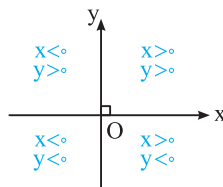


## درسنامه ۱

## معادله خط

برای تعیین یک نقطه از صفحه، از دستگاه محورهای مختصات دکارتی استفاده می‌کنیم. این دستگاه از دو محور عمود بر هم  $x'Ox$  (محور  $x$  ها) و  $y'Oy$  (محور  $y$  ها) تشکیل شده است و این محورها صفحه را به چهار ناحیه تقسیم می‌کنند که هر کدام از آن‌ها را یک ربع می‌نامند و به هر نقطه  $A$  از صفحه، یک زوج مرتب  $(x, y)$  از اعداد حقیقی متناظر می‌شود.  $x$  را طول نقطه و  $y$  را عرض آن می‌نامند. علامت  $x$  و  $y$  در چهار ناحیه در شکل مقابل مشخص شده است:



## نکته

اگر نقطه‌ای روی محور  $x$  ها قرار داشته باشد، عرض آن صفر است، لذا مختصات آن به صورت  $(x, 0)$  می‌باشد. اگر نقطه‌ای روی محور  $y$  ها قرار داشته باشد، طول آن صفر است، لذا مختصات آن به صورت  $(0, y)$  می‌باشد.

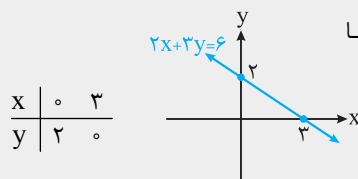
## معادله خط

معادله یک خط در دستگاه مختصات دکارتی به صورت  $ax + by + c = 0$  است که در آن  $a$  و  $b$  هم‌زمان صفر نیستند، یعنی  $a^2 + b^2 \neq 0$ .

## رسم خط

می‌دانیم از هر دو نقطه متمایز، فقط یک خط می‌گذرد، بنابراین می‌توان با داشتن معادله یک خط و مشخص کردن مختصات ۲ نقطه از خط، نمودار آن را در دستگاه محورهای مختصات رسم کرد.

نمودار خط به معادله  $2x + 3y = 6$  را در دستگاه محورهای مختصات رسم کنید.



**پاسخ:** در معادله به جای  $x$ ، دو مقدار دلخواه قرار می‌دهیم تا مقدار  $y$  به دست آید و از آن جا با مشخص شدن مختصات دو نقطه، خط را رسم می‌کنیم:

**شیب خط:** شیب یک خط برابر است با نسبت تفاضل عرض‌های هر دو نقطه دلخواه روی آن به تفاضل طول‌های همان دو نقطه. به عبارت دیگر

$$m = \text{شیب خط} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

اگر  $A(x_A, y_A)$  و  $B(x_B, y_B)$  دو نقطه روی یک خط باشند و  $x_A \neq x_B$  باشد، آن‌گاه:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2 - (-4)}{3 - 1} = \frac{6}{2} = 3$$

به عنوان مثال، شیب خط گذرنده از نقاط  $A(1, -4)$  و  $B(3, 2)$  برابر است با:

## محاسبه شیب خط با داشتن معادله خط

(۱) اگر معادله خط به صورت  $ax + by + c = 0$  (یا  $ax + by = c$ ) باشد و  $b \neq 0$ ، آن‌گاه:

به عنوان مثال، شیب خط به معادله  $2x + 3y = 1$  برابر  $-\frac{2}{3}$  ضریب  $x$  است.

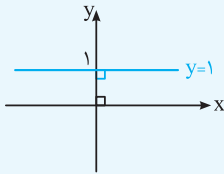
(۲) اگر معادله خط به صورت  $y = mx + h$  باشد، آن‌گاه شیب خط برابر  $m$  (ضریب  $x$ ) است.

به عنوان مثال، شیب خط به معادله  $y = -\frac{1}{4}x + 3$  برابر  $m = -\frac{1}{4}$  است.

$$\text{شیب خط} = -\frac{\text{ضریب } x}{\text{ضریب } y} = -\frac{a}{b}$$

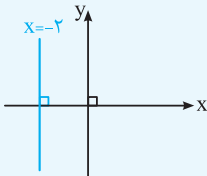
## درسامه ۱

## نکته



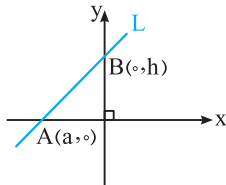
اگر خط  $L$  موازی محور  $x$  ها باشد، در این صورت شیب خط برابر صفر است و اگر خط از نقطه  $(a, b)$  بگذرد، معادله آن به صورت  $y = b$  است. به عنوان مثال، خط  $y = 1$  موازی محور  $x$  ها است و شیب آن برابر صفر است.

## نکته



اگر خط  $L$  موازی محور  $y$  ها باشد، در این صورت برای خط  $L$  شیب تعریف نمی‌شود و اگر خط از نقطه  $(a, b)$  بگذرد، معادله آن به صورت  $x = a$  است. به عنوان مثال، خط  $x = -2$  موازی محور  $y$  ها است و این خط شیب ندارد.

## طول از مبدأ و عرض از مبدأ خط راست



با توجه به شکل مقابل، خط  $L$  محور  $x$  ها را در نقطه  $A(a, 0)$  قطع کرده است،  $a$  را طول از مبدأ خط  $L$  می‌گوییم. همچنین خط  $L$  محور  $y$  ها را در نقطه  $B(0, h)$  قطع کرده است،  $h$  را عرض از مبدأ خط  $L$  می‌گوییم.

## نکته

معادله خط با شیب  $m$  و عرض از مبدأ  $h$  به صورت  $y = mx + h$  می‌باشد.

## نوشتن معادله خط

در دو حالت می‌توان معادله خط راست را نوشت:

**حالت اول:** اگر شیب خط و نقطه‌ای از خط را داشته باشیم، می‌توانیم معادله آن را بنویسیم. هرگاه شیب خط  $m$  باشد و خط از نقطه  $A(x_1, y_1)$  بگذرد، آن‌گاه معادله خط از رابطه مقابل به دست می‌آید:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

**حالت دوم:** اگر مختصات دو نقطه از خط را داشته باشیم، می‌توانیم معادله آن را بنویسیم. هرگاه خطی از نقاط  $A(x_1, y_1)$  و  $B(x_2, y_2)$  بگذرد، آن‌گاه شیب خط از رابطه  $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$  به دست می‌آید و با در نظر گرفتن یکی از نقاط  $A$  یا  $B$  روی خط، مانند حالت اول معادله خط را می‌نویسیم

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1), \quad x_2 \neq x_1$$

و یا می‌توان مستقیماً از رابطه مقابل استفاده کرد:

## نکته

اگر  $x_1 = x_2$ ، آن‌گاه معادله خط گذرنده از دو نقطه  $(x_1, y_1)$  و  $(x_2, y_2)$  به صورت  $x = x_1$  است و اگر  $y_1 = y_2$ ، آن‌گاه معادله خط به صورت  $y = y_1$  می‌باشد.

معادله خطی را بنویسید که از دو نقطه  $(2, -5)$  و  $(-2, 7)$  بگذرد.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{7 - (-5)}{-2 - 2} = \frac{12}{-4} = -3, \quad A(2, -5) \Rightarrow y - (-5) = -3(x - 2) \Rightarrow y + 5 = -3x + 6 \Rightarrow y = -3x + 1$$

پاسخ:

## وضعیت نسبی دو خط در صفحه

دو خط در صفحه یا متقاطع‌اند و یا موازی.

## حالت اول: دو خط متقاطع

اگر دو خط در صفحه همدیگر را در یک نقطه قطع کنند، آن‌گاه می‌گوییم دو خط متقاطع هستند و اگر  $ax + by + c = 0$  و  $a'x + b'y + c' = 0$  معادله دو خط در صفحه باشند، آن‌گاه با حل دستگاه دو معادله دو مجهولی  $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$  محل تلاقی دو خط به دست می‌آید.

## درسمانه ۱

مثال

معادله خطی را بنویسید که از محل تلاقی دو خط به معادلات  $x + 2y = -5$  و  $2x - y = 0$  و نقطه  $(3, 5)$  می‌گذرد.

**پاسخ:** ابتدا محل تلاقی دو خط را با حل دستگاه دو معادله دو مجهولی به دست می‌آوریم:

$$2 \times \begin{cases} x + 2y = -5 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = -5 \\ 4x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \Delta x = -5 \Rightarrow x = -1 \xrightarrow{2x - y = 0} -2 - y = 0 \Rightarrow y = -2$$

بنابراین نقطه  $(-1, -2)$  محل تلاقی دو خط است. برای نوشتن معادله خط داریم:

$$\begin{cases} A(-1, -2) \\ B(3, 5) \end{cases} \Rightarrow m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5 + 2}{3 + 1} = \frac{7}{4} \Rightarrow y + 2 = \frac{7}{4}(x + 1) \xrightarrow{\times 4} 4(y + 2) = 7(x + 1) \Rightarrow 4y - 7x + 1 = 0$$

## حالت دوم: دو خط موازی

اگر دو خط متقاطع نباشند، آن‌گاه دو خط موازی‌اند. در واقع اگر دو خط همدیگر را قطع نکنند و یا بر هم منطبق باشند، دو خط موازی‌اند.

نکته

اگر دو خط با هم موازی باشند، آن‌گاه شیب آن‌ها با هم برابر است و بر عکس.

مثال

معادله خطی را بنویسید که از نقطه  $(3, -4)$  بگذرد و موازی خط  $5x - 3y = 1$  باشد.

**پاسخ:** شیب خط  $5x - 3y = 1$  برابر  $m = -\frac{\text{ضریب } x}{\text{ضریب } y} = -\frac{5}{-3} = \frac{5}{3}$  است. از آن جایی که شیب دو خط موازی با هم برابرند، پس باید

معادله خطی را بنویسیم که از نقطه  $(3, -4)$  می‌گذرد و شیب آن برابر  $\frac{5}{3}$  است:

$$y - (-4) = \frac{5}{3}(x - 3) \xrightarrow{\times 3} 3(y + 4) = 5(x - 3) \Rightarrow 3y + 12 = 5x - 15 \Rightarrow 3y - 5x + 27 = 0$$

## دو خط عمود بر هم

نکته

اگر  $m$  و  $m'$  شیب دو خط باشند و  $mm' = -1$ ، آن‌گاه دو خط بر هم عمودند. بنابراین شیب دو خط عمود بر هم، عکس و قرینه هم می‌باشند.

مثال

معادله خطی را بنویسید که از نقطه  $(-1, 4)$  بگذرد و بر خط به معادله  $y = -2x + 3$  عمود باشد.

**پاسخ:** شیب خط  $y = -2x + 3$  برابر  $m = -2$  است، پس شیب خط عمود بر این خط برابر  $m' = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$  می‌باشد. معادله خطی که از نقطه  $(-1, 4)$  بگذرد و شیب آن  $\frac{1}{2}$  باشد، به صورت زیر است:

$$y - 4 = \frac{1}{2}(x + 1) \xrightarrow{\times 2} 2(y - 4) = (x + 1) \Rightarrow 2y - 8 = x + 1 \Rightarrow 2y - x - 9 = 0$$

(مشابه کار در کلاس ۲ صفحه ۲ کتاب درسی)

۱. نمودار هر یک از خط‌های زیر را رسم کنید.

(ا)  $2x - y = 1$  (ب)  $3x + 4y = 12$  (پ)  $x = -1$  (ت)  $y = 4$

۲. در هر یک از قسمت‌های زیر، معادله خط را بنویسید.

(آ) شیب خط  $-4$  و عرض از مبدأ آن برابر ۲ باشد.

(ب) شیب خط ۵ باشد و از نقطه  $(-3, -2)$  بگذرد.

(پ) خط از نقاط  $(-1, 2)$  و  $(1, 0)$  بگذرد.

(ت) خط از نقطه  $(3, 0)$  بگذرد و با خط  $5x + 3y = 2$  موازی باشد.

(ث) خط از نقطه  $(4, 2)$  بگذرد و عمود بر خط به معادله  $3x + 2y = 4$  باشد.

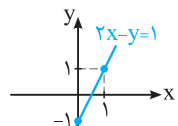
(ج) طول از مبدأ خط ۲ و عرض از مبدأ آن ۵ باشد.

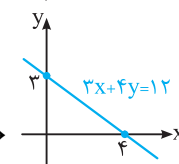
(مشابه کار در کلاس ۶ صفحه ۳ کتاب درسی)

۳. آ) معادله خط گذرنده از نقطه  $(-4, 3)$  و موازی خط گذرنده از دو نقطه  $(5, 1)$  و  $(-4, 3)$  را بنویسید.  
 ب) معادله خط گذرنده از نقطه  $(3, 2)$  و عمود بر خط گذرنده از دو نقطه  $(2, 0)$  و  $(-1, 6)$  را بنویسید.
۴. معادله خط گذرنده از نقطه  $(3, -2)$  و نقطه تلاقی دو خط به معادلات  $4x - y = 1$  و  $x + 2y = 7$  را بنویسید.
۵. مقدار  $a$  را طوری به دست آورید که نقاط  $(3, 1)$ ،  $(5, -3)$  و  $(a, 2a - 1)$  روی یک خط راست قرار داشته باشند.
۶. مقدار  $m$  را طوری به دست آورید که سه خط به معادله‌های  $x + 2y = -1$ ،  $3x - 2y = 8$  و  $(m + 1)x + my = 7$  از یک نقطه بگذرند.
۷. وضعیت هر جفت از خطوط زیر را نسبت به هم مشخص کنید. (موازی، عمود یا متقاطع غیرعمود) (مشابه کار در کلاس ۱ صفحه ۱۴ کتاب درسی)  
 $L_1: -3x + 5y = 1$  ،  $L_2: 3x - y = 1$  ،  $L_3: 5x + 2y = 7$  ،  $L_4: 6x = 2y + 5$
۸. دو خط به معادلات  $3x + (2m + 1)y = 4$  و  $mx + 7y = 11$  داده شده است. (مشابه کار در کلاس ۲ صفحه ۱۴ کتاب درسی)  
 آ) مقدار  $m$  را طوری به دست آورید که دو خط با هم موازی باشند.  
 ب) مقدار  $m$  را طوری به دست آورید که دو خط بر هم عمود باشند.
۹. مقدار  $m$  را طوری به دست آورید که دو خط به معادلات  $2x + (-m + 4)y = 3$  و  $(m^2 + 4)y = 7$  با هم موازی باشند.
۱۰. خط گذرنده از دو نقطه  $(m, 2m)$  و  $(1, -1)$  بر خط به معادله  $2x - 5y = 7$  عمود است. مقدار  $m$  را به دست آورید.
۱۱. مربع  $ABCD$  که  $A(4, 1)$  و  $B(6, 2)$  دو رأس مجاور آن هستند، مفروض است. (مشابه کار در کلاس ۳ صفحه ۱۴ کتاب درسی)  
 آ) شیب ضلع  $AB$  را بیابید و معادله آن را بنویسید.  
 ب) شیب ضلع  $BC$  را به دست آورید و معادله آن را بنویسید.  
 پ) اگر  $D(-1, 1)$  یک رأس دیگر این مربع باشد، مختصات رأس  $C$  را مشخص کنید.
۱۲. مربع  $ABCD$  که  $A(-3, -1)$  و  $B(0, 2)$  دو رأس مجاور آن هستند، مفروض است.  
 آ) معادله ضلع  $AB$  را بنویسید.  
 ب) اگر  $C(3, a)$  و  $D(0, 2a - 2)$  دو رأس دیگر مربع باشند، مختصات رأس‌های  $C$  و  $D$  را بیابید.

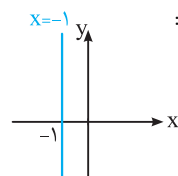
## پاسخ‌های تشریحی

۱) با مشخص کردن دو نقطه دلخواه روی خط، خط را رسم می‌کنیم:

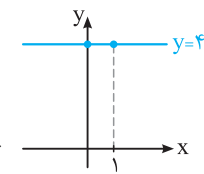
آ)  $2x - y = 1$  نمودار  $\begin{array}{c|cc} x & 0 & 1 \\ \hline y & -1 & 1 \end{array}$  

ب)  $3x + 4y = 12$  نمودار  $\begin{array}{c|cc} x & 0 & 4 \\ \hline y & 3 & 0 \end{array}$  

پ)  $x = -1$ ، خطی به موازات محور  $y$  ها است که طول هر نقطه روی آن برابر  $-1$  است:

$x = -1$  نمودار  $\begin{array}{c|cc} x & -1 & -1 \\ \hline y & 0 & 1 \end{array}$  

ت) عرض تمام نقاط روی خط  $y = 4$  برابر ۴ است:

نمودار  $\begin{array}{c|cc} x & 0 & 1 \\ \hline y & 4 & 4 \end{array}$  

۲) آ) معادله خط با شیب  $m$  و عرض از مبدأ  $h$  به صورت  $y = mx + h$  می‌باشد، بنابراین معادله خط با شیب  $m = -4$  و عرض از مبدأ  $h = 2$  برابر  $y = -4x + 2$  است.

ب) معادله خط گذرنده از نقطه  $(x_1, y_1)$  با شیب  $m$  به صورت زیر است:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$m = 5, (-2, -3) \Rightarrow y + 3 = 5(x + 2)$$

$$\Rightarrow y + 3 = 5x + 10 \Rightarrow y = 5x + 7$$

۴ با حل دستگاه دو معادله دو مجهولی  $\begin{cases} 4x - y = 1 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$ ، نقطه تلاقی دو خط را به دست می‌آوریم:

$$\times 2 \begin{cases} 4x - y = 1 \\ x + 2y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x - 2y = 2 \\ x + 2y = 7 \end{cases} \Rightarrow 9x = 9 \Rightarrow x = 1$$

$$\frac{x+2y=7}{x=1} \rightarrow 1+2y=7 \Rightarrow 2y=6 \Rightarrow y=3$$

نقطه  $A(1, 3)$ ، نقطه تلاقی دو خط است. معادله خط گذرنده از دو نقطه  $A(1, 3)$  و  $B(3, -2)$  به صورت زیر است:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2 - 3}{3 - 1} = -\frac{5}{2}, A(1, 3)$$

$$y - 3 = -\frac{5}{2}(x - 1) \xrightarrow{\times 2} 2(y - 3) = -5(x - 1)$$

$$\Rightarrow 2y - 6 = -5x + 5 \Rightarrow 2y + 5x = 11$$

۵ ابتدا معادله خطی را که از دو نقطه  $(3, 1)$  و  $(5, -3)$  می‌گذرد، می‌نویسیم:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-3 - 1}{5 - 3} = -\frac{4}{2} = -2, A(3, 1)$$

$$y - 1 = -2(x - 3) \Rightarrow y - 1 = -2x + 6 \Rightarrow y = -2x + 7$$

چون سه نقطه روی یک خط قرار دارند، پس مختصات نقطه  $C(a, 2a - 1)$  نیز باید در معادله  $y = -2x + 7$  صدق کند:

$$C(a, 2a - 1), y = -2x + 7 \Rightarrow 2a - 1 = -2a + 7$$

$$\Rightarrow 2a + 2a = 7 + 1 \Rightarrow 4a = 8 \Rightarrow a = 2$$

۶ محل تلاقی دو خط به معادله‌های  $x + 3y = -1$  و  $3x - 2y = 8$

از حل دستگاه  $\begin{cases} x + 3y = -1 \\ 3x - 2y = 8 \end{cases}$  به دست می‌آید:

$$\times 2 \begin{cases} x + 3y = -1 \\ 3x - 2y = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 6y = -2 \\ 9x - 6y = 24 \end{cases} \Rightarrow 11x = 22 \Rightarrow x = 2$$

$$\frac{x+3y=-1}{x=2} \rightarrow 2+3y=-1 \Rightarrow 3y=-3 \Rightarrow y=-1$$

نقطه  $(2, -1)$  محل تلاقی دو خط است. خط  $(m+1)x + my = 7$  از نقطه  $(2, -1)$  می‌گذرد، پس مختصات این نقطه در معادله

$$(m+1)x + my = 7 \text{ صدق می‌کند:}$$

$$2(m+1) - m = 7 \Rightarrow 2m + 2 - m = 7 \Rightarrow m = 5$$

۷ شیب هر یک از خطوط را به دست می‌آوریم. اگر شیب دو خط با هم

برابر باشند، آن دو خط موازی، اگر حاصل ضرب شیب‌ها برابر  $-1$  باشد، دو خط بر هم عمود و در غیر این صورت دو خط متقاطع غیرعمودند:

$$L_1: -3x + 5y = 1 \Rightarrow m_1 = -\frac{\text{ضریب } x}{\text{ضریب } y} = -\frac{-3}{5} = \frac{3}{5}$$

$$L_2: 2x - y = 1 \Rightarrow m_2 = -\frac{2}{-1} = 2$$

$$L_3: 5x + 3y = 7 \Rightarrow m_3 = -\frac{5}{3}$$

$$L_4: 6x = 2y + 5 \Rightarrow 6x - 2y = 5 \Rightarrow m_4 = -\frac{6}{-2} = 3$$

دو خط  $L_1$  و  $L_2$  بر هم عمودند.  $m_1 \cdot m_2 = -1$

دو خط  $L_3$  و  $L_4$  موازی‌اند.  $m_3 = m_4$

$L_1$  و  $L_3$  با  $L_2$  و  $L_4$  متقاطع غیرعمود می‌باشند.

پ) شیب خط گذرنده از نقاط  $A(x_1, y_1)$  و  $B(x_2, y_2)$  برابر است با:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$A(-1, 2), B(1, 0) \Rightarrow m = \frac{0 - 2}{1 + 1} = -1$$

$$m = -1, A(-1, 2) \Rightarrow y - 2 = -1(x + 1)$$

ت) شیب دو خط موازی با هم برابر است. شیب خط  $5x + 3y = 2$  برابر

$$m = -\frac{5}{3} \text{ ضریب } x \text{ است، پس شیب خط مطلوب نیز برابر } -\frac{5}{3} \text{ می‌باشد:}$$

$$m = -\frac{5}{3}, A(3, 0) \Rightarrow y - 0 = -\frac{5}{3}(x - 3)$$

$$\xrightarrow{\times 3} 3y = -5x + 15 \Rightarrow 3y + 5x = 15$$

ث) حاصل ضرب شیب‌های دو خط عمود بر هم برابر  $-1$  است. شیب

خط  $3x + 2y = 4$  برابر  $-\frac{3}{2}$  می‌باشد، پس شیب خط مورد نظر برابر  $m = \frac{-1}{-\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$  می‌باشد:

$$m = \frac{2}{3}, A(4, 2) \Rightarrow y - 2 = \frac{2}{3}(x - 4)$$

$$\xrightarrow{\times 3} 3(y - 2) = 2(x - 4) \Rightarrow 3y - 6 = 2x - 8 \Rightarrow 3y - 2x = -2$$

ج) طول از مبدأ خط، محل برخورد خط با محور  $x$  می‌باشد، پس خط از

نقطه  $(2, 0)$  می‌گذرد. هم‌چنین عرض از مبدأ خط، محل برخورد خط با محور  $y$  می‌باشد، پس خط از نقطه  $(0, 5)$  نیز می‌گذرد:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5 - 0}{0 - 2} = -\frac{5}{2}$$

$$m = -\frac{5}{2}, A(2, 0) \Rightarrow y - 0 = -\frac{5}{2}(x - 2)$$

$$\xrightarrow{\times 2} 2y = -5(x - 2) \Rightarrow 2y = -5x + 10 \Rightarrow 2y + 5x = 10$$

۳) شیب خط گذرنده از دو نقطه  $A(5, 1)$  و  $B(-4, 3)$  را به دست

می‌آوریم. این عدد شیب خط مطلوب است:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1 - 3}{5 - (-4)} = -\frac{2}{9}$$

معادله خط گذرنده از نقطه  $(-4, 1)$  با شیب  $m = -\frac{2}{9}$  به صورت زیر است:

$$y - 1 = -\frac{2}{9}(x + 4) \Rightarrow 9(y - 1) = -2(x + 4)$$

$$\Rightarrow 9y - 9 = -2x - 8 \Rightarrow 9y + 2x = 1$$

ب) شیب خط گذرنده از دو نقطه  $(2, 0)$  و  $(-1, 6)$  برابر است با:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6 - 0}{-1 - 2} = \frac{6}{-3} = -2$$

اگر  $m'$  شیب خط مطلوب باشد، آنگاه  $m' = -\frac{1}{m}$  است و در نتیجه، داریم:

$$m' = -\frac{1}{m} = \frac{1}{2}, A(3, 2)$$

$$y - 2 = \frac{1}{2}(x - 3) \xrightarrow{\times 2} 2(y - 2) = x - 3$$

$$\Rightarrow 2y - 4 = x - 3 \Rightarrow 2y - x = 1$$

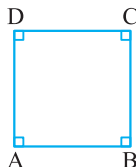
۱۱) ابتدا شیب خط گذرنده از دو نقطه A و B را به دست می آوریم:

$$m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-1}{6-4} = \frac{1}{2}, \quad A(4, 1)$$

$$AB \text{ معادله خط: } y - 1 = \frac{1}{2}(x - 4) \xrightarrow{\times 2} 2(y - 1) = x - 4$$

$$2y - 2 = x - 4 \Rightarrow 2y - x = -2$$

ب) با توجه به شکل فرضی زیر، BC بر AB عمود است، پس:



$$m_{BC} = \frac{-1}{m_{AB}} = \frac{-1}{\frac{1}{2}} = -2, \quad B(6, 2)$$

$$BC \text{ معادله خط: } y - 2 = -2(x - 6) \Rightarrow y = -2x + 14$$

پ) معادله خط DC را می نویسیم. با داشتن معادله خط BC و قرار دادن آن‌ها در یک دستگاه و حل آن، مختصات نقطه C به دست می آید. با توجه به این که خط DC موازی AB است، پس شیب خط DC با شیب خط AB برابر می باشد:

$$m_{DC} = m_{AB} = \frac{1}{2}, \quad D(-1, 11)$$

$$DC \text{ معادله خط: } y - 11 = \frac{1}{2}(x + 1) \xrightarrow{\times 2} 2y - 22 = x + 1$$

$$\Rightarrow 2y - x = 23$$

$$\times (-2) \begin{cases} y = -2x + 14 \\ 2y - x = 23 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2y = -4x + 28 \\ 2y - x = 23 \end{cases} \Rightarrow -x = 4x - 5$$

$$\Rightarrow -5x = -5 \Rightarrow x = 1 \xrightarrow{y = -2x + 14} y = -2 + 14 = 12$$

$$\Rightarrow C(1, 12)$$

۱۲) شیب ضلع AB برابر است با:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2+1}{0+3} = 1, \quad A(-3, -1)$$

$$AB \text{ ضلع معادله: } y - (-1) = 1(x - (-3))$$

$$\Rightarrow y + 1 = x + 3 \Rightarrow y = x + 2$$

ب) ضلع CD موازی ضلع AB است، پس شیب دو خط با هم برابرند:

$$m_{AB} = m_{CD}, \quad m_{AB} = 1, \quad m_{CD} = \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \frac{(2a - 2) - a}{0 - 3}$$

$$= \frac{a - 2}{-3} = 1 \Rightarrow a - 2 = -3 \Rightarrow a = -1$$

$$\Rightarrow C(3, -1), \quad D(0, -4)$$

۸) در دو خط موازی، شیب‌ها با هم برابرند:

$$3x + (2m + 1)y = 4 \Rightarrow \text{شیب خط} = a = -\frac{3}{2m + 1}$$

$$mx + 7y = 11 \Rightarrow \text{شیب خط} = a' = -\frac{m}{7}$$

$$a = a' \Rightarrow -\frac{3}{2m + 1} = -\frac{m}{7} \Rightarrow 3 \times 7 = m(2m + 1)$$

$$\Rightarrow 21 = 2m^2 + m \Rightarrow 2m^2 + m - 21 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4(2)(-21) = 169 = 13^2$$

$$\Rightarrow m = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 \pm 13}{2(2)}$$

$$\Rightarrow m_1 = \frac{-1 + 13}{4} = \frac{12}{4} = 3, \quad m_2 = \frac{-1 - 13}{4} = \frac{-14}{4} = -\frac{7}{2}$$

ب) اگر حاصل ضرب شیب دو خط برابر -1 شود، آن‌گاه دو خط بر هم عمودند:

$$aa' = -1 \Rightarrow \left(-\frac{3}{2m + 1}\right)\left(-\frac{m}{7}\right) = -1 \Rightarrow \frac{3m}{7(2m + 1)} = -1$$

$$\Rightarrow 3m = -7(2m + 1) \Rightarrow 3m = -14m - 7 \Rightarrow 3m + 14m = -7$$

$$\Rightarrow 17m = -7 \Rightarrow m = -\frac{7}{17}$$

۹) با مساوی قرار دادن شیب‌های دو خط، مقدار m را به دست می آوریم:

$$2x + (-m + 4)y = 3 \Rightarrow a = -\frac{2}{-m + 4}$$

$$(\delta + 3m)x + (m^2 + 4)y = 7 \Rightarrow a' = -\frac{\delta + 3m}{m^2 + 4}$$

$$a = a' \Rightarrow \frac{2}{-m + 4} = \frac{\delta + 3m}{m^2 + 4}$$

$$\Rightarrow 2(m^2 + 4) = (\delta + 3m)(-m + 4)$$

$$\Rightarrow 2m^2 + 8 = -\delta m + 20 - 3m^2 + 12m \Rightarrow \delta m^2 - 7m - 12 = 0$$

$$\Delta = (-7)^2 - 4(\delta)(-12) = 289 = 17^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = \frac{7 + 17}{2(\delta)} = \frac{24}{10} = \frac{12}{5} \\ m = \frac{7 - 17}{2(\delta)} = \frac{-10}{10} = -1 \end{cases}$$

۱۰) شیب خط گذرنده از دو نقطه  $(m, 2m)$  و  $(1, -1)$  برابر است با:

$$a = \frac{2m + 1}{m - 1}$$

از طرفی شیب خط به معادله  $2x - 5y = 7$  برابر  $a' = -\frac{2}{-5} = \frac{2}{5}$  است. چون دو خط بر هم عمودند، پس باید داشته باشیم:

$$aa' = -1 \Rightarrow \frac{2m + 1}{m - 1} \times \frac{2}{5} = -1$$

$$\Rightarrow \frac{2(2m + 1)}{5(m - 1)} = -1 \Rightarrow 2(2m + 1) = -5(m - 1)$$

$$\Rightarrow 4m + 2 = -5m + 5 \Rightarrow 9m = 3 \Rightarrow m = \frac{1}{3}$$

## درسنامه ۲

## فاصله دو نقطه - مختصات نقطه وسط پاره خط - فاصله نقطه از خط

## فاصله دو نقطه

(۱) اگر  $A$  و  $B$  دو نقطه هم‌عرض در صفحه باشند، آن‌گاه  $AB = |x_B - x_A|$

(۲) اگر  $C$  و  $D$  دو نقطه هم‌طول باشند، آن‌گاه  $CD = |y_C - y_D|$

به عنوان مثال، فاصله بین دو نقطه هم‌طول  $A(۵, -۲)$  و  $B(۵, ۷)$  برابر است با:

$$AB = |y - (-۲)| = |۷ - (-۲)| = ۹$$

(۳) فاصله دو نقطه  $A(x_1, y_1)$  و  $B(x_2, y_2)$  برابر است با:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

**مثال** فاصله بین دو نقطه  $(۳, ۲)$  و  $(-۱, ۰)$  را به دست آورید.

**پاسخ:** با فرض  $A(۳, ۲)$  و  $B(-۱, ۰)$  داریم:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-۱ - ۳)^2 + (۰ - ۲)^2} = \sqrt{۱۶ + ۴} = \sqrt{۲۰} = \sqrt{۴ \times ۵} = ۲\sqrt{۵}$$

**مثال** اگر نقاط  $A(-۱, ۴)$  و  $B(۳, ۳)$  دو رأس مجاور یک مربع باشند، محیط و مساحت مربع را به دست آورید.

**پاسخ:** فاصله بین دو نقطه  $A$  و  $B$ ، طول ضلع مربع می‌باشد:

$$a = BA = \sqrt{(-۱ - ۳)^2 + (۴ - ۳)^2} = \sqrt{۱۶ + ۱} = \sqrt{۱۷}$$

$$a^2 = ۱۷ = \text{مساحت مربع} \quad \text{و} \quad ۴a = ۴\sqrt{۱۷} = \text{محیط مربع}$$

## نکته

فاصله نقطه  $A(x_1, y_1)$  تا مبدأ مختصات برابر  $OA = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$  است. به عنوان مثال، فاصله نقطه  $(۶, ۸)$  تا مبدأ مختصات برابر  $\sqrt{۶^2 + ۸^2} = \sqrt{۱۰۰} = ۱۰$  می‌باشد.

**دایره:** مجموعه‌ای از نقاط در صفحه که فاصله آن‌ها از نقطه‌ای ثابت در همان صفحه به نام مرکز، مقداری ثابت است. این مقدار ثابت را شعاع دایره می‌گوییم و با  $R$  نشان می‌دهیم.

**مثال** دایره‌ای به مرکز  $(-۱, ۳)$  از نقطه  $(۵, ۲)$  گذشته است. شعاع این دایره را به دست آورید. آیا نقطه  $(۶, ۲)$  روی این دایره قرار دارد؟ چرا؟

**پاسخ:** فاصله هر نقطه روی دایره از مرکز دایره برابر اندازه شعاع دایره است. پس فاصله نقطه  $A(۵, ۲)$  روی دایره از نقطه  $O'(-۱, ۳)$  (مرکز دایره) برابر  $R$  است:

$$R = O'A = \sqrt{(۵ - (-۱))^2 + (۲ - ۳)^2} = \sqrt{۴ + ۹} = \sqrt{۱۳}$$

اگر فاصله نقطه  $B(۶, ۲)$  از نقطه  $O'(-۱, ۳)$  برابر  $R = \sqrt{۱۳}$  شود، آن‌گاه نقطه  $B$  روی این دایره قرار دارد:

$$O'B = \sqrt{(۶ - (-۱))^2 + (۲ - ۳)^2} = \sqrt{۹ + ۹} = \sqrt{۱۸} \neq \sqrt{۱۳} \Rightarrow \text{نقطه } B \text{ روی این دایره قرار ندارد.}$$

## ۲ درسامه

## مختصات نقطه وسط پاره خط

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$$

(۱) اگر A و B دو نقطه دلخواه روی محور x ها و M وسط AB باشد، آن گاه:

$$y_N = \frac{y_C + y_D}{2}$$

(۲) اگر C و D دو نقطه دلخواه روی محور y ها و N وسط CD باشد، آن گاه:

(۳) فرض کنیم A و B دو نقطه دلخواه در صفحه مختصات و M وسط AB باشد. در این صورت:

$$M = \left( \frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right) = \left( \frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right) = \frac{A + B}{2}$$

## مثال

نقاط  $A(5, -1)$ ،  $B(-1, 3)$  و  $C(3, 5)$  رأس‌های مثلث ABC هستند.

(آ) مختصات M، نقطه وسط ضلع AB را مشخص کنید.

(ب) طول میانه CM را به دست آورید.

(پ) معادله میانه CM را بنویسید.

$$M = \left( \frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right) = \left( \frac{5 + (-1)}{2}, \frac{-1 + 3}{2} \right) = (2, 1)$$

پاسخ: آ)

(ب) طول پاره خط CM را با داشتن مختصات دو نقطه C و M به دست می‌آوریم:

$$C(3, 5), M(2, 1) \Rightarrow CM = \sqrt{(2-3)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$$

(پ) معادله خط گذرنده از نقاط C و M، معادله میانه CM است:

$$m_{CM} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1 - 5}{2 - 3} = \frac{-4}{-1} = 4, C(3, 5)$$

$$CM \text{ معادله: } y - 5 = 4(x - 3) \Rightarrow y - 5 = 4x - 12 \Rightarrow y - 4x + 7 = 0$$

## قرینه یک نقطه نسبت به نقطه دیگر

اگر نقطه A را به نقطه M وصل کنیم و به همان اندازه امتداد دهیم تا به نقطه A' برسیم، آن گاه A' قرینه نقطه A نسبت به نقطه M است.

## نکته

اگر A' قرینه نقطه A نسبت به نقطه M باشد، آن گاه M وسط پاره خط AA' است و داریم:



$$M = \frac{A + A'}{2} \Rightarrow A' = 2M - A$$

به عنوان مثال، قرینه نقطه  $A(3, -1)$  نسبت به نقطه  $M(2, 4)$ ، نقطه  $A'(1, 9)$  است که در آن:

$$A' = 2M - A = 2(2, 4) - (3, -1) = (4, 8) - (3, -1) = (1, 9)$$

## نکته

قرینه نقطه  $P(\alpha, \beta)$  نسبت به مبدأ مختصات، نقطه  $P'(-\alpha, -\beta)$  است.

## نکته

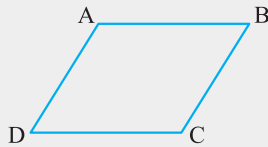
اگر چهارضلعی ABCD متوازی‌الاضلاع باشد، آن گاه:

$$\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \end{cases}$$



## درسنامه ۲

**مثال** اگر  $A(2,1)$ ،  $B(3,4)$  و  $C(-1,5)$  سه رأس متوازی‌الاضلاع  $ABCD$  با قطر  $AC$  باشد، مختصات رأس  $D$  را به دست آورید.



**پاسخ:** مطابق شکل روبه‌رو، داریم:

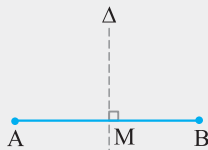
$$\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 - 1 = 3 + x_D \\ 1 + 5 = 4 + y_D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_D = -2 \\ y_D = 2 \end{cases} \Rightarrow D(-2, 2)$$

**تذکر:** مربع، مستطیل و لوزی حالت خاصی از متوازی‌الاضلاع هستند، بنابراین نکته قبل برای آن‌ها نیز صادق است.

**عمودمنصف:** عمودمنصف پاره‌خط  $AB$ ، خطی است که از وسط پاره‌خط  $AB$  می‌گذرد و بر پاره‌خط  $AB$  عمود است.

**نوشتن معادله عمودمنصف یک پاره‌خط:** برای نوشتن معادله عمودمنصف پاره‌خط  $AB$ ، ابتدا مختصات نقطه  $M$  وسط  $AB$  را مشخص می‌کنیم و سپس شیب آن را که قرینه عکس شیب خط گذرنده از نقاط  $A$  و  $B$  است، به دست می‌آوریم.

**مثال** دو نقطه  $A(3,6)$  و  $B(1,2)$  مفروضند. معادله عمودمنصف پاره‌خط  $AB$  را بنویسید.



**پاسخ:** عمودمنصف پاره‌خط  $AB$  از وسط آن می‌گذرد و بر آن عمود است:

$$M = \frac{A+B}{2} = \left( \frac{3+1}{2}, \frac{6+2}{2} \right) = (2, 4)$$

شیب خط  $\Delta$ ، عکس قرینه شیب خط  $AB$  است:

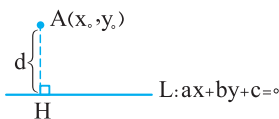
$$m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - 6}{1 - 3} = 2 \Rightarrow m_{\Delta} = \frac{-1}{m_{AB}} = -\frac{1}{2}$$

معادله خط گذرنده از نقطه  $(2, 4)$  با شیب  $-\frac{1}{2}$  برابر است با:  $y - 4 = -\frac{1}{2}(x - 2) \xrightarrow{\times 2} 2y - 8 = -x + 2 \Rightarrow 2y + x = 10$

### فاصله نقطه از خط

اگر  $A$  نقطه‌ای خارج خط  $L$  باشد، فاصله  $A$  تا  $L$  برابر است با طول پاره‌خطی که از  $A$  عمود بر  $L$  رسم می‌شود، یعنی کوتاه‌ترین مسیر از  $A$  به  $L$ . از فرمول زیر برای محاسبه فاصله نقطه  $A$  از خط راست استفاده می‌کنیم:

اگر مختصات نقطه  $A(x_0, y_0)$  به صورت  $A(x_0, y_0)$  و معادله خط  $L$  به صورت  $ax + by + c = 0$  باشد، آن‌گاه:



$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

برای استفاده از فرمول بالا، باید مراحل زیر را انجام دهیم:

(۱) همه اجزای معادله خط در یک طرف تساوی باشند.

(۲) در معادله خط به جای  $x$ ، طول نقطه  $(x_0)$  و به جای  $y$ ، عرض نقطه  $(y_0)$  را قرار می‌دهیم و مساوی صفر را حذف می‌کنیم و حاصل مثبت را در صورت کسر قرار می‌دهیم.

(۳) ضرایب  $x$  (یعنی  $a$ ) و  $y$  (یعنی  $b$ ) را به توان ۲ می‌رسانیم و جذر آن را به دست می‌آوریم و حاصل را در مخرج کسر قرار می‌دهیم.

(۴) نسبت عدد قسمت (۲) به قسمت (۳) فاصله بین نقطه و خط می‌باشد.

در معادله به جای  $x$ ، ۳ و به جای  $y$ ، ۲ قرار می‌دهیم.

**مثال** فاصله نقطه  $A(3, 2)$  از خط به معادله  $4x + 3y + 1 = 0$  را به دست آورید.

**پاسخ:**

$$d = \frac{|4(3) + 3(2) + 1|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{19}{\sqrt{25}} = \frac{19}{5}$$

ضریب  $x$ 
ضریب  $y$

## درسنامه ۲

## نکته

$$d = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

فاصله مبدأ مختصات از خط به معادله  $ax + by + c = 0$  برابر است با:

## نکته

فاصله نقطه  $A(x_0, y_0)$  از خط  $x = a$  برابر  $d = |x_0 - a|$  و از خط  $y = b$  برابر  $d = |y_0 - b|$  است. به عنوان مثال فاصله نقطه  $A(3, 4)$  از خط  $x = 2$  برابر  $d = |3 - 2| = 1$  و از خط  $y = -5$  برابر  $d = |4 - (-5)| = 9$  می‌باشد.

## مثال

اگر فاصله نقطه  $A(1, 1)$  از خط  $y = x + m$  برابر  $2\sqrt{2}$  باشد،  $m$  کدام است؟

**پاسخ:** معادله خط را به صورت  $y - x - m = 0$  می‌نویسیم. فاصله نقطه  $A$  از خط برابر است با:

$$d = \frac{|1 - 1 - m|}{\sqrt{(-1)^2 + (1)^2}} = \frac{|m|}{\sqrt{2}}, \quad d = 2\sqrt{2} \Rightarrow \frac{|m|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \Rightarrow |m| = 4 \Rightarrow m = \pm 4$$

## فاصله بین دو خط موازی

برای به دست آوردن فاصله بین دو خط موازی، یک نقطه دلخواه روی یکی از خطوط در نظر بگیرید و فاصله آن را از خط دیگر به دست آورید.

## مثال

فاصله بین دو خط موازی به معادلات  $x + y - 3 = 0$  و  $x + y = 5$  را به دست آورید.

$$x = 0 \Rightarrow y - 3 = 0 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow A(0, 3)$$

**پاسخ:** نقطه دلخواه روی خط  $x + y - 3 = 0$  مشخص می‌کنیم:

فاصله نقطه  $A(0, 3)$  تا خط به معادله  $x + y - 5 = 0$ ، فاصله بین دو خط موازی می‌باشد:

$$d = \frac{|0 + 3 - 5|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

۱۳. اگر  $A(3, -2)$  و  $B(-1, 6)$  دو نقطه باشند،

(ب) فاصله مبدأ مختصات را از وسط  $AB$  به دست آورید.

(مشابه کار در کلاس ۱ صفحه ۶ کتاب درسی)

۱۴. نقاط  $A(-4, 4)$ ،  $B(0, 4)$  و  $C(-2, 2)$  را در نظر بگیرید.

(ب) نوع مثلث  $ABC$  را مشخص کنید.

(آ) مثلث  $ABC$  را رسم کنید.

(پ) مساحت مثلث را به دست آورید.

۱۵. اگر نقاط  $A(2, 4)$  و  $B(5, 8)$  دو رأس مجاور یک مربع باشند، محیط و مساحت مربع را به دست آورید.

۱۶. شخصی برای انجام یک عملیات بانکی نیاز به یک عابربانک دارد. اگر موقعیت این شخص نقطه  $(2, -4)$  باشد و سه عابربانک با

موقعیت‌های  $(2, 5)$ ،  $(1, 4)$  و  $(-3, 3)$  وجود داشته باشد، این شخص برای رسیدن هرچه سریع‌تر به عابربانک، کدام یک را باید انتخاب کند؟

(مشابه کار در کلاس ۲ صفحه ۶ کتاب درسی)

۱۷. دایره‌ای به مرکز  $(-1, 2)$ ، از نقطه  $(2, 4)$  گذشته است. شعاع دایره را محاسبه کنید. کدام یک از نقاط  $(3, 5)$  و  $(-1, 4)$  روی این دایره قرار

دارند؟ چرا؟

۱۸. دو انتهای یکی از قطرهای دایره‌ای نقاط  $A(1, -3)$  و  $B(5, -1)$  هستند.

(آ) اندازه شعاع و مختصات مرکز دایره را بیابید.

(ب) آیا نقطه  $(0, 2)$  روی این دایره قرار دارد؟ چرا؟

(مشابه کار در کلاس ۱ صفحه ۷ کتاب درسی)

۱۹. مثلث با رأس‌های  $A(-2, 4)$ ،  $B(3, -2)$  و  $C(5, 4)$  را در نظر بگیرید.آ) مختصات  $M$ ، نقطه وسط ضلع  $BC$  را مشخص کنید.ب) طول میانه  $AM$  را به دست آورید.پ) معادله میانه  $AM$  را بنویسید.

(مشابه کار در کلاس ۲ صفحه ۷ کتاب درسی)

۲۰. آ) نقطه  $M(5, -1)$  وسط پاره خط واصل بین دو نقطه  $A(3, 2)$  و  $B$  است. مختصات نقطه  $B$  را بیابید.ب) قرینه نقطه  $A(-3, 4)$  را نسبت به نقطه  $M(-1, 2)$  به دست آورید.پ) قرینه نقطه  $(-3, 5)$  را نسبت به مبدأ مختصات به دست آورید.۲۱. اگر قرینه نقطه  $(a + 1, b - 3)$  نسبت به نقطه  $(3, 5)$ ، نقطه  $(b - 2, -a)$  است. مقادیر  $a$  و  $b$  را به دست آورید.

(مشابه تمرین ۵ صفحه ۹ کتاب درسی)

۲۲. نقاط  $A(-2, -1)$ ،  $B(2, 1)$  و  $C(-3, 1)$  سه رأس از یک مستطیل هستند.

آ) مختصات رأس چهارم آن را مشخص کنید.

ب) مساحت مستطیل را به دست آورید.

۲۳. دو نقطه  $A(3, -4)$  و  $B(-1, 0)$  مفروض‌اند. معادله عمودمنصف پاره خط  $AB$  را بنویسید.۲۴. نقاط  $(2, 0)$  و  $(4, 2)$  دو رأس مقابل یک مربع هستند. معادله قطرهای این مربع را بنویسید.۲۵. نقاط  $A(3, 1)$ ،  $B(-1, 3)$ ،  $C(-4, -1)$  و  $D(4, -1)$  مفروض‌اند. نقطه‌ای مشخص کنید که فاصله آن از هر چهار نقطه به یک اندازه باشد.

(مشابه تمرین ۶ صفحه ۹ کتاب درسی)

۲۶. فاصله نقطه  $(4, -6)$  را از دو خط به معادلات  $x = -2$  و  $y = 5$  به دست آورید.

(مشابه کار در کلاس صفحه ۹ کتاب درسی)

(مشابه کار در کلاس صفحه ۹ کتاب درسی)

۲۷. در هر قسمت مختصات یک نقطه و معادله یک خط داده شده است. فاصله نقطه تا خط را به دست آورید.

آ)  $(2, -1)$ ،  $3x + 4y + 1 = 0$ ، ب)  $(-4, 5)$ ،  $2x = y - 4$ ۲۸. مثلث  $ABC$  را با رأس‌های  $A(2, 0)$ ،  $B(-1, 4)$  و  $C(-2, 1)$  در نظر بگیرید.آ) طول ارتفاع  $AH$  را به دست آورید. ب) مساحت مثلث  $ABC$  را به دست آورید.۲۹. یکی از اضلاع مربع روی خط به معادله  $2x = y - 3$  واقع است. اگر نقطه  $(3, 1)$  یکی از رأس‌های این مربع باشد، مساحت آن را به دست

(مشابه تمرین ۷ صفحه ۹ کتاب درسی)

آورید.

۳۰. اندازه شعاع و مساحت دایره به مرکز  $(-1, 2)$  و مماس بر خط به معادله  $2y + x = 5$  را به دست آورید. (مشابه کار در کلاس ۲ صفحه ۹ کتاب درسی)

۳۱. در هر یک از قسمت‌های زیر، ابتدا نشان دهید دو خط داده شده با هم موازیند و سپس فاصله بین آن‌ها را به دست آورید.

آ)  $2x - y = 5$ ،  $2x - y = 11$ ، ب)  $2x + 2y = 7$ ،  $x = -y + 4$ ۳۲. فاصله نقطه  $(3, 4)$  از خط  $x + 3y = a$  برابر  $\frac{3}{\sqrt{10}}$  است. مقدار  $a$  را به دست آورید.۳۳. خطوط  $4x - 3y = 5$  و  $2x + 4y = 1$  معادلات دو ضلع یک مستطیل و  $A(1, 1)$  یک رأس آن است. مساحت مستطیل را به دست آورید.۳۴. مثلث  $ABC$  با سه رأس  $A(1, 4)$ ،  $B(-2, -2)$  و  $C(4, 2)$  مفروض است.آ) معادله میانه وارد بر ضلع  $BC$  را به دست آورید. ب) طول میانه  $AM$  را به دست آورید.پ) معادله ارتفاع  $BH$  را محاسبه کنید. ت) نقطه تلاقی میانه  $AM$  و ارتفاع  $BH$  را به دست آورید.ث) مساحت مثلث  $ABC$  را به دست آورید.۳۵. اگر مسافت فیزیکی هر درجه طول و عرض جغرافیایی  $11^\circ$  کیلومتر و طول و عرض جغرافیایی شهر  $A$  به ترتیب  $45^\circ$  و  $37^\circ$  و طول و عرض

(مشابه تمرین ۹ صفحه ۱۰ کتاب درسی)

جغرافیایی شهر  $B$  به ترتیب  $37^\circ$  و  $31^\circ$  باشد، فاصله بین دو شهر  $A$  و  $B$  چند کیلومتر است؟

## پاسخ‌های تشریحی

۱۷) فاصله نقطه  $A(۴,۲)$  تا مرکز دایره، یعنی  $O'(۲,۰-۱)$  برابر اندازه شعاع دایره است:

$$R = O'A = \sqrt{(۴-۲)^2 + (۲+۱)^2} = \sqrt{۴+۹} = \sqrt{۱۳}$$

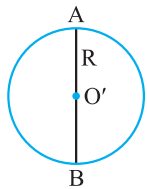
فاصله هر یک از نقاط  $B(۵,۰-۳)$  و  $C(-۱,۴)$  را تا نقطه  $O'$  به دست می‌آوریم، هر کدام برابر  $\sqrt{۱۳}$  شود، روی این دایره قرار دارد:

$$O'B = \sqrt{(۵-۲)^2 + (-۳+۱)^2} = \sqrt{۹+۴} = \sqrt{۱۳}$$

پس  $B$  روی این دایره قرار دارد.

$$O'C = \sqrt{(-۱-۲)^2 + (۴+۱)^2} = \sqrt{۹+۲۵} = \sqrt{۳۴}$$

بنابراین  $C$  روی این دایره قرار ندارد.



۱۸) نقطه وسط پاره خط  $AB$ ، مرکز دایره است:

$$O' = \frac{A+B}{2} = \left(\frac{۵+۱}{2}, \frac{-۱-۳}{2}\right) = (۳, -۲)$$

فاصله دو نقطه  $A$  و  $O'$  برابر اندازه شعاع دایره است:

$$R = O'A = \sqrt{(۳-۱)^2 + (-۲+۳)^2} = \sqrt{۴+۱} = \sqrt{۵}$$

۱۹) اگر فاصله نقطه  $M(۰,۲)$  تا  $O'(۳, -۲)$  (مرکز دایره) برابر  $\sqrt{۵}$  باشد، آن‌گاه نقطه  $M$  روی این دایره قرار دارد:

$$O'M = \sqrt{(۰-۳)^2 + (۲+۲)^2} = \sqrt{۲۵} = ۵$$

پس نقطه  $M$  روی محیط این دایره قرار ندارد.

۱۹) مختصات  $M$  وسط پاره خط  $BC$  برابر است با:

$$M = \left(\frac{x_B+x_C}{2}, \frac{y_B+y_C}{2}\right) = \left(\frac{۳+۵}{2}, \frac{-۲+۴}{2}\right) = \left(\frac{۸}{2}, \frac{۲}{2}\right) = (۴, ۱)$$

۲۰) با داشتن مختصات دو نقطه  $A$  و  $M$ ، طول پاره خط  $AM$  را به دست می‌آوریم:

$$A(-۲, ۴), M(۴, ۱) \Rightarrow AM = \sqrt{(۴+۲)^2 + (۱-۴)^2} \\ = \sqrt{۳۶+۹} = \sqrt{۴۵} = \sqrt{۹ \times ۵} = ۳\sqrt{۵}$$

$$m = \frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{۱-۴}{۴-(-۲)} = \frac{-۳}{۶} = -\frac{۱}{۲} \quad (\text{پ})$$

$$m = -\frac{۱}{۲}, A(-۲, ۴) \Rightarrow y - ۴ = -\frac{۱}{۲}(x + ۲)$$

$$\xrightarrow{\times 2} 2(y - ۴) = -(x + ۲) \Rightarrow 2y - ۸ = -x - ۲ \Rightarrow 2y + x = ۶$$

۱۳) اگر  $A(x_1, y_1)$  و  $B(x_2, y_2)$  باشند، آن‌گاه طول پاره خط  $AB$  برابر است با:

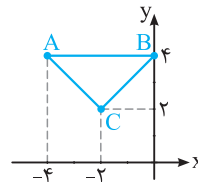
$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$A(۳, -۲), B(-۱, ۶) \Rightarrow AB = \sqrt{(-۱-۳)^2 + (۶-(-۲))^2} \\ = \sqrt{(-۴)^2 + (۸)^2} = \sqrt{۱۶+۶۴} = \sqrt{۸۰} = \sqrt{۱۶ \times ۵} = ۴\sqrt{۵}$$

۱۴) اگر  $A(x_1, y_1)$  و  $B(x_2, y_2)$  باشد، آن‌گاه مختصات نقطه  $M$  وسط  $AB$  به صورت  $M = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$  است. بنابراین:

$$M = \left(\frac{۳-۱}{2}, \frac{-۲+۶}{2}\right) = (۱, ۲), O(۰, ۰)$$

$$\Rightarrow OM = \sqrt{(۱-۰)^2 + (۲-۰)^2} = \sqrt{۱+۴} = \sqrt{۵}$$



۱۴) طول اضلاع مثلث را به دست می‌آوریم:

$$AB = \sqrt{(۴-۴)^2 + (۰+۴)^2} = \sqrt{۰+۱۶} = \sqrt{۱۶} = ۴$$

$$AC = \sqrt{(۲-۴)^2 + (-۲+۴)^2} = \sqrt{۴+۴} = \sqrt{۸} = ۲\sqrt{۲}$$

$$BC = \sqrt{(۲-۴)^2 + (-۲-۰)^2} = \sqrt{۴+۴} = \sqrt{۸} = ۲\sqrt{۲}$$

چون  $AC = BC$ ، پس مثلث متساوی‌الساقین است. از طرفی تساوی  $AB^2 = AC^2 + BC^2$  برقرار است، پس مثلث در رأس  $C$  قائم‌الزاویه است.

$$S = \frac{1}{2} CA \times CB = \frac{1}{2} \times \sqrt{۸} \times \sqrt{۸} = \frac{1}{2} \times ۸ = ۴ \quad (\text{پ})$$

۱۵) فاصله بین دو نقطه  $A$  و  $B$ ، طول ضلع مربع است:

$$AB = \sqrt{(۸-۴)^2 + (۵-۲)^2} = \sqrt{۴^2 + ۳^2} = \sqrt{۱۶+۹} = \sqrt{۲۵} = ۵$$

محیط مربع برابر  $۴AB = ۴ \times ۵ = ۲۰$  و مساحت مربع برابر  $a^2 = ۵^2 = ۲۵$  می‌باشد.

۱۶) اگر  $P(۴, -۲)$  موقعیت این شخص و نقاط  $A(۲, ۵)$ ،  $B(۱, ۴)$  و  $C(-۳, ۳)$  موقعیت‌های این سه عابرانک باشند، با به دست آوردن فاصله نقطه  $P$  تا هر یک از نقاط  $A$ ،  $B$  و  $C$ ، کوتاه‌ترین فاصله را انتخاب می‌کنیم.

$$PA = \sqrt{(۲-۴)^2 + (۵+۲)^2} = \sqrt{۴+۴۹} = \sqrt{۵۳}$$

$$PB = \sqrt{(۱-۴)^2 + (۴+۲)^2} = \sqrt{۹+۳۶} = \sqrt{۴۵}$$

$$PC = \sqrt{(-۳-۴)^2 + (۳+۲)^2} = \sqrt{۴۹+۲۵} = \sqrt{۷۴}$$

با توجه به اعداد به دست آمده، کم‌ترین فاصله این شخص تا عابرانک  $B$  است.

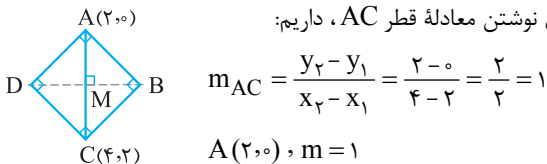
شیب خط  $\Delta$ ، قرینه عکس شیب خط  $AB$  است:

$$m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 + 4}{-1 - 3} = -1 \Rightarrow m_{\Delta} = \frac{-1}{m_{AB}} = \frac{-1}{-1} = 1$$

معادله خط گذرنده از نقطه  $(1, -2)$  با شیب ۱ برابر است با:

$$y - (-2) = 1(x - 1) \Rightarrow y + 2 = x - 1 \Rightarrow y = x - 3$$

۲۴ با توجه به شکل فرضی زیر، مختصات دو نقطه  $A$  و  $C$  مشخص است. برای نوشتن معادله قطر  $AC$ ، داریم:



$$m_{AC} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - 0}{4 - 2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$A(2,0), m = 1$$

معادله  $AC$ :  $y - 0 = 1(x - 2) \Rightarrow y = x - 2$

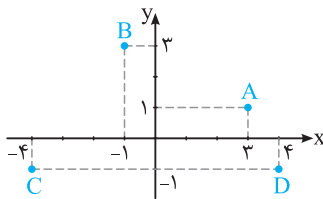
قطر  $BD$ ، عمودمنصف قطر  $AC$  است، پس شیب آن برابر

$$m' = -\frac{1}{m_{AC}} = -1$$

می‌گذرد:  $M = \frac{A+C}{2} = \left(\frac{2+4}{2}, \frac{0+2}{2}\right) = (3,1), m' = -1$

معادله قطر  $BD$ :  $y - 1 = -1(x - 3) \Rightarrow y - 1 = -x + 3 \Rightarrow y = -x + 4$

۲۵ نقاط  $A, B, C, D$  را در دستگاه مختصات مشخص می‌کنیم:



فاصله تمام نقاط روی عمودمنصف  $CD$  از نقاط  $C$  و  $D$  به یک اندازه است. معادله عمودمنصف  $CD$  به صورت زیر است:

$$M = \left(\frac{-4+4}{2}, \frac{-1-1}{2}\right) = (0, -1)$$

بنابراین  $x = 0$  عمودمنصف  $CD$  است.

فاصله تمام نقاط روی عمودمنصف  $AB$  از نقاط  $A$  و  $B$  به یک اندازه است. معادله عمودمنصف  $AB$  به صورت زیر است:

$$m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3 - 1}{-1 - 3} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \text{شیب عمودمنصف } AB = \frac{-1}{-\frac{1}{2}} = 2$$

$$N = \left(\frac{-1+3}{2}, \frac{3+1}{2}\right) = (1, 2)$$

معادله عمودمنصف  $AB$ :  $y - 2 = 2(x - 1) \Rightarrow y - 2 = 2x - 2 \Rightarrow y = 2x$

محل تلاقی دو خط به معادلات  $x = 0$  و  $y = 2x$ ، از چهار نقطه  $A, B, C, D$  به یک فاصله است:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 2x \end{cases} \Rightarrow y = 2(0) = 0 \Rightarrow O(0,0)$$

۲۰ اگر  $A(3,2), M(5,-1)$  و  $B(x_B, y_B)$ ، آن‌گاه:

$$\begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow 5 = \frac{3 + x_B}{2} \Rightarrow 3 + x_B = 10 \Rightarrow x_B = 7 \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \Rightarrow -1 = \frac{2 + y_B}{2} \Rightarrow y_B + 2 = -2 \Rightarrow y_B = -4 \end{cases}$$

پس مختصات نقطه  $B$ ، به صورت  $B(7,-4)$  است.

ب) اگر  $A'$  قرینه نقطه  $A$  نسبت به نقطه  $M$  باشد، آن‌گاه:

$$A' = 2M - A = 2(-1, 2) - (3, 2) = (-2, 4) - (3, 2) = (-2 + 3, 4 - 2) = (1, 0)$$

پ) قرینه نقطه  $A(-3, 5)$  نسبت به مبدأ مختصات، نقطه  $A'(3, -5)$  می‌باشد.

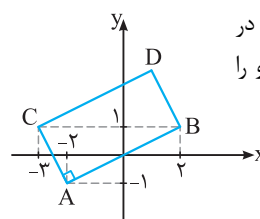
۲۱ با فرض  $A(a+1, b-3), M(3, 5)$  و  $A'(b-2, -a)$ ، داریم:

$$\begin{cases} 3 = \frac{(a+1) + (b-2)}{2} \\ 5 = \frac{(b-3) - a}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a+b-1}{2} = 3 \\ \frac{b-a-3}{2} = 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b-1=6 \\ b-a-3=10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=7 \\ b-a=13 \end{cases} \Rightarrow 2b=7+13=20 \Rightarrow b=10$$

$$\xrightarrow{a+b=7} a+10=7 \Rightarrow a=-3$$

۲۲ با مشخص کردن نقاط  $A, B, C$  در



دستگاه محورهای مختصات، رأس‌های روبه‌رو را مشخص می‌کنیم:

آ) نقاط  $B$  و  $C$  روبه‌روی هم و نقاط  $A$  و  $D$  روبه‌روی هم قرار دارند. در مستطیل (هر متوازی‌الاضلاع) داریم:

$$A + D = B + C$$

$$\Rightarrow D = B + C - A = (2, 1) + (-3, 1) - (-2, -1) = (1, 3)$$

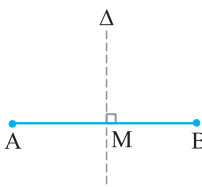
ب) مساحت مستطیل  $ABDC$  برابر حاصل ضرب  $AB$  در  $AC$  است:

$$AB = \sqrt{(2+2)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$$

$$AC = \sqrt{(-3+2)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow S = AB \times AC = \sqrt{20} \times \sqrt{5} = \sqrt{100} = 10$$

۲۳ عمودمنصف پاره‌خط  $AB$  از وسط آن می‌گذرد و بر آن عمود است:



$$M = \frac{A+B}{2} = \left(\frac{3-1}{2}, \frac{-4+0}{2}\right) = (1, -2)$$

$$\text{فاصله نقطه } A(x_0, y_0) \text{ از خط } x = a \text{ برابر } d = |x_0 - a| \text{ و از}$$

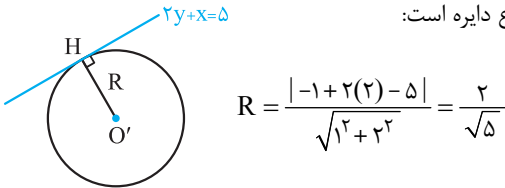
خط  $y = b$  برابر  $d = |y_0 - b|$  است، بنابراین فاصله نقطه  $A(4, -6)$  از

خط  $x = -2$  برابر  $d = |4 - (-2)| = 6$  و از خط  $y = 5$  برابر

$$d = |-6 - 5| = 11 \text{ می‌باشد.}$$

$$\Rightarrow S = \left(\frac{\lambda}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{64}{5}$$

۲۰ مطابق شکل زیر، فاصله  $O'$  (مرکز دایره) تا خط  $x + 2y - 5 = 0$  برابر اندازه شعاع دایره است:



$$R = \frac{|-1 + 2(2) - 5|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

مساحت دایره به شعاع  $R$  برابر  $\pi R^2$  است، بنابراین:

$$S = \pi R^2 = \pi \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 = \pi \times \frac{4}{5} = \frac{4\pi}{5}$$

۲۱ اگر شیب دو خط داده‌شده با هم برابر باشند، آنگاه دو خط با هم

موازی‌اند:

$$2x - y = 11 \Rightarrow m_1 = \frac{\text{ضریب } x}{\text{ضریب } y} = \frac{2}{-1} = -2 \quad (\bar{a})$$

$$2x - y = 5 \Rightarrow m_2 = \frac{\text{ضریب } x}{\text{ضریب } y} = \frac{2}{-1} = -2$$

دو خط با هم موازی‌اند.  $m_1 = m_2 \Rightarrow$

برای به‌دست آوردن فاصله بین دو خط موازی داده‌شده، نقطه دلخواهی روی یکی از خطها، مثلاً  $2x - y = 11$  مشخص می‌کنیم، سپس فاصله این نقطه را تا خط دیگر، یعنی خط به معادله  $2x - y - 5 = 0$  به‌دست می‌آوریم. نقطه  $A(5, -1)$  روی خط  $2x - y = 11$  قرار دارد. فاصله  $A$  تا خط  $2x - y - 5 = 0$  برابر است با:

$$d = \frac{|2(5) - (-1) - 5|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{6}{\sqrt{5}}$$

$$x = -y + 4 \Rightarrow x + y - 4 = 0 \quad (\bar{b})$$

$$2x + 2y = 7 \Rightarrow 2x + 2y - 7 = 0$$

شیب خط به معادله  $x + y - 4 = 0$  برابر  $m_1 = -\frac{1}{1} = -1$  و شیب خط به

معادله  $2x + 2y - 7 = 0$  برابر  $m_2 = -\frac{2}{2} = -1$  می‌باشد:

دو خط با هم موازی‌اند.  $m_1 = m_2 \Rightarrow$

نقطه  $A(2, 2)$  روی خط  $x + y - 4 = 0$  قرار دارد. فاصله نقطه  $A$  را تا

خط به معادله  $2x + 2y - 7 = 0$  به‌دست می‌آوریم:

$$d = \frac{|2(2) + 2(2) - 7|}{\sqrt{2^2 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{8}} \times \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{8}}{8} = \frac{2\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

۲۲ فاصله نقطه  $A(x_0, y_0)$  از خط به معادله  $ax + by + c = 0$  برابر

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ می‌باشد:}$$

$$2x + 4y + 1 = 0, A(2, -1) \quad (\bar{a})$$

$$\Rightarrow d = \frac{|2(2) + 4(-1) + 1|}{\sqrt{2^2 + 4^2}} = \frac{3}{\sqrt{20}} = \frac{3}{2\sqrt{5}}$$

$$2x = y - 4 \Rightarrow 2x - y + 4 = 0, A(-4, 5) \quad (\bar{b})$$

$$\Rightarrow d = \frac{|2(-4) - 5 + 4|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{9}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{9\sqrt{5}}{5}$$

۲۳ مطابق شکل مقابل، فاصله نقطه  $A$  تا

ضلع  $BC$  برابر طول ارتفاع  $AH$  است:



معادله  $BC$  را با داشتن مختصات دو نقطه  $B$  و  $C$  می‌نویسیم:

$$B(-1, 4), C(-2, 1) \Rightarrow m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4 - 1}{-1 - 2} = 3$$

$$\text{معادله } BC: y - 4 = 3(x + 1) \Rightarrow y - 3x - 7 = 0$$

فاصله نقطه  $A(2, 0)$  تا خط به معادله  $y - 3x - 7 = 0$  برابر است با:

$$AH = \frac{|0 - 3(2) - 7|}{\sqrt{(-3)^2 + (1)^2}} = \frac{13}{\sqrt{10}} \times \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = \frac{13\sqrt{10}}{10}$$

$$S = \frac{1}{2} AH \times BC \quad (\bar{b}) \text{ مساحت مثلث } ABC \text{ برابر است با:}$$

طول پاره‌خط  $BC$  برابر است با:

$$BC = \sqrt{(-2 + 1)^2 + (1 - 4)^2} = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2} AH \times BC = \frac{1}{2} \times \frac{13\sqrt{10}}{10} \times \sqrt{10} = \frac{13}{2}$$

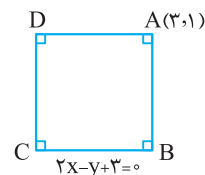
۲۴ نقطه  $A(3, 1)$  روی خط  $2x = y - 3$  قرار ندارد، زیرا مختصات

نقطه  $A$  در معادله  $2x - y + 3 = 0$  صدق نمی‌کند. اگر شکل فرضی زیر را

در نظر بگیریم، آنگاه  $2x - y + 3 = 0$  معادله ضلع  $BC$  است. چون  $AB$

بر  $BC$  عمود است، پس فاصله نقطه  $A$  تا خط  $2x - y + 3 = 0$ ، طول

ضلع مربع است:



ت) معادله دو خط را در یک دستگاه قرار می‌دهیم و با حل دستگاه محل تلاقی دو خط را مشخص می‌کنیم:

$$\begin{cases} x=1 \\ 2y-3x-2=0 \end{cases} \Rightarrow 2y-3(1)-2=0 \Rightarrow 2y=5$$

$$\Rightarrow y = \frac{5}{2} \Rightarrow \text{نقطه تلاقی} = (1, \frac{5}{2})$$

ث) مساحت مثلث ABC برابر است با:  $S = \frac{1}{2} BH \times AC$

فاصله بین دو نقطه A و C است. داریم:

$$AC = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ = \sqrt{(4-1)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

BH، فاصله نقطه B تا خط AC است. ابتدا معادله خط AC را می‌نویسیم:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-4}{4-1} = -\frac{2}{3}, A(1,4)$$

$$\text{معادله خط AC: } y-4 = -\frac{2}{3}(x-1) \rightarrow 3y-12 = -2(x-1)$$

$$\Rightarrow 3y + 2x - 14 = 0$$

فاصله نقطه B(-2, -2) از خط به معادله  $2x + 3y - 14 = 0$  برابر است با:

$$BH = \frac{|2(-2) + 3(-2) - 14|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{24}{\sqrt{13}}$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2} BH \times AC = \frac{1}{2} \times \frac{24}{\sqrt{13}} \times \sqrt{13} = 12$$

۳۵) موقعیت شهر A به صورت (۴۵, ۳۷) و موقعیت شهر B به صورت (۳۷, ۳۱) می‌باشد:

$$x_2 - x_1 = 45^\circ - 37^\circ = 8^\circ \xrightarrow{\times 110 \text{ km}} x_2 - x_1 = 880 \text{ km}$$

$$y_2 - y_1 = 37^\circ - 31^\circ = 6^\circ \xrightarrow{\times 110 \text{ km}} y_2 - y_1 = 660 \text{ km}$$

$$\Rightarrow \text{فاصله بین دو شهر} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$= \sqrt{(8 \times 110)^2 + (6 \times 110)^2} = \sqrt{8^2 \times 110^2 + 6^2 \times 110^2}$$

$$= \sqrt{110^2 (8^2 + 6^2)} = \sqrt{110^2 \times 100} = 110 \times 10 = 1100 \text{ km}$$

۳۲) فاصله نقطه (۳, ۴) را از خط  $x + 3y - a = 0$  به دست می‌آوریم آن را برابر  $\frac{3}{\sqrt{10}}$  قرار می‌دهیم:

$$d = \frac{|3 + 3(4) - a|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{|15 - a|}{\sqrt{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}} \Rightarrow |15 - a| = 3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 15 - a = 3 \\ 15 - a = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 15 - 3 = a \\ 15 + 3 = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 12 \\ a = 18 \end{cases}$$

۳۳) دو خط  $3x + 4y = 1$  و  $4x - 3y = 5$  بر هم عمودند، زیرا:

$$3x + 4y = 1 \Rightarrow m = -\frac{3}{4} \Rightarrow mm' = -1 \\ 4x - 3y = 5 \Rightarrow m' = \frac{4}{3}$$

مختصات نقطه  $A(1,1)$  در هیچ یک از معادلات  $4x - 3y = 5$  و  $3x + 4y = 1$  صدق نمی‌کنند، پس نقطه A روی هیچ یک از این دو خط قرار ندارند. طبق شکل، فاصله نقطه A از دو خط، طول و عرض مستطیل خواهند بود:

$$a = \frac{|3(1) + 4(1) - 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{6}{5}, b = \frac{|4(1) - 3(1) - 5|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow S = ab = \frac{6}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{24}{25}$$

۳۴) برای قسمت‌های (ا) و (ب)، مختصات M وسط پاره خط BC

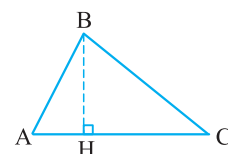
$$M = \frac{B+C}{2} = (1,0)$$

به دست می‌آوریم:

$$M(1,0), A(1,4) \xrightarrow{x_A = x_M} x = 1 \quad (\text{معادله میانه AM}) \quad (\text{ا})$$

$$AM = \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2} = \sqrt{(1-1)^2 + (0-4)^2} = 4 \quad (\text{ب})$$

پ) برای نوشتن معادله ارتفاع BH، شیب ارتفاع را به دست می‌آوریم:



$$m_{BH} = \frac{-1}{m_{AC}}, m_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{2-4}{4-1} = -\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow m_{BH} = \frac{-1}{-\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}, B(-2, -2) \Rightarrow y + 2 = \frac{3}{2}(x + 2)$$

$$\Rightarrow 2y - 3x - 2 = 0$$