ۱۰۱۱

۲۹- اگر در یک آزمایش، فضای نمونه‌ای $S=\{۱,۲,۳,...,۱۰\}$ باشد، تعداد پیشامدهای با تعداد اعضای فرد کدام است؟

۱) $۲^{۹}$ ۲) $۲^{۱۰}-۱$ ۳) $۲^{۱۰}-۲۰۰$ ۴) $۲^{۹}-۱$

احتمال رخداد یک پیشامد تصادفی

۳۰- از مجموعه‌ی $S=\{۱۱,۱۲,...,۲۰\}$ یک عدد به طور تصادفی انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که این عدد یک عدد اول باشد، چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۱۰}$ ۳) $\frac{۴}{۹}$ ۴) $\frac{۲}{۵}$

۳۱- اعداد مجموعه‌ی $S=\{۲۱,۲۲,...,۴۱\}$ را روی کارت‌های یکسان می‌نویسیم و به طور تصادفی یک کارت از بین آن‌ها بیرون می‌کشیم. با کدام احتمال عدد نوشته‌شده روی کارت مضرب ۳ است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۲}{۵}$ ۴) $\frac{۲}{۷}$

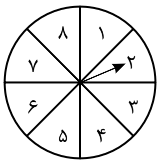
۳۲- خانواده‌ای دارای ۲ فرزند است. احتمال آن‌که هر دو فرزند این خانواده پسر باشند، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۸}$

۳۳- خانواده‌ای دارای ۳ فرزند است. احتمال آن‌که جنسیت هر سه فرزند این خانواده یکسان باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۸}$ ۳) $\frac{۳}{۸}$ ۴) $\frac{۵}{۸}$

۳۴- عقربه‌ای مطابق شکل مقابل و به تصادف پس از به حرکت درآمدن روی یکی از ۸ ناحیه‌ی شکل می‌ایستد و عددی را نشان می‌دهد. احتمال آن‌که عقربه عددی اول را نشان دهد، کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۸}$ ۳) $\frac{۳}{۸}$ ۴) $\frac{۵}{۸}$

۳۵- جعبه‌ای شامل ۳ مهره‌ی قرمز، ۲ مهره‌ی آبی و ۵ مهره‌ی سبز است. از این جعبه مهره‌ای به تصادف برمی‌داریم. احتمال آن‌که این مهره آبی باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۵}$ ۲) $\frac{۳}{۱۰}$ ۳) $\frac{۲}{۵}$ ۴) $\frac{۳}{۵}$

۳۶- یکی از مقسوم‌علیه‌های طبیعی عدد ۱۲ را به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال آن‌که این عدد فرد باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

۳۷- از مجموعه‌ی $S=\{۱,۲,۳,...,۳۰\}$ عددی به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال آن‌که این عدد مربع کامل باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۵}$ ۲) $\frac{۲}{۵}$ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

۳۸- از مجموعه‌ی $S=\{۱,۲,۳,...,۱۰۰\}$ عددی به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال آن‌که این عدد توانی طبیعی از ۳ باشد، کدام است؟

۱) ۰/۰۴ ۲) ۰/۰۲ ۳) ۰/۰۵ ۴) ۰/۰۶

۳۹- یک تاس و یک سکه را پرتاب می‌کنیم. احتمال آن‌که عدد روشده‌ی تاس، عدد اول و سکه پشت بیاید، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۱۲}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

۴۰- در پرتاب یک تاس، اگر بدانیم عدد زوج ظاهر شده است، با کدام احتمال عدد اول آمده است؟

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

۴۱- در یک خانواده‌ی ۲ فرزندی، یکی از فرزندان دختر است. با کدام احتمال هر ۲ فرزند خانواده دخترند؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۴۲- اگر در پرتاب ۲ تاس، جمع اعداد ظاهرشده برابر ۶ باشد، با کدام احتمال هر ۲ تاس عدد فرد آمده‌اند؟

۱) $\frac{۳}{۵}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۲}{۵}$ ۴) $\frac{۴}{۵}$

۴۳- یک تاس را انداخته‌ایم. برآمد حاصل مضرب ۳ نیست. احتمال آن‌که عدد ظاهرشده ۲ باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۵}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

۴۴- در یک خانواده‌ی ۲ فرزندی، می‌دانیم یکی از فرزندان پسر است. با کدام احتمال، این خانواده فرزند دختر دارد؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

۴۵- اگر $S=\{a,b,x,۲,۳\}$ و $A=\{a,b,x\}$ و $B=\{a,b,۲\}$ دو پیشامد S باشند، $P(A\cup B)$ کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۶}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۴}{۵}$ ۴) صفر

۴۶- عددی به تصادف از فضای نمونه‌ای $S=\{۱,۲,...,۹\}$ انتخاب می‌کنیم. احتمال آن‌که عدد انتخاب‌شده زوج یا مضرب ۳ باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۴}{۹}$ ۴) $\frac{۵}{۹}$

با فرض آن‌که $S=\{۱,۲,۳,...,۲۰\}$ فضای نمونه‌ای یک پدیده‌ی تصادفی باشد، $A=\{۱,۲,۳,۴\}$، $B=\{۲,۳,۴,۵,۶,۷\}$ و $C=\{۱۵,۱۶,۱۷,۱۸,۱۹,۲۰\}$، به تست‌های ۴۷ تا ۴۹ پاسخ دهید.

۴۷- مقدار $P(A\cap B)$ کدام است؟

۱) ۰/۱۵ ۲) ۰/۲ ۳) ۰/۲۵ ۴) ۰/۳

۴۸- مقدار $P(A)\times P(B')$ کدام است؟

۱) ۰/۱۲ ۲) ۰/۱۳ ۳) ۰/۱۴ ۴) ۰/۱۵

۴۹- مقدار $P[C\cup(A\cap B)]$ کدام است؟

۱) ۰/۳۵ ۲) ۰/۴ ۳) ۰/۴۵ ۴) ۰/۵

۵۰- با کدام احتمال، رقم سمت راست پلاک اوّلین اتومبیلی که از بزرگراه خارج می‌شود از ۴ بیش‌تر نیست یا مضرب ۳ می‌باشد؟ (رقم ۰ در پلاک اتومبیل به کار نمی‌رود.)

۱) $\frac{۴}{۹}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۵}{۹}$

۵۱- در یک جمع ۶ نفری، یک نفر به تصادف انتخاب می‌شود. با کدام احتمال متولد خردادماه می‌باشد؟

۱) $\frac{۱}{۱۲}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۱}{۷}$ ۴) $\frac{۱}{۳۶۵}$

۵۲- در یک جمع ۱۰ نفری، یک نفر را به تصادف انتخاب می‌کنیم. به کدام احتمال متولد فصل بهار است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۱۲}$ ۴) $\frac{۱}{۳۶۵}$

۵۳- تمام اعداد دو رقمی را که با ارقام ۱ ، ۲ ، ۴ و ۵ می‌توان ساخت، روی کارت‌های متمایزی می‌نویسیم و در یک کیسه قرار می‌دهیم و سپس یکی از این کارت‌ها را به تصادف خارج می‌کنیم. احتمال آن‌که عدد روی کارت مضرب ۳ باشد، کدام است؟ کتاب درسی

۱) ۰/۵ ۲) ۰/۴ ۳) ۰/۳۵ ۴) ۰/۴۵

۵۴- در تست قبل، احتمال آن‌که عدد روی کارت مضرب ۳ یا مضرب ۴ باشد، کدام است؟ کتاب درسی

۱) $\frac{۷}{۱۶}$ ۲) $\frac{۳}{۸}$ ۳) $\frac{۹}{۱۶}$ ۴) $\frac{۵}{۸}$

۵۵- در دو تست قبل، احتمال آن‌که عدد روی کارت مضرب ۳ باشد و مضرب ۴ نباشد، کدام است؟ کتاب درسی

۱) $\frac{۷}{۱۶}$ ۲) $\frac{۳}{۸}$ ۳) $\frac{۹}{۱۶}$ ۴) $\frac{۵}{۸}$

۵۶- کیسه‌ای شامل ۳ مهره‌ی قرمز و n مهره‌ی آبی است. مهره‌ای به تصادف از این کیسه بیرون می‌آوریم. اگر احتمال آبی بودن این مهره $\frac{۴}{۵}$ باشد، مقدار n کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۸ ۳) ۱۲ ۴) ۶

۵۷- دو تاس را پرتاب می‌کنیم. احتمال آن‌که مجموع اعداد روشده حداقل ۲ باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۳۶}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{۲۷}{۳۶}$

۵۸- دو تاس را پرتاب می‌کنیم. احتمال آن‌که تفاضل اعداد روشده ۶ باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳۶}$ ۲) صفر ۳) $\frac{۱}{۱۸}$ ۴) $\frac{۱}{۱۲}$

۵۹- ۶ نفر که دو نفر آن‌ها برادر یک‌دیگرند، به تصادف در یک ردیف می‌ایستند. احتمال آن‌که دو برادر کنار هم قرار گرفته باشند، کدام است؟ کتاب درسی

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۳}{۵}$

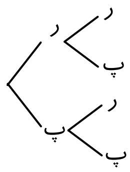
فصل اول: پدیده‌های تصادفی و احتمال

پاسخ‌های تشریحی

۱- گزینه‌ی ۳ همان‌طور که در درســنامه به آن اشــاره شد، پدیده‌ی تصادفی به پدیده‌ای می‌گوییم که نتیجه‌ی آن از قبل مشخص نیست، اما همه‌ی حالت‌های ممکن در به وقوع پیوســتن آن مشــخص اســت. پرتاب تاســی که روی هر ۶ وجه آن عدد ۱ حک شده است یک پدیده‌ی تصادفی نیست زیرا نتیجه‌ی این آزمایش قطعاً عدد ۱ است. انداختن دو تاس سالم و انداختن سه سکه‌ی متمایز پدیده‌هایی تصادفی هستند.

۲- گزینه‌ی ۴ توجه کنید که اگر دو تاس را پرتاب کنیم، قطعاً مجموع اعداد ظاهرشده عددی طبیعی بین ۱ و ۱۳ خواهد بود!!

۳- گزینه‌ی ۳ فضای نمونه‌ای پرتاب دو سکه به کمک «نمودار درختی» به صورت زیر است:



$\Rightarrow S=\{$(ر , ر) , (ر , پ) , (پ , ر) , (پ , پ)$\}$

۴- گزینه‌ی ۳ همان‌طــور که می‌دانیم، به هر زیر مجموعه‌ی یک فضای نمونه‌ای، یک پیشــامد می‌گوییم. در بین گزینه‌ها، فقط مجموعه‌ی $\{۲/۵,۴\}$ یکی از زیر مجموعه‌های S است.

۵- گزینه‌ی ۱ **راه‌حل اول**: با توجه به این‌که $S=\{۱,۲,۳,۴\}$ فضای نمونه‌ای است می‌توان نوشت:

$$B'=\{۳,۴\}\Rightarrow A\cap B'=\{۱,۲,۳\}\cap\{۳,۴\}=\{۳\}\Rightarrow(A\cap B')'=\{۱,۲,۴\}$$

از تساوی‌های بالا می‌توان نتیجه گرفت:

$$(A\cap B')'\cup(A\cap B')=\{۱,۲,۳,۴\}$$

راه‌حل دوم: طبق قوانین مجموعه‌ها، می‌دانیم حاصل $C\cup C'$ برابر مجموعه‌ی مرجع است. پس می‌توان نوشت:

$$(A\cap B')'\cup(A\cap B')=S$$

توجه کنید که در اینجا مجموعه‌ی مرجع همان S است.

۶- گزینه‌ی ۳ می‌دانیم اگر A یک پیشــامد تصادفی و نتیجه‌ی آزمایش عضوی از A باشــد، می‌گوییم پیشامد A رخ داده است. با توجه به این‌که عدد ۲ عضو پیشامدهای $B=\{۱,۲\}$ و $C=\{۲,۳,۴\}$ است، می‌توان گفت با ظاهر شدن عدد ۲، هر دو پیشامد B و C رخ داده است.

۷- گزینه‌ی ۲ اگر دو تاس را پرتاب کنیم، فضای نمونه‌ای آن دارای ۳۶ زوج مرتب است:

$$S=\{(۱,۱),(۱,۲),(۱,۳),...,(۶,۱),(۶,۲),(۶,۳),(۶,۴),(۶,۵),(۶,۶)\}$$

اکنون برای نوشتن اعضای پیشامد B، باید در مجموعه‌ی S زوج مرتب‌هایی را انتخاب کنیم که مجموع آن‌ها برابر ۷ است. پس می‌توان نوشت:

$$B=\{(۱,۶),(۶,۱),(۲,۵),(۵,۲),(۳,۴),(۴,۳)\}$$

بنابراین پیشامد B دارای ۶ عضو است.

۸- گزینه‌ی ۳ فضای نمونه‌ای این آزمایش $۸=۲\times۲\times۲$ عضو دارد و پیشامد A را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$A=\{$(پ , پ , پ) , (پ , پ , د) , (د , د , پ) , (د , د , د)$\}$

بنابراین پیشامد A دارای ۴ عضو است.

۹- گزینه‌ی ۳ همان‌طور که می‌دانیم، هر پیشــامد یک مجموعه اســت. پس گزینه‌ی (۲) نادرســت است. از طرفی، اعضای یک پیشامد از فضای نمونه‌ای هستند و فضای نمونه‌ای پرتاب دو تاس به صورت زیر است:

$$S=\{(۱,۱),(۱,۲),...,(۶,۵),(۶,۶)\}$$

بنابراین گزینه‌های (۱) و (۴) نیز نادرست هستند زیرا اعضای آن‌ها از S نمی‌باشند.

A **۱۰- گزینه‌ی ۳** همان‌طور که می‌دانیم، پیشامد تهی را «پیشامد نشدنی» می‌گوییم.

A **۱۱- گزینه‌ی ۳** همان‌طور که می‌دانیم، به پیشامدی که با فضای نمونه‌ای برابر باشد «پیشامد حتمی» می‌گوییم. فضای نمونه‌ای آزمایش پرتاب دو سکه به صورت $S=\{$(ر , ر) , (پ , پ) , (ر , پ) , (پ , ر)$\}$ است.

B **۱۲- گزینه‌ی ۳** فضای نمونه‌ای این آزمایش دارای ۳۶ زوج مرتب به صورت زیر می‌باشد:

$$S=\{(۱,۱),(۱,۲),\dots,(۶,۵),(۶,۶)\}$$

اکنون توجه کنید که در هر زوج مرتب (a,b) از اعضای S، تفاضل a و b کم‌تر از ۶ است.

A **۱۳- گزینه‌ی ۳** فضای نمونه‌ای این آزمایش عبارت است از همه‌ی حالت‌هایی که می‌توان دو حرف از این چهار حرف را انتخاب کرد که تعداد آن برابر $\binom{۴}{۲}=۶$ است. فضای نمونه‌ای به صورت زیر است:

$$S=\{ab,ac,ad,bc,bd,cd\}$$

A **۱۴- گزینه‌ی ۲** فضای نمونه‌ای این آزمایش عبارت است از همه‌ی اعداد دو رقمی (بدون تکرار ارقام) که می‌توان با ارقام ۱، ۲، ۴ و ۶ نوشت. تعداد این اعداد برابر است با:

$$n(S)=۴\times۳=۱۲$$

B **۱۵- گزینه‌ی ۱** در این‌جا برای محاسبه‌ی تعداد اعضای فضای نمونه‌ای دو حالت را در نظر می‌گیریم:

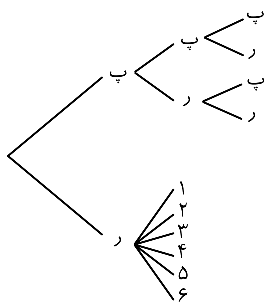
حالت اول: اگر سکه رو بیاید، همین سکه را سه بار پرتاب می‌کنیم. پس تعداد اعضای فضای نمونه‌ای در این حالت برابر $۸=۲^۳$ است.

حالت دوم: اگر سکه پشت بیاید، تاسی را دوبار پرتاب می‌کنیم که تعداد اعضای فضای نمونه‌ای در این حالت $۳۶=۶^۲$ است.

بنابراین تعداد اعضای فضای نمونه‌ای برابر $۴۴=۳۶+۸$ است.

B **۱۶- گزینه‌ی ۳** ابتدا فضای نمونه‌ی این آزمایش را در «نمودار درختی» نمایش می‌دهیم:

با توجه به نمودار مقابل، در بین گزینه‌ها، فقط (۶ , ر) از برآمدهای فضای نمونه‌ای است.



A **۱۷- گزینه‌ی ۲** در داخل کیسه، ۱۰ مهره موجود است. فضای نمونه‌ای در این آزمایش عبارت است از همه‌ی حالت‌هایی که می‌توان ۳ مهره را به صورت متوالی (تک‌تک) و بدون جایگذاری برداشت (توجه کنید که منظور از بدون جایگذاری آن است که بعد از برداشتن هر مهره، دیگر آن را به داخل کیسه نمی‌اندازیم).

تعداد کل حالت‌های انجام این کار برابر است با:

$$n(S)=۱۰\times۹\times۸=۷۲۰$$

A **۱۸- گزینه‌ی ۱** ابتدا توجه کنید که با جایگذاری به معنای آن است که پس از برداشتن هر مهره، دوباره آن را به درون کیسه برمی‌گردانیم، بنابراین تعداد اعضای فضای نمونه‌ای در این حالت برابر است با:

$$n(S)=۱۰\times۱۰\times۱۰=۱۰۰۰$$

B **۱۹- گزینه‌ی ۴** در کیسه‌ی A، ۸ مهره وجود دارد. تعداد حالت‌هایی که می‌توان ۲ مهره از کیسه‌ی A برداشت برابر $\binom{۸}{۲}$ است. به همین ترتیب، تعداد حالت‌هایی که می‌توان از کیسه‌ی B ۳ مهره برداشت برابر $\binom{۹}{۳}$ است. پس تعداد اعضای فضای نمونه‌ای برابر است با:

$$n(S)=\binom{۸}{۲}\binom{۹}{۳}$$

Ⓑ **۲۰- گزینه‌ی ۱** می‌دانیم اگر تعداد اعضای فضای نمونه‌ای برابر $n(S)$ باشد، تعداد کل پیشامدهایی که می‌توان نوشت برابر $2^{n(S)}$ است. از طرفی در پرتاب یک سـکه و یک تاس، تعداد اعضای فضای نمونه‌ای برابر اسـت با $n(S)=2\times 6=12$. پس می‌توان گفت در این آزمایش، 2^{12} پیشامد وجود دارد.

Ⓑ **۲۱- گزینه‌ی ۳** اگر سـکه‌ای را ۴ بار پرتاب کنیم، تعداد اعضای فضای نمونه‌ای آن برابر $2^4=16$ اسـت. پس می‌توان نتیجه گرفت تعداد پیشامدهایی که در این آزمایش می‌توان نوشت برابر است با: 2^{16}

Ⓑ **۲۲- گزینه‌ی ۲** می‌دانیم تعداد کل پیشامدهایی که می‌توان برای فضای نمونه‌ای S نوشت، برابر $2^{n(S)}$ است. اکنون می‌توان نوشت:

$$2^{n(S)}=64 \quad \Rightarrow 2^{n(S)}=2^6 \Rightarrow n(S)=6$$

Ⓑ **۲۳- گزینه‌ی ۴** اگر در یک خانواده با ۴ فرزند تعداد دخترها بیش‌تر از تعداد پسـرها باشـد، تعداد دخترها باید ۳ یا ۴ باشد. پس تعداد کل حالت‌ها برابر است با:

$$\binom{4}{3}+\binom{4}{4}=4+1=5$$

Ⓑ **۲۴- گزینه‌ی ۴** تعداد اعضای هریک از پیشامدها را محاسبه می‌کنیم:

در گزینه‌ی (۱)، تعداد اعضای پیشامد برابر ۲ است.

در گزینه‌ی (۲)، تعداد اعضای پیشامد برابر $\binom{6}{3}=20$ است.

در گزینه‌ی (۳)، تعداد اعضای پیشامد $\binom{6}{5}+\binom{6}{6}=7$ است.

در گزینه‌ی (۴)، تعداد اعضای پیشامد برابر است با:

$$\binom{6}{0}+\binom{6}{2}+\binom{6}{4}+\binom{6}{6}=1+15+15+1=32$$

بنابراین تعداد اعضای پیشامد در گزینه‌ی (۴) از همه بیش‌تر است.

Ⓐ **۲۵- گزینه‌ی ۴** ابتدا اعضای هر دو پیشامد $A-B$ و $B-A$ را می‌نویسیم:

$$A-B=\{1,3,5\} \qquad , \qquad B-A=\{6,8\}$$

اکنون می‌توان نوشت:

$$(A-B)\cup(B-A)=\{1,3,5\}\cup\{6,8\}=\{1,3,5,6,8\}$$

بنابراین پیشامد $(A-B)\cup(B-A)$ دارای ۵ عضو است.

Ⓐ **۲۶- گزینه‌ی ۱** ابتدا هر یک از پیشامدهای A و B را با اعضا مشخص می‌کنیم:

A = { (د , د , د) , (د , د , پ) , (د , پ , د) , (پ , د , د)}

B = { (د , د , د) , (پ , د , د) , (د , پ , د) , (د , د , پ) , (پ , پ , د) , (پ , د , پ) , (د , پ , پ)}

اکنون می‌توان نوشت:

$$A-B=\{\}$$

Ⓒ **۲۷- گزینه‌ی ۳** پیشـامدهای مورد نظر باید شـامل ۱ باشند و شامل ۲ نباشند، یعنی برآمد ۱ قطعاً در آن‌ها حضور دارد و برآمد ۲ قطعاً در آن‌ها حضور ندارد. از طرفی، هریک از برآمدهای ۳، ۴، ... و ۱۰ می‌توانند عضو پیشامد «باشند» یا «نباشند». پس هر کدام ۲ حالت دارند، پس تعداد کل پیشامدهای شامل ۱ و فاقد ۲ برابر است با:

$$\underbrace{2\times 2\times \cdots \times 2}_{\text{۸ تا}}=2^8$$

Ⓒ **۲۸- گزینه‌ی ۲** می‌دانیم تعداد زیرمجموعه‌های k عضوی یک مجموعه‌ی n عضوی برابر $\binom{n}{k}$ اســت. پس تعداد پیشامدهای با حداقل ۲ عضو برابر است با:

$$\binom{۱۰}{۲}+\binom{۱۰}{۳}+\binom{۱۰}{۴}+\cdots+\binom{۱۰}{۱۰}=۲^{۱۰}-\binom{۱۰}{۰}-\binom{۱۰}{۱}=۲^{۱۰}-۱-۱۰=۱۰۱۳$$

نکته: در کتاب ریاضیات ۲، ملاحظه کردید که رابطه‌ی زیر همواره برقرار است:

$$\binom{n}{۰}+\binom{n}{۱}+\binom{n}{۲}+\cdots+\binom{n}{n}=۲^n$$

Ⓒ **۲۹- گزینه‌ی ۱** تعداد پیشامدهای فرد عضوی عبارت است از مجموع تعداد پیشامدهای ۱ عضوی، پیشامدهای ۳ عضوی، ... و پیشامدهای ۹ عضوی که تعداد آن‌ها برابر است با: $۲^۹$

نکته: می‌دانیم $۲^n=\binom{n}{۰}+\binom{n}{۱}+\binom{n}{۲}+\cdots+\binom{n}{n}$ می‌توان نوشت:

$$\binom{n}{۰}+\binom{n}{۲}+\binom{n}{۴}+\cdots=\binom{n}{۱}+\binom{n}{۳}+\binom{n}{۵}+\cdots=۲^{n-۱}$$

Ⓐ **۳۰- گزینه‌ی ۴** اگر پیشامد مورد نظر را A بنامیم داریم $A=\{۱۱,۱۳,۱۷,۱۹\}$. پس احتمال مورد نظر برابر است با:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۴}{۱۰}=\frac{۲}{۵}$$

Ⓐ **۳۱- گزینه‌ی ۱** اگر اعداد مضرب ۳ را که عضو S هستند در مجموعه‌ی A بنویسیم، خواهیم داشت:

$A=\{۲۱,۲۴,۲۷,۳۰,۳۳,۳۶,۳۹\}$

بنابراین احتمال رخ دادن پیشامد A برابر است با:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۷}{۲۱}=\frac{۱}{۳}$$

تذکر: اگر m و n اعدادی طبیعی باشند و $n>m$، تعداد اعداد طبیعی از m تا n برابر $n-m+۱$ است. بنابراین تعداد اعداد طبیعی از ۲۱ تا ۴۱ برابر $۴۱-۲۱+۱=۲۱$ است.

Ⓐ **۳۲- گزینه‌ی ۲** فضای نمونه‌ای این آزمایش به صورت $S=\{$(د , د) , (پ , پ) , (پ , د) , (د , پ)$\}$ است. بنابراین احتمال آن‌که هر دو فرزند این خانواده پسر باشند برابر $\frac{۱}{۴}$ است.

Ⓐ **۳۳- گزینه‌ی ۱** فضای نمونه‌ای جنسیت فرزندان این خانواده دارای ۸ عضو است زیرا:

$S=\{$(د , د , د) , (د , د , پ) , (د , پ , د) , (پ , د , د) , (پ , پ , د) , (پ , د , پ) , (د , پ , پ) , (پ , پ , پ)$\}$

اکنون برای آن‌که جنسیت فرزندان یکسان باشد، باید یکی از اعضای پیشامد $A=\{$(د , د , د) , (پ , پ , پ)$\}$ رخ دهد. پس احتمال رخ دادن این پیشامد برابر $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۲}{۸}=\frac{۱}{۴}$ است.

Ⓐ **۳۴- گزینه‌ی ۱** اگر پیشامد اول بودن عدد مورد نظر را A بنامیم، می‌توان نوشت: $A=\{۲,۳,۵,۷\}$

بنابراین احتمال رخ دادن پیشامد A برابر است با: $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۴}{۸}=\frac{۱}{۲}$

Ⓐ **۳۵- گزینه‌ی ۱** فضای نمونه‌ای این آزمایش دارای ۱۰ عضو است. از طرفی تعداد مهره‌های آبی درون جعبه برابر ۲ است. پس احتمال آن‌که مهره‌ی برداشته‌شده آبی باشد برابر $\frac{۲}{۱۰}=\frac{۱}{۵}$ است.

A **۳۶- گزینه‌ی ۲** فضای نمونه‌ای این آزمایش مقسوم‌علیه‌های طبیعی عدد ۱۲ است پس می‌توان نوشت $S=\{۱,۲,۳,۴,۶,۱۲\}$. پیشامد A که در آن عدد مورد نظر فرد باشد به صورت $A=\{۱,۳\}$ است بنابراین می‌توان نوشت:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}$$

A **۳۷- گزینه‌ی ۳** با توجه به صورت سؤال می‌توان گفت $n(S)=۳۰$. از طرفی، اگر پیشامد A را مربع کامل بودن عدد مورد نظر بگیریم، خواهیم داشت $A=\{۱,۴,۹,۱۶,۲۵\}$. اکنون می‌توان نوشت:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۵}{۳۰}=\frac{۱}{۶}$$

A **۳۸- گزینه‌ی ۱** اگر مجموعه‌ی A را توان‌های طبیعی عدد ۳ که بین ۱ تا ۱۰۰ هستند در نظر بگیریم، می‌توان نوشت $A=\{۳,۹,۲۷,۸۱\}$.

اکنون احتمال پیشامد A برابر است با:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=۰/۰۴$$

A **۳۹- گزینه‌ی ۳** ابتدا توجه کنید که تعداد اعضای فضای نمونه‌ای پرتاب یک تاس و یک سکه برابر $۱۲=۲\times۶$ است. اکنون برای آن‌که تاس عددی اول و سکه پشت بیاید، تاس باید یکی از اعداد ۲، ۳ یا ۵ و سکه پشت بیاید. پس پیشامد مورد نظر دارای $۳=۱\times۳$ عضو است. بنابراین احتمال آن‌که تاس عددی اول و سکه پشت بیاید، برابر $\frac{۳}{۱۲}=\frac{۱}{۴}$ است.

B **۴۰- گزینه‌ی ۴** با توجه به این‌که در پرتاب تاس، عدد زوج ظاهر شده است، فضای نمونه‌ای به صورت $S=\{۲,۴,۶\}$ است. در بین اعضای S، فقط ۲ عددی اول است. پس احتمال آن‌که در این حالت عدد ظاهر شده اول باشد، برابر $\frac{۱}{۳}$ است.

B **۴۱- گزینه‌ی ۱** با توجه به این‌که در این خانواده‌ی دو فرزندی یکی از فرزندان دختر است، فضای نمونه‌ای شامل عضو (پ , پ) نیست. بنابراین فضای نمونه‌ای را به صورت مقابل می‌توان نوشت: S={ (د , پ) , (د , د) , (پ , د) , (د , د)}

بنابراین احتمال آن‌که هر ۲ فرزند خانواده دختر باشند برابر $\frac{۱}{۳}$ است.

B **۴۲- گزینه‌ی ۱** با توجه به این‌که پس از پرتاب دو تاس، مجموع اعداد روشده برابر ۶ است، فضای نمونه‌ای به صورت زیر است:

$$S=\{(۱,۵),(۵,۱),(۲,۴),(۴,۲),(۳,۳)\}$$

با توجه به فضای نمونه‌ای بالا، برای آن‌که هر دو تاس عدد فرد ظاهر شوند، باید یکی از حالت‌های (۵ , ۱)، (۱ , ۵) , (۳ , ۳) رخ دهد. پس احتمال مورد نظر برابر $\frac{۳}{۵}$ است.

A **۴۳- گزینه‌ی ۳** با توجه به این‌که عدد ظاهرشده در تاس، مضرب ۳ نیست، فضای نمونه‌ای به صورت $S=\{۱,۲,۴,۵\}$ است.

بنابراین احتمال آن‌که در پرتاب تاس عدد ۲ ظاهر شود، برابر $\frac{۱}{۴}$ است.

A **۴۴- گزینه‌ی ۳** با توجه به این‌که می‌دانیم در این خانواده‌ی دو فرزندی، یکی از فرزندان پسر است، فضای نمونه‌ای به صورت زیر می‌باشد:

S={ (پ , پ) , (د , پ) , (پ , د)}

با توجه به فضای نمونه‌ای بالا، احتمال این‌که خانواده فرزند دختر داشته باشد، برابر $\frac{۲}{۳}$ است.

A **۴۵- گزینه‌ی ۳** با توجه به مجموعه‌های A و B می‌توان نوشت:

$$A\cup B=\{a,b,x\}\cup\{a,b,۲\}=\{a,b,x,۲\}$$

بنابراین احتمال رخ دادن پیشامد $A\cup B$ برابر است با:

$$P(A\cup B)=\frac{n(A\cup B)}{n(S)}=\frac{۴}{۵}$$

Ⓐ **۴۶- گزینه‌ی ۲** اگر پیشامد A را پیشامد زوج یا مضرب ۳ بودن عدد مورد نظر بگیریم، می‌توان نوشت: $A=\{۲,۳,۴,۶,۸,۹\}$

بنابراین احتمال رخ دادن پیشامد A برابر است با: $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۶}{۹}=\frac{۲}{۳}$

Ⓐ **۴۷- گزینه‌ی ۱** با توجه به مجموعه‌های A و B می‌توان نتیجه گرفت $A\cap B=\{۲,۳,۴\}$. پس می‌توان نوشت:

$$P(A\cap B)=\frac{n(A\cap B)}{n(S)}=\frac{۳}{۲۰}=۰/۱۵$$

Ⓐ **۴۸- گزینه‌ی ۳** ابتدا مجموعه‌ی B' را به‌دست می‌آوریم (توجه کنید که برای تعیین اعضای B'، کافی است اعضای B را از S حذف کنیم):

$$B'=\{۱,۸,۹,۱۰,...,۲۰\} \Rightarrow P(B')=\frac{n(B')}{n(S)}=\frac{۱۴}{۲۰}=\frac{۷}{۱۰}$$

اکنون با توجه به این‌که $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۴}{۲۰}=\frac{۱}{۵}$ می‌توان نوشت: $P(A)\times P(B')=\frac{۷}{۱۰}\times\frac{۱}{۵}=\frac{۷}{۵۰}=۰/۱۴$

Ⓐ **۴۹- گزینه‌ی ۳** توجه کنید که $A\cap B=\{۲,۳,۴\}$. اکنون می‌توان نوشت:

$$C\cup(A\cap B)=\{۱۵,۱۶,۱۷,۱۸,۱۹,۲۰\}\cup\{۲,۳,۴\}=\{۲,۳,۴,۱۵,۱۶,۱۷,۱۸,۱۹,۲۰\}$$

بنابراین تعداد اعضای مجموعه‌ی $C\cup(A\cap B)$ برابر ۹ است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$P[C\cup(A\cap B)]=\frac{n[C\cup(A\cap B)]}{n(S)}=\frac{۹}{۲۰}=۰/۴۵$$

Ⓑ **۵۰- گزینه‌ی ۳** رقم سمت راست پلاک اتومبیل، یکی از ارقام مجموعه‌ی $S=\{۱,۲,۳,...,۹\}$ است. بنابراین اگر پیشامد A را «پیشامد آن‌که رقم سمت راست از ۴ بیش‌تر نیست یا مضرب ۳ است» در نظر بگیریم، می‌توان نوشت: $A=\{۱,۲,۳,۴,۶,۹\}$

بنابراین احتمال رخ دادن پیشامد A برابر است با: $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۶}{۹}=\frac{۲}{۳}$

Ⓐ **۵۱- گزینه‌ی ۱** فضای نمونه‌ای به صورت $S=\{$فروردین , اردیبهشت , ... , اسفند$\}$ است. پس $n(S)=۱۲$. اکنون احتمال آن‌که این شخص متولد خردادماه باشد برابر $\frac{۱}{۱۲}$ است.

Ⓐ **۵۲- گزینه‌ی ۲** فضای نمونه‌ای این آزمایش فصل‌های سال هستند. پس می‌توان نوشت: $S=\{$بهار , تابستان , پاییز , زمستان$\}$، بنابراین احتمال آن‌که این شخص متولد بهار باشد، برابر $\frac{۱}{۴}$ است. (توجه کنید که این احتمال برای هر فرد انتخاب شده، یکسان است)

Ⓑ **۵۳- گزینه‌ی ۱** ابتدا تعداد اعداد دو رقمی را که می‌توان با ارقام ۱، ۲، ۴ و ۵ نوشت، محاسبه می‌کنیم: $n(S)=۴\times۴=۱۶$. اکنون برای آن‌که عدد مورد نظر مضرب ۳ باشد باید یکی از اعداد مجموعه‌ی $A=\{۱۲,۲۱,۱۵,۵۱,۲۴,۴۲,۴۵,۵۴\}$ را انتخاب کرد، پس احتمال آن‌که عدد مورد نظر مضرب ۳ باشد برابر است با: $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۸}{۱۶}=۰/۵$

Ⓑ **۵۴- گزینه‌ی ۴** برای آن‌که عدد مورد نظر مضرب ۳ یا ۴ باشد، باید یکی از اعضای مجموعه‌ی $A=\{۱۲,۲۱,۱۵,۵۱,۲۴,۴۲,۴۵,۵۴,۴۴,۵۲\}$ را انتخاب کرد. بنابراین احتمال آن‌که عدد مورد نظر مضرب ۳ یا ۴ باشد برابر است با: $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۰}{۱۶}=\frac{۵}{۸}$

Ⓑ **۵۵- گزینه‌ی ۲** برای آن‌که عدد انتخاب‌شده مضرب ۳ باشد ولی مضرب ۴ نباشد، باید یکی از اعضای مجموعه‌ی $A=\{۲۱,۱۵,۵۱,۴۲,۴۵,۵۴\}$ را انتخاب کرد. بنابراین احتمال آن‌که عدد مورد نظر مضرب ۳ باشد و مضرب ۴ نباشد برابر است با:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۶}{۱۶}=\frac{۳}{۸}$$

B **۵۶- گزینه‌ی ۳** تعداد کل مهره‌های درون کیسه $۳+n$ است. پس احتمال آبی بودن مهره‌ی برداشته‌شده برابر $\frac{n}{۳+n}$ است. اکنون می‌توان نوشت:

$$\frac{n}{۳+n}=\frac{۴}{۵}\Rightarrow ۵n=۱۲+۴n\Rightarrow n=۱۲$$

B **۵۷- گزینه‌ی ۳** فضای نمونه‌ای این آزمایش دارای $۳۶=۶^۲$ عضو است. این فضا به صورت زیر می‌باشد:

$$S=\{(۱,۱),(۱,۲),(۱,۳),\ldots,(۶,۵),(۶,۶)\}$$

با دقت در مجموعه‌ی S، در همه‌ی زوج‌های مرتب، جمع مقادیر حداقل برابر ۲ است (یعنی بزرگ‌تر یا مساوی ۲ است).

بنابراین اگر پیشامد «مجموع اعداد روشده حداقل ۲ باشد» را A بنامیم، احتمال آن برابر است با: $P(A)=\frac{۳۶}{۳۶}=۱$

B **۵۸- گزینه‌ی ۲** فضای نمونه‌ای این آزمایش دارای $۳۶=۶^۲$ عضو است. در هیچ‌کدام از اعضای فضای نمونه‌ای، تفاضل اعداد روشده برابر ۶ نمی‌باشد. پس می‌توان نتیجه گرفت احتمال آن‌که تفاضل اعداد روشده برابر ۶ باشد، برابر صفر است (یعنی هیچ‌گاه این اتفاق رخ نمی‌دهد!!).

B **۵۹- گزینه‌ی ۱** کل حالت‌هایی که ۶ نفر می‌توانند در یک ردیف، کنار هم قرار بگیرند برابر $n(S)=۶!$ است. اکنون پیشامد A را «در کنار هم قرار گرفتن دو برادر» در نظر می‌گیریم. توجه کنید که در این حالت دو برادر را در حکم یک شـیء فرض می‌کنیم. پس ۵ شـیء داریم که !۵ حالت با هم جابه‌جا می‌شوند، از طرفی، دو برادر به !۲ حالت می‌توانند با یک‌دیگر جابه‌جا شوند. پس می‌توان نوشت:

$$n(A)=۵!\times ۲! \;\Rightarrow\; P(A)=\frac{۵!\times ۲!}{۶!}=\frac{۱}{۳}$$

B **۶۰- گزینه‌ی ۳** همان‌طور که در تست قبل گفته شد $n(S)=۶!$. اکنون اگر ۶ جایگاه برای این شش نفر در نظر بگیریم، جایگاه‌های اول و آخر را به دو طریق می‌توانیم پر کنیم (با در نظر گرفتن جابه‌جا شـدن دو برادر). از طرفی، ۴ جایگاه بین آن‌ها، توسـط ۴ نفر دیگر به !۴ طریق پر می‌شود. پس اگر پیشامد A را «در اول و آخر صف بودن دو برادر درنظر بگیریم»، آن‌گاه می‌توان نوشت:

$$n(A)=۲\times ۴! \;\Rightarrow\; P(A)=\frac{۲\times ۴!}{۶!}=\frac{۱}{۱۵}$$

A **۶۱- گزینه‌ی ۲** تعداد اعضای فضای نمونه‌ای این آزمایش برابر است با: $n(S)=۷\times۷\times۷\times۷\times۷=۷^۵$

از طرفی برای آن‌که این ۷ نفر در یک روز از هفته به دنیا آمده باشـند، ۷ حالت وجود دارد «همگی در شـنبه یا همگی در یکشـنبه یا ...». پس احتمال مورد نظر برابر است با: $\frac{۷}{۷^۵}=۷^{-۴}$

A **۶۲- گزینه‌ی ۲** هر کدام از این پنج نفر در یکی از ۷ روز هفته به دنیا آمده‌اند. پس تعداد اعضای فضای نمونه‌ای برابر است با:

$$n(S)=۷\times۷\times۷\times۷\times۷=۷^۵$$

اکنون اگر پیشامد A را «حالت‌هایی که این پنج نفر در روزهای متمایز هفته به دنیا آمده باشند» در نظر بگیریم، می‌توان نوشت:

$$n(A)=۷\times۶\times۵\times۴\times۳$$

پس می‌توان نوشت:

$$P(A)=\frac{۷\times۶\times۵\times۴\times۳}{۷^۵}=\frac{۳۶۰}{۷^۴}$$

A **۶۳- گزینه‌ی ۳** هر کدام از این سه نفر به ۱۲ حالت می‌توانند در یکی از ماه‌های سال به دنیا آمده باشند. پس می‌توان نوشت: $n(S)=۱۲^۳$

اکنون اگر پیشامد A را «حالت‌هایی که هر سه نفر در یک ماه از سال متولد شده باشند» در نظر بگیریم، آن‌گاه $n(A)=۱۲$.

پس می‌توان نوشت:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱}{۱۲^۲}=\frac{۱}{۱۴۴}$$

A **۶۴- گزینه‌ی ۴** هر کدام از این ۲۵ نفر در یکی از ۳۶۵ روز سال به دنیا آمده‌اند. پس می‌توان نوشت: $n(S)=۳۶۵^{۲۵}$

اکنون اگر پیشامد A را «حالت‌هایی که این ۲۵ نفر در روزهای متمایز سال به دنیا آمده باشند.» در نظر بگیریم، می‌توان نوشت:

$$n(A)=۳۶۵\times۳۶۴\times۳۶۳\times\cdots\times۳۴۱$$

پس می‌توان نوشت:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۳۶۵\times۳۶۴\times\cdots\times۳۴۱}{۳۶۵^{۲۵}}=\frac{۳۶۴\times۳۶۳\times\cdots\times۳۴۱}{۳۶۵^{۲۴}}$$