فصل اول

جبر و معادله

فصل اول: جبر و معادله

درس اول: مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی

الف) دنباله‌های حسابی

دنباله‌ی حسابی دنباله‌ای است که در آن هر جمله به جز جمله‌ی نخست، با جمع کردن عددی ثابت به نام **قدرنسبت** با جمله‌ی قبل از آن به‌دست می‌آید. به این ترتیب، اگر جمله‌ی نخست دنباله‌ای حسابی a_1 و قدرنسبت آن d باشد، این دنباله به صورت زیر است:

$$a_1 , a_1+d , a_1+2d , a_1+3d , \ldots$$

معلوم است که **جمله‌ی عمومی** این دنباله به صورت زیر است

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

مثال: پینوکیو ۱۰ سکه داشت. روباه مکار به او وعده داد که اگر شبی سکه‌هایش را بالای تپه بکارد، فردا صبح درختی با ۱۰۰ سکه روی آن می‌روید و بعد از آن هر روز صبح ۳۵ سکه به سکه‌های قبلی اضافه می‌شود. در این داستان، تعداد سکه‌های روی درخت در هر صبح، دنباله‌ای حسابی با جمله‌ی نخست ۱۰۰ و قدرنسبت ۳۵ تشکیل می‌دهند:

صبح اول	صبح دوم	صبح سوم	...
۱۰۰	۱۰۰+۳۵	۱۰۰+۲×۳۵	

پینوکیو می‌خواهد حساب کند که در صبح روز شانزدهم چند سکه روی درخت وجود دارد. احتمالاً جمع کردن این عددها تنها راهی است که پیش پای پینوکیو است! کمی بعد، به او کمک می‌کنیم تا این مجموع را هوشمندانه‌تر حساب کند.

در این درس دستوری برای پیدا کردن مجموع n جمله‌ی نخست دنباله‌های حسابی پیدا می‌کنیم. اساس این کار روشی منتسب به کارل گاوس، یکی از بزرگ‌ترین ریاضی‌دانان همه‌ی اعصار است که در کودکی معلمش را با پیدا کردن مجموع عددهای ۱، ۲، ... و ۱۰۰ شگفت‌زده کرده بود. روش او را در مثال بعد توضیح می‌دهیم.

مثال: برای پیدا کردن مجموع عددهای ۱، ۲، ... و ۱۰۰ می‌توان آن‌ها را به دسته‌های دوتایی طوری تقسیم کرد که مجموع عددهای هر دسته برابر باشد:

$$۱+۲+\cdots+۹۹+۱۰۰=(۱+۱۰۰)+(۲+۹۹)+\cdots+(۵۰+۵۱)$$

$$=\underbrace{۱۰۱+۱۰۱+\cdots+۱۰۱}_{\text{۵۰ تا}}$$

$$=۵۰\times۱۰۱=۵۰۵۰$$

اگر تعداد عددهایی که می‌خواهیم جمع کنیم فرد باشد، مثلاً بخواهیم عددهای ۱، ۲، ... و ۱۰۱ را با هم جمع کنیم، چه کار کنیم. در مثال بعد، از روشی استفاده می‌کنیم که به زوج یا فرد بودن تعداد عددها بستگی ندارد.

مثال: می‌خواهیم مجموع عددهای ۱، ۲، ... و n را پیدا کنیم. این مجموع را S می‌نامیم. توجه کنید که

$$S = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$$
$$S = n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 1$$

اگر این تساوی‌ها را با هم جمع کنیم معلوم می‌شود که

$$2S = \underbrace{(n+1)+(n+1)+(n+1)+\cdots+(n+1)}_{n \text{ تا}} = n(n+1)$$

بنابراین $S=\frac{n(n+1)}{2}$.

توجه کنید که عددهای ۱، ۲، ... و n دنباله‌ای حسابی تشکیل می‌دهند. بنابراین ممکن است بتوانیم از روش پیدا کردن مجموع آن‌ها برای محاسبه‌ی مجموع جمله‌های نخست دنباله‌های حسابی استفاده کنیم. در حقیقت، این کار شدنی است. پیش از هر چیز، توجه کنید که اگر a_1، a_2 و ... دنباله‌ای حسابی باشد، آن‌گاه

$$k+l=s+t \Rightarrow a_k+a_l=a_s+a_t$$

در حقیقت،

$$a_k=a_1+(k-1)d, \quad a_s=a_1+(s-1)d$$
$$a_l=a_1+(l-1)d, \quad a_t=a_1+(t-1)d$$

در نتیجه

$$a_k+a_l=2a_1+(k+l-2)d$$
$$a_s+a_t=2a_1+(s+t-2)d$$

چون $k+l=s+t$، پس سمت راست این دو تساوی با هم برابر است، پس سمت چپ آن‌ها نیز برابر است، یعنی

$$a_k+a_l=a_s+a_t$$

اکنون فرض کنید S_n مجموع n جمله‌ی نخست دنباله‌ی حسابی موردنظر باشد:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$
$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_1$$

اگر این تساوی‌ها را با هم جمع کنیم معلوم می‌شود که

$$2S_n=(a_1+a_n)+(a_2+a_{n-1})+(a_3+a_{n-2})+\cdots+(a_n+a_1)$$

اکنون توجه کنید که بنابر آن‌چه گفتیم،

$$a_2+a_{n-1}=a_1+a_n, \quad a_3+a_{n-2}=a_1+a_n, \quad \dots$$

در نتیجه

$$2S_n=(a_1+a_n)+(a_1+a_n)+\cdots+(a_1+a_n)=n(a_1+a_n)$$

بنابراین $S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)$.

نتیجه اگر a_1، a_2، ... و a_n، n جمله‌ی نخست دنباله‌ای حسابی باشند و S_n مجموع این جمله‌ها باشد، آن‌گاه

$$S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)$$

توجه کنید که $a_n=a_1+(n-1)d$، بنابراین

$$S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)=\frac{n}{2}(a_1+a_1+(n-1)d)=\frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d)$$

نتیجه اگر a_1، a_2، ... و a_n، n جمله‌ی نخســت دنباله‌ای حســابی باشند و S_n مجموع این جمله‌ها باشد، آن‌گاه

$$S_n=\frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d)$$

نتیجه‌ی بالا را به روش دیگری هم می‌توانیم به‌دست بیاوریم. توجه کنید که

$$a_1=a_1$$
$$a_2=a_1+d$$
$$a_3=a_1+2d$$
$$\vdots$$
$$a_n=a_1+(n-1)d$$

اگر این تساوی‌ها را با هم جمع کنیم، به‌دست می‌آید

$$S_n=na_1+(1+2+\cdots+(n-1))d=na_1+\frac{(n-1)n}{2}d=\frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d)$$

توجه کنید که در این روش فقط از دستور مجموع عددهای ۱، ۲، ... و $n-1$ استفاده کردیم که در ابتدای کار آن را به طور مستقل پیدا کرده بودیم. بنابراین، اگر توجه کنیم که $a_1+(n-1)d=a_n$، به همان دستوری که اول به‌دست آوردیم می‌رسیم: $S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)$.

مثال: در مثال مربوط به سکه‌های پینوکیو، تعداد سکه‌های روی درخت در هر صبح، دنباله‌ای حسابی با جمله‌ی نخست ۱۰۰ و قدرنسبت ۳۵ تشکیل می‌دهند. بنابراین تعداد سکه‌های روی درخت در صبح روز شانزدهم برابر است با

$$S_{16}=\frac{16}{2}(2\times100+(16-1)35)=5800$$

مثال: در دنباله‌ای حسابی $a_1=-5$ و $a_{11}=13$. در این صورت مجموع یازده جمله‌ی نخست این دنباله‌ی حسابی برابر است با

$$S_{11}=\frac{11}{2}(a_1+a_{11})=\frac{11}{2}(-5+13)=44$$

مسئله ۱ **در دنباله‌ای حسابی $a_1=-17$ و $d=2$. مجموع بیست جمله‌ی نخست این دنباله چقدر است؟**

راه‌حل: ابتدا توجه کنید که $S_{20}=\frac{20}{2}(a_1+a_{20})$، بنابراین کافی اســت a_{20} را حســاب کنیم. از طرف دیگر، $a_n=a_1+(n-1)d$، بنابراین

$$a_{20}=-17+(20-1)2=21$$

در نتیجه

$$S_{20}=10(-17+21)=40$$

مسئله ۲ **مجموع نوزده جمله‌ی نخست دنباله‌ی حسابی** $\dots,0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},1$ **چقدر است؟**

راه‌حل: در این دنباله جمله‌ی اول برابر ۱ و قدرنسبت برابر $-\frac{1}{3}$ است. بنابراین

$$S_{19}=\frac{19}{2}(2a_1+18d)=\frac{19}{2}(2\times1-18\times\frac{1}{3})=-38$$

مسئله ۳ **مجموع n جمله‌ی نخست دنباله‌ی حسابی زیر چقدر است؟**

$$\frac{1}{k},1+\frac{1}{k},2+\frac{1}{k},\dots$$

راه‌حل: قدرنسبت این دنباله‌ی حسابی برابر است با $1+\frac{1}{k}-\frac{1}{k}=1$. بنابراین

$$S_n=\frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d)=\frac{n}{2}(2\times\frac{1}{k}+(n-1)(1))=\frac{n}{2}(\frac{2}{k}+n-1)=\frac{n}{k}+\frac{n(n-1)}{2}$$

مسئله ۴ **مجموع‌های زیر را حساب کنید:**

الف) $2+4+\dots+2n$

ب) $1+3+5+\dots+2n-1$

پ) $1^2-2^2+3^2-4^2+\dots+99^2-100^2$

راه‌حل: الف) می‌توان نوشت

$$2+4+\dots+2n=2(1+2+\dots+n)=2(\frac{n(n+1)}{2})=n(n+1)$$

ب) مجموع موردنظر، مجموع n جمله‌ی نخست دنباله‌ای حسابی با جمله‌ی نخست ۱ و جمله‌ی آخر $2n-1$ است، بنابراین

$$1+3+\dots+2n-1=\frac{n}{2}(1+2n-1)=n^2$$

پ) اگر از اتحاد مزدوج استفاده کنیم، معلوم می‌شود که

$$\begin{aligned}1^2-2^2+3^2-4^2+\dots+99^2-100^2&=(1-2)(1+2)+(3-4)(3+4)+\dots+(99-100)(99+100)\\&=-(1+2)-(3+4)-\dots-(99+100)\\&=-(1+2+3+4+\dots+99+100)\\&=-\frac{100(101)}{2}=-5050\end{aligned}$$

مسئله ۵ **در دنباله‌ای حسابی $a_1=24$ و $a_7=-18$. مجموع هفده جمله‌ی نخست این دنباله‌ی حسابی چقدر است؟**

راه‌حل: توجه کنید که $S_{17}=\frac{17}{2}(a_1+a_{17})$. بنابراین باید a_{17} را حساب کنیم. برای این کار بهتر است قدرنسبت را با استفاده از a_7 حساب کنیم:

$$a_7=a_1+6d\Rightarrow-18=24+6d\Rightarrow6d=-42\Rightarrow d=-7$$

بنابراین

$$a_{17}=a_1+16d=24+16(-7)=-88$$

به این ترتیب

$$S_{17}=\frac{17}{2}(24+(-88))=\frac{17}{2}(-64)=-544$$

تست ۱

مجموع پانزده جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی برابر ۳۰۰ است. جملهٔ هشتم دنباله کدام است؟

۱) ۲۰ ۲) ۳۰ ۳) ۱۵ ۴) ۴۵

پاسخ: بنابر فرض مسئله،

$$S_{۱۵}=\frac{۱۵}{۲}(۲a_۱+۱۴d)=۳۰۰\Rightarrow a_۱+۷d=۲۰$$

بنابراین $a_۸=a_۱+۷d=۲۰$.

مسئله ۶

جملهٔ عمومی دنباله‌ای حسابی به صورت $a_n=۲n-۷$ است. مجموع بیست‌وپنج جملهٔ نخست این دنبالهٔ حسابی چقدر است؟

راه‌حل: چون $a_n=۲n-۷$، پس

$$a_۱=۲\times۱-۷=-۵,\quad a_{۲۵}=۲\times۲۵-۷=۴۳$$

از طرف دیگر $S_n=\frac{n}{۲}(a_۱+a_n)$، بنابراین

$$S_{۲۵}=\frac{۲۵}{۲}(-۵+۴۳)=۴۷۵$$

تست ۲

مجموع جمله‌های دنباله‌ای حسابی که جملهٔ اولش ۳ و جملهٔ آخرش ۳۹ است، برابر ۵۲۵ است. قدرنسبت این دنباله چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۲

پاسخ: ابتدا توجه کنید که

$$S_n=\frac{n}{۲}(a_۱+a_n)$$

$$۵۲۵=\frac{n}{۲}(۳+۳۹)$$

$$n=۲۵$$

بنابراین دنباله ۲۵ جمله دارد و در نتیجه

$$a_{۲۵}=a_۱+۲۴d$$

$$۳۹=۳+۲۴d$$

$$d=\frac{۳}{۲}$$

مسئله ۷

مجموع مضرب‌های ۳ در بازهٔ $[۱۸,۳۰۰]$ چقدر است؟

راه‌حل: توجه کنید که مضرب‌های ۳ در بازهٔ $[۱۸,۳۰۰]$ دنباله‌ای حسابی با جملهٔ نخست ۱۸ و جملهٔ آخر ۳۰۰ و قدرنسبت ۳ تشکیل می‌دهند. اگر تعداد این مضرب‌ها n تا باشد، آن‌گاه

$$a_n=a_۱+(n-۱)d$$

$$۳۰۰=۱۸+(n-۱)۳$$

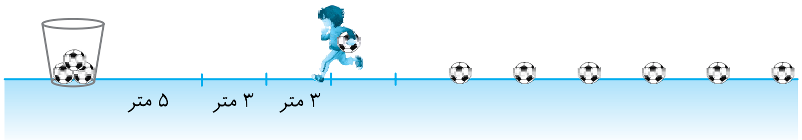
$$n=۹۵$$

بنابراین

$$S_{۹۵}=\frac{۹۵}{۲}(۱۸+۳۰۰)=۱۵۱۰۵$$

مسئله ۸

در مسـابقه‌ی توپ جمع‌کنی، سـبدی در نقطه‌ی شروع قرار داده شده اسـت که فاصله‌اش از نخستین توپ ۵ متر اسـت و بقیه‌ی توپ‌ها در فاصله‌های ۳ متری از توپ‌های کناری‌شـان روی یک خط راست قرار داده شـده‌اند. ده توپ روی یک خط راسـت قرار دارند. هر بازیکن باید از کنار سـبد شـروع به حرکت کند، نزدیک‌ترین توپ را بردارد، برود و آن را در سبد بیندازد و این کار را تکرار کند تا همه‌ی توپ‌ها را در سبد بیندازد. هر بازیکن در کل چه مسافتی را طی می‌کند؟



راه‌حل: برای این‌که بازیکنی توپ اول را بردارد و در سـبد بیندازد، باید ۲×۵ متر را طی کند. برای توپ دوم باید $۲(۵+۳)$ متر را طی کند، برای توپ سوم باید $۲(۵+۲\times۳)$ متر را طی کند، ... و برای توپ دهم باید $۲(۵+۹\times۳)$ متر را طی کند. این عددها دنباله‌ای حسـابی با جمله‌ی نخسـت ۲×۵ و جمله‌ی آخر $۲(۵+۹\times۳)$ تشکیل می‌دهند و تعداد آن‌ها ده‌تاست. بنابراین مجموع آن‌ها برابر است با

$$S_{۱۰}=\frac{۱۰}{۲}(۲\times۵+۲(۵+۹\times۳))=۳۷۰$$

یعنی هر بازیکن باید ۳۷۰ متر را طی کند تا همه‌ی توپ‌ها را در سبد بیندازد.

تست ۳

چندتا از جمله‌های دنباله‌ی حسابی $۹,۱۷,۲۵,\ldots$ را از ابتدا جمع کنیم تا حاصل ۶۳۶ شود؟

۱) ۱۰ **۲)** ۱۱ **۳)** ۱۲ **۴)** ۱۳

پاسخ: جمله‌ی اول دنباله برابر ۹ و قدرنسبت آن ۸ است. بنابراین مجموع n جمله‌ی نخست دنباله برابر است با

$$\frac{n}{۲}(۲a_۱+(n-۱)d)=\frac{n}{۲}(۲\times۹+۸(n-۱))=\frac{n}{۲}(۱۸+۸n-۸)=۴n^۲+۵n$$

در نتیجه

$$۴n^۲+۵n=۶۳۶\Rightarrow۴n^۲+۵n-۶۳۶=۰\Rightarrow(۴n+۵۳)(n-۱۲)=۰$$

$$n=-\frac{۵۳}{۴}\ (\text{غ.ق.ق}),\qquad n=۱۲$$

بنابراین باید دوازده جمله‌ی نخست دنباله را جمع کنیم.

مسئله ۹

چند جمله‌ی نخست دنباله‌ی حسابی زیر را باید جمع کنیم تا حاصل برابر ۷۸ شود؟

$$۲۴,۲۱,۱۸,\ldots$$

راه‌حل: توجه کنید که در این دنباله‌ی حسابی $a_۱=۲۴$ و $d=۲۱-۲۴=-۳$. اکنون توجه کنید که

$$S_n=\frac{n}{۲}(۲a_۱+(n-۱)d)$$

بنابراین اگر $S_n=۷۸$، آن‌گاه

$$۷۸=\frac{n}{۲}(۲\times۲۴+(n-۱)(-۳))=\frac{n}{۲}(۵۱-۳n)$$

به این ترتیب

$$۳n^۲-۵۱n+۱۵۶=۰\Rightarrow n^۲-۱۷n+۵۲=۰\Rightarrow(n-۴)(n-۱۳)=۰$$

بنابراین $n=۴$ یا $n=۱۳$، یعنی باید چهار یا سـیزده جمله‌ی نخست دنباله‌ی حسابی موردنظر را جمـع کنیم تا حاصل برابر ۷۸ شـود (هر دوی این جواب‌ها قابل قبول هسـتند، زیرا قدرنسـبت دنباله‌ی موردنظر منفی اسـت و برخی جمله‌ها مثبت و برخی دیگر منفی هستند، در نتیجه، ممکن است مجموع تعدادی از جمله‌ها صفر شود).

مسئله ۱۰ **دستکم چندتا از جمله‌های دنباله‌ی حسابی زیر را از ابتدا با هم جمع کنیم تا مجموع آن‌ها از ۱۵۶۸ بیشتر شود؟**

$$۲۰, ۲۲\frac{۲}{۳}, ۲۵\frac{۱}{۳}, \ldots$$

راه‌حل: جمله‌ی نخست این دنباله ۲۰ و قدرنسبت آن برابر است با $d=۲۲\frac{۲}{۳}-۲۰=\frac{۸}{۳}$. بنابراین

$$S_n>۱۵۶۸ \Rightarrow \frac{n}{۲}(۲\times۲۰+(n-۱)\frac{۸}{۳})>۱۵۶۸$$

$$n(۵+(n-۱)\frac{۱}{۳})>۳۹۲$$

$$n(\frac{۱۴+n}{۳})>۳۹۲$$

$$n^۲+۱۴n-۱۱۷۶>۰$$

$$(n-۲۸)(n+۴۲)>۰$$

چون $n+۴۲>۰$، پس $n>۲۸$. بنابراین دستکم باید ۲۹ جمله از ابتدای دنباله‌ی موردنظر را جمع کنیم تا مجموع آن‌ها از ۱۵۶۸ بیشتر شود.

مسئله ۱۱ **در دنباله‌ای حسابی $a_۵=۲۲$ و $a_۷+a_۹=۳۲$. مقدار $S_{۲۳}$ چقدر است؟**

راه‌حل: توجه کنید که $a_n=a_۱+(n-۱)d$، بنابراین

$$a_۵=۲۲ \Rightarrow a_۱+۴d=۲۲ \qquad (۱)$$

$$a_۷+a_۹=۳۲ \Rightarrow (a_۱+۶d)+(a_۱+۸d)=۳۲$$

$$۲a_۱+۱۴d=۳۲ \qquad (۲)$$

اگر دستگاه معادله‌های (۱) و (۲) را حل کنیم، به‌دست می‌آید: $a_۱=۳۰$ و $d=-۲$.

از طرف دیگر،

$$S_n=\frac{n}{۲}(۲a_۱+(n-۱)d)$$

بنابراین

$$S_{۲۳}=\frac{۲۳}{۲}(۲\times۳۰+(۲۳-۱)(-۲))=۱۸۴$$

مسئله ۱۲ **در دنباله‌ای حسابی مجموع چهار جمله‌ی نخست برابر ۲۸− و مجموع شش جمله‌ی نخست برابر ۵۸ است. مجموع شانزده جمله‌ی نخست این دنباله چقدر است؟**

راه‌حل: چون $S_۴=-۲۸$ و $S_۶=۵۸$، پس

$$\frac{۴}{۲}(۲a_۱+۳d)=-۲۸ \Rightarrow ۲a_۱+۳d=-۱۴$$

$$\frac{۶}{۲}(۲a_۱+۵d)=۵۸ \Rightarrow ۶a_۱+۱۵d=۵۸$$

ازحل دستگاه معادله‌های فوق نتیجه می‌شود $a_۱=-۳۲$ و $d=\frac{۵۰}{۳}$. بنابراین

$$S_{۱۶}=\frac{۱۶}{۲}(۲a_۱+۱۵d)=۸(۲(-۳۲)+۱۵(\frac{۵۰}{۳}))=۱۴۸۸$$

مسئله ۱۳ **در دنباله‌ای حسابی مجموع جمله‌های ششم، نهم، دوازدهم و پانزدهم برابر با ۲۰ شده است. مجموع بیست جمله‌ی نخست این دنباله چقدر است؟**

راه‌حل اول: بنابر فرض،

$$a_6+a_9+a_{12}+a_{15}=20 \qquad (1)$$

از طرف دیگر، در دنباله‌های حسابی، اگر $k+l=s+t$، آن‌گاه $a_k+a_l=a_s+a_t$. بنابراین

$$a_6+a_{15}=a_9+a_{12}=a_1+a_{20}$$

بنابراین از تساوی (۱) نتیجه می‌شود

$$(a_6+a_{15})+(a_9+a_{12})=20$$

$$(a_1+a_{20})+(a_1+a_{20})=20$$

$$a_1+a_{20}=10$$

اکنون توجه کنید که $S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)$، بنابراین

$$S_{20}=\frac{20}{2}(a_1+a_{20})=\frac{20}{2}(10)=100$$

راه‌حل دوم: چون $a_n=a_1+(n-1)d$، پس

$$a_6+a_9+a_{12}+a_{15}=20$$

$$(a_1+5d)+(a_1+8d)+(a_1+11d)+(a_1+14d)=20$$

$$4a_1+38d=20$$

$$2a_1+19d=10$$

اکنون توجه کنید که $S_n=\frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d)$، بنابراین

$$S_{20}=\frac{20}{2}(2a_1+19d)=\frac{20}{2}(10)=100$$

تست ۴ **اگر عددهای سمت چپ معادله‌ی $1+7+13+\cdots+x=280$ جمله‌های دنباله‌ای حسابی باشند، مجموع رقم‌های x چقدر است؟**

۱) ۹ **۲)** ۱۰ **۳)** ۱۱ **۴)** ۱۲

پاسخ: سمت چپ معادله، مجموع جمله‌های یک دنباله‌ی حسابی است که جمله‌ی اول آن ۱ و قدرنسبت آن ۶ است. بنابراین

$$1+7+13+\cdots+x=\frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d)=\frac{n}{2}(2+6(n-1))$$

$$=\frac{n}{2}(6n-4)=3n^2-2n$$

در نتیجه

$$3n^2-2n=280 \Rightarrow 3n^2-2n-280=0$$

$$(3n+28)(n-10)=0$$

$$n=-\frac{28}{3}\ \text{(غ.ق.ق)}, \quad n=10$$

به این ترتیب

$$x=a_{10}=a_1+(10-1)d=1+9\times 6=55$$

پس مجموع رقم‌های x برابر ۱۰ است.

مسئله ۱۴ **جمله‌های دنباله‌ای حسابی عددهای طبیعی‌اند و مجموع چهار جمله‌ی نخست آن برابر ۵۶ است. اگر جمله‌ی دوازدهم این دنباله بین ۶۷ و ۷۴ باشد، جمله‌ی بیستم آن چقدر است؟**

راه‌حل: توجه کنید که

$$S_4=56\Rightarrow \frac{4}{2}(2a_1+3d)=56\Rightarrow 2a_1+3d=28 \qquad (1)$$

از طرف دیگر، $67<a_{12}<74$، پس

$$67<a_1+11d<74 \qquad (2)$$

از تساوی (۱) به‌دست می‌آید $a_1=\frac{28-3d}{2}$ و در نتیجه نابرابری‌های (۲) را می‌توان این‌طور نوشت

$$67<\frac{28-3d}{2}+11d<74$$

$$\frac{106}{19}<d<\frac{120}{19}$$

چون d عددی صحیح است ($d=a_2-a_1$)، پس $d=6$ و در نتیجه، از تساوی (۱) نتیجه می‌شود $a_1=5$. به این ترتیب، $a_{20}=a_1+19d=119$.

مسئله ۱۵ **در دنباله‌ای حسابی همواره $4S_n=S_{2n}$ و جمله‌ی پنجم برابر با ۱۸ است. جمله‌ی نخست و قدرنسبت این دنباله را پیدا کنید.**

راه‌حل: در تساوی $S_{2n}=4S_n$ قرار می‌دهیم $n=1$:

$$S_2=4S_1\Rightarrow a_2+a_1=4a_1\Rightarrow a_2=3a_1\Rightarrow a_1+d=3a_1\Rightarrow d=2a_1$$

چون $a_5=18$، پس

$$a_5=a_1+4d=18$$

$$a_1+4(2a_1)=18$$

بنابراین $a_1=2$ و $d=4$.

مسئله ۱۶ **در دنباله‌ای حسابی $\frac{S_m}{S_n}=\frac{m^2}{n^2}$ $(m\neq n)$. ثابت کنید $\frac{a_m}{a_n}=\frac{2m-1}{2n-1}$.**

راه‌حل: از تساوی $\frac{S_m}{S_n}=\frac{m^2}{n^2}$ نتیجه می‌شود $n^2S_m=m^2S_n$. بنابراین

$$n^2\,\frac{m}{2}(2a_1+(m-1)d)=m^2\,\frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d)$$

$$n(2a_1+(m-1)d)=m(2a_1+(n-1)d)$$

$$2a_1n+mnd-nd=2a_1m+mnd-md$$

$$2a_1(n-m)=d(n-m)\Rightarrow d=2a_1$$

اکنون توجه کنید که

$$\frac{a_m}{a_n}=\frac{a_1+(m-1)d}{a_1+(n-1)d}=\frac{a_1+(m-1)(2a_1)}{a_1+(n-1)(2a_1)}$$

$$=\frac{a_1(2m-1)}{a_1(2n-1)}=\frac{2m-1}{2n-1}$$

مسئله ۱۷ **در دنباله‌ای حسابی مجموع k جمله‌ی نخست برابر با صفر است. ثابت کنید مجموع m جمله‌ی بعدی برابر است با $\frac{-a_1(k+m)m}{k-1}$.**

راه‌حل: چون مجموع k جمله‌ی نخست صفر است، پس

$$S_k=\frac{k}{2}(2a_1+(k-1)d)=0\Rightarrow 2a_1+(k-1)d=0\Rightarrow d=-\frac{2a_1}{k-1}$$

چون مجموع m جمله‌ی بعدی همان مجموع $k+m$ جمله‌ی نخست است، پس

$$S_{m+k}=(\frac{m+k}{2})(2a_1+(m+k-1)d)=(\frac{m+k}{2})(2a_1+(m+k-1)(-\frac{2a_1}{k-1}))$$

$$=a_1(m+k)(1-\frac{m+k-1}{k-1})=a_1(m+k)(\frac{k-1-m-k+1}{k-1})=\frac{-a_1(m+k)m}{k-1}$$

مسئله ۱۸ **در دنباله‌ای حسابی، مجموع m جمله‌ی نخست برابر با مجموع n جمله‌ی نخست شده است $(m\neq n)$. ثابت کنید مجموع $m+n$ جمله‌ی نخست برابر صفر است.**

راه‌حل: می‌توان نوشت

$$S_m=S_n\Rightarrow\frac{m}{2}(2a_1+(m-1)d)=\frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d)$$

$$2ma_1+(m^2-m)d=2na_1+(n^2-n)d$$

$$2(m-n)a_1+(m^2-m-n^2+n)d=0$$

$$2(m-n)a_1+((m-n)(m+n)-(m-n))d=0$$

$$2(m-n)a_1+(m-n)(m+n-1)d=0$$

$$2a_1+(m+n-1)d=0$$

بنابراین

$$S_{m+n}=\frac{m+n}{2}(2a_1+(m+n-1)d)=\frac{m+n}{2}\times 0=0$$

مسئله ۱۹ **در دنباله‌ای حسابی $a_k=\frac{1}{m}$ و $a_m=\frac{1}{k}$ $(k\neq m)$. ثابت کنید مجموع km جمله‌ی نخست این دنباله برابر $\frac{1}{2}(km+1)$ است.**

راه‌حل: توجه کنید که

$$a_k=\frac{1}{m}\Rightarrow a_1+(k-1)d=\frac{1}{m}\qquad (1)$$

$$a_m=\frac{1}{k}\Rightarrow a_1+(m-1)d=\frac{1}{k}\qquad (2)$$

اگر تساوی (۲) را از تساوی (۱) کم کنیم، به‌دست می‌آید

$$(k-m)d=\frac{1}{m}-\frac{1}{k}=\frac{k-m}{km}\Rightarrow d=\frac{1}{km}\qquad (k-m\neq 0)$$

بنابراین از تساوی (۱) نتیجه می‌شود

$$a_1=\frac{1}{m}-(k-1)d=\frac{1}{m}-(k-1)\frac{1}{km}=\frac{1}{km}$$

به این ترتیب

$$S_{km}=\frac{km}{۲}(۲a_۱+(km-۱)d)$$
$$=\frac{km}{۲}(\frac{۲}{km}+(km-۱)\frac{۱}{km})$$
$$=\frac{km}{۲}(\frac{۲}{km}+۱-\frac{۱}{km})$$
$$=\frac{km}{۲}(\frac{۱}{km}+۱)=\frac{۱}{۲}(km+۱)$$

اگر S_k مجموع k جمله‌ی نخست دنباله‌ای دلخواه باشد، آن‌گاه

$$S_k-S_{k-۱}=a_۱+a_۲+\cdots+a_{k-۱}+a_k-(a_۱+a_۲+\cdots+a_{k-۱})=a_k$$

بنابراین نتیجه‌ی زیر به‌دست می‌آید.

نتیجه در هر دنباله $a_۱=S_۱$ و $a_n=S_n-S_{n-۱}$.

تست ۵ **اگر مجموع n جمله‌ی نخست دنباله‌ای حسابی به صورت $S_n=۲n^۲-۳n$ باشد، حاصل‌ضرب جمله‌ی نخست و قدرنسبت این دنباله چقدر است؟**

۱) -۴ **۲)** -۶ **۳)** -۸ **۴)** -۹

پاسخ: توجه کنید که

$$S_۱=۲\times۱^۲-۳\times۱=-۱\Rightarrow a_۱=-۱$$
$$S_۲=۲\times۲^۲-۳\times۲=۲\Rightarrow a_۱+a_۲=۲$$
$$-۱+a_۲=۲$$
$$a_۲=۳$$

بنابراین قدرنسبت دنباله برابر است با $d=a_۲-a_۱=۴$. در نتیجه $a_۱d=-۴$.

مسئله ۲۰ **ثابت کنید در هر دنباله‌ی حسابی قدرنسبت برابر است با $S_n-۲S_{n-۱}+S_{n-۲}$.**

راه‌حل: ابتدا توجه کنید که $a_n=S_n-S_{n-۱}$. بنابراین

$$S_n-۲S_{n-۱}+S_{n-۲}=(S_n-S_{n-۱})-(S_{n-۱}-S_{n-۲})$$
$$=a_n-a_{n-۱}=d$$

توجه کنید که

$$S_n=\frac{n}{۲}(۲a_۱+(n-۱)d)=na_۱+\frac{n^۲d}{۲}-\frac{nd}{۲}$$
$$=\frac{d}{۲}n^۲+(a_۱-\frac{d}{۲})n$$

یعنی عددهایی مانند A و B وجود دارند که $S_n=An^۲+Bn$.

نتیجه اگر S_n مجموع n جمله‌ی دنباله‌ای حسابی باشد، عددهایی مانند A و B وجود دارند که

$$S_n=An^۲+Bn$$

تست ۶ **اگر $S_n=-2n^2+(5+k)n-k+2$ مجموع n جمله‌ی نخست دنباله‌ای حسابی باشد، جمله‌ی دوم این دنباله چقدر است؟**

۱) ۱ **۲)** ۲ **۳)** ۳ **۴)** ۴

پاسخ: چون S_n باید به شکل An^2+Bn باشد، پس $-k+2=0$، در نتیجه $k=2$. به این ترتیب

$$S_n=-2n^2+7n$$

در نتیجه

$$S_1=-2\times1^2+7\times1=5\Rightarrow a_1=5$$

$$S_2=-2\times2^2+7\times2=6\Rightarrow a_1+a_2=6\Rightarrow 5+a_2=6\Rightarrow a_2=1$$

ب) دنباله‌های هندسی

دنباله‌ی هندسی دنباله‌ای است که در آن هر جمله به‌جز جمله‌ی نخست، با ضرب کردن عددی ثابت و غیرصفر به نام **قدرنسبت** در جمله‌ی قبل از آن به‌دست می‌آید. به این ترتیب، اگر جمله‌ی نخست دنباله‌ای هندسی a_1 و قدرنسبت آن q باشد، این دنباله به صورت زیر است:

$$a_1\,,\,a_1q\,,\,a_1q^2,\,a_1q^3,\,\ldots$$

معلوم است که جمله‌ی عمومی این دنباله به صورت $a_n=a_1q^{n-1}$ است. در این کتاب فرض می‌کنیم $a_1\neq0$.

مثال: پینوکیو ۱ سکه داشت. روباه مکار به او وعده داد که اگر شبی سکه‌اش را بالای تپه بکارد، فردا صبح درختی با ۲ سکه روی آن می‌روید و بعد از آن هر روز صبح تعداد سکه‌ها دو برابر می‌شود. در این داستان، تعداد سکه‌های روی درخت در هر صبح، دنباله‌ای هندسی با جمله‌ی نخست ۲ و قدرنسبت ۲ تشکیل می‌دهند:

صبح اول	صبح دوم	صبح سوم	...
2	$2\times2=2^2$	$2\times2^2=2^3$	

پینوکیو می‌خواهد حساب کند که در صبح روز سی‌اُم چند سکه روی درخت وجود دارد. در حقیقت، او می‌خواهد مجموع زیر را حساب کند:

$$S=2+2^2+2^3+\cdots+2^{30}\qquad(1)$$

با این که می‌دانیم پینوکیو هیچ‌وقت به این همه سکه نمی‌رسد، ولی بد نیست به او کمک کنیم تا این مجموع را حساب کند، زیرا روش پیدا کردن این مجموع، برای پیدا کردن مجموع n جمله‌ی نخست دنباله‌های هندسی به کارمان می‌آید.

دو طرف تساوی (۱) را در ۲ ضرب می‌کنیم:

$$2S=2^2+2^3+2^4+\cdots+2^{31}\qquad(2)$$

اکنون اگر تساوی (۱) را از تساوی (۲) کم کنیم، به‌دست می‌آید

$$2S-S=2^2+2^3+2^4+\cdots+2^{31}-(2+2^2+2^3+\cdots+2^{30})$$

$$S=2^{31}-2=2(2^{30}-1)$$

با استفاده از ماشین حساب معلوم می‌شود که $S=2147483646$. توجه کنید که ۲، که دو طرف تساوی (۱) را در آن ضرب کردیم، قدرنسبت دنباله‌ی هندسی موردنظر است.

در این‌جا دستوری برای پیدا کردن مجموع n جمله‌ی نخست دنباله‌های هندسی پیدا می‌کنیم.
فرض کنید a_1، a_2، ... دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت q باشد در این صورت $a_n=a_1q^{n-1}$.
فرض کنید

$$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$$

معلوم است که اگر $q=1$، آن‌گاه همه‌ی جمله‌ها برابر a_1 هستند، در نتیجه

$$S_n=na_1$$

فرض کنید $q\neq 1$. توجه کنید که

$$S_n=a_1+a_1q+a_1q^2+\cdots+a_1q^{n-1} \qquad (1)$$

و اگر دو طرف این تساوی را در q ضرب کنیم، به‌دست می‌آید

$$qS_n=a_1q+a_1q^2+a_1q^3+\cdots+a_1q^n \qquad (2)$$

اگر تساوی (۱) را از تساوی (۲) کم کنیم، نتیجه می‌شود

$$qS_n-S_n=a_1q^n-a_1$$

$$(q-1)S_n=a_1(q^n-1)$$

بنابراین $S_n=a_1\dfrac{q^n-1}{q-1}$.

نتیجه

اگر a_1، a_2، ... و a_n، n جمله‌ی نخست دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت q باشند، $q\neq 1$ و S_n مجموع این جمله‌ها باشد، آن‌گاه

$$S_n=a_1\frac{q^n-1}{q-1}$$

تست ۷ **مجموع پنج جمله‌ی نخست دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت ۵ برابر $\frac{781}{75}$ شده است. جمله‌ی نخست این دنباله چقدر است؟**

۱) $\frac{1}{85}$ ۲) $\frac{1}{75}$ ۳) $\frac{1}{65}$ ۴) $\frac{1}{55}$

پاسخ: چون $q=5$ و $S_5=\frac{781}{75}$، پس

$$S_5=a_1\frac{q^5-1}{q-1}=a_1\frac{5^5-1}{5-1}=\frac{781}{75}$$

بنابراین $a_1=\frac{1}{75}$.

مسئله ۲۱ **در دنباله‌ای هندسی $a_1=135$ و $S_3=195$. قدرنسبت این دنباله چقدر است؟**

راه‌حل: بنابر فرض مسئله،

$$S_3=a_1\frac{q^3-1}{q-1}=195\Rightarrow 135(q^3-1)=195(q-1)$$

$$135(q-1)(q^2+q+1)=195(q-1)\Rightarrow 9q^2+9q+9=13$$

$$9q^2+9q-4=0\Rightarrow(3q-1)(3q+4)=0\Rightarrow q=\frac{1}{3},\quad q=-\frac{4}{3}$$

مسئله ۲۲ **در دنباله‌ای هندسی $a_1=\sqrt[3]{2}-1$ و $a_3=(\sqrt[3]{2}-1)\sqrt[3]{4}$. مجموع دوازده جمله‌ی نخست این دنباله چقدر است؟**

راه‌حل: قدرنسبت دنباله را به‌دست می‌آوریم:

$$a_3=a_1q^2 \Rightarrow (\sqrt[3]{2}-1)\sqrt[3]{4}=(\sqrt[3]{2}-1)q^2 \Rightarrow q^2=\sqrt[3]{4} \Rightarrow q=\pm\sqrt[3]{2}$$

اگر $q=\sqrt[3]{2}$، آن‌گاه

$$S_{12}=(\sqrt[3]{2}-1)\frac{(\sqrt[3]{2})^{12}-1}{\sqrt[3]{2}-1}=16-1=15$$

اگر $q=-\sqrt[3]{2}$، آن‌گاه

$$S_{12}=(\sqrt[3]{2}-1)\frac{(-\sqrt[3]{2})^{12}-1}{-\sqrt[3]{2}-1}=(\sqrt[3]{2}-1)\frac{16-1}{-\sqrt[3]{2}-1}=-15(\frac{\sqrt[3]{2}-1}{\sqrt[3]{2}+1})$$

مسئله ۲۳ **مقدار $\frac{1+2+2^2+\cdots+2^{13}}{1+2+2^2+\cdots+2^6}$ را حساب کنید.**

راه‌حل: در دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی نخست a_1 و قدرنسبت q، مجموع n جمله‌ی نخست برابر است با $a_1\frac{q^n-1}{q-1}$. در نتیجه

$$\frac{1+2+2^2+\cdots+2^{13}}{1+2+2^2+\cdots+2^6}=\frac{1\times\frac{2^{14}-1}{2-1}}{1\times\frac{2^7-1}{2-1}}=\frac{2^{14}-1}{2^7-1}=\frac{(2^7-1)(2^7+1)}{2^7-1}=2^7+1=129$$

تست ۸ **اگر $\frac{(a^8+a^4+1)(a^3+a^2+a+1)}{a^9+a^6+a^3+1}=31$، مقدار a چقدر است؟**

۱) -5 ۲) $-5, 5$ ۳) $-6, 5$ ۴) -7

پاسخ: توجه کنید که (چون $a\neq 1$)،

$$a^8+a^4+1=\frac{a^{12}-1}{a^4-1}$$

$$a^3+a^2+a+1=\frac{a^4-1}{a-1}$$

اگر این تساوی‌ها را در هم ضرب کنیم، معلوم می‌شود که صورت کسر داده شده برابر است با

$$\frac{a^{12}-1}{a-1}$$

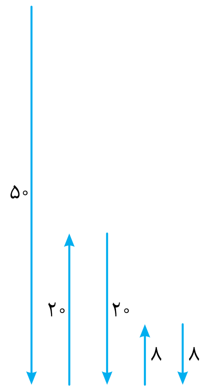
همچنین مخرج کسر برابر است با $\frac{a^{12}-1}{a^3-1}$. در نتیجه

$$\frac{\frac{a^{12}-1}{a-1}}{\frac{a^{12}-1}{a^3-1}}=\frac{a^3-1}{a-1}=a^2+a+1=31$$

بنابراین

$$a^2+a=30 \Rightarrow a^2+a-30=0 \Rightarrow a=-6\,,\quad a=5$$

مسئله ۲۴ توپی را از هر ارتفاعی که رها می‌کنیم، پس از برخورد با زمین به اندازه‌ی دو پنجم ارتفاع اولیه‌ی خود بالا می‌رود. اگر این توپ را از ارتفاع ۵۰ متری رها کنیم، مسافتی که قبل از برخورد دهم با زمین طی می‌کند، چند متر است؟



راه‌حل: طول مسیری که توپ بعد از اولین برخورد تا دهمین برخورد با زمین طی می‌کند برابر است با

$$۲(۲۰+۸+\cdots+۲۰\times(\frac{۲}{۵})^۸)=۲\times ۲۰\times\frac{(\frac{۲}{۵})^۹-۱}{\frac{۲}{۵}-۱}=\frac{۲۰۰}{۳}-\frac{۲۰۰}{۳}(\frac{۲}{۵})^۹$$

توپ قبل از اولین برخورد با زمین هم ۵۰ متر طی کرده است. پس طول کل مسیر برابر است با

$$۵۰+\frac{۲۰۰}{۳}-\frac{۲۰۰}{۳}(\frac{۲}{۵})^۹=\frac{۳۵۰}{۳}-\frac{۲۰۰}{۳}(\frac{۲}{۵})^۹$$

مسئله ۲۵ چند تا از جمله‌های دنباله‌ی هندسی $\frac{۲}{۹},-\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۲},\ldots$ را از ابتدا جمع کنیم تا حاصل برابر $\frac{۵۵}{۷۲}$ شود؟

راه‌حل: توجه کنید که $S_n=a_۱\frac{q^n-۱}{q-۱}$. در این دنباله $a_۱=\frac{۲}{۹}$ و

$$q=\frac{a_۲}{a_۱}=\frac{-\frac{۱}{۳}}{\frac{۲}{۹}}=-\frac{۳}{۲}$$

بنابراین

$$S_n=\frac{۵۵}{۷۲}\Rightarrow\frac{۵۵}{۷۲}=\frac{۲}{۹}\times\frac{(-\frac{۳}{۲})^n-۱}{-\frac{۳}{۲}-۱}\Rightarrow(-\frac{۳}{۲})^n=-\frac{۲۴۳}{۳۲}=(-\frac{۳}{۲})^۵$$

بنابراین $n=۵$. یعنی باید پنج جمله‌ی نخست دنباله‌ی موردنظر را با هم جمع کنیم تا حاصل برابر $\frac{۵۵}{۷۲}$ شود.

تست ۹ در یک دنباله‌ی هندسی، مجموع n جمله‌ی اول از رابطه‌ی $S_n=\frac{۳^n-۲^n}{۴\times ۳^{n-۲}}$ به‌دست می‌آید. قدرنسبت دنباله کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

پاسخ: ابتدا جمله‌های اول و دوم دنباله را پیدا می‌کنیم:

$$a_۱=S_۱=\frac{۳-۲}{۴\times ۳^{-۱}}=\frac{۳}{۴},\quad a_۱+a_۲=S_۲=\frac{۹-۴}{۴\times ۱}=\frac{۵}{۴}\Rightarrow\frac{۳}{۴}+a_۲=\frac{۵}{۴}\Rightarrow a_۲=\frac{۱}{۲}$$

بنابراین

$$q=\frac{a_۲}{a_۱}=\frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{۳}{۴}}=\frac{۲}{۳}$$

مسئله ۲۶ **تعداد جمله‌های دنباله‌ای هندسی عددی زوج است و مجموع همه‌ی این جمله‌ها، پنج برابر مجموع جمله‌های با ردیف فرد است. قدرنسبت این دنباله‌ی هندسی چقدر است؟**

راه‌حل: فرض کنید تعداد جمله‌های دنباله‌ی موردنظر $2n$ باشد. بنابر فرض

$$S_{2n}=5(a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1})$$

$$a_1\frac{q^{2n}-1}{q-1}=5(a_1+a_1q^2+\cdots+a_1q^{2n-2})$$

$$=5(a_1+a_1q^2+\cdots+a_1(q^2)^{n-1})$$

$$=5a_1\frac{(q^2)^n-1}{q^2-1}=5a_1\frac{q^{2n}-1}{(q-1)(q+1)}$$

بنابراین $q+1=5$، در نتیجه $q=4$.

مسئله ۲۷ **در دنباله‌ای هندسی مجموع پنج جمله‌ی نخست پنج برابر جمله‌ی نخست است و مجموع پانزده جمله‌ی نخست برابر ۱۰۰ است. مجموع جمله‌های نخست، ششم و یازدهم این دنباله چقدر است؟**

راه‌حل: بنابر فرض مسئله،

$$S_5=5a_1\Rightarrow a_1\frac{q^5-1}{q-1}=5a_1\Rightarrow q^5-1=5(q-1) \qquad (1)$$

$$S_{15}=100\Rightarrow a_1\frac{q^{15}-1}{q-1}=100\Rightarrow a_1(q^{15}-1)=100(q-1) \qquad (2)$$

دو طرف تساوی (۲) را بر دو طرف تساوی (۱) تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{a_1(q^{15}-1)}{q^5-1}=\frac{100(q-1)}{5(q-1)}$$

$$\frac{a_1(q^5-1)(q^{10}+q^5+1)}{q^5-1}=20$$

$$a_1q^{10}+a_1q^5+a_1=20$$

بنابراین

$$a_1+a_6+a_{11}=20$$

مسئله ۲۸ **اگر S_n مجموع n جمله‌ی نخست دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت q باشد، ثابت کنید $\frac{S_{2n}}{S_n}=1+q^n$.**

راه‌حل: توجه کنید که

$$S_n=a_1\frac{q^n-1}{q-1},\qquad S_{2n}=a_1\frac{q^{2n}-1}{q-1}$$

بنابراین

$$\frac{S_{2n}}{S_n}=\frac{a_1\frac{q^{2n}-1}{q-1}}{a_1\frac{q^n-1}{q-1}}=\frac{q^{2n}-1}{q^n-1}=\frac{(q^n-1)(q^n+1)}{q^n-1}=q^n+1$$

مسئله ۲۹ **فرض کنید $a_1, a_2, \ldots$ دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت q باشد. ثابت کنید اگر $n \geq 2$، آن‌گاه**

$$a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{2n} = \frac{q}{1+q} S_{2n}$$

راه‌حل: توجه کنید که $S_{2n} = a_1 \dfrac{q^{2n}-1}{q-1}$. بنابراین

$$a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{2n} = a_1 q + a_1 q^3 + a_1 q^5 + \cdots + a_1 q^{2n-1}$$

$$= a_1 (q + q^3 + q^5 + \cdots + q^{2n-1})$$

$$= a_1 \times \frac{q((q^2)^n - 1)}{q^2 - 1} = \frac{a_1 q (q^{2n} - 1)}{(q+1)(q-1)}$$

$$= \frac{q}{q+1} \times a_1 \frac{q^{2n}-1}{q-1} = \frac{q}{q+1} S_{2n}$$

توجه برای محاسبه‌ی مجموع $a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{2n}$ می‌توانیم به این نکته توجه کنیم که جمله‌های این مجموع، جمله‌های دنباله‌ای هندسی با جمله‌ی نخست a_2 و قدرنسبت q^2 هستند، پس مجموع آن‌ها برابر است با

$$a_2 \frac{(q^2)^n - 1}{q^2 - 1} = a_1 q \frac{q^{2n} - 1}{q^2 - 1}$$

مسئله ۳۰ **فرض کنید در دنباله‌ای هندسی که $3n$ جمله دارد، S_1 مجموع n جمله‌ی نخست، S_2 مجموع n جمله‌ی بعدی و S_3 مجموع n جمله‌ی آخر باشد. ثابت کنید S_1, S_2, S_3 دنباله‌ای هندسی است.**

راه‌حل: توجه کنید که

$$S_1 = a_1 + a_1 q + \cdots + a_1 q^{n-1} = a_1 \frac{q^n - 1}{q-1}$$

$$S_2 = a_1 q^n + a_1 q^{n+1} + \cdots + a_1 q^{2n-1} = a_1 q^n (1 + q + \cdots + q^{n-1}) = a_1 q^n \frac{q^n - 1}{q-1}$$

$$S_3 = a_1 q^{2n} + a_1 q^{2n+1} + \cdots + a_1 q^{3n-1} = a_1 q^{2n} (1 + q + \cdots + q^{n-1}) = a_1 q^{2n} \frac{q^n - 1}{q-1}$$

به این ترتیب

$$S_2 = S_1 q^n \,, \quad S_3 = S_2 q^n$$

بنابراین S_1, S_2, S_3 دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت q^n است.

مسئله ۳۱ **مجموع زیر را حساب کنید:**

$$9 + 99 + 999 + \cdots + \underbrace{99\ldots9}_{\text{۱۰۰ تا}}$$

راه‌حل: ابتدا توجه کنید که

$$9 = 10 - 1, \qquad 99 = 10^2 - 1$$

$$999 = 10^3 - 1, \ \ldots, \qquad \underbrace{99\ldots9}_{\text{۱۰۰ تا}} = 10^{100} - 1$$

بنابراین

$$9+99+999+\cdots+\underbrace{999\ldots9}_{\text{۱۰۰تا}}=(10-1)+(10^2-1)+(10^3-1)+\cdots+(10^{100}-1)$$

$$=10+10^2+10^3+\cdots+10^{100}-100=10\times\frac{10^{100}-1}{10-1}-100$$

$$=\frac{10^{101}-10}{9}-100=\frac{10^{101}-910}{9}$$

مسئله ۳۲ مجموع زیر را حساب کنید:

$$\frac{3}{5}+\frac{4}{5^2}+\frac{3}{5^3}+\frac{4}{5^4}+\cdots+\frac{3}{5^{99}}+\frac{4}{5^{100}}$$

راه‌حل: اگر دسته‌بندی مجموع موردنظر را عوض کنیم، برابر می‌شود با

$$(\frac{3}{5}+\frac{3}{5^3}+\cdots+\frac{3}{5^{99}})+(\frac{4}{5^2}+\frac{4}{5^4}+\cdots+\frac{4}{5^{100}})=\frac{3}{5}\times\frac{(\frac{1}{5^2})^{50}-1}{\frac{1}{5^2}-1}+\frac{4}{5^2}\times\frac{(\frac{1}{5^2})^{50}-1}{\frac{1}{5^2}-1}$$

$$=\frac{3}{5}\times(-\frac{25}{24})(\frac{1}{5^{100}}-1)+\frac{4}{25}\times(-\frac{25}{24})(\frac{1}{5^{100}}-1)$$

$$=\frac{19}{24}(1-\frac{1}{5^{100}})$$

توجه کنید که بنابر دستور مجموع n جمله‌ی نخست دنباله‌های هندسی،

$$a_1+a_1q+a_1q^2+\cdots+a_1q^{n-1}=a_1\frac{q^n-1}{q-1}$$

در نتیجه، اگر فرض کنیم $a_1=1$، به اتحاد زیر می‌رسیم:

$$1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}=\frac{q^n-1}{q-1}$$

به این ترتیب اتحاد زیر به‌دست می‌آید.

نتیجه اگر a عددی حقیقی و n عددی طبیعی باشد، آن‌گاه

$$a^n-1=(a-1)(a^{n-1}+a^{n-2}+\cdots+a^2+a+1)$$

اگر در این اتحاد به جای a قرار دهیم $\frac{a}{b}$، به‌دست می‌آید

$$(\frac{a}{b})^n-1=(\frac{a}{b}-1)((\frac{a}{b})^{n-1}+(\frac{a}{b})^{n-2}+\cdots+\frac{a}{b}+1)$$

اگر دو طرف این اتحاد را در b^n ضرب کنیم، به‌دست می‌آید

$$a^n-b^n=b(\frac{a}{b}-1)b^{n-1}((\frac{a}{b})^{n-1}+(\frac{a}{b})^{n-2}+\cdots+\frac{a}{b}+1)$$

$$=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$$

اگر n عددی فرد باشد و در این اتحاد به جای b قرار دهیم $-b$، به‌دست می‌آید

$$a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+\cdots-ab^{n-2}+b^{n-1})$$

دو اتحاد مهم

اگر a و b عددهایی حقیقی باشند و n عددی طبیعی باشد، آن‌گاه

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

و اگر n عددی طبیعی و فرد باشد، آن‌گاه

$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \cdots - ab^{n-2} + b^{n-1})$$

مسئله ۳۳ عبارت $\frac{x^8+x^6+x^4+x^2+1}{x^4+x^3+x^2+x+1}$ را ساده کنید.

راه‌حل: توجه کنید که

$$x^8+x^6+x^4+x^2+1=(x^2)^4+(x^2)^3+(x^2)^2+x^2+1$$

$$=\frac{(x^2)^5-1}{x^2-1}=\frac{(x^5)^2-1}{x^2-1}$$

$$=\frac{x^5-1}{x-1}\times\frac{x^5+1}{x+1}$$

$$=(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)$$

بنابراین

$$\frac{x^8+x^6+x^4+x^2+1}{x^4+x^3+x^2+x+1}=x^4-x^3+x^2-x+1$$

تمرین

۱- مجموع نوزده جملهٔ نخست دنباله‌ی حسابی زیر را پیدا کنید.

$$9, 5, 1, -3, \dots$$

۲- الف) مجموع صد جمله‌ی نخست دنباله‌ی حسابی $\dots, 2/7, 1/5, 0/3$ چقدر است؟

ب) مجموع یازده جمله‌ی نخست دنباله‌ی حسابی $\dots, \frac{1}{10}, \frac{1}{12}, \frac{1}{15}$ چقدر است؟

۳- مجموع $3+8+13+\cdots+(5n+3)$ را حساب کنید.

۴- جمله‌ی عمومی دنباله‌ای حسابی به صورت $a_n=\frac{3n-1}{4}$ است. مجموع بیست جمله‌ی نخست این دنباله‌ی حسابی چقدر است؟

۵- مجموع جمله‌های دنباله‌ای حسابی برابر با -504 است. اگر جمله‌ی نخست این دنباله‌ی حسابی ۶ و جمله‌ی آخر آن -62 باشد، این دنباله‌ی حسابی چند جمله دارد؟

۶- در دنباله‌ای حسابی

$$a_1+a_5+a_{10}+a_{15}+a_{20}+a_{24}=225$$

مجموع بیست‌وچهار جمله‌ی نخست این دنباله چقدر است؟

۷- در دنباله‌ای حسابی $a_1=-9$ و مجموع هفده جمله‌ی نخست این دنباله برابر ۱۵ شده است. قدرنسبت این دنباله‌ی حسابی چقدر است؟

۸- چند تا از جمله‌های دنباله‌ی حسابی $\dots, -5, -\frac{11}{2}, -6$ را از ابتدا جمع کنیم تا مجموع آن‌ها برابر -25 شود؟

۹- در دنباله‌ای حسابی $a_5=9$ و $a_2+a_9=20$. مجموع ده جمله‌ی نخست این دنباله چقدر است؟

۱۰- در دنباله‌ای حسابی $a_1+a_8=25$ و $a_3+a_5=19$. مجموع دوازده جمله‌ی نخست این دنباله چقدر است؟

۱۱- جمله‌ی نخست دنباله‌ای حسابی برابر ۸ و مجموع پانزده جمله‌ی نخست آن برابر ۱۱۷۰ است. مجموع ده جمله‌ی نخست این دنباله چقدر است؟

۱۲- در دنباله‌ای حسابی، سه برابر جمله‌ی دهم ۲۴ واحد از جمله‌ی دوم کمتر است. مجموع بیست‌وهفت جمله‌ی نخست این دنباله چقدر است؟

۱۳- در دنباله‌ای حسابی مجموع چهارده جمله‌ی نخست ۷۷ واحد بیشتر از مجموع سه جمله‌ی نخست است. جمله‌ی چندم این دنباله برابر ۷ است؟

۱۴- مجموع جمله‌های دنباله‌ای حسابی که جمله‌ی نخست آن ۱۷ و قدرنسبت آن -2 است برابر ۷۲ است. این دنباله چند جمله دارد؟

۱۵- جمله‌ی نخست دنباله‌ای حسابی برابر ۲ است و مجموع پنج جمله‌ی نخست این دنباله برابر با یک چهارم مجموع پنج جمله‌ی بعدی آن است. مجموع سی جمله‌ی نخست این دنباله چقدر است؟

۱۶- در دنباله‌ای حسابی با قدرنسبت منفی، $a_1=-3$ و $a_3a_7=24$. مجموع دوازده جمله‌ی نخست این دنباله چقدر است؟

۱۷- درباره‌ی دنباله‌ی حسابی $a_1, a_2, \dots, a_{21}$ می‌دانیم که مجموع جمله‌های با ردیف فرد پانزده واحد از مجموع جمله‌های با ردیف زوج بیشتر است. مجموع جمله‌های این دنباله‌ی حسابی چقدر است؟

۱۸- مجموع جمله‌های دنباله‌ای حسابی برابر ۷۱۵ است. اگر به اولین جمله ۱ واحد، به دومین جمله ۳ واحد، به سومین جمله ۵ واحد و ... اضافه کنیم، حاصل‌جمع جمله‌های دنباله‌ی جدید برابر با ۸۳۶ می‌شود. مجموع اولین جمله، آخرین جمله و جمله‌ی وسط دنباله‌ی حسابی اولیه چقدر است؟

۱۹- مجموع n جمله‌ی نخست دنباله‌های حسابی زیر برابر است. مقدار n چقدر است؟

$$1, 4, 7, \dots$$

$$23, 25, 27, \dots$$

۲۰- معادله‌ی زیر را حل کنید که در سمت چپ آن جمله‌های متوالی دنباله‌ای حسابی با هم جمع شده‌اند:

$$(3+x)+(9+x)+(15+x)+\cdots+(93+x)=832$$

۲۱- در دنباله‌ی حسابی $a_3=-13$ و $a_7=3$. در میان عددهای S_1، S_2، S_3 و ... کمترین مقدار چقدر است؟

۲۲- در دنباله‌ی حسابی $a_1>0$ و $3a_8=5a_{13}$. در میان عددهای S_{10}، S_{11}، S_{20} و S_{21} بیشترین مقدار چقدر است؟

۲۳- در دنباله‌ای حسابی با قدرنسبت ۲، مقدار $\frac{S_{3n}}{S_n}$ به مقدار n بستگی ندارد. مجموع پانزده جمله‌ی نخست این دنباله چقدر است؟

۲۴- مجموع n جمله‌ی نخست دنباله‌ای حسابی (به ازای هر n) برابر با $4n^2-3n$ است. قدرنسبت این دنباله چقدر است؟

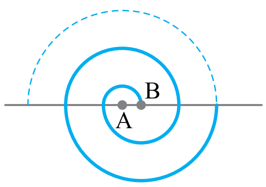
۲۵- جمله‌های دنباله‌ای حسابی عددهایی طبیعی‌اند. جمله‌ی هشتم این دنباله مضربی از ۴ است و مجموع پانزده جمله‌ی نخست این دنباله عددی در بازه‌ی $(337, 393)$ است. جمله‌ی هشتم این دنباله چقدر است؟

۲۶- مجموع مضرب‌های دو رقمی ۷ چقدر است؟

۲۷- مجموع عددهای فرد در بازه‌ی $[13, 97]$ چقدر است؟

۲۸- مجموع عددهای سه رقمی که بر ۱۷ بخش‌پذیر نیستند چقدر است؟

۲۹- فنری از سیزده نیم‌دایره‌ی پشت سر هم که مرکزهای آن‌ها یکی در میان در نقطه‌های A و B است درست شده است. نیم‌دایره‌ی اول به مرکز A و شعاع ۰/۵ است، نیم‌دایره‌ی دوم به مرکز B و شعاع ۱ است، نیم‌دایره‌ی بعدی به مرکز A و شعاع ۱/۵ است، و همین‌طور تا نیم‌دایره‌ی سیزدهم. طول این فنر چقدر است؟



۳۰- خانه‌های یک خیابان پشت‌سرهم از ۱ تا ۴۹ شماره‌گذاری شده‌اند. ثابت کنید خانه‌ای وجود دارد که مجموع شماره‌های خانه‌های پیش از آن با مجموع شماره‌های خانه‌های پس از آن برابر است. شماره‌ی این خانه چیست؟

۳۱- در یک دوره‌ی ۱۵ روزه، روی یک درخت گیلاس هر روز ۱۲ شکوفه بیشتر از روز قبل روییده است. اگر تعداد شکوفه‌های روییده‌شده روی این درخت در ۹ روز نخست برابر با تعداد شکوفه‌های روییده شده در ۶ روز آخر باشد، در این ۱۵ روز چند شکوفه روی این درخت روییده است؟

۳۲- در دنباله‌ای حسابی $S_1=۶$ و $S_۷=۱۰۵$. ثابت کنید $\frac{S_n}{S_{n-۳}}=\frac{n+۳}{n-۳}$.

۳۳- در یک دنباله‌ی حسابی قدرنسبت دو برابر جمله‌ی اول است. ثابت کنید $\frac{S_n}{S_m}=\frac{n^۲}{m^۲}$.

۳۴- اگر S_n مجموع n جمله‌ی اول یک دنباله‌ی حسابی باشد، ثابت کنید $S_{۲n}-۲S_n=n^۲d$.

۳۵- ثابت کنید در دنباله‌های حسابی، $\frac{S_m-S_n}{S_{m+n}}=\frac{m-n}{m+n}$.

۳۶- دنباله‌ای حسابی $۲n+۱$ جمله دارد. ثابت کنید نسبت مجموع جمله‌های با ردیف فرد در این دنباله به مجموع جمله‌های با ردیف زوج در این دنباله برابر است با $\frac{n+۱}{n}$.

۳۷- در دنباله‌ای حسابی، به ازای هر n طبیعی، $S_{۲n}=۴S_n$. ثابت کنید به ازای هر دو عدد طبیعی مانند m و k، $\frac{S_m}{S_k}=(\frac{m}{k})^۲$.

۳۸- در دنباله‌ای حسابی $S_k=m$ و $S_m=k$ $(m\neq k)$. ثابت کنید $S_{m+k}=-(m+k)$.

۳۹- فرض کنید a_1، $a_۲$، ... دنباله‌ای حسابی باشد و عددهایی طبیعی مانند m، n و k وجود داشته باشند که $S_m=m^۲k$ و $S_n=n^۲k$ $(m\neq n)$.
ثابت کنید $S_k=k^۳$.

۴۰- اگر S_k مجموع k جمله‌ی نخست دنباله‌ی حسابی a_1 ، $a_۲$، ... باشد، ثابت کنید که به ازای هر عدد طبیعی مانند n،

$$S_{n+۳}-۳S_{n+۲}+۳S_{n+۱}-S_n=۰$$

۴۱- در دنباله‌ای حسابی، $\frac{S_{m^۲}}{S_{n^۲}}=\frac{m^۳}{n^۳}$. ثابت کنید $\frac{(m+۱)S_m}{(n+۱)S_n}=\frac{m^۲}{n^۲}$.

۴۲- در دنباله‌ای هندسی همواره $S_n=۳^n-۱$. جمله‌ی نخست و قدرنسبت این دنباله را پیدا کنید.

۴۳- مقدار $\frac{۲^{۱۴}+۲^{۱۳}+\cdots+۲+۱}{۲^۴+۲^۳+۲^۲+۲+۱}$ چقدر است؟

۴۴- جمله‌ی نخست دنباله‌ای هندسی برابر ۵ و قدرنسبت آن برابر ۳ است. مجموع چند جمله‌ی نخست این دنباله برابر ۲۰۰ است؟

۴۵- در دنباله‌ای هندسی $a_۲=۸$ و $a_۳=۴$. مجموع ده جمله‌ی نخست این دنباله چقدر است؟

۴۶- کوچک‌ترین عدد طبیعی مانند n که $۱+۳+۳^۲+\cdots+۳^{n-۱}>۱۰۰۰$ چقدر است؟

۴۷- درباره‌ی دنباله‌ی a_n می‌دانیم عددهای $a_1, a_۲-a_1, a_۳-a_۲, \ldots, a_n-a_{n-۱}, \ldots$ دنباله‌ای هندسی با جمله‌ی نخست ۱ و قدرنسبت $\frac{۱}{۳}$ تشکیل می‌دهند. دستوری برای جمله‌ی عمومی a_n پیدا کنید.

۴۸- در دنباله‌ای هندسی $a_1=-۲$ و $a_۶=-۴۸۶$. مجموع شش جمله‌ی نخست این دنباله چقدر است؟

۴۹- جمله‌ی نخست دنباله‌ای هندسی برابر ۵ و مجموع سه جمله‌ی نخست آن برابر $\frac{۳۱}{۵}$ است. قدرنسبت این دنباله چقدر است؟

۵۰- قدرنسبت دنباله‌ای هندسی برابر $\frac{۱}{۲}$ و جمله‌ی آخر آن برابر ۲ است. اگر مجموع جمله‌های این دنباله‌ی هندسی برابر ۲۵۴ باشد، جمله‌ی نخست آن چقدر است؟

۵۱- در دنباله‌ای هندسی $a_3=18$ ، $S_3=26$ و $q>0$. مجموع ده جمله‌ی نخست این دنباله چقدر است؟

۵۲- جمله‌ی نخست دنباله‌ای هندسی برابر ۳، جمله‌ی آخر آن برابر ۹۶ و مجموع جمله‌های آن برابر ۱۸۹ است. تعداد جمله‌های این دنباله چندتاست؟

۵۳- در دنباله‌ای هندسی مجموع چهار جمله‌ی نخست برابر با ۳۰ و مجموع چهار جمله‌ی بعدی برابر با ۴۸۰ شده است. جمله‌ی نخست این دنباله چه عددهایی می‌تواند باشد؟

۵۴- در دنباله‌ای هندسی مجموع دو جمله‌ی نخست برابر ۴ و مجموع سه جمله‌ی نخست برابر ۱۳ است. مجموع پنج جمله‌ی نخست این دنباله چقدر است؟

۵۵- مجموع پنجاه جمله‌ی نخست دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت مثبت برابر ۱ و مجموع پنجاه جمله‌ی بعدی آن برابر 5^{100} است. جمله‌ی نخست و قدرنسبت این دنباله را پیدا کنید.

۵۶- معادله‌ی $1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{1396}=0$ را حل کنید.

عبارت‌های داده شده را ساده کنید.

۵۷- $$A=\frac{x^{35}+x^{34}+\cdots+x+1}{x^{11}+x^{10}+\cdots+x+1}$$

۵۸- $$B=\frac{x^{29}+x^{28}+\cdots+x+1}{x^{9}+x^{8}+\cdots+x+1}$$

۵۹- در دنباله‌ای هندسی که تعداد جمله‌هایش عددی زوج است، مجموع همه‌ی جمله‌ها پنج برابر مجموع جمله‌های با ردیف فرد است. قدرنسبت این دنباله چقدر است؟

۶۰- ثابت کنید

$$5+55+555+\cdots+\underbrace{55\ldots5}_{\text{۱۰۰ تا}}=\frac{5}{81}(10^{101}-910)$$

۶۱- ثابت کنید

$$1+2\times2+3\times2^2+\cdots+100\times2^{99}=1+99\times2^{100}$$

۶۲- ثابت کنید در حاصل عبارت زیر نمای همه‌ی توان‌های x زوج است:

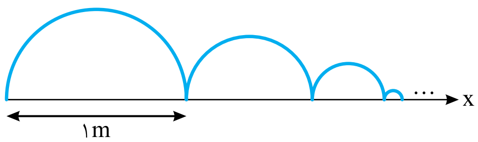
$$A=(1-x+x^2-x^3+\cdots-x^9+x^{10})(1+x+x^2+x^3+\cdots+x^9+x^{10})$$

۶۳- a عددی حقیقی و n عددی طبیعی است. ثابت کنید

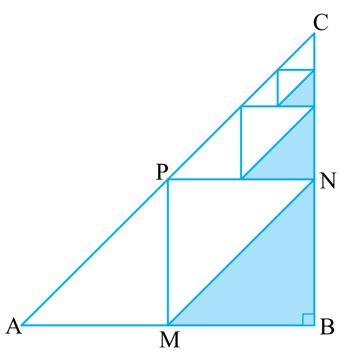
$$(1+a+a^2+\cdots+a^n)^2-a^n=(1+a+a^2+\cdots+a^{n-1})(1+a+a^2+\cdots+a^{n+1})$$

۶۴- قدرنسبت دنباله‌ای هندسی عددی صحیح است و اگر جمله‌ی نخست آن را که عددی مثبت است از جمله‌ی آخرش کم کنیم، حاصل عددی مثبت است که از ۱۷ بزرگ‌تر نیست. اگر مجموع جمله‌های این دنباله به‌جز جمله‌ی نخست آن از ۲۶ کمتر نباشد، قدرنسبت این دنباله چقدر است؟

۶۵- موجی به صورت نیم‌دایره‌هایی بالای محور x، با قطر اولیه‌ی ۱ m در حرکت است و هر بار که به محور x برخورد می‌کند ٪۳۰ از طول قطر آن کاسته می‌شود. مجموع محیط این نیم‌دایره‌ها پس از ۱۰ مرتبه برخورد با محور x چقدر است؟



۶۶- مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC با ضلع‌های قائم $AB=BC=6$ مفروض است. وسط‌های سه ضلع را به هم وصل می‌کنیم (مثلث MNP) و یکی از مثلث‌های گوشه را رنگ می‌کنیم. سپس وسط‌های سه ضلع مثلث PNC را به هم وصل می‌کنیم و یکی از مثلث‌های گوشه را رنگ می‌کنیم. اگر این کار را ۲۰ مرتبه انجام دهیم، مجموع مساحت قسمت‌های رنگ شده چقدر است؟



۶۷- درباره‌ی دنباله‌ی a_1، a_2، ... می‌دانیم $a_1=1$ و همواره $a_n a_{n+1}=4^n$. مجموع زیر را پیدا کنید:

$$a_1+\cdots+a_{19}$$

۶۸- مجموع $2n$ جمله‌ی نخست دو دنباله‌ی هندسی زیر برابر است. ثابت کنید $-1<q<1$.

$$a, -aq, aq^2, \ldots$$

$$\frac{1}{a}, \frac{q}{a}, \frac{q^2}{a}, \ldots$$

۶۹- فرض کنید S_1، S_2، ... و S_n مجموع n جمله‌ی نخســت دنباله‌هایی هندســی باشــند که جمله‌ی نخســت هر یک از آن‌ها برابر ۱ و قدرنسبت آن‌ها به ترتیب ۱، ۲، ... و n است. ثابت کنید

$$S_1+S_2+2S_3+3S_4+\cdots+(n-1)S_n=1^n+2^n+\cdots+n^n$$

۷۰- در دنباله‌ای هندسی با جمله‌ی نخست a_1 و قدرنسبت q ثابت کنید

$$qS_n+(1-q)(S_1+S_2+\cdots+S_n)=na_1$$

۷۱- فرض کنید $a_1, a_2, \ldots, a_n$ دنباله‌ای هندسی باشد و

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=S, \quad \frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}=T$$

ثابت کنید

$$(a_1a_2\ldots a_n)^2=\left(\frac{S}{T}\right)^n$$

۷۲- ثابت کنید در دنباله‌های هندسی $S_n(S_{3n}-S_{2n})=(S_{2n}-S_n)^2$.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

فصل اول

درس اول:

مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی

۱- مجموع ۲۰ جمله‌ی نخست دنباله‌ی حسابی زیر چقدر است؟

$۷,۵,۳,۱,...$

۱) ۴۸۰−　۲) ۲۴۰−　۳) ۲۴۰　۴) ۴۸۰

۲- در یک دنباله‌ی حسابی $a_۱=۳۴$ و $a_{۱۴}=-۵$. مجموع ۱۸ جمله‌ی نخست این دنباله چقدر است؟

۱) ۱۳۳　۲) ۱۴۳　۳) ۱۵۳　۴) ۱۶۳

۳- جمله‌ی اول دنباله‌ای حسابی برابر ۵− و جمله‌ی آخر این دنباله ۴۹ است. اگر مجموع جمله‌های این دنباله برابر ۶۱۶ باشد، این دنباله چند عضو دارد؟

۱) ۲۵　۲) ۲۶　۳) ۲۷　۴) ۲۸

۴- در دنباله‌ای حسابی $a_۹+a_{۱۰}=۱۳$. مجموع ۱۸ جمله‌ی نخست این دنباله‌ی حسابی چقدر است؟

۱) ۱۱۳　۲) ۱۱۷　۳) ۱۱۹　۴) ۱۲۱

۵- جمله‌ی میانی دنباله‌ای حسابی که یازده جمله دارد برابر ۳۰ است. مجموع جمله‌های این دنباله‌ی حسابی چقدر است؟

۱) ۳۳۰　۲) ۳۳۵　۳) ۳۴۰　۴) ۳۵۰

۶- در دنباله‌ای حسابی $S_۹-S_۷=۲۰$. مقدار $S_{۱۶}$ چقدر است؟

۱) ۱۵۰　۲) ۱۶۰　۳) ۱۶۵　۴) ۱۷۰

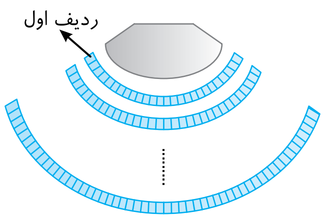
۷- چند تا از جمله‌های دنباله‌ی حسابی $۱۸,۱۶,۱۴,...$ را از ابتدا باید جمع کنیم تا مجموع آن‌ها صفر شود؟

۱) ۱۸　۲) ۱۹　۳) ۲۰　۴) ۲۱

۸- حداقل چند جمله از ابتدای دنباله‌ی حسابی $۲۰,۱۷,۱۴,...$ را جمع کنیم تا حاصل منفی شود؟

۱) ۱۲　۲) ۱۴　۳) ۱۵　۴) ۱۷

۹- یک سالن تئاتر در ردیف اول ۴۰ صندلی، در ردیف دوم ۴۲ صندلی، در ردیف سوم ۴۴ صندلی، ... دارد. اگر این سالن ۷۵ ردیف صندلی داشته باشد، ظرفیت سالن چند نفر است؟



۱) ۸۷۳۰

۲) ۸۵۵۰

۳) ۷۵۲۰

۴) ۹۲۷۰

۱۰- در دنباله‌ای حسابی مجموع جمله‌های سوم و پنجم برابر با ۸ شده است. مجموع هفت جمله‌ی نخست این دنباله‌ی حسابی چقدر است؟

۱) ۳۰　۲) ۴۲　۳) ۲۸　۴) ۲۴

۱۱- در دنباله‌ای حسابی مجموع جمله‌های سوم، هفتم، چهاردهم و هجدهم برابر با ۱۰ شده است. مجموع بیست جمله‌ی نخست این دنباله چقدر است؟

۱) ۴۰　۲) ۷۰　۳) ۶۰　۴) ۵۰

۱۲- جمله‌ی عمومی دنباله‌ای حسابی به‌صورت $a_n=-۳n+۷$ است. مجموع ۷ جمله‌ی نخست این دنباله‌ی حسابی چقدر است؟

۱) ۱۹−　۲) ۲۷−　۳) ۳۳−　۴) ۳۵−

۱۳- در دنباله‌ای حسابی $a_۱=۲$ و $S_{۱۴}-S_{۲۰}=۸۷$. مقدار $a_۹$ چقدر است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۶- ۴) ۸-

۱۴- در یک دنباله‌ی حسابی مجموع ۱۱ جمله‌ی نخست برابر ۱۶۵ است. جمله‌ی ششم دنباله چند است؟

۱) ۱۸ ۲) ۱۵ ۳) ۱۷ ۴) ۲۱

۱۵- در یک دنباله‌ی حسابی، اگر مجموع هفده جمله‌ی اول با مجموع سیزده جمله‌ی اول برابر باشد، مجموع سی جمله‌ی اول دنباله کدام است؟

۱) ۳۰ ۲) ۶۰ ۳) ۴ ۴) صفر

۱۶- در یک دنباله‌ی حسابی مجموع n جمله‌ی اول از رابطه‌ی $S_n=۳n(n-۳)$ به‌دست می‌آید. جمله‌ی عمومی دنباله کدام است؟

۱) $۶n-۱۲$ ۲) $۳n-۶$ ۳) $۶n-۶$ ۴) $۳n-۱۲$

۱۷- در یک دنباله‌ی حسابی مجموع n جمله‌ی اول دنباله برابر $۴n^۲-۵n$ است. قدر نسبت دنباله کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۱۸- در دنباله‌ی حسابی $۳x+۱, ۲x-۱, \ldots$ مجموع ده جمله‌ی اول برابر ۸۵ است. قدر نسبت دنباله کدام است؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۱- ۳) ۹ ۴) ۹-

۱۹- در دنباله‌ی حسابی $-۲, ۳, ۸, \ldots$ مجموع پنج جمله‌ی چهارم چقدر است؟

۱) ۴۲۰ ۲) ۴۴۲ ۳) ۴۶۰ ۴) ۴۱۵

۲۰- اگر اعداد سمت چپ معادله‌ی $۱+۴+۷+\cdots+x=۱۱۷$ جملات یک دنباله‌ی حسابی باشند، مقدار x کدام است؟

۱) ۲۳ ۲) ۲۵ ۳) ۲۷ ۴) ۲۹

۲۱- در یک دنباله‌ی حسابی با بیست جمله، مجموع سه جمله‌ی اول برابر $۳-\sqrt{۲}$ و مجموع سه جمله‌ی آخر برابر $۳+\sqrt{۲}$ است. مجموع تمام جملات دنباله کدام است؟

۱) ۱۸ ۲) ۲۰ ۳) ۲۲ ۴) ۲۴

۲۲- در یک دنباله‌ی حسابی ۳ واحد به قدر نسبت اضافه می‌کنیم و ۵ واحد از جمله‌ی اول کم می‌کنیم. به مجموع بیست جمله‌ی اول چقدر اضافه می‌شود؟

۱) ۴۵۰ ۲) ۴۷۰ ۳) ۴۸۰ ۴) ۴۹۰

۲۳- در یک دنباله‌ی حسابی $S_{۱۰}=۷۵$ و $S_۶=۹$. مقدار $S_۴$ چقدر است؟

۱) ۶- ۲) ۳- ۳) ۶ ۴) ۳

۲۴- در دنباله‌ای حسابی $S_۶=۹$ و $S_{۱۲}=۹۰$. مقدار $S_{۱۳}+S_{۱۷}$ چقدر است؟

۱) ۳۱۳ ۲) ۳۱۵ ۳) ۳۲۱ ۴) ۳۲۳

۲۵- در یک دنباله‌ی حسابی $S_{۱۰}=۲۷$ و $S_{۲۷}=۱۰$. حاصل $S_{۳۷}$ کدام است؟

۱) ۷- ۲) ۳۷- ۳) ۲۷- ۴) ۱۷-

۲۶- مجموع تعدادی از جمله‌های دنباله‌ی حسابی $۴۰, ۳۸, ۳۶, \ldots$ از ابتدا حداکثر چقدر است؟

۱) ۴۰۰ ۲) ۴۱۰ ۳) ۴۲۰ ۴) ۴۳۰

۲۷- در دنباله‌ی حسابی زیر می‌دانیم $a_۸=۵$:

$$\frac{۱}{۳}, a_۲, a_۳, \ldots$$

حاصل $a_۲+a_۵+a_۸+\cdots+a_{۲۹}$ چند است؟

۱) ۹۵ ۲) ۱۲۰ ۳) ۱۰۰ ۴) ۸۱

۲۸- اگر S_n مجموع n جمله‌ی اول یک دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی اول $a_۱$ و قدر نسبت d باشد، حاصل عبارت $\frac{S_{۳n}}{S_{۲n}-S_n}$ کدام است؟

۱) $\frac{۳a}{d}$ ۲) $\frac{۳d}{a}$ ۳) ۳ ۴) $\frac{۱}{۳}$

۲۹- اگر قدر نسبت یک دنباله‌ی حسابی برابر ۲ باشد و

$$a_1+a_2+\cdots+a_{100}=100$$

حاصل $a_4+a_8+a_{12}+\cdots+a_{100}$ کدام است؟

۱) ۲۵ ۲) ۵۰ ۳) ۷۵ ۴) ۱۰۰

۳۰- در دنباله‌ی هندسی $q=\frac{1}{3}$، $a_k=5$ و $S_k=1820$. مقدار a_1 چقدر است؟

۱) ۱۲۱۰ ۲) ۱۲۱۲ ۳) ۱۲۱۵ ۴) ۱۲۱۸

۳۱- در دنباله‌ی هندسی $\sqrt{2},\sqrt{8},\sqrt{32},\ldots$ مجموع ده جمله‌ی اول کدام است؟

۱) $511\sqrt{2}$ ۲) $1023\sqrt{2}$ ۳) $2047\sqrt{2}$ ۴) $4095\sqrt{2}$

۳۲- در دنباله‌ای هندسی و غیرثابت $4S_4=5S_2$. مربع قدر نسبت این دنباله‌ی هندسی چقدر است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{5}$

۳۳- قدرنسبت دنباله‌ای هندسی برابر $-\frac{1}{2}$ و مجموع هشت جمله‌ی نخست آن برابر $\frac{85}{64}$ شده است. جمله‌ی نخست این دنباله چقدر است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{5}{2}$ ۳) ۳ ۴) $\frac{7}{2}$

۳۴- جمله‌ی نخست دنباله‌ای هندسی برابر ۷، جمله‌ی آخر آن برابر ۴۴۸ و مجموع جمله‌های آن برابر ۸۸۹ است. قدرنسبت این دنباله چقدر است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) ۳ ۴) ۴

۳۵- در یک دنباله‌ی هندسی مجموع چهار جمله‌ی اول برابر ۲ و مجموع هشت جمله‌ی اول برابر ۱۳۰ است. قدر نسبت دنباله کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) $2\sqrt{2}$ ۳) $3\sqrt{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

۳۶- در دنباله‌ای هندسی مجموع چهار جمله‌ی نخست برابر ۲۰ و مجموع چهار جمله‌ی بعدی برابر ۳۲۰ است. مجموع دوازده جمله‌ی نخست این دنباله‌ی هندسی چقدر است؟

۱) ۵۴۱۰ ۲) ۵۴۲۰ ۳) ۵۴۴۰ ۴) ۵۴۶۰

۳۷- در یک دنباله‌ی هندسی، مجموع ۱۰ جمله‌ی اول ۲۴۴ برابر مجموع ۵ جمله‌ی اول است. جمله‌ی پنجم چند برابر جمله‌ی اول است؟

۱) ۸۱ ۲) ۲۴۳ ۳) ۲۷ ۴) ۷۲۹

۳۸- مجموع ده جمله‌ی اول دنباله‌ی حسابی $a, a+2, a+4,\ldots$ با مجموع ده جمله‌ی اول دنباله‌ی هندسی $1,2,4,\ldots$ برابر است. مقدار a کدام است؟

۱) ۹۱/۲ ۲) ۹۲/۳ ۳) ۹۳/۳ ۴) ۹۴/۱

۳۹- در دنباله‌ی هندسی $a_1, a_2, \ldots, a_n$،

$$S_n=160,\quad a_3-a_1=32,\quad a_4-a_2=96$$

مقدار n کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۷ ۴) ۶

۴۰- مجموع n جمله‌ی اول یک دنباله‌ی هندسی از رابطه‌ی $S_n=\frac{3(2^n-1)}{4}$ به‌دست می‌آید. جمله‌ی پنجم دنباله کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) ۱۶

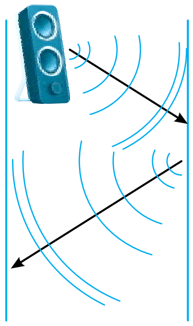
۴۱- مجموع ده جمله‌ی اول دنباله‌ی هندسی $a_1, a_1q, a_1q^2,\ldots$ دو برابر مجموع ده جمله‌ی اول دنباله‌ی هندسی $a_1, -a_1q, a_1q^2,\ldots$ است. مقدار q کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $-\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $-\frac{2}{3}$

۴۲- مجموع سه جمله‌ی نخست دنباله‌ای هندسی برابر ۲۱ و مجموع سه جمله‌ی بعدی آن برابر ۱۶۸ است. قدر نسبت این دنباله کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۴}{۳}$ ۳) ۲ ۴) ۳

۴۳- در شکل روبه‌رو تیغه‌های آکوستیک را می‌بینید که قادرند $\frac{۵}{۹}$ صوت صادرشده را جذب کنند و آن را به تیغه‌ی روبه‌رو منعکس کنند. حداقل پس از چند برخورد بیش از ۹۰ درصد صوت صادر شده جذب شده است؟



۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

۴۴- یک مثلث با محیط p مفروض است. اگر وسط‌های اضلاع آن را به هم وصل کنیم، یک مثلث کوچک‌تر ایجاد می‌شود و این عمل را روی مثلث کوچک‌تر ایجاد شده تکرار می‌کنیم. اگر این عمل را ده بار انجام دهیم، مجموع محیط مثلث‌ها چند برابر p است؟

۱) $\frac{۱۰۲۳}{۵۱۲}$ ۲) $\frac{۵۱۱}{۲۵۶}$ ۳) $\frac{۲۰۴۷}{۱۰۲۳}$ ۴) $\frac{۴۰۹۵}{۲۰۴۸}$

۴۵- مقدار x از معادله‌ی $۲^x+۲^{x+۱}+۲^{x+۲}+\cdots+۲^{x+۹}=۸۱۸۴$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۴۶- اگر $f(x)=\dfrac{x^۹-x}{x+x\sqrt{x}+x^۲+x^۲\sqrt{x}+\cdots+x^۸+x^۸\sqrt{x}}$، مقدار $f(۱/۹۶)$ چقدر است؟

۱) ۰/۲ ۲) ۰/۳ ۳) ۰/۴ ۴) ۰/۵

۴۷- حاصل عبارت $\dfrac{x^۵-۱}{x-۱}-(x+۱)(x^۲+۱)$ کدام است؟

۱) $x^۴+x$ ۲) $۲x^۴$ ۳) $x^۴$ ۴) $x^۴-x^۳$

۴۸- جواب مثبت معادله‌ی $۱+x+x^۲+\cdots+x^۹=\dfrac{x^{۱۰}}{x-۱}-x$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}+۱}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}-۱}{۲}$

۴۹- اگر $x^۶-y^۶=۲(x-y)$ و $x\neq y$ حاصل عبارت زیر کدام است؟

$$(x+y)(x^۴+y^۴+x^۲y^۲)$$

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۵۰- قدرنسبت دنباله‌ای حسابی برابر -۳ و مجموع سیزده جمله‌ی نخست آن برابر ۹۱ است. جمله‌ی نخست این دنباله‌ی حسابی چقدر است؟

۱) ۲۰ ۲) ۲۵ ۳) ۳۰ ۴) ۳۵

راه‌حل تمرین‌ها

جبر و معادله

۱ در این دنباله $a_1=9$ و $d=5-9=-4$. اکنون توجه کنید که

$$S_n=\frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d)$$

بنابراین

$$S_{19}=\frac{19}{2}(2\times 9+(19-1)(-4))=-513$$

۲ الف) جمله‌ی اول دنباله برابر ۰/۳ و قدرنسبت آن برابر ۱/۲ است. بنابراین مجموع صد جمله‌ی نخست آن برابر است با

$$S_{100}=\frac{100}{2}(2a_1+99d)=50(2\times 0/3+99\times 1/2)=5970$$

ب) جمله‌ی اول دنباله برابر $\frac{1}{15}$ و قدرنسبت آن برابر $\frac{1}{12}-\frac{1}{15}=\frac{1}{60}$ است. بنابراین مجموع یازده جمله‌ی نخست آن برابر است با

$$S_{11}=\frac{11}{2}(2a_1+10d)=\frac{11}{2}(2\times\frac{1}{15}+10\times\frac{1}{60})=\frac{33}{20}$$

۳ مجموع موردنظر، مجموع یک دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی اول ۳ و قدرنسبت ۵ است که $n+1$ جمله دارد:

$$S_{n+1}=\frac{n+1}{2}(2a_1+(n+1-1)d)$$

$$=(\frac{n+1}{2})(6+5n)$$

$$=\frac{5n^2+11n+6}{2}$$

۴ راه‌حل اول با قرار دادن $n=1$ و $n=2$ در جمله‌ی عمومی مقدار جمله‌های اول و دوم دنباله را حساب می‌کنیم

$$a_1=\frac{3\times 1-1}{4}=\frac{1}{2}\ ,\quad a_2=\frac{3\times 2-1}{4}=\frac{5}{4}$$

بنابراین

$$d=a_2-a_1=\frac{5}{4}-\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$$

در نتیجه

$$S_{20}=\frac{20}{2}(2a_1+19d)=10(2\times\frac{1}{2}+19\times\frac{3}{4})=\frac{305}{2}$$

راه‌حل دوم توجه کنید که

$$a_1=\frac{3\times 1-1}{4}=\frac{1}{2}$$

$$a_{20}=\frac{3\times 20-1}{4}=\frac{59}{4}$$

بنابراین

$$S_{20}=\frac{20}{2}(a_1+a_{20})=10(\frac{1}{2}+\frac{59}{4})=\frac{305}{2}$$

۵ چون مجموع جمله‌های دنباله‌ی موردنظر متناهی است، پس تعداد جمله‌های آن هم متناهی است. اگر تعداد این جمله‌ها برابر با n باشد، آن‌گاه

$$S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)\Rightarrow -504=\frac{n}{2}(6+(-62))$$

$$-504=-28n$$

$$n=18$$

بنابراین دنباله‌ی حسابی موردنظر ۱۸ جمله دارد.

۶ توجه کنید که

$$a_1+a_{24}=a_5+a_{20}=a_{10}+a_{15}$$

بنابراین از فرض مسئله نتیجه می‌شود

$$3(a_1+a_{24})=225\Rightarrow a_1+a_{24}=75$$

به این ترتیب

$$S_{24}=\frac{24}{2}(a_1+a_{24})=12\times 75=900$$

۷ چون a_1 و S_{17} را داریم و d را می‌خواهیم، از دستور زیر استفاده می‌کنیم:

$$S_{17}=\frac{17}{2}(2a_1+(17-1)d)$$

$$15=\frac{17}{2}(2(-9)+16d)=17(-9+8d)$$

$$8d=\frac{15}{17}+9=\frac{168}{17}$$

$$d=\frac{21}{17}$$

۸ جمله‌ی اول دنباله برابر -6 و قدرنسبت آن برابر است با $\frac{1}{2}$. بنابراین مجموع n جمله‌ی نخست دنباله برابر است با

$$S_n=\frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d)=\frac{n}{2}(-12+\frac{n-1}{2})=\frac{n^2-25n}{4}$$

پس

$$\frac{n^2-25n}{4}=-25$$

$$n^2-25n+100=0$$

$$(n-5)(n-20)=0\Rightarrow n=5\,,\,n=20$$

بنابراین مجموع پنج جمله‌ی اول دنباله برابر -25 است و مجموع بیست جمله‌ی اول دنباله هم برابر -25 است.

۹ توجه کنید که

$$a_5=9\Rightarrow a_1+4d=9$$

$$a_2+a_9=20\Rightarrow 2a_1+9d=20$$

از حل دستگاه معادله‌های فوق نتیجه می‌شود

$$a_1=1,\quad d=2$$

بنابراین

$$S_{10}=\frac{10}{2}(2a_1+9d)=5(2+18)=100$$

۱۰ توجه کنید که

$$a_1+a_8=25\Rightarrow 2a_1+7d=25$$

$$a_3+a_5=19\Rightarrow 2a_1+6d=19$$

از حل دستگاه معادله‌های فوق نتیجه می‌شود

$$a_1=-\frac{17}{2},\quad d=6$$

بنابراین

$$S_{12}=\frac{12}{2}(2a_1+11d)=6(-17+66)=294$$

۱۱ در این دنباله‌ی حسابی $a_1=8$. اکنون توجه کنید که

$$S_n=\frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d)$$

در نتیجه

$$S_{15}=\frac{15}{2}(2\times8+(15-1)d)$$

$$1170=\frac{15}{2}(16+14d)=120+105d$$

$$1050=105d\Rightarrow d=10$$

بنابراین

$$S_{10}=\frac{10}{2}(2a_1+(10-1)d)$$
$$=5(16+9\times10)=530$$

۱۲ بنابر فرض $3a_{10}=a_2-24$، بنابراین

$$3(a_1+9d)=a_1+d-24$$

$$2a_1+26d=-24$$

از طرف دیگر، $S_n=\frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d)$، در نتیجه

$$S_{27}=\frac{27}{2}(2a_1+26d)=\frac{27}{2}(-24)=-324$$

۱۳ بنابر فرض مسئله،

$$S_{14}=77+S_3$$

$$\frac{14}{2}(2a_1+13d)=77+\frac{3}{2}(2a_1+2d)$$

$$14a_1+91d=77+3a_1+3d$$

$$11a_1+88d=77$$

$$a_1+8d=7$$

بنابراین $a_9=7$.

۱۴ می‌توان نوشت

$$S_n=\frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d)$$

$$72=\frac{n}{2}(2\times17-2(n-1))$$

$$n^2-18n+72=0$$

$$(n-6)(n-12)=0$$

$$n=6,\ n=12$$

یعنی مجموع شش جمله‌ی اول دنباله برابر ۷۲ است و مجموع دوازده جمله‌ی اول دنباله هم برابر ۷۲ است.

۱۵ ابتدا توجه کنید که مجموع پنج جمله‌ی دوم دنباله برابر است با $S_{10}-S_5$. بنابراین

$$S_5=\frac{1}{4}(S_{10}-S_5)$$

$$5S_5=S_{10}$$

$$5\times\frac{5}{2}(2a_1+4d)=\frac{10}{2}(2a_1+9d)$$

$$25(4+4d)=10(4+9d)$$

$$d=-6$$

در نتیجه

$$S_{30}=\frac{30}{2}(2a_1+29d)$$
$$=15(2\times2-29\times6)$$
$$=-2550$$

۱۶ توجه کنید که

$$a_n = a_1 + (n-1)d = -3 + (n-1)d$$

بنابراین

$$a_3 a_7 = (-3+2d)(-3+6d) = 24$$

$$4d^2 - 8d - 5 = 0 \Rightarrow (2d-5)(2d+1) = 0$$

$$d = -\frac{1}{2}, \quad d = \frac{5}{2} \ (\text{غ.ق.ق})$$

از طرف دیگر $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$، بنابراین

$$S_{12} = \frac{12}{2}\left(2(-3) + 11\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = -69$$

۱۷ فرض کنید قدرنسبت دنباله‌ی حسابی موردنظر برابر با d باشد. در این صورت یازده جمله‌ی $a_1, a_3, \dots, a_{21}$ (جمله‌های با ردیف فرد) دنباله‌ای حسابی با قدرنسبت $2d$ تشکیل می‌دهند. همین‌طور ده جمله‌ی $a_2, a_4, \dots, a_{20}$ (جمله‌های با ردیف زوج) دنباله‌ای حسابی با قدرنسبت $2d$ تشکیل می‌دهند. بنابر فرض،

$$\frac{11}{2}(a_1 + a_{21}) = \frac{10}{2}(a_2 + a_{20}) + 15$$

بنابراین

$$\frac{11}{2}(a_1 + (a_1 + 20d)) = 5((a_1 + d) + (a_1 + 19d)) + 15$$

$$a_1 + 10d = 15$$

پس

$$S_{21} = \frac{21}{2}(2a_1 + 20d) = 21(a_1 + 10d) = 21 \times 15 = 315$$

۱۸ دنباله‌ی حسابی را با $a_1, a_2, \dots, a_n$ نشان می‌دهیم. می‌دانیم $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 715$. حال به جمله‌ی kام عدد $2k-1$ را اضافه می‌کنیم. در نتیجه مجموع جدید برابر است با

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + (1 + 3 + \dots + 2n-1) = 836$$

$$715 + n^2 = 836$$

$$n^2 = 121$$

در نتیجه $n = 11$. اکنون باید مقدار $a_1 + a_6 + a_{11}$ را حساب کنیم. می‌دانیم $a_1 + a_{11} = 2a_6$. در نتیجه

$$a_1 + a_6 + a_{11} = 3a_6$$

اکنون توجه کنید که

$$715 = a_1 + \dots + a_{11} = \frac{11}{2}\underbrace{(a_1 + a_{11})}_{2a_6} = 11a_6 \Rightarrow a_6 = 65$$

بنابراین مجموع موردنظر برابر است با $3a_6 = 195$.

۱۹ در دنباله‌ی حسابی $1, 4, 7, \dots$ جمله‌ی اول برابر ۱ و قدرنسبت برابر ۳ است. پس مجموع n جمله‌ی نخست آن برابر است با

$$\frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) = \frac{n}{2}(2 + 3(n-1)) = \frac{(3n-1)n}{2}$$

در دنباله‌ی حسابی $23, 25, 27, \dots$ جمله‌ی اول برابر ۲۳ و قدرنسبت برابر ۲ است. پس مجموع n جمله‌ی نخست آن برابر است با

$$\frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) = \frac{n}{2}(2 \times 23 + 2(n-1)) = \frac{(2n+44)n}{2}$$

بنابراین

$$\frac{(3n-1)n}{2} = \frac{(2n+44)n}{2}$$

$$3n - 1 = 2n + 44$$

$$n = 45$$

۲۰ توجه کنید که قدرنسبت دنباله‌ی حسابی سمت چپ برابر است با $9 + x - (3 + x) = 6$. چون جمله‌ی اول برابر $3 + x$ و جمله‌ی آخر برابر $93 + x$ است، پس

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow 93 + x = 3 + x + (n-1)6$$

$$n = 16$$

بنابراین، چون $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$، مجموع سمت چپ معادله برابر است با

$$\frac{16}{2}(3 + x + 93 + x) = 16(48 + x)$$

بنابراین معادله‌ی موردنظر می‌شود $16(48 + x) = 832$، پس

$$x = 4$$

۲۱ قدرنسبت و جمله‌ی اول دنباله را به‌دست می‌آوریم:

$$a_3 = a_1 + 2d = -13$$

$$a_7 = a_1 + 6d = 3$$

از حل دستگاه معادله‌های فوق نتیجه می‌شود $a_1 = -21$ و $d = 4$. اکنون توجه کنید که

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) = \frac{n}{2}(-42 + 4(n-1)) = 2n^2 - 23n$$

کمترین مقدار عبارت $2n^2 - 23n$ به ازای $n = \frac{23}{4}$ به‌دست می‌آید که چون n عددی طبیعی است، پس کمترین مقدار S_nها یکی از عددهای S_5 و S_6 است:

$$S_5 = -65, \quad S_6 = -66$$

پس S_6 کمترین مقدار در میان عددهای S_1، S_2، S_3 و … است.

۲۲ قدرنسبت دنباله را با d نشان می‌دهیم. در نتیجه چون $۳a_۸=۵a_{۱۳}$، پس

$$۳(a_۱+۷d)=۵(a_۱+۱۲d)\Rightarrow ۲a_۱=-۳۹d$$

اکنون توجه کنید که

$$S_{۱۰}=۵(۲a_۱+۹d)=-۱۵۰d$$

$$S_{۱۱}=\frac{۱۱}{۲}(۲a_۱+۱۰d)=-۱۵۹/۵d$$

$$S_{۲۰}=\frac{۲۰}{۲}(۲a_۱+۱۹d)=-۲۰۰d$$

$$S_{۲۱}=\frac{۲۱}{۲}(۲a_۱+۲۰d)=-۱۹۹/۵d$$

چون $a_۱>۰$، پس $-۳۹d=۲a_۱>۰$، در نتیجه $-d$ عددی مثبت است. بنابراین بزرگ‌ترین عدد میان عبارت‌های به‌دست آمده $-۲۰۰d$، یعنی $S_{۲۰}$ است.

۲۳ چون $\frac{S_{۳n}}{S_n}$ به مقدار n بستگی ندارد، پس مقدار آن به ازای $n=۱$ و $n=۲$ برابر است:

$$\frac{S_۳}{S_۱}=\frac{S_۶}{S_۲}\Rightarrow\frac{\frac{۳}{۲}(۲a_۱+۲d)}{a_۱}=\frac{\frac{۶}{۲}(۲a_۱+۵d)}{\frac{۲}{۲}(۲a_۱+d)}$$

$$\frac{۳(a_۱+۲)}{a_۱}=\frac{۳(۲a_۱+۵\times۲)}{۲a_۱+۲}\Rightarrow a_۱=۱$$

به این ترتیب

$$S_{۱۵}=\frac{۱۵}{۲}(۲a_۱+۱۴d)$$
$$=\frac{۱۵}{۲}(۲\times۱+۱۴\times۲)$$
$$=۲۲۵$$

۲۴ **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$a_n=S_n-S_{n-۱}=۴n^۲-۳n-(۴(n-۱)^۲-۳(n-۱))$$
$$=۴n^۲-۳n-(۴n^۲-۸n+۴-۳n+۳)=۸n-۷$$

بنابراین $a_۱=۸\times۱-۷=۱$ و $a_۲=۸\times۲-۷=۹$. در نتیجه

$$d=a_۲-a_۱=۹-۱=۸$$

راه‌حل دوم توجه کنید که

$$S_۱=۴\times۱^۲-۳\times۱=۱\Rightarrow a_۱=۱$$

$$S_۲=۴\times۲^۲-۳\times۲=۱۰\Rightarrow a_۱+a_۲=۱۰$$

$$۱+a_۲=۱۰$$

$$a_۲=۹$$

پس $d=a_۲-a_۱=۹-۱=۸$.

۲۵ چون $a_۸$ مضرب ۴ است، فرض می‌کنیم $a_۸=۴k$ که در آن k عددی طبیعی است. از طرف دیگر، $۳۳۷<S_{۱۵}<۳۹۳$، پس

$$۳۳۷<\frac{۱۵}{۲}(۲a_۱+۱۴d)<۳۹۳$$

$$۳۳۷<۱۵(a_۱+۷d)<۳۹۳$$

$$۳۳۷<۱۵a_۸<۳۹۳$$

$$۳۳۷<۶۰k<۳۹۳$$

$$۵\frac{۳۷}{۶۰}<k<۶\frac{۱۱}{۲۰}$$

و چون k عددی طبیعی است، پس $k=۶$ و در نتیجه

$$a_۸=۴k=۲۴$$

۲۶ مضرب‌های دو رقمی ۷ دنباله‌ای حسابی با جمله‌ی نخست ۱۴ $(a_۱=۱۴)$ و جمله‌ی آخر ۹۸ $(a_n=۹۸)$ تشکیل می‌دهند. قدرنسبت این دنباله‌ی حسابی برابر ۷ است، بنابراین

$$a_n=a_۱+(n-۱)d\Rightarrow ۹۸=۱۴+(n-۱)۷$$

$$۷(n-۱)=۹۸-۱۴=۸۴$$

$$n-۱=۱۲$$

$$n=۱۳$$

یعنی این دنباله‌ی حسابی ۱۳ جمله دارد و در نتیجه مجموع جمله‌های آن برابر است با

$$S_{۱۳}=\frac{۱۳}{۲}(۱۴+۹۸)=۷۲۸$$

۲۷ این عددها دنباله‌ای حسابی با جمله‌ی نخست $a_۱=۱۳$، جمله‌ی آخر $a_n=۹۷$ و قدرنسبت ۲ تشکیل می‌دهند. از طرف دیگر،

$$a_n=a_۱+(n-۱)d$$

$$۹۷=۱۳+(n-۱)۲$$

$$n=۴۳$$

بنابراین دنباله‌ی موردنظر ۴۳ جمله دارد. اکنون توجه کنید که

$$S_n=\frac{n}{۲}(a_۱+a_n)$$

در نتیجه

$$S_{۴۳}=\frac{۴۳}{۲}(۱۳+۹۷)=۲۳۶۵$$

توجه: ۵۰ عدد فرد کوچک‌تر از ۱۰۰ داریم که ۷ عدد ۱، ۳، ۵، ۷، ۹، ۱۱ و ۹۹ از آن‌ها جز عددهای فرد در بازه‌ی $[۱۳,۹۷]$ نیستند. بنابراین تعداد عددهای فرد در این بازه ۴۳ تا است.

۲۸ ابتدا مجموع عددهای سه رقمی را که بر ۱۷ بخش‌پذیر هستند به‌دست می‌آوریم. کوچک‌ترین عدد سه رقمی که بر ۱۷ بخش‌پذیر است، ۱۰۲ است و بزرگ‌ترین این عددها ۹۸۶ است. با توجه به $۱۰۲=۱۷\times۶$ و $۹۸۶=۱۷\times۵۸$ تعداد این عددها ۵۳ تاست و مجموع آن‌ها برابر است با

$$S_{۵۳}=\frac{۵۳}{۲}(۱۰۲+۹۸۶)=۲۸۸۳۲$$

اکنون مجموع تمام عددهای سه رقمی را به‌دست می‌آوریم. کوچک‌ترین عدد سه رقمی ۱۰۰، بزرگ‌ترین آن‌ها ۹۹۹ و تعدادآن‌ها ۹۰۰ تاست. پس

$$S_{۹۰۰}=\frac{۹۰۰}{۲}(۱۰۰+۹۹۹)=۴۹۴۵۵۰$$

اگر ۲۸۸۳۲ را از عدد فوق کم کنیم، مجموع عددهای سه رقمی که بر ۱۷ بخش‌پذیر نیستند، به‌دست می‌آید که برابر است با ۴۶۵۷۱۸.

۲۹ محیط نیم‌دایره‌ی به شعاع r برابر با πr است. فنر موردنظر از سیزده نیم‌دایره درست شده است که شعاع‌های آن‌ها دنباله‌ای حسابی با جمله‌ی نخست ۰/۵ و قدرنسبت ۰/۵ تشکیل می‌دهند. بنابراین مجموع شعاع‌های آن‌ها برابر است با

$$S_{۱۳}=\frac{۱۳}{۲}(۲\times۰/۵+۱۲\times۰/۵)=۴۵/۵$$

پس مجموع محیط نیم‌دایره‌ها یا همان طول فنر برابر است با $۴۵/۵\times\pi$.

۳۰ شماره‌های خانه‌ها دنباله‌ای حسابی با جمله‌ی نخست ۱ و قدرنسبت ۱ تشکیل می‌دهند. در این‌جا به دنبال n ای می‌گردیم که

$$S_{n-۱}=S_{۴۹}-S_n$$

بنابراین

$$\frac{(n-۱)n}{۲}=\frac{۴۹\times۵۰}{۲}-\frac{n(n+۱)}{۲}\Rightarrow n^۲-n=۴۹\times۵۰-n^۲-n$$

$$۲n^۲=۴۹\times۵۰\Rightarrow n^۲=۴۹\times۲۵\Rightarrow n=۷\times۵=۳۵$$

بنابراین خانه‌ی سی‌وپنجم ویژگی موردنظر را دارد.

۳۱ تعداد شکوفه‌هایی که هر روز می‌رویند دنباله‌ای حسابی با قدرنسبت ۱۲ تشکیل می‌دهند. تعداد شکوفه‌هایی که در ۹ روز نخست روییده‌اند برابر با $S_۹$ و تعداد شکوفه‌هایی که در ۶ روز آخر روییده‌اند $S_{۱۵}-S_۹$ است. بنابرفرض مسئله، $S_۹=S_{۱۵}-S_۹$، بنابراین $S_{۱۵}=۲S_۹$. به این ترتیب

$$۲\times\frac{۹}{۲}(۲a_۱+(۹-۱)d)=\frac{۱۵}{۲}(۲a_۱+(۱۵-۱)d)$$

$$۳۶a_۱+۱۸\times۸d=۳۰a_۱+۱۵\times۱۴d$$

$$۶a_۱=۶۶d=۶۶\times۱۲$$

$$a_۱=۶۶\times۲=۱۳۲$$

بنابرایـن کل شکوفه‌هایی که در این ۱۵ روز روی درخت روییده‌اند، برابر است با

$$S_{۱۵}=\frac{۱۵}{۲}(۲\times۱۳۲+۱۴\times۱۲)=۳۲۴۰$$

۳۲ ابتدا توجه کنید که

$$S_۱=۶\Rightarrow a_۱=۶$$

$$S_۷=۱۰۵\Rightarrow\frac{۷}{۲}(۲a_۱+۶d)=۱۰۵$$

$$\frac{۷}{۲}(۱۲+۶d)=۱۰۵$$

$$d=۳$$

بنابراین

$$\frac{S_n}{S_{n-۳}}=\frac{\frac{n}{۲}(۲a_۱+(n-۱)d)}{(\frac{n-۳}{۲})(۲a_۱+(n-۳-۱)d)}$$

$$=\frac{n(۱۲+۳(n-۱))}{(n-۳)(۱۲+۳(n-۴))}$$

$$=\frac{۳n(n+۳)}{(n-۳)(۳n)}=\frac{n+۳}{n-۳}$$

۳۳ چون $d=۲a_۱$، پس

$$S_n=\frac{n}{۲}(۲a_۱+(n-۱)d)=\frac{n}{۲}(d+(n-۱)d)=\frac{n^۲d}{۲}$$

به همین ترتیب

$$S_m=\frac{m^۲d}{۲}$$

بنابراین

$$\frac{S_n}{S_m}=\frac{\frac{n^۲d}{۲}}{\frac{m^۲d}{۲}}=\frac{n^۲}{m^۲}$$

۳۴ ابتدا توجه کنید که

$$S_n=\frac{n}{۲}(۲a_۱+(n-۱)d)$$

$$S_{۲n}=\frac{۲n}{۲}(۲a_۱+(۲n-۱)d)$$

بنابراین

$$S_{۲n}-۲S_n=\frac{۲n}{۲}(۲a_۱+(۲n-۱)d)-\frac{۲n}{۲}(۲a_۱+(n-۱)d)$$

$$=n(۲a_۱+(۲n-۱)d-۲a_۱-(n-۱)d)$$

$$=n(۲n-۱-n+۱)d$$

$$=n^۲d$$