

مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی

۱

درس

◆ دنباله حسابی و مجموع جملات آن ◆

یادآوری: جملات دنباله‌های حسابی، از جمع عددی ثابت به نام قدرنسبت (d) با جمله قبل از آن به دست می‌آیند:

$$a_1, \underbrace{a_1 + d}_{a_2}, \underbrace{a_1 + 2d}_{a_3}, \underbrace{a_1 + 3d}_{a_4}, \dots \Rightarrow \begin{cases} a_n = a_1 + (n-1)d \\ a_n - a_m = (n-m)d \end{cases}$$

$$2b = a + c \text{ یا } b = \frac{a+c}{2}$$

نکته: (۱) اگر a, b, c سه جمله متوالی یک دنباله حسابی باشند، آن‌گاه:

$$a_n + a_m = a_p + a_q$$

(۲) اگر $n + m = p + q$ باشد، آن‌گاه:

مجموع n جمله اولیه دنباله حسابی، $a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, \dots$ برابر است با:

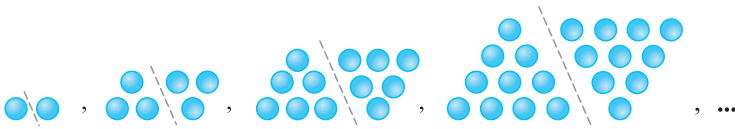
$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \xrightarrow{a_n = a_1 + (n-1)d} S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

مجموع n عدد طبیعی اولیه (اعداد طبیعی از ۱ تا n) برابر است با:

(مشابه فعالیت کتاب درسی)

با توجه به آرایش‌های زیر مجموع اعداد طبیعی از ۱ تا n را به دست آورید.



$$2(1) = 1 \times 2$$

می‌توان نوشت:

$$2(1+2) = 2 \times 3$$

$$2(1+2+3) = 3 \times 4$$

$$2(1+2+3+4) = 4 \times 5$$

⋮

$$2(1+2+3+\dots+n) = \dots \times \dots \Rightarrow 1+2+3+\dots+n = \dots$$

با استفاده از روش ابتکاری گاوس، مجموع اعداد طبیعی ۱ تا n را بیابید. آیا می‌توانید به کمک همین روش مجموع n جمله اولیه یک دنباله

(مشابه فعالیت کتاب درسی)

حسابی (از a_1 تا a_n) را به دست آورید؟

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

۳ در یک مهمانی مردانه ۲۰ نفر شرکت دارند. اگر همه آن‌ها به یکدیگر دست دهند، در کل چند بار این عمل انجام می‌شود؟
روش اول: (به کمک مجموع n عدد طبیعی اولیه)

روش دوم: (به کمک ترکیبیات)

۴ در یک دنباله حسابی $S_n = 2n^2 - 3n$ می‌باشد، در این صورت:

۱) a_1 را بیابید.

۲) با محاسبه $S_7 = a_1 + a_2 + \dots + a_7$ ، a_7 را به دست آورید و سپس قدرنسبت دنباله را محاسبه کنید.

۳) عبارت $S_n - S_{n-1}$ چه چیزی را نشان می‌دهد؟

۴) جمله عمومی دنباله حسابی را به دست آورید.

۵) هر عبارت را به حاصل آن وصل کنید.

- | | | |
|--|---|--------------------------|
| ۱) $2 + 4 + 6 + \dots + 2n$ | • | • $2n(n+1)$ |
| ۲) $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1)$ | • | • $\frac{(n-1)(n+2)}{2}$ |
| ۳) $\frac{-5 + 0 + 5 + 10 + 15 + \dots + 5n}{5}$ | • | • $\frac{n(n-1)}{2}$ |
| ۴) $1 + 2 + 3 + \dots + (n-1)$ | • | • $n(n+1)$ |
| | | • n^2 |

۶) مجموع بیست جمله اول هر یک از دنباله‌های حسابی زیر را بیابید.

۱) $-5, 0, 5, \dots$

(نهایی - شهریور ۹۲)

۲) $-5, -3, -1, \dots$

(نهایی - دی ۹۱)

حاصل عبارات زیر را بیابید.

۱) $1 + 4 + 7 + 10 + \dots + 100$

.....

.....

۲) $1 - 2 - 5 - 8 \dots - 35$

.....

.....

۳)
$$\frac{1 + 2 + 3 + \dots + 999}{500}$$

.....

.....

۴) جمله دهم یک دنباله حسابی ۵ و مجموع ده جمله اول آن ۲۰ می‌باشد، قدرنسبت و جمله اول آن را بیابید.

.....

.....

۵) در دنباله حسابی ۲۰۶۰۱۰۱۴۰۰۰ حداقل چند جمله را باید جمع کنیم، تا حاصل از ۲۰۰ بیش تر شود؟

(مشابه تمرین کتاب درسی، نهایی- شهریور ۹۰ و مشابه دی ۹۳)

.....

.....

۶) حداکثر چند جمله از دنباله حسابی ۱۰۳۰۵۰۰۰ را با هم جمع کنیم تا حاصل کم تر از ۴۰۰ گردد؟

.....

.....

۷) جدول زیر را کامل کنید.

a_1	d	a_n	S_n
۷	۲
.....	$6n - 5$
.....	$2n(n + 1)$
-۴	$-5n + 1$

.....

.....

۱۲ جمله اول یک دنباله حسابی برابر (-1) و جمله دهم آن برابر 44 می‌باشد.

ا) مجموع 10 جمله اول این دنباله را بیابید.

.....

.....

ب) مجموع 100 جمله اول این دنباله را به دست آورید.

.....

.....

پ) مجموع n جمله اول این دنباله را به کمک یک عبارت جبری نمایش دهید.

.....

.....

۱۳ مجموع اعداد فرد بین 10 تا 100 چقدر است؟

.....

.....

(مشابه تمرین کتاب درسی)

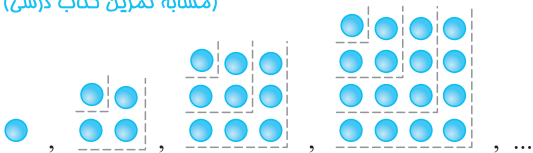
۱۴ مجموع اعداد طبیعی دو رقمی و مضرب 6 را بیابید.

.....

.....

(مشابه تمرین کتاب درسی)

۱۵ کدام نتیجه‌گیری از شکل روبه‌رو به دست می‌آید؟



$1 = 1$, $1 + 3 = \dots$, $1 + 3 + 5 = \dots$, $1 + 3 + 5 + 7 = \dots$

$\Rightarrow 1 + 3 + 5 + \dots + 2n - 1 = \dots$

و از آن جا می‌توان نتیجه گرفت: $2 + 4 + \dots + 2n = (1 + 2 + \dots + 2n) - (1 + 3 + \dots + 2n - 1) = \frac{2n(\dots)}{2} - \dots = \dots$

ب) حال ببینید که به کمک فرمول مجموع جملات دنباله حسابی، رابطه به دست آمده برای مجموع n عدد زوج اولیه یعنی $2 + 4 + \dots + 2n$

صحیح است یا خیر؟

.....

.....

۱۶ در 20 جمله اول یک دنباله حسابی، مجموع جملات ردیف زوج، برابر 36 و مجموع جملات ردیف فرد، برابر 21 است.

(مشابه تمرین کتاب درسی)

ا) به کمک تفاضل رابطه مربوط به مجموع جملات زوج و مجموع جملات فرد، قدرنسبت را بیابید.

.....

.....

ب) جمله اول را به دست آورید.

.....

.....

۱۷ در یک دنباله حسابی با ۱۰۰ جمله، مجموع ۵ جمله اول برابر ۲۰ و مجموع ۵ جمله آخر برابر ۱۴۴۵ است.

ا) به کمک محاسبه جمله اول و قدرنسبت، مجموع تمام جملات دنباله را بیابید.

ب) به کمک محاسبه a_3 و a_{18} ، مجموع تمام جملات دنباله را بیابید.

۱۸ در یک دنباله حسابی مجموع بیست جمله اول، سه برابر مجموع دوازده جمله اول آن است. اگر جمله سوم برابر ۶ باشد، جمله دهم را بیابید.

۱۹ مهرناز روز اول ۵ دقیقه دویده است. اگر او هر روز ۲ دقیقه بیش تر از روز قبل بدود، روز هفتم چند دقیقه می دود؟ مهرناز مجموعاً در طول

یک هفته چند دقیقه دویده است؟

۲۰ محمد در ساعت اول کار خود ۷۰ خط تایپ می کند. اگر با گذشت هر ساعت، میزان کار او ۲ خط کاهش یابد، پس از گذشت ۱۰ ساعت کاری، او

مجموعاً چند خط تایپ می کند؟

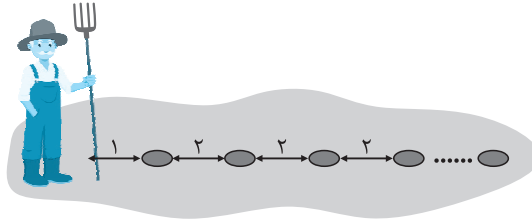
۲۱ نمره علی در امتحان درس ریاضی ۱۵ شده است. اگر او در هر امتحان ۰/۲۵ نمره پیشرفت کند، پس از برگزاری چند امتحان دیگر میانگین

نمرات او ۱۷ خواهد بود؟

۲۲ اندازه زوایای یک Δ ضلعی تشکیل دنباله حسابی می دهند. اگر اندازه کوچک ترین و بزرگ ترین زاویه این Δ ضلعی به ترتیب 9° و 261°

باشد، تعداد اضلاع این Δ ضلعی چقدر است؟

کشاورزی می‌خواهد تعدادی دانه را در گودال‌هایی که به فاصله ۲ متر از هم در یک ردیف کنده شده‌اند، بکارد. او در فاصله ۱ متری گودال اول ایستاده و ظرف محتوی دانه‌هایش را آن‌جا قرار داده، به طوری که در گودال اول ۱ دانه می‌کارد و به جای اصلی خود برمی‌گردد. ۲ تا دانه برمی‌دارد و در گودال دوم می‌کارد و به جای اولش باز می‌گردد و به همین ترتیب n دانه برمی‌دارد و در گودال n ام می‌کارد. (مشابه مثال کتاب درسی)



اگر او در مجموع ۶۶ دانه کاشته باشد (و به جای اولش برگشته باشد)، چه مسافتی را طی کرده است؟

.....

.....

.....

اگر او در مجموع برای کاشتن این دانه‌ها (و بازگشت به جای اولش) ۱۶۲ متر مسافت طی کند، او در کل چند دانه کاشته است؟

.....

.....

◆ دنباله هندسی و مجموع جملات آن ◆

یادآوری: هر یک از جملات دنباله هندسی از ضرب عددی ثابت به نام قدرنسبت (q) در جمله قبل از آن به دست می‌آید:

$$a_1, \underbrace{a_1 q}_{\times q}, \underbrace{a_1 q^2}_{\times q}, \underbrace{a_1 q^3}_{\times q}, \dots \Rightarrow \begin{cases} a_n = a_1 q^{n-1} \\ \frac{a_n}{a_m} = q^{n-m} \end{cases}$$

$$b^2 = ac \Rightarrow b = \pm \sqrt{ac}$$

نکته: اگر a, b, c سه جمله متوالی دنباله‌ای هندسی باشند، آن‌گاه:

$$S_n = a_1 + a_1 q + \dots + a_1 q^{n-1} = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

مجموع n جمله اولیه دنباله هندسی $a_1, a_1 q, a_1 q^2, \dots$ برابر است با:

$$S_1 = a_1, \quad S_n - S_{n-1} = a_n$$

نکته:

(فعالیت کتاب درسی)

اگر $a_1, a_1 q, a_1 q^2, \dots$ یک دنباله هندسی باشد، مجموع n جمله اولیه آن برابر است با:

$$S_n = a_1 + a_1 q + \dots + \dots$$

حال طرفین رابطه بالا را در q ضرب می‌کنیم، داریم:

$$qS_n = a_1 q + \dots + \dots + \dots$$

اگر طرفین دو رابطه داده شده را از هم کم کنیم، می‌توانیم بنویسیم:

$$qS_n - S_n = (\dots) - (\dots) = \dots$$

$$\Rightarrow S_n(q-1) = \dots \Rightarrow S_n = \dots = \dots$$

مجموع ده جمله اول دنباله هندسی $۱۶, ۸, ۴, \dots$ را بیابید. ۲۵

.....

.....

.....

در دنباله هندسی $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{729}{128}$ ۲۶

ا) قدرنسبت و تعداد جملات را بیابید.

.....

.....

ب) مجموع همه جملات را به دست آورید.

.....

.....

حاصل هر یک از عبارتهای زیر را بیابید. ۲۷

ا) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{4} + \frac{1}{25} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{3125} - \frac{1}{64} = (\dots) - (\dots)$

.....

.....

.....

ب) $3 - 6 + 12 - 24 + \dots + 3072$

.....

.....

.....

درست یا نادرست بودن عبارتهای زیر را مشخص کنید. ۲۸

ا) جمله اول یک دنباله هندسی که مجموع ۶ جمله اول آن ۲۵ و قدرنسبتش $\frac{2}{3}$ است، برابر ۹ می باشد.

.....

.....

.....

ب) مجموع تمام جملات دنباله هندسی $\frac{1}{243}, \frac{1}{9}, \frac{1}{3}, 1, \dots, \frac{1}{243}$ برابر با $\frac{364}{243}$ است. ۲۹

(مشابه نهایی - فرورداد ۹۱ و شهریور ۹۴ و ۹۵)

.....

.....

.....

جدول زیر را کامل کنید. ۲۹

a_1	q	a_n	S_n	S_1
.....	2×3^n
۱	$\frac{1}{5}$
.....	$2\left(\frac{3}{4}\right)^n$
(-۱)	$-2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$

اگر مجموع تمام جملات یک دنباله هندسی با ۸ جمله، برابر ۳۴ باشد، قدرنسبت این دنباله را بیابید، اگر: ۳۰

ا) مجموع چهار جمله اول آن برابر ۳۲ باشد.

ب) مجموع ۴ جمله اول آن، ربع مجموع ۴ جمله آخر آن باشد.

۳۱) به کمک فرمول مجموع جملات دنباله‌های هندسی، حاصل هر یک از عبارات زیر را به دست آورید. ($a \neq 1, x \neq y$) (مشابه تمرین کتاب درسی)

۱) $1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1} = \dots$

۲) $1 - a + a^2 - \dots + a^{n-1} \stackrel{\text{فرد } n}{=} \dots$

۳) $x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \dots + y^{n-1} = \dots$

ب) به کمک روابط بالا، حاصل عبارت‌های زیر را بنویسید.

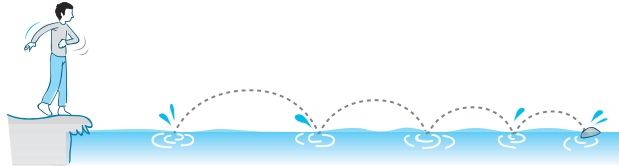
۱) $a^n - 1 = \dots$

۲) $a^n + 1 = \dots$

۳) $x^n - y^n = \dots$

۳۲) علی روز اول ماه ۲ صفحه و هر روز دو برابر روز قبل مطالعه می‌کند. او تا پایان ماه مجموعاً چند صفحه مطالعه می‌کند؟ (مشابه تمرین کتاب درسی)

۳۳ شخصی سنگی را روی آب پرتاب می‌کند، این سنگ پس از هر بار خوردن به سطح آب، یک نیم‌دایره را طی می‌کند و هر بار قطر این نیم‌دایره $\frac{2}{3}$ دفعه قبل می‌باشد. اگر قطر نیم‌دایره اول ۳ متر باشد، فاصله اولین برخورد با آب تا ششمین برخورد با آب چند متر است؟ (مشابه فرداد ۹۰)



۳۴ اگر نرخ تورم در هر سال ۱۰ درصد باشد، یعنی هر سال نسبت به سال قبل، قیمت‌ها ۱۰ درصد افزایش یابند و قیمت اجاره سالانه یک آپارتمان ۱ میلیون تومان باشد، بعد از ۵ سال مجموعاً چند تومان برای اجاره این آپارتمان پرداخت شده است؟

۳۵ در دنباله $a_n = 3 \times 2^n$ ، مجموع چه تعداد از جملات آن برابر با ۳۷۸ می‌گردد؟ (مشابه تمرین کتاب درسی)

۳۶ مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع ۲ مفروض است. اگر در هر مرحله وسط اضلاع این مثلث را به هم وصل کنیم، مثلث متساوی‌الاضلاع کوچک‌تری ایجاد می‌شود. اگر این کار را متوالیاً انجام دهیم؛
 ا) جدول زیر را کامل کنید.

مثلث	۱	۲	۳	...	n
محیط
مساحت
ضلع

ب) اگر این کار را تا ۵ مرحله ادامه دهیم، مجموع محیط‌ها و مجموع مساحت‌های همه مثلث‌ها را به دست آورید.



پ) اگر هر بار مطابق شکل فقط یکی از مثلث‌های کوچک ایجادشده را رنگ نکنیم، پس از چند مرتبه، حداقل ۹۹ درصد سطح مثلث شده است؟

۳۷ در یک سری از مسابقات حذفی در هر مرحله از مسابقه، نصف شرکت‌کننده‌ها حذف می‌گردند. اگر برنده این مسابقه پس از ۱۰ مرحله مشخص گردد، تعداد شرکت‌کننده‌ها چندتا بوده است؟

.....

.....

۳۸ اگر هر شرکت‌کننده در هر مرحله، دقیقاً در یک مسابقه شرکت کند، مجموعاً چه تعداد مسابقه انجام می‌شود؟

.....

.....

.....

۳۸ یک فروشگاه در هر بار حراج قیمت کالاهای خود را $\frac{1}{3}$ کاهش می‌دهد. پس از چند بار حراج، قیمت این کالا بیش از ۴۵ درصد کاهش می‌یابد؟

(مشابه مثال کتاب درسی)

.....

.....

.....

۳۹ حاصل $A = \frac{t^{11} + t^{10} + t^9 + \dots + t + 1}{t^9 + t^6 + t^3 + 1}$ را به ازای $t = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ بیابید؟

.....

.....

.....

۴۰ حاصل عبارت $A = \frac{t^8 - t^7 + t^6 \dots - t + 1}{t^6 - t^3 + 1}$ را به ازای $t = \frac{1 + \sqrt{17}}{2}$ بیابید.

.....

.....

.....

۴۱ تعداد جملات یک دنباله هندسی متناهی، عددی زوج است. اگر مجموع تمام جملات آن ۳ برابر مجموع جملات با ردیف فرد شود، قدرنسبت آن چقدر است؟

.....

.....

.....

 یادداشت

.....

.....

.....

.....