



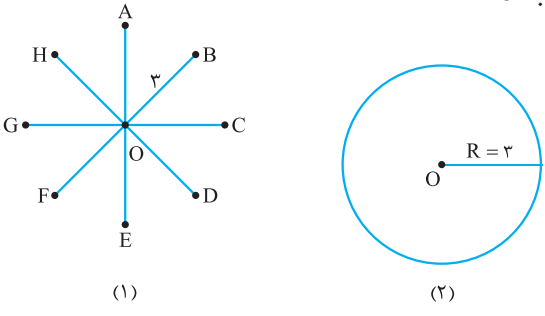
مقدمه

اشکال هندسی در زندگی، همیشه دارای کاربردهای فراوان بوده و برای فعالیت‌های انسان، الهام‌بخش و سمبل نیز شده است. دایره یکی از این اشکال می‌باشد که مثلاً ابتدایی‌ترین کاربرد آن، چرخ و چرخ‌دنده‌ها هستند که از قدیم‌الایام مورد استفاده بشر قرار گرفته‌اند. هم‌چنین دایره در هنر ایرانی، به شکل شمس و یک حلقه نورانی دیده می‌شود و در خطوط گل، بوته، اشکال اسلامی و ترکیب رنگ‌ها، دایره به عنوان اساسی‌ترین شکل، مورد استفاده قرار می‌گیرد. همان‌طور که می‌دانید، دایره در علوم فیزیک، نجوم و ... استفاده بسیاری دارد و در شهرسازی مدرن از نظریه‌هایی چون نظریه متحدالمرکز و نظریه قطاعی و مدل حلقه‌ای کمک گرفته می‌شود. در این فصل از کتاب می‌خواهیم شما را از پایه، با این مبحث بسیار شیرین آشنا کنیم و پله‌پله پیش رویم تا شما عزیزان کاملاً با مفهوم و موارد استفاده از دایره، اعم از روابط زاویه‌ای و روابط طولی آشنا شوید.

مفاهیم مقدماتی دایره

شما دانش‌آموزان عزیز، در سال‌های قبل مطالب مهمی از دایره مثل زاویه مرکزی، محاطی، وتر در دایره و ... را فرا گرفته‌اید. در کتاب پیش رو، علاوه بر یادآوری مطالب گذشته و طرح مثال‌های متنوع، می‌خواهیم دروس جدیدی را در مورد دایره عنوان کنیم که مباحث بسیار کاربردی و شیرینی خواهند بود. موارد جدید در این فصل از کتاب، زاویه‌های بین دو وتر متقاطع، روابط طولی بین وترهای متقاطع، هم‌چنین مماس بر دایره و مماس‌های مشترک دو دایره و ... هستند که همراه با پیش‌فرض‌های مقدماتی بیان خواهند شد. ابتدا به کتاب هندسه کلاس دهم رجوع می‌کنیم. در بخش ترسیمات هندسی، مسئله مهمی به صورت زیر طرح شده است:

مجموعه نقاطی از صفحه را بیابید که فاصله آن‌ها از نقطه ثابتی به نام O ، برابر ۳ باشد.

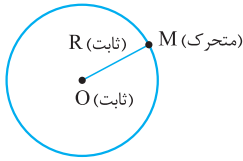


مطابق شکل (۱)، نقطه ثابتی مثل O را در صفحه در نظر می‌گیریم و چند نقطه مثل A ، B و ... به فاصله ۳ از آن قرار می‌دهیم. کاملاً مشخص است که نقاط A ، B و ... روی دایره‌ای به مرکز O و شعاع $R = 3$ قرار می‌گیرند؛ چون فاصله‌شان از O ، برابر ۳ سانتی‌متر است. یعنی برای یافتن مجموعه نقاط مطلوب، به مرکز O و شعاع ۳، دایره‌ای رسم می‌کنیم.

حالا طبق مطالب عنوان شده در این مسئله، می‌خواهیم تعریف دقیق دایره را مطرح کنیم.

تعریف دایره

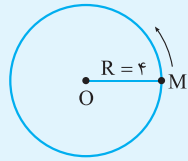
مجموعه نقاطی از صفحه است که فاصله آن‌ها از نقطه ثابتی در همین صفحه، برابر مقدار ثابتی باشد. نقطه ثابت را مرکز و فاصله ثابت را شعاع دایره می‌گوییم.



دایره‌ای به مرکز O و شعاع R را با نماد $C(O, R)$ نشان می‌دهیم.

مثال و پاسخ

مثال: نقطه ثابت O در صفحه داده شده است. اگر نقاط متحرکی مثل M در صفحه طوری قرار گیرند که همواره فاصله‌شان تا O برابر 4 باشد، محیط منحنی را که این نقاط طی می‌کنند بیابید.

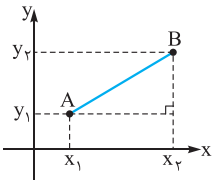


پاسخ: طبق مفهوم دایره، چون فاصله نقاط متحرکی مثل M در صفحه، از نقطه ثابت O، مقدار ثابت 4 است؛ پس این نقاط متحرک، مطابق شکل روی دایره‌ای به مرکز O و شعاع $R = 4$ حرکت می‌کنند.

محیط دایره $= 2\pi R = 2\pi(4) = 8\pi$

یک فرمول مهم: فاصله بین دو نقطه $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ که در صفحه مشخص شده‌اند، از دستور زیر به دست می‌آید:

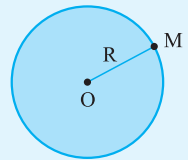
$$|BA| = |AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



به عبارت دیگر، زیر یک رادیکال، مربع تفاوت xها و مربع تفاوت yها را با هم جمع می‌کنیم. (دقت کنید این فرمول با استفاده از قضیه فیثاغورس به سادگی قابل اثبات است.)

مثال و پاسخ

مثال: نقطه $M(2, 0)$ روی دایره‌ای به مرکز $O(4, 4)$ قرار دارد. مساحت این دایره را بیابید.



پاسخ: مطابق شکل برای تعیین مساحت دایره، باید R را پیدا کنیم:

$$R = |OM| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(4 - 2)^2 + (4 - 0)^2} = \sqrt{20}$$

$$\Rightarrow S = \pi R^2 = \pi(\sqrt{20})^2 = 20\pi$$

مساحت دایره

اوضاع نسبی نقطه و دایره

حالا که مفهوم دایره را فراگرفته‌ایم، می‌خواهیم ببینیم اگر یک دایره را در صفحه رسم کنیم و نقطه‌ای در همان صفحه در نظر بگیریم، آن‌گاه آن نقطه و دایره نسبت به هم چه وضعیتی می‌توانند داشته باشند؟ هر دایره، صفحه را به سه بخش تقسیم می‌کند:

1 **داخل دایره:** فاصله نقاطی که درون دایره $C(O, R)$ قرار دارند، از شعاع دایره کم‌تر است.

M درون دایره $C(O, R)$ است. $\Leftrightarrow |OM| < R$

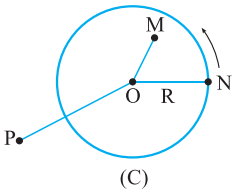
2 **روی دایره:** فاصله نقاطی که روی دایره $C(O, R)$ قرار دارند، با شعاع دایره مساوی است.

N روی دایره $C(O, R)$ است. $\Leftrightarrow |ON| = R$

3 **خارج دایره:** فاصله نقاطی که خارج دایره $C(O, R)$ قرار دارند، از شعاع دایره بیشتر است.

P خارج دایره $C(O, R)$ است. $\Leftrightarrow |OP| > R$

به عبارت دیگر برای تشخیص وضعیت نقطه معلومی مثل A، نسبت به دایره $C(O, R)$ باید فاصله مرکز دایره تا این نقطه $(|OA|)$ ، نسبت به شعاع دایره (R) سنجیده شود.



مثال و پاسخ

مثال: مشخص کنید نقطه $A(2, 1)$ داخل یا خارج دایره‌ای به مرکز $O(0, 0)$ و شعاع ۳ قرار دارد یا روی آن قرار گرفته است؟

پاسخ: ابتدا فاصله نقاط O و A را می‌یابیم:

$$|OA| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(2 - 0)^2 + (1 - 0)^2} = \sqrt{5}$$

چون $R = 3$ بوده و $|OA| < R$ است ($\sqrt{5} < 3$)، پس نقطه A درون دایره $C(O, R)$ واقع است.

مثال: نقطه $A(m+2, 3)$ در صفحه دایره $C(O, 10)$ به مرکز $O(1, -3)$ قرار دارد. حدود m را چنان بیابید که:

الف) درون دایره قرار گیرد. **ب)** A خارج دایره واقع شود.

پاسخ: منظور از $C(O, 10)$ یعنی شعاع دایره ۱۰ است.

الف) شرط این که نقطه A درون دایره قرار گیرد، این است که $|OA| < R$ باشد:

$$|OA| < 10 \Rightarrow \sqrt{((m+2)-1)^2 + (3-(-3))^2} < 10 \Rightarrow \sqrt{(m+1)^2 + 36} < 10 \xrightarrow[\text{توان } 2]{\text{طرفین به}} (m+1)^2 + 36 < 100$$

$$\Rightarrow (m+1)^2 < 64 \xrightarrow{\text{جذر}} |m+1| < 8 \Rightarrow -8 < m+1 < 8 \Rightarrow -9 < m < 7$$

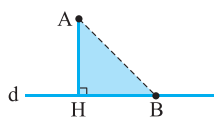
دقت کنید برای تبدیل نامساوی قدرمطلق به نامساوی مضاعف، از رابطه $|x| < k \Rightarrow -k < x < k$ استفاده کرده‌ایم.

ب) شرط این که نقطه A بیرون دایره قرار گیرد، این است که $|OA| > R$ باشد:

$$|OA| > 10 \Rightarrow \sqrt{(m+1)^2 + 36} > 10 \xrightarrow[\text{توان } 2]{\text{طرفین به}} (m+1)^2 + 36 > 100 \Rightarrow (m+1)^2 > 64$$

$$\xrightarrow{\text{جذر}} |m+1| > 8 \Rightarrow \begin{cases} m+1 > 8 \Rightarrow m > 7 \\ \text{یا} \\ m+1 < -8 \Rightarrow m < -9 \end{cases}$$

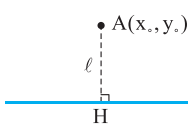
دقت کنید برای تبدیل نامساوی قدرمطلق به نامساوی مضاعف از رابطه $|x| > k \Rightarrow \begin{cases} x > k \\ \text{یا} \\ x < -k \end{cases}$ استفاده کرده‌ایم.



(۱)



(۲)



یادآوری: مطابق شکل (۱)، خط d و نقطه A خارج آن داده شده است. طبق تعریف فاصله نقطه A از خط d ، همان طول عمودی است که از نقطه A بر d رسم شده است. (یعنی طول پاره خط AH که بر d عمود شده، فاصله A از خط d می‌باشد.) چون در مثلث قائم‌الزاویه AHB ، طول وتر (AB) از طول یک ضلع زاویه قائمه (مثلاً AH) بزرگ‌تر است، پس کم‌ترین فاصله یک نقطه خارج یک خط را، برابر طول عمود رسم‌شده از آن نقطه بر خط در نظر می‌گیریم. طبق شکل (۲) که نقطه A بر خط d واقع شده است، فاصله A از d ، صفر خواهد بود.

نکته: خط d به معادله $ax + by + c = 0$ را در نظر می‌گیریم. فاصله نقطه $A(x_0, y_0)$ از این خط (با همان طول عمود رسم‌شده از A بر d) را می‌توانیم از دستور زیر حساب کنیم:

$$|AH| = l = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

دقت کنید هنگام استفاده از این فرمول، تمام جملات مربوط به معادله خط یک طرف تساوی بوده و طرف دوم فقط و فقط عدد صفر باشد. حال یک خط کسری می‌گذاریم، در صورت کسر با قراردادن قدرمطلق، تا خواستیم معادله خط را بنویسیم، به جای x و y آن، طول و عرض نقطه داده‌شده یعنی x_0 و y_0 را قرار می‌دهیم و در منخرج کسر هم، جذر مجموع مربعات ضرایب x و y خط را می‌نویسیم.

مثال و پاسخ

مثال: فاصله نقطه $A(2, -1)$ را از خط $3x = 4y$ بیابید.

پاسخ: معادله خط را به صورت $3x - 4y = 0$ می‌نویسیم: $l = \frac{|3(2) - 4(-1)|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{10}{5} = 2$

مثال و پاسخ

مثال: اگر فاصله مبدأ مختصات از خط $2x + 4y = m$ برابر $\sqrt{5}$ باشد، مقادیر m را بیابید.

پاسخ: ابتدا معادله خط را به صورت $2x + 4y - m = 0$ استاندارد می‌کنیم:

$$O \begin{bmatrix} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{bmatrix} \text{ و } 2x + 4y - m = 0 \Rightarrow l = \frac{|2(0) + 4(0) - m|}{\sqrt{2^2 + 4^2}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{5} = \frac{|-m|}{\sqrt{20}} \Rightarrow \frac{|-m|}{\sqrt{20}} = \frac{\sqrt{5} \times \sqrt{20}}{\sqrt{100}} \Rightarrow |m| = 10 \Rightarrow m = \pm 10$$

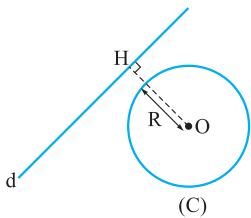
دقت کنید داخل قدرمطلق را می‌توان به دلخواه قرینه کرد.

اوضاع نسبی یک خط و دایره

همان‌طور که در سال‌های قبل دیدید، اگر یک خط و یک دایره در یک صفحه رسم شده باشند، حداکثر در دو نقطه مشترک خواهند بود.

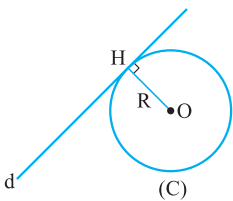
برای تشخیص وضعیت یک خط و یک دایره، فاصله مرکز دایره از آن خط را با شعاع دایره مقایسه می‌کنیم.

1 خط و دایره هیچ نقطه مشترکی ندارند: در این حالت (مطابق شکل) اگر از مرکز دایره (C) بر خط d عمود کنیم، فاصله مرکز تا خط d (یعنی طول عمود OH) از R بزرگ‌تر خواهد بود.



$$\text{خط } d \text{ و دایره } (C) \text{ هیچ نقطه مشترکی ندارند.} \Leftrightarrow |OH| > R$$

2 خط و دایره در یک نقطه مشترک‌اند: در این حالت (مطابق شکل) اگر از مرکز دایره (C) بر خط d عمود کنیم، فاصله مرکز تا خط d (یعنی طول عمود OH) مساوی R است.



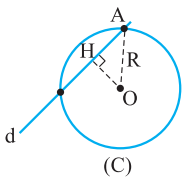
$$\text{خط } d \text{ و دایره } (C) \text{ در یک نقطه مشترک‌اند.} \Leftrightarrow |OH| = R$$

نتیجه بسیار مهم: اگر نقطه‌ای مثل H روی دایره باشد، خطی را که از H می‌گذرد و بر شعاعی از دایره از H عبور می‌کند، عمود باشد، مماس بر دایره در نقطه H می‌گوییم.

شعاع و مماس بر دایره، در نقطه تماس بر هم عمودند.

پس همواره به یاد داشته باشید:

3 خط و دایره در دو نقطه مشترک‌اند: در این حالت (مطابق شکل) اگر از مرکز دایره (C) بر خط d عمود کنیم، فاصله مرکز تا خط d (یعنی طول عمود OH) کم‌تر از R است.



دقت کنید در مثلث قائم‌الزاویه OAH، طول هر ضلع زاویه قائمه (مثل OH) از طول وتر (یعنی $OA = R$) کم‌تر است.

$$\text{خط } d \text{ و دایره } (C) \text{ در دو نقطه مشترک‌اند.} \Leftrightarrow |OH| < R$$

خط d و دایره (C) در این حالت با هم متقاطع‌اند و خط d را قاطع بر دایره (C) می‌گوییم.

مثال و پاسخ

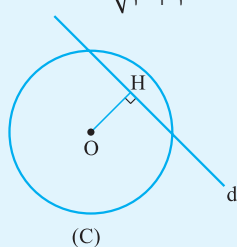
مثال: خط $x + y + 2 = 0$ و دایره $C(O, 10)$ به مرکز $O(1, -1)$ در یک صفحه مفروض‌اند. وضعیت خط و دایره را مشخص کنید.

پاسخ: ابتدا فاصله نقطه $O(x_0 = 1, y_0 = -1)$ را از خط $d: x + y + 2 = 0$ می‌یابیم

$$OH = \frac{|1 + (-1) + 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

و چون این فاصله از $R = 10$ کم‌تر است، خط در دو نقطه، دایره را قطع می‌کند.

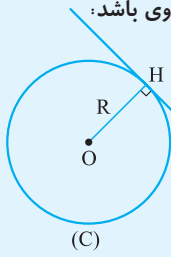
(به شکل توجه کنید)



مثال و پاسخ

مثال خط $d: 2x + y = m$ و دایره $C(O, \sqrt{5})$ به مرکز $O(0, 1)$ در یک صفحه مفروض اند. مقادیر m را چنان بیابید که خط و دایره بر هم مماس شوند.

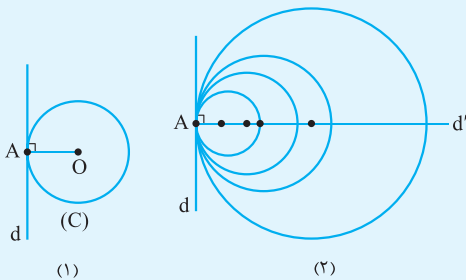
پاسخ شرط این که خط d بر دایره (C) مماس باشد، این است که شعاع دایره با فاصله نقطه O از خط d مساوی باشد:



$$OH = \frac{|2(0) + 1 - m|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|1 - m|}{\sqrt{5}} \xrightarrow{OH=R} \frac{|1 - m|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

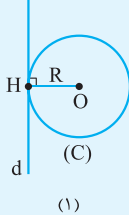
$$\Rightarrow |1 - m| = 5 \Rightarrow \begin{cases} 1 - m = 5 \Rightarrow m = -4 \\ 1 - m = -5 \Rightarrow m = 6 \end{cases}$$

مثال خط d مفروض است. مرکز دایره‌هایی که در یک نقطه مشخص بر خط d مماس باشند، روی چه شکلی قرار دارند؟

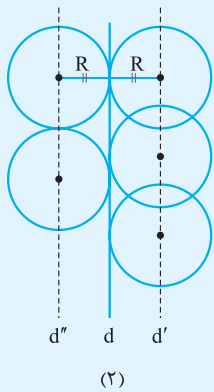


پاسخ فرض می‌کنیم مسئله حل شده و مطابق شکل (۱)، دایره (C) در نقطه ثابت و مشخص A (که روی d قرار دارد) بر خط d مماس شده است. چون شعاع دایره در نقطه تماس، بر خط مماس بر دایره عمود است، پس می‌توانیم در نقطه A ، دایره‌های دیگری بر خط d مماس کنیم. به دلیل ذکر شده، اگر از مرکز این دایره‌ها به A وصل کنیم، خطوط واصل بر خط d عمود است؛ پس مرکز این دایره‌ها، روی خط d' واقع است که در نقطه A بر خط d عمود است. (به شکل (۲) توجه کنید.)

مثال خط d مفروض است. مرکز دایره‌هایی که با شعاع ثابت R بر این خط مماس هستند، روی چه شکلی هستند؟

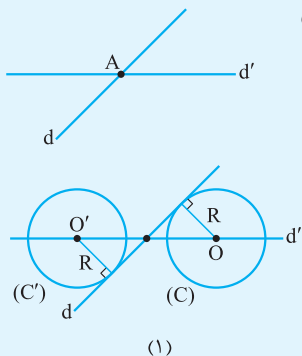


پاسخ فرض می‌کنیم مسئله حل شده و مطابق شکل (۱)، دایره (C) ، بر خط d مماس شده است، پس فاصله مرکز دایره (نقطه O) تا خط d برابر شعاع دایره می‌باشد؛ یعنی طول عمود اخراج شده از O بر خط d ، همان مقدار ثابت R است. از طرفی می‌دانیم مجموعه نقاطی از صفحه که از خط ثابت d به فاصله معلوم R هستند، روی دو خط موازی با d و در طرفین این خط قرار می‌گیرند.

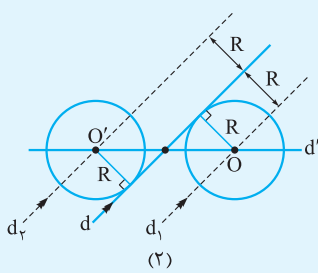


پس مرکز دایره‌هایی که با شعاع ثابت R بر خط d مماس می‌شوند، روی دو خط موازی با d و در طرفین این خط قرار می‌گیرند که فاصله هر خط تا d برابر R است. (به شکل (۲) توجه کنید.)

مثال دو خط d و d' در نقطه A متقاطع اند. دایره‌ای به شعاع معلوم R رسم کنید که مرکزش روی خط d' بوده و بر خط d مماس باشد.



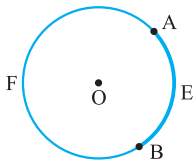
پاسخ مطابق شکل، فرض می‌کنیم مسئله حل شده و دو دایره با شعاع‌های معلوم R و مراکز O و O' (که روی خط d' قرار دارند) بر خط d مماس هستند. (شکل (۱))



پس فاصله مرکز آن‌ها (طول عمودهای رسم‌شده از O و O' بر d) تا خط d برابر R است، بنابراین مرکز این دو دایره روی خطوطی قرار دارند که به موازات d رسم می‌شوند و فاصله آن‌ها از خط d برابر R است. پس ابتدا دو خط به موازات d و در طرفین آن رسم می‌کنیم که فاصله این دو خط از d برابر R باشد. محل برخورد این خطوط موازی با d' مراکز دایره‌های مطلوب هستند (نقاط O و O'). دایره‌هایی به مراکز O و O' و شعاع معلوم R بر خط d مماس‌اند. (به شکل (۲) توجه کنید)

حالا که اوضاع نسبی نقطه و خط با دایره را یاد گرفتید، مفاهیم مهم دیگری هم هستند که یادآوری آن‌ها خالی از لطف نیست. لطفاً دقت بفرمایید:

کمان

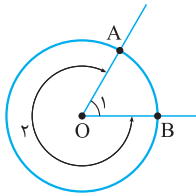


مطابق شکل، دو نقطه A و B را روی دایره C(O, R) در نظر گرفته‌ایم. در این صورت دو کمان با این نقاط ساخته می‌شود.

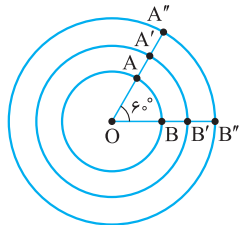
برای جلوگیری از اشتباهات متداول، از یک حرف دلخواه میان کمان استفاده می‌کنیم، مثلاً در شکل رسم‌شده، کمان‌های AEB و AFB را داریم. چون محیط یک دایره ۳۶۰° است، پس در شکل فوق می‌توان گفت:

$$\widehat{AEB} + \widehat{AFB} = 360^\circ$$

زاویه مرکزی



مطابق شکل دایره C(O, R) را رسم کرده‌ایم. با انتخاب دو نقطه A و B روی محیط دایره و اتصال آن‌ها به مرکز دایره، دو زاویه به وجود می‌آیند که چون رأس آن‌ها مرکز دایره است، زاویه‌های مرکزی نامیده می‌شوند (O_۱, O_۲). طبق تعریف اندازه هر زاویه مرکزی برحسب درجه با اندازه کمان روبه‌رویش مساوی است.



دقت کنید اندازه یک زاویه مرکزی، به طول شعاع دایره ربطی ندارد. در شکل زیر سه دایره رسم شده‌اند که مرکز همگی نقطه O است، ولی شعاع‌های آن‌ها با هم فرق می‌کند، چون O = ۶۰°، پس AB = A'B' = A''B'' = ۶۰°. البته کاملاً مشخص است که طول کمان‌های AB، A'B' و A''B'' با هم متفاوت است زیرا شعاع این سه دایره یکی نیست.

نکته: اگر اندازه یک کمان در دایره C(O, R) برحسب درجه alpha باشد، طول این کمان از دستور زیر به دست می‌آید:

$$\text{طول کمان} = \text{محیط دایره} \times \frac{\text{اندازه کمان برحسب درجه}}{360} \Rightarrow l = 2\pi R \left(\frac{\alpha}{360}\right) \Rightarrow l = \frac{\pi R \alpha}{180}$$

به این تعریف دقت کنید:

حاصل $\pi \left(\frac{\alpha}{180}\right)$ را مقدار زاویه برحسب رادیان (Radian) می‌گویند.

$$\alpha(\text{rad}) = \pi \frac{45}{180} = \frac{\pi}{4}$$

مثلاً اگر $\alpha = 45^\circ$ باشد، برحسب رادیان می‌شود:

مثال و پاسخ

مثال: طول کمان روبه‌رو به زاویه ۳۰°، در دایره‌ای به شعاع ۳۰ cm را برحسب متر بیابید.

پاسخ: در این مسئله R و alpha (برحسب درجه) داده شده‌اند:

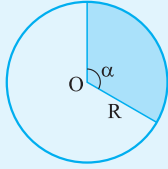
$$R = 30 \text{ cm} = 30 \times 10^{-2} = \frac{3}{10} \text{ m} \xrightarrow{\alpha = 30^\circ} l = \frac{\pi R \alpha}{180} = \frac{\pi \times \frac{3}{10} \times 30}{180} = \frac{3\pi}{60} \Rightarrow l = \frac{\pi}{20} \text{ m}$$

مثال و پاسخ

مثال: اگر طول کمان روبه‌رو به زاویه 24° در دایره $C(O, R)$ برابر 4π باشد، مساحت و محیط دایره را بیابید.

پاسخ: با فرض $\alpha = 24^\circ$ و $\ell = 4\pi$ ، باید شعاع دایره را بیابیم:

$$\ell = \frac{\pi R \alpha}{180} \Rightarrow 4\pi = \frac{\pi \times R \times 24}{180} \Rightarrow 4R = 12 \Rightarrow R = 3 \Rightarrow \begin{cases} \text{محیط } p = 2\pi R = 2\pi \times 3 = 6\pi \\ \text{مساحت } S = \pi R^2 = \pi \times 3^2 = 9\pi \end{cases}$$



مثال: مطابق شکل، قطاعی از دایره با زاویه مرکزی α (برحسب درجه) رسم شده است. اگر

شعاع دایره R باشد، ثابت کنید مساحت این قطاع عبارت است از $S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360}$.

پاسخ: در دایره‌ای به شعاع R قطاعی با زاویه مرکزی α رسم شده

فرض	
حکم	$S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360}$

با یک تناسب ساده مسئله حل می‌شود. می‌دانیم مساحت یک دایره کامل (قطاعی با زاویه مرکزی 360°) و شعاع R برابر است با πR^2 . اگر مساحت قطاع موردنظر را S در نظر بگیریم، داریم:

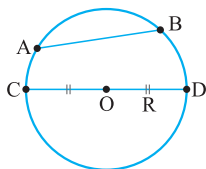
$$\frac{\text{مساحت قطاع}}{\text{مساحت دایره}} = \frac{\text{زاویه مرکزی قطاع بر حسب درجه}}{\text{زاویه مرکزی کل دایره بر حسب درجه}} \Rightarrow \frac{S}{\pi R^2} = \frac{\alpha}{360} \Rightarrow \boxed{S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360}}$$

مثال: قطاعی با زاویه 60° در دایره $C(O, R)$ در نظر می‌گیریم. اگر مساحت این قطاع $\frac{5\pi}{3}$ باشد، شعاع دایره را بیابید.

پاسخ: طبق فرمول مساحت قطاع داریم:

$$S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360} \xrightarrow[\alpha = 60^\circ]{S = \frac{5\pi}{3}} \frac{5\pi}{3} = \frac{\pi R^2 \times 60}{360} \Rightarrow R^2 = 100 \Rightarrow R = 10$$

وتر



مطابق شکل، دایره $C(O, R)$ را در نظر بگیرید. پاره‌خطی که دو نقطه متمایز از این دایره را به هم متصل می‌کند، وتر آن دایره نامیده می‌شود. در این شکل AB و CD وترهایی از دایره هستند. وتری که از مرکز دایره عبور کند، قطر دایره است (مثل CD). هر قطر، دایره را به دو کمان مساوی تقسیم می‌کند که این کمان‌های مساوی (که هر کدام 180° هستند) نیم‌دایره نام دارند.

نتیجه مهم: در دایره‌ای به شعاع R ، طول هر وتر در نامساوی مضاعف $0 < \ell \leq 2R$ صدق می‌کند، یعنی در یک دایره نمی‌توانیم کوتاه‌ترین وتر را رسم کنیم؛ ولی طول بزرگ‌ترین وتر همان طول قطر دایره است.

مثال و پاسخ

مثال: طول بزرگ‌ترین وتری را که در دایره‌ای به مساحت 36π رسم می‌شود بیابید.

پاسخ: طول بزرگ‌ترین وتری که در دایره‌ای به شعاع R رسم می‌شود، برابر است با $2R$. طبق فرض $S = 36\pi$ است:

$$\pi R^2 = 36\pi \Rightarrow R = 6 \Rightarrow \text{طول بزرگ‌ترین وتر} = 2R = 2 \times 6 = 12$$

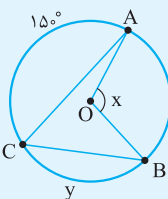
دانش‌آموزان عزیز، حالا که مفاهیم مقدماتی نظیر شعاع، زاویه مرکزی، وتر و مماس را یاد گرفتید، به مسائل مطرح‌شده توجه کنید.

مثال و پاسخ

مثال: شکل روبه‌رو را در نظر بگیرید. نقطه O مرکز دایره است.

الف) اگر $y = 90^\circ$ باشد، مقدار x را بیابید.

ب) اگر $x = 110^\circ$ باشد، اندازه y را به دست آورید.

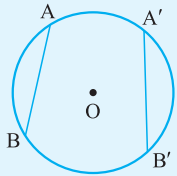


پاسخ: مطابق شکل داده شده داریم:

$$\widehat{AB} + \widehat{BC} + \widehat{AC} = 36^\circ \Rightarrow \widehat{AB} + 9^\circ + 15^\circ = 36^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{AB} = 12^\circ \Rightarrow \text{اندازه زاویه مرکزی } \widehat{AOB} : x = \widehat{AB} = 12^\circ$$

$$\text{اندازه زاویه مرکزی } \widehat{AOB} : x = \widehat{AB} \xrightarrow{\widehat{AB} + \widehat{BC} + \widehat{AC} = 36^\circ} 11^\circ + y + 15^\circ = 36^\circ \Rightarrow y = 10^\circ$$

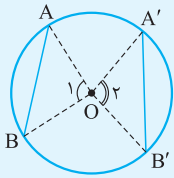


مثال: ثابت کنید در یک دایره، کمان های نظیر دو وتر مساوی، با هم برابرند و برعکس.

پاسخ: این مسئله یک قضیه دوشروطی است:

فرض	$AB = A'B'$
حکم	$\widehat{AB} = \widehat{A'B'}$

مطابق شکل، مرکز دایره را به دو سر هر وتر وصل می کنیم و ثابت می نماییم دو مثلث حاصل همبسته اند:



$$\triangle OAB, \triangle OA'B' : \begin{cases} OA = OA' = R \\ OB = OB' = R \\ AB = A'B' \text{ فرض} \end{cases} \xrightarrow{\text{(ضضض)}} \triangle OAB \cong \triangle OA'B'$$

$$\xrightarrow{\text{اجزای نظیر}} \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \xrightarrow{\text{پس با کمان روبه رویشان مساوی اند}} \widehat{AB} = \widehat{A'B'}$$

فرض	$\widehat{AB} = \widehat{A'B'}$
حکم	$AB = A'B'$

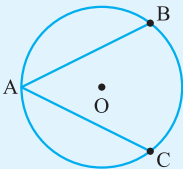
$$\widehat{AB} = \widehat{A'B'} \xrightarrow{\substack{\hat{O}_1 = \widehat{AB} \text{ مرکزی} \\ \hat{O}_2 = \widehat{A'B'} \text{ مرکزی}}} \hat{O}_1 = \hat{O}_2$$

طبق شکل فوق، مرکز دایره به دو سر هر وتر وصل شده است:

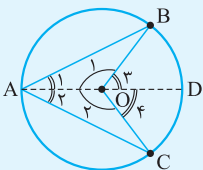
$$\triangle OAB, \triangle OA'B' : \begin{cases} OA = OA' = R \\ OB = OB' = R \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \end{cases} \xrightarrow{\text{(ضضض)}} \triangle OAB \cong \triangle OA'B' \xrightarrow{\text{اجزای نظیر}} AB = A'B'$$

دانش آموزان عزیز، صورت مثال اثباتی فوق را به عنوان یک مطلب مهم درسی در ذهن داشته باشید.

مثال و پاسخ



مثال: مطابق شکل در دایره $C(O, R)$ ، وترهای AB و AC مساوی اند. ثابت کنید پاره خط OA نیمساز \hat{A} است و امتداد آن، کمان BC را نصف می کند.



فرض	$AB = AC$
حکم	$\hat{A}_1 = \hat{A}_2, \widehat{BD} = \widehat{DC}$

مطابق شکل، نقطه O را به نقاط B و C (دو سر غیرمشترک وترها) وصل کرده‌ایم. هم‌چنین پاره‌خط AO را امتداد می‌دهیم تا دایره را در D قطع کند:

$$\triangle OAB, \triangle OAC : \begin{cases} AB = AC \\ OB = OC = R \\ OA = OA \end{cases} \xrightarrow{\text{(ضضض)}} \triangle OAB \cong \triangle OAC \xrightarrow{\text{اجزای نظیر}} \begin{cases} \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \checkmark \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \end{cases}$$

طبق شکل، کاملاً مشخص است که \hat{O}_1 مکمل \hat{O}_2 و هم‌چنین \hat{O}_2 مکمل \hat{O}_1 است:

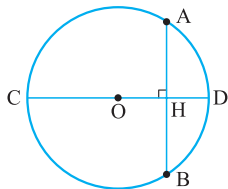
$$\hat{O}_1 = \hat{O}_2 \Rightarrow 180^\circ - \hat{O}_2 = 180^\circ - \hat{O}_1 \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2$$

از طرفی \hat{O}_1 و \hat{O}_2 به ترتیب زاویه‌های مرکزی رو به کمان‌های BD و DC هستند که به ترتیب با این کمان‌ها مساوی‌اند، پس $\widehat{BD} = \widehat{DC}$

پس از طرح مثال‌هایی که دیدید، می‌خواهیم شما را با یک قضیه بسیار مهم به نام قضیه عمود بر وتر آشنا کنیم، این قضیه در حل مسائل، مخصوصاً مسائل عددی، بسیار کاربرد دارد.

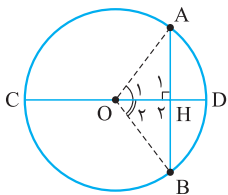
قضیه: عمود بر وتر: در هر دایره، قطر عمود بر وتر، آن وتر و کمان‌های نظیر آن وتر را نصف می‌کند.

اثبات:



فرض	وتر $AB \perp CD$ قطر
حکم	$AH = HB, \widehat{AD} = \widehat{DB}, \widehat{AC} = \widehat{CB}$

مطابق شکل، مرکز دایره را به دو سر وتر AB وصل می‌کنیم:



$$\triangle OAH, \triangle OBH : \begin{cases} OA = OB = R \\ OH = OH \\ \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ \end{cases} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع قائم}} \triangle OAH \cong \triangle OBH$$

$$\xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} \begin{cases} AH = HB \checkmark \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \end{cases} \xrightarrow{\substack{\text{مرکزی } \hat{O}_1 = \widehat{AD} \\ \text{مرکزی } \hat{O}_2 = \widehat{BD}}} \widehat{AD} = \widehat{BD} \checkmark$$

از طرفی، چون CD قطر دایره است، دایره را به دو کمان 180° تبدیل کرده است:

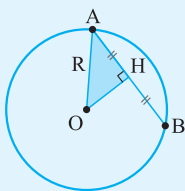
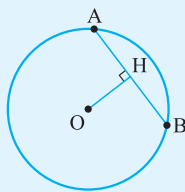
$$\begin{cases} \widehat{AD} + \widehat{AC} = 180^\circ \\ \widehat{BD} + \widehat{BC} = 180^\circ \end{cases} \Rightarrow \widehat{AD} + \widehat{AC} = \widehat{BD} + \widehat{BC} \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BC} \checkmark$$

مثال و پاسخ

مثال: در شکل روبه‌رو:

الف) اگر طول شعاع برابر ۱۰ بوده و $OH = 6$ ، مطلوب است طول AH و AB.

ب) اگر مساحت دایره برابر 36π بوده و $AH = OH$ ، مطلوب است طول AB.



پاسخ: الف) ابتدا در مثلث OAH، قضیه فیثاغورس را می‌نویسیم:

$$\triangle OAH : OA^2 = OH^2 + AH^2 \Rightarrow 10^2 = 6^2 + AH^2$$

$$\Rightarrow AH = 8 \xrightarrow{\text{طبق قضیه عمود بر وتر}} AB = 2AH = 2 \times 8 = 16$$

ب) با داشتن مساحت، طبق رابطه $S = \pi R^2$ شعاع دایره را می‌یابیم:

$$36\pi = \pi R^2 \Rightarrow R = 6$$

حالا در مثلث OAH، قضیه فیثاغورس را می‌نویسیم:

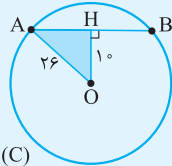
$$AO^2 = AH^2 + OH^2 \Rightarrow 6^2 = AH^2 + AH^2 \Rightarrow 2AH^2 = 36 \Rightarrow AH = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

مساوی‌اش را قرار می‌دهیم

$$\xrightarrow{\text{قضیه عمود بر وتر}} AB = 2AH = 6\sqrt{2}$$

مثال: دایره C(O, 26) داده شده است. اگر فاصله مرکز دایره از وتر AB برابر 10 باشد، طول وتر AB را بیابید.

پاسخ: مطابق شکل، دایره (C) همراه وتر AB رسم شده و از مرکز دایره بر این وتر عمود گردیده است:

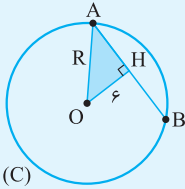


$$\Delta OAH: OA^2 = AH^2 + OH^2 \Rightarrow 26^2 = AH^2 + 10^2$$

$$\Rightarrow AH^2 = 676 - 100 = 576 \Rightarrow AH = 24 \xrightarrow{\text{قضیه عمود بر وتر}} AB = 2AH = 48$$

مثال: فاصله مرکز دایره C(O, R) از وتر AB = 16 برابر 6 است. نسبت محیط به مساحت این دایره را بیابید.

پاسخ: مطابق شکل با نوشتن قضیه فیثاغورس، شعاع دایره را می‌یابیم:

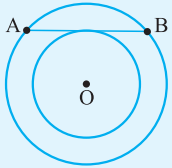


$$\Delta OAH: OA^2 = OH^2 + AH^2 \Rightarrow R^2 = 6^2 + \left(\frac{16}{2}\right)^2$$

طبق قضیه عمود بر وتر برابر نصف AB است

$$\Rightarrow R^2 = 100 \Rightarrow R = 10 \Rightarrow \frac{\text{محیط}}{\text{مساحت}} = \frac{2\pi R}{\pi R^2} = \frac{2}{R} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

مثال: در شکل روبه‌رو نقطه O مرکز هر دو دایره است و وتر AB از دایره بزرگ‌تر بر دایره کوچک‌تر مماس است. اگر محیط دایره بزرگ‌تر 6π و مساحت دایره کوچک‌تر π باشد، طول وتر AB را بیابید.



پاسخ: مطابق شکل، مرکز دایره‌ها (نقطه O) را به نقطه تماس H و همچنین نقطه A وصل کرده‌ایم. چون مماس در نقطه تماس بر شعاع عمود است، پس $\hat{H} = 90^\circ$. شعاع دایره بزرگ را R و شعاع دایره کوچک را r در نظر گرفته‌ایم.

$$\Delta OAH: OA^2 = AH^2 + OH^2 \Rightarrow R^2 = AH^2 + r^2 \quad (**)$$

حال طبق فرض از محیط و مساحت داده‌شده، مقادیر R و r را پیدا می‌کنیم:

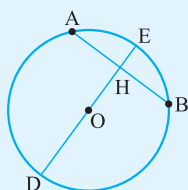
$$\left. \begin{array}{l} \text{محیط دایره بزرگ} = 2\pi R = 6\pi \Rightarrow R = 3 \\ \text{مساحت دایره کوچک} = \pi r^2 = \pi \Rightarrow r = 1 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{در } (**)} 3^2 = AH^2 + 1^2 \Rightarrow AH = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\xrightarrow{\text{قضیه عمود بر وتر}} AB = 2AH = 4\sqrt{2}$$

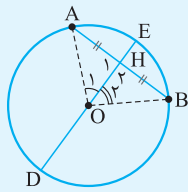
● اکنون که قضیه عمود بر وتر و کاربردهای آن را یاد گرفته‌ایم، می‌خواهیم برویم سراغ عکس قضیه عمود بر وتر. جالب است این قضیه به نوعی دارای دو عکس قضیه مهم است! به مثال‌های زیر توجه کنید.

مثال و پاسخ

مثال: ثابت کنید در هر دایره، قطری که یک وتر را نصف می‌کند، بر آن وتر عمود است و کمان‌های نظیر آن وتر را نیز نصف می‌کند.



فرض	قطر DE، قطر AB و $AH = HB$
حکم	$DE \perp AB, \widehat{AE} = \widehat{EB}, \widehat{AD} = \widehat{DB}$



مطابق شکل، مرکز دایره را به دو سر وتر AB وصل می‌کنیم:

$$\triangle OAH, \triangle OBH : \begin{cases} AH = BH \\ OH = OH \\ OA = OB = R \end{cases} \xrightarrow{\text{(ضضض)}} \triangle OAH \cong \triangle OBH$$

$$\xrightarrow{\text{اجزای نظیر}} \begin{cases} \hat{H}_1 = \hat{H}_2 \xrightarrow{\hat{A}\hat{H}B = \hat{H}_1 + \hat{H}_2 = 180^\circ} \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ \Rightarrow DE \perp AB \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \xrightarrow{\substack{\text{مرکزی } \hat{O}_1 = \widehat{AE} \\ \text{مرکزی } \hat{O}_2 = \widehat{BE}}} \widehat{AE} = \widehat{BE} \end{cases}$$

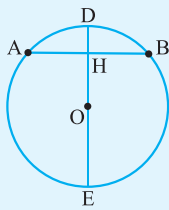
از طرفی چون DE قطر است، پس $\widehat{AD} = \widehat{DB}$ و $\widehat{DB} + \widehat{BE} = \widehat{AD} + \widehat{AE} = 180^\circ$ نتیجه می‌شود $\widehat{BE} = \widehat{AE}$

می‌توان گفت خطی که مرکز دایره را به وسط یک وتر از دایره که از مرکز دایره نگذشته باشد، وصل کند، بر آن وتر عمود است؛ پس کمان‌های نظیر آن وتر را هم نصف می‌کند.

مثال و پاسخ

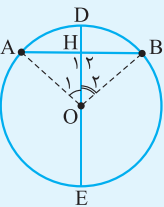
مثال: ثابت کنید در هر دایره، قطری که کمان نظیر یک وتر را نصف می‌کند، بر آن وتر عمود است و آن وتر را نیز نصف می‌کند.

پاسخ:



فرض	قطر DE، وتر AB و $\widehat{AD} = \widehat{DB}, \widehat{AE} = \widehat{EB}$
حکم	$AH = HB, DE \perp AB$

مطابق شکل، مرکز دایره را به دو سر وتر AB وصل می‌کنیم. از فرض $\widehat{AD} = \widehat{DB}$ نتیجه می‌شود زاویه‌های مرکزی \hat{O}_1 و \hat{O}_2 هم‌مسای‌اند:

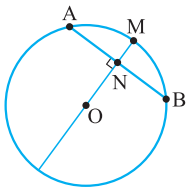


$$\triangle OAH, \triangle OHB : \begin{cases} OA = OB = R \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \\ OH = OH \end{cases} \xrightarrow{\text{(ضض)}} \triangle OAH \cong \triangle OHB$$

$$\xrightarrow{\text{اجزای نظیر}} \begin{cases} AH = HB \checkmark \\ \hat{H}_1 = \hat{H}_2 \xrightarrow{\hat{A}\hat{H}B = \hat{H}_1 + \hat{H}_2 = 180^\circ} \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ \Rightarrow DE \perp AB \end{cases}$$

نتیجه بسیار مهم: مطابق شکل، فرض کنید نقطه M وسط یکی از کمان‌های نظیر وتر AB بوده و نقطه N هم وسط

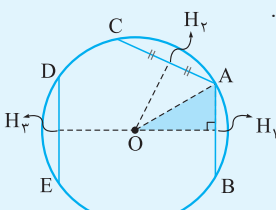
خود وتر AB است. اگر این دو نقطه را به هم وصل کنیم، از مرکز دایره گذشته و خودبه‌خود قطر عمود بر وتر AB رسم می‌شود. با رسم خطی عمود بر این قطر در نقطه N، خود وتر AB هم رسم خواهد شد.



مثال و پاسخ

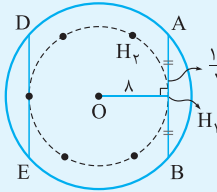
مثال: دایره $C(O, 10)$ مفروض است. وترهایی به طول ۱۲ را در این دایره رسم می‌کنیم. وسط این وترها کجا واقع می‌شوند؟

پاسخ: مطابق شکل سه وتر AC، AB و DE به طول ۱۲، در دایره $C(O, 10)$ رسم شده است.



می‌دانیم اگر وسط وتر (مثل AB) را به مرکز دایره وصل کنیم، پاره‌خط حاصل بر آن وتر عمود است. پس در مثلث OAH₁

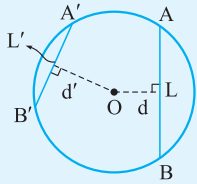
قضیه فیثاغورس را می‌نویسیم: $OA^2 = OH_1^2 + AH_1^2 \xrightarrow{\text{قضیه عمود بر وتر}} 10^2 = OH_1^2 + 6^2 \Rightarrow OH_1 = 8$
 $AH_1 = \frac{AB}{2} = \frac{12}{2} = 6$



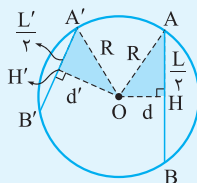
پس وسط تمام وترهای رسم‌شده از مرکز دایره (که نقطه ثابت O است) فاصله ثابتی دارند، بنابراین وسط این وترها روی یک دایره به مرکز O و شعاع $OH_1 = OH_2 = \dots = 8$ قرار دارند. $\frac{12}{2} = 6$

مثال: ثابت کنید از دو وتر نابرابر، آن که بزرگ‌تر است به مرکز دایره نزدیک‌تر است و برعکس.

پاسخ: این مسئله یک قضیه دوشروطی است:



فرض	$L > L'$
حکم	$d < d'$



مطابق شکل، مرکز دایره را به نقاط A و A' وصل می‌کنیم. طبق قضیه عمود بر وتر از $OH \perp AB$ ، نتیجه می‌شود $AH = \frac{AB}{2} = \frac{L}{2}$ ، به صورت مشابه $A'H' = \frac{A'B'}{2}$. حال در دو مثلث رنگی قضیه فیثاغورس را می‌نویسیم:

$$\left. \begin{aligned} \triangle OAH: OA^2 &= OH^2 + AH^2 \Rightarrow R^2 = d^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2 \\ \triangle OA'H': OA'^2 &= OH'^2 + A'H'^2 \Rightarrow R^2 = d'^2 + \left(\frac{L'}{2}\right)^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow d^2 + \frac{L^2}{4} = d'^2 + \frac{L'^2}{4} \Rightarrow \frac{L^2}{4} - \frac{L'^2}{4} = d'^2 - d^2 \quad (*)$$

حال طبق فرض چون $L > L'$ پس سمت چپ رابطه (*), علامت مثبت دارد. بنابراین:

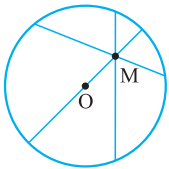
$$d'^2 - d^2 > 0 \Rightarrow d'^2 > d^2 \xrightarrow{\text{جذر}} d' > d$$

فرض	$d < d'$
حکم	$L > L'$

۲ دقیقاً مشابه با اثبات **۱** به رابطه (*), می‌رسیم.

حال طبق فرض چون $d < d'$ است، پس سمت راست رابطه (*), علامت مثبت دارد. بنابراین:

$$\frac{L^2}{4} - \frac{L'^2}{4} > 0 \Rightarrow \frac{L^2}{4} > \frac{L'^2}{4} \xrightarrow{\times 4} L^2 > L'^2 \xrightarrow{\text{جذر}} L > L'$$

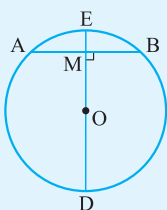


یادآوری: از یک نقطه درون یک دایره، بی‌شمار وتر عبور می‌کند. بزرگ‌ترین وتر گذرنده از این نقطه (M)، همان قطر دایره است.

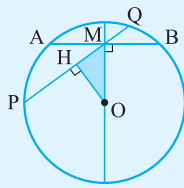
حال طی حل مثال زیر، می‌خواهیم ببینیم آیا می‌توانیم کوتاه‌ترین وتر گذرنده از نقطه درون دایره را هم رسم کنیم یا خیر؟

مثال و پاسخ

مثال: ثابت کنید کوتاه‌ترین وتری که از یک نقطه درون دایره می‌توان رسم کرد، وتری است عمود بر قطر گذرنده از این نقطه.



فرض	AB وتر و DE قطر دایره و $DE \perp AB$
حکم	AB کوتاه‌ترین وتر گذرنده از M است.



طبق برهان خُلف فرض می‌کنیم حکم درست نباشد، یعنی AB کوتاه‌ترین وتر گذرنده از M نباشد. در این صورت وتر PQ را از M می‌گذرانیم و فرض می‌کنیم این وتر، کوتاه‌ترین وتر گذرنده از M باشد. از مرکز دایره عمود OH را بر وتر PQ رسم می‌کنیم.

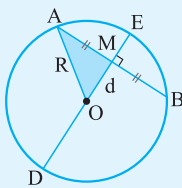
$$\Delta OMH: OM > OH \Rightarrow \text{ضلع قائمه و وتر: } OMH$$

و می‌دانیم هر چه فاصله مرکز از وتر بیشتر باشد، طول آن وتر کم‌تر است:

$$\left. \begin{array}{l} OM \perp AB \\ OH \perp PQ \end{array} \right\} \xrightarrow{OM > OH} AB < PQ$$

که با فرض این‌که PQ کوتاه‌ترین وتر گذرنده از M است، در تناقض است. پس AB همان کوتاه‌ترین وتر گذرنده از M است.

مثال: طول کوتاه‌ترین وتری که از نقطه M درون دایره C(O, R) رسم می‌شود را به دست آورید. (فاصله M از مرکز دایره را d فرض کنید.)



پاسخ: مطابق شکل ابتدا نقطه M را درون دایره C(O, R) در نظر می‌گیریم طوری که روی مرکز نباشد.

در این صورت ابتدا قطر DE گذرنده از M را رسم می‌کنیم (به عنوان بزرگ‌ترین وتر گذرنده از M) سپس وتر AB را در نقطه M، بر این قطر عمود می‌کنیم (به عنوان کوتاه‌ترین وتر گذرنده از M). چون قطر DE بر وتر AB عمود شده است، پس وتر AB در نقطه M، نصف خواهد شد (قضیه عمود بر وتر):

$$\Delta OAM: OA^2 = AM^2 + OM^2 \Rightarrow R^2 = AM^2 + d^2$$

$$\Rightarrow AM = \sqrt{R^2 - d^2} \xrightarrow{AB = 2AM} \boxed{AB = 2\sqrt{R^2 - d^2}}$$

○ فرمول گفته‌شده را به خاطر بسپارید.

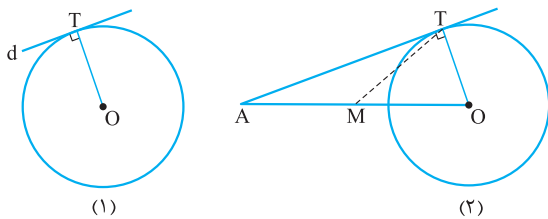
مثال: نقطه M به فاصله ۶ از مرکز دایره C(O, R) قرار گرفته است. اگر طول کوتاه‌ترین وتر گذرنده از این نقطه ۱۶ باشد، طول بلندترین وتر گذرنده از M را بیابید.

پاسخ: برای محاسبه طول بلندترین وتر گذرنده از M، یعنی قطر دایره، باید شعاع دایره (R) را بیابیم:

$$L = 2\sqrt{R^2 - d^2} \Rightarrow 16 = 2\sqrt{R^2 - 6^2} \Rightarrow 8 = \sqrt{R^2 - 36}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} 64 = R^2 - 36 \Rightarrow R^2 = 100 \Rightarrow R = 10 \Rightarrow 2R = 20 \Rightarrow \text{طول بلندترین وتر} = 20$$

رسم مماس بر دایره از نقطه‌ای خارج آن



می‌دانیم شعاع دایره بر مماس بر دایره در نقطه تماس عمود است.

مطابق شکل (۱)، خط d بر دایره C(O, R) در نقطه T مماس است، بنابراین شعاع OT در نقطه T بر خط d عمود خواهد بود. حال مطابق شکل (۲) از نقطه A خارج دایره C(O, R)، مماس AT بر دایره رسم شده است. مثلث OAT در رأس T، قائم‌الزاویه است.

می‌دانیم میانه وارد بر وتر، نصف وتر است، یعنی $MT = AM = OM$. پس دایره‌ای به مرکز M و قطر OA، قطعاً از T می‌گذرد.

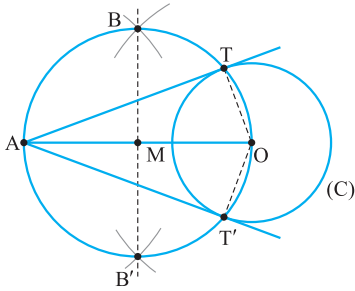
بنابراین برای رسم مماس بر یک دایره از نقطه‌ای خارج دایره به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

۱) عمودمنصف پاره خط OA را رسم می‌کنیم. به این منظور به مراکز O و A، دو کمان به شعاع‌های یکسان (و هر کدام بیش از $\frac{OA}{2}$) می‌زنیم تا یکدیگر را در B و B' قطع کنند.

خط گذرنده از B و B' عمودمنصف OA است که OA را در M قطع می‌کند.

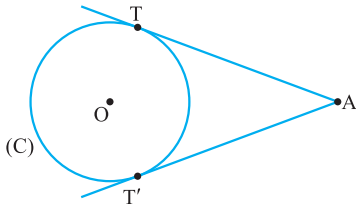
۲) به مرکز M و شعاع $OM = \frac{OA}{2}$ دایره‌ای می‌زنیم تا دایره C(O, R) را در T و T' قطع کند.

📌 **نکته:** از هر نقطه خارج دایره، دو مماس‌های مرسوم از A بر دایره (C) هستند.



📌 **نکته:** از هر نقطه خارج دایره، دو مماس بر دایره رسم می‌شود.

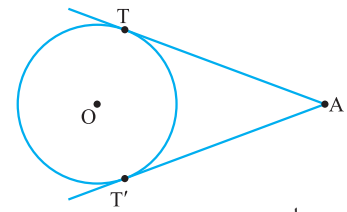
مطابق شکل از نقطه A خارج دایره C(O, R) دو مماس AT و AT' بر دایره رسم شده است.



حالا طبق قضیه زیر می‌بینیم که طول این مماس‌ها همواره با هم مساوی است:

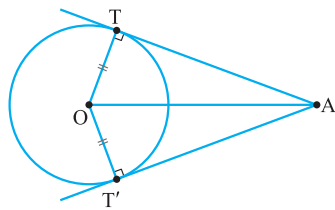
📌 **قضیه:** طول مماس‌های رسم شده بر دایره از هر نقطه خارج آن با هم برابرند.

📌 **اثبات:**



فرض	A از مماس‌های AT و AT' بر دایره رسم شده
حکم	AT = AT'

مطابق شکل نقطه A را به مرکز دایره (نقطه O) وصل می‌کنیم. می‌دانیم شعاع بر مماس در نقطه تماس عمود است:



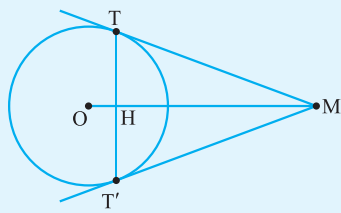
$$\Delta OAT, \Delta OAT' : \begin{cases} AO = AO \\ OT = OT' = R \\ \hat{T} = \hat{T}' = 90^\circ \end{cases} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع قائم}} \Delta OAT \cong \Delta OAT'$$

$$\xrightarrow{\text{اجزای نظیر}} AT = AT'$$

حالا که این قضیه بسیار مهم را یاد گرفتید به مسائل مطرح شده توجه کنید.

مثال و پاسخ

📌 **مثال:** مطابق شکل MT و MT' در نقاط T و T' بر دایره C(O, R) مماس‌اند. نقطه H نیز محل برخورد وتر TT' با پاره خط



OM است. موارد زیر را ثابت کنید.

📌 **الف:** پاره خط OM نیمساز زاویه‌های TÔT' و T'MT' است.

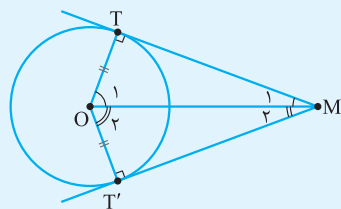
📌 **ب:** پاره خط OM عمود منصف پاره خط TT' است.

📌 **پ:** OH × OM = R²

📌 **ت:** TT'² = 4MH × OH

📌 **ث:** TT' × OM = 2R × MT

📌 **پاسخ:**

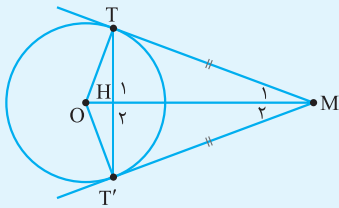


فرض	M از دو مماس MT و MT' بر دایره رسم شده
حکم	$\hat{M}_1 = \hat{M}_2, \hat{O}_1 = \hat{O}_2$

مطابق شکل مرکز دایره را به نقاط تماس T و T' وصل کرده‌ایم، در این صورت $\hat{T} = \hat{T}' = 90^\circ$ (شعاع بر مماس در نقطه تماس عمود است):

$$\Delta OMT, \Delta OMT' : \begin{cases} \hat{T} = \hat{T}' = 90^\circ \\ OT = OT' = R \\ OM = OM \end{cases} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع قائم}} \Delta OMT \cong \Delta OMT' \xrightarrow{\text{اجزای نظیر}} \begin{cases} \hat{M}_1 = \hat{M}_2 \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \end{cases}$$

دقت کنید چون می‌دانیم طول مماس‌های مرسوم از یک نقطه بر دایره، با هم مساوی است می‌توانستیم از تساوی $MT = MT'$ نیز در اثبات همنهشتی دو مثلث استفاده کنیم.

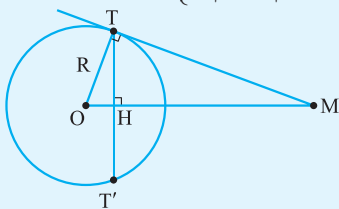


فرض	از M دو مماس MT و MT' بر دایره رسم شده
حکم	OM عمود منصف TT' است

طبق قسمت الف) می‌دانیم پاره‌خط واصل بین نقطه M خارج دایره و مرکز (یعنی OM) نیمساز زاویه بین دو مماس است:

$$\Delta MTH, \Delta MT'H: \begin{cases} MT = MT' \\ \hat{M}_1 = \hat{M}_2 \\ MH = MH \end{cases} \xrightarrow{\text{(ض.ض.)}} \Delta MTH \cong \Delta MT'H$$

$$\xrightarrow{\text{اجزای نظیر}} \begin{cases} TH = T'H \checkmark \\ \hat{H}_1 = \hat{H}_2 \end{cases} \xrightarrow{\begin{matrix} \hat{THT}' = 180^\circ \\ \hat{H}_1 + \hat{H}_2 = 180^\circ \end{matrix}} \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ \Rightarrow OM \perp TT'$$



فرض	از M دو مماس MT و MT' بر دایره رسم شده
حکم	$OH \times OM = R^2$

یعنی OM عمود منصف TT' است.

مطابق شکل در مثلث قائم‌الزاویه TMO ($\hat{T} = 90^\circ$)، ارتفاع وارد بر وتر OM است. (دقت کنید طبق مورد ب) OM عمود منصف TT' است.) می‌دانیم در یک مثلث قائم‌الزاویه، مربع ارتفاع وارد بر وتر، برابر است با ضرب قطعاتی که روی وتر ایجاد می‌کند، یعنی $TH^2 = OH \times HM$. حال سمت چپ حکم را باز می‌کنیم:

$$OH \times OM = OH \times (OH + HM) = OH^2 + \frac{OH \times HM}{TH^2} \quad \text{فیثاغورس در } \Delta OTH \quad OT^2 = R^2$$

می‌توان گفت در هر مثلث قائم‌الزاویه، مربع هر ضلع قائم برابر است با ضرب وتر در تصویر همان ضلع بر وتر یعنی $OT^2 = OH \times OM$ ، به عبارتی $R^2 = OH \times OM$.

فرض	از M دو مماس MT و MT' بر دایره رسم شده
حکم	$TT'^2 = 4MH \times OH$

مطابق شکل مورد قبل، در مثلث قائم‌الزاویه TMO ($\hat{T} = 90^\circ$)، ارتفاع وارد بر وتر OM است. (دقت کنید طبق مورد ب) OM عمود منصف TT' است.) می‌دانیم در یک مثلث قائم‌الزاویه، مربع ارتفاع وارد بر وتر، برابر است با ضرب قطعاتی که روی وتر ایجاد می‌کند، یعنی $TH^2 = OH \times MH$.

چون OM عمود منصف TT' است، پس $TH = \frac{TT'}{2}$. حال به جای TH مساوی آن را قرار می‌دهیم:

$$\left(\frac{TT'}{2}\right)^2 = OH \times MH \Rightarrow \frac{TT'^2}{4} = OH \times MH \xrightarrow{\times 4} TT'^2 = 4OH \times MH$$

فرض	از M دو مماس MT و MT' بر دایره رسم شده
حکم	$TT' \times OM = 2R \times MT$

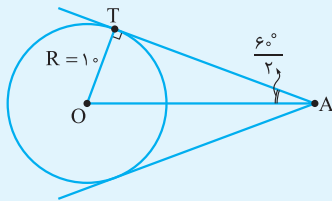
مطابق شکل مورد ب) در مثلث قائم‌الزاویه TMO ($\hat{T} = 90^\circ$)، ارتفاع وارد بر وتر OM است. (دقت کنید طبق مورد ب) OM عمود منصف TT' است.) می‌دانیم در یک مثلث قائم‌الزاویه، حاصل ضرب وتر در ارتفاع وارد بر وتر، برابر است با ضرب دو ضلع قائم در یکدیگر:

$$\Delta OTM: TH \times OM = OT \times MT \xrightarrow{TH = \frac{TT'}{2}} \frac{TT'}{2} \times OM = R \times MT \xrightarrow{\times 2} TT' \times OM = 2R \times MT$$

مثال و پاسخ

مثال: زاویه بین دو مماس رسم شده از نقطه A بر دایره C(O, 1) برابر 60° است. طول پاره خط OA و طول مماس های مرسوم را بیابید.

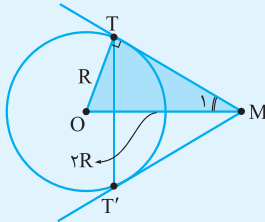
پاسخ: مطابق شکل فرض کنید از A دو مماس با زاویه 60° نسبت به هم بر دایره C(O, 1) رسم شده است. می دانیم خطی که مرکز دایره را به نقطه خارج دایره (A) وصل می کند، نیمساز زاویه بین دو مماس است:



$$\Delta OAT: \begin{cases} \sin \widehat{OAT} = \frac{OT}{OA} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{OA} \Rightarrow OA = 2 \\ \cos \widehat{OAT} = \frac{AT}{OA} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AT}{2} \Rightarrow AT = \sqrt{3} \end{cases}$$

دقت کنید پس از محاسبه OA، می توانستیم از قضیه فیثاغورس در ΔOAT استفاده کنیم و AT را بیابیم.

مثال: دایره C(O, R) و نقطه M به فاصله 2R از مرکز این دایره را در نظر بگیرید. خطوط MT و MT' بر این دایره (در نقاط T و T') مماس اند.



الف) طول مماس های MT و MT' را بر حسب R بیابید.

ب) طول وتر TT' را به دست آورید.

پ) نوع مثلث MTT' را مشخص کنید.

پاسخ: الف) مطابق شکل در مثل قائم الزاویه OMT داریم:

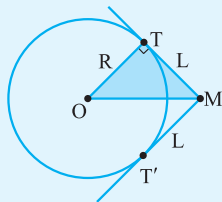
$$\sin \widehat{M}_1 = \frac{OT}{OM} = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{M}_1 = 30^\circ$$

دقت کنید چون ضلع روبه رو به \widehat{M}_1 و وتر مثلث OMT معلوم بودند از سینوس استفاده کردیم. از طرف دیگر می توان نوشت:

$$\Delta OTM: \cos \widehat{M}_1 = \frac{MT}{OM} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{MT}{2R} \Rightarrow \boxed{MT = R\sqrt{3} = MT'}$$

ب) و **پ)** از طرفی چون OM نیمساز $\widehat{TMT'}$ است، پس $\widehat{TMT'} = 2\widehat{M}_1 = 60^\circ$. همچنین چون مثلث MTT' همواره با زاویه رأس M (نقطه بیرون دایره) متساوی الساقین است و الان هم زاویه رأس آن 60° است، پس در حقیقت متساوی الاضلاع بوده و $TT' = MT = R\sqrt{3}$.

مثال: دایره C(O, R) مفروض است. مجموعه نقاطی از صفحه این دایره را مشخص کنید که از آنها بتوان مماس هایی به طول مشخص L بر دایره رسم کرد.



پاسخ: فرض می کنیم مسئله حل شده و از نقطه M خارج دایره C(O, R) دو مماس به طول ثابت و مشخص L بر این دایره رسم کرده ایم. چون مماس بر شعاع در نقطه تماس، عمود است ($\widehat{T} = 90^\circ$)؛ پس طبق قضیه فیثاغورس در مثلث OMT داریم:

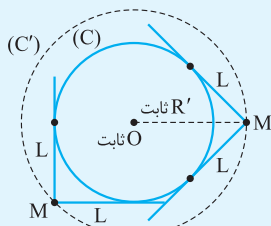
$$OM^2 = OT^2 + TM^2 = R^2 + L^2 \Rightarrow OM = \sqrt{R^2 + L^2} = \text{ثابت}$$

حال چون نقطه O در صفحه، ثابت و فاصله نقطه M هم تا این نقطه مقدار ثابت $\sqrt{R^2 + L^2}$

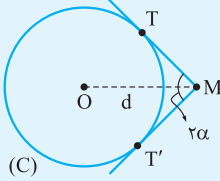
است، پس نقطه مورد نظر M، روی دایره ای به مرکز O و شعاع ثابت $R' = \sqrt{R^2 + L^2}$

قرار دارد. یعنی اگر به مرکز O و شعاع $\sqrt{R^2 + L^2}$ دایره ای رسم کنیم، از تمام

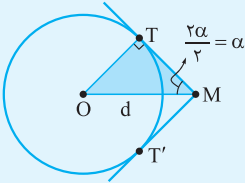
نقاط روی این دایره می توانیم دو مماس به طول L بر دایره C(O, R) رسم نماییم.



مثال و پاسخ



مثال در شکل روبه‌رو از نقطه M دو مماس MT و MT' با زاویه 2α نسبت به هم بر دایره (C) رسم شده است و فاصله نقطه M از نقطه O مرکز دایره (C)، مقدار ثابت d می‌باشد. مساحت مثلث OMT را بر حسب d و نسبت‌های مثلثاتی 2α بیابید.



پاسخ مطابق شکل مثلث OMT، در نقطه تماس T، قائم‌الزاویه است، زیرا مماس MT بر شعاع OT در نقطه T عمود است.

از طرفی زاویه بین دو مماس پاره‌خط OM، نصف می‌شود. می‌دانیم مساحت یک مثلث قائم‌الزاویه، نصف ضرب دو ضلع قائم این مثلث است. پس OT و MT را بر حسب نسبت‌های مثلثاتی α و طول وتر $OM = d$ پیدا می‌کنیم:

$$\Delta OMT: \begin{cases} \sin \alpha = \frac{OT}{OM} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{OT}{d} \Rightarrow \boxed{OT = d \sin \alpha} & (1) \\ \cos \alpha = \frac{MT}{OM} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{MT}{d} \Rightarrow \boxed{MT = d \cos \alpha} & (2) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(1) \text{ و } (2)} S_{\Delta OMT} = \frac{1}{2} OT \times MT = \frac{1}{2} (d \sin \alpha)(d \cos \alpha) \Rightarrow S_{\Delta OMT} = \frac{1}{2} d^2 \sin \alpha \cos \alpha$$

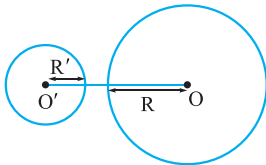
می‌توان گفت چون $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$ ، پس:

$$S_{\Delta OMT} = \frac{1}{2} d^2 \left(\frac{1}{2} \sin 2\alpha \right) \Rightarrow \boxed{S_{\Delta OMT} = \frac{1}{4} d^2 \sin 2\alpha}$$

در آخرین قسمت از درس اول یعنی مفاهیم مقدماتی دایره، می‌رسیم به اوضاع نسبی دو دایره. یعنی می‌خواهیم ببینیم دو دایره در یک صفحه نسبت به هم چه وضعیتی دارند؟

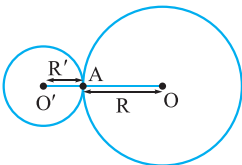
اوضاع نسبی دودایره

برای تشخیص وضعیت نسبی دو دایره $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ باید فاصله دو مرکز (که اصطلاحاً به آن طول خط‌المركزین گفته می‌شود) را با جمع و تفریق شعاع دو دایره مقایسه کنیم. (معمولاً طول خط‌المركزین را با d یا OO' نمایش می‌دهیم). در این صورت می‌توان حالات زیر را برای دو دایره متصور شد:



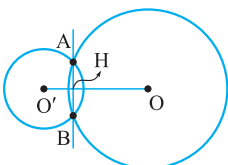
الف متخارج: در این حالت دو دایره کاملاً خارج یکدیگر بوده و هیچ نقطه اشتراکی ندارند، پس طول خط‌المركزین آن‌ها از جمع دو شعاع بیشتر است (از تفاضل دو شعاع هم که قطعاً بزرگ‌تر است).

$$\boxed{C(O, R) \text{ و } C'(O', R') \text{ متخارج‌اند} \Leftrightarrow d > R + R'}$$



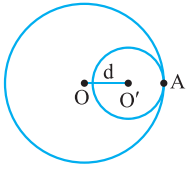
ب مماس‌برون: در این حالت دو دایره از بیرون بر هم مماس بوده و فقط در یک نقطه مشترک‌اند، پس طول خط‌المركزین این دو دایره، برابر است با جمع دو شعاع.

$$\boxed{C(O, R) \text{ و } C'(O', R') \text{ مماس‌برون‌اند} \Leftrightarrow d = R + R'}$$



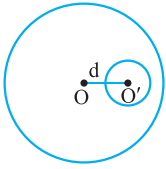
ب مقاطع: در این حالت دو دایره در دو نقطه مشترک‌اند، پس طول خط‌المركزین این دو دایره، بین جمع و تفریق دو شعاع قرار دارد. دقت کنید در این حالت، پاره‌خطی که نقاط تقاطع را به هم وصل می‌کند، وتر مشترک دو دایره نام دارد. وتر مشترک دو دایره مقاطع بر خط‌المركزین آن‌ها عمود است و توسط خط‌المركزین نصف می‌شود ($OO' \perp AB$ و $AH = HB$)

$$\boxed{C(O, R) \text{ و } C'(O', R') \text{ مقاطع‌اند} \Leftrightarrow |R - R'| < d < R + R'}$$



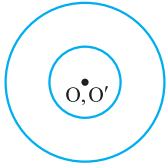
ب) مماس درون: در این حالت دو دایره از داخل بر هم مماس هستند و فقط در یک نقطه مشترک اند (شبه حالت مماس برون)، پس طول خط‌المركزين آن‌ها، برابر قدم‌مطلق تفاضل دو شعاع است.

$$C(O, R) \text{ و } C(O', R') \Leftrightarrow d = |R - R'|$$



ب) متداخل: در این حالت دو دایره هیچ اشتراکی با هم ندارند و یکی از آن‌ها کاملاً درون دیگری واقع است، پس طول خط‌المركزين آن‌ها از تفریق دو شعاع کم‌تر است، ولی به صفر نمی‌رسد.

$$C(O, R) \text{ و } C(O', R') \Leftrightarrow 0 < d < |R - R'|$$



ج) هم‌مرکز: در این حالت، مثل حالت متداخل، دو دایره هیچ اشتراکی با هم ندارند، با این تفاوت که مرکز دو دایره، یک نقطه است. در این حالت طبیعتاً طول خط‌المركزين صفر است (اصلاً خط‌المركزيني وجود ندارد).

$$C(O, R) \text{ و } C(O', R') \Leftrightarrow d = 0$$

مثال و پاسخ

مثال: دو دایره $C(O, 4)$ و $C(O', 8)$ با فرض $OO' = \sqrt{8}$ نسبت به هم چه وضعی دارند؟

پاسخ: با فرض $R = 4$ و $R' = 8$ ، طول خط‌المركزين $d = \sqrt{8}$ را با $R + R'$ و $|R - R'|$ مقایسه می‌کنیم:

$$R + R' = 4 + 8 = 12, |R - R'| = |4 - 8| = 4, d = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \approx 2.8$$

پس $|R - R'| < d < R + R'$ است، یعنی دو دایره متداخل‌اند.

مثال: دو دایره با مساحت‌های 4π و 9π و مراکز $O(m-1, 4)$ و $O'(2, 1)$ مفروض‌اند. مقدار m را چنان بیابید که این دو دایره مماس برون باشند.

پاسخ: چون دو دایره مماس برون هستند، پس طول خط‌المركزين دو دایره، برابر جمع شعاع آن‌ها است. ابتدا شعاع دو دایره را می‌یابیم:

$$\begin{cases} S = \pi R^2 \Rightarrow 4\pi = \pi R^2 \Rightarrow R = 2 \\ S' = \pi R'^2 \Rightarrow 9\pi = \pi R'^2 \Rightarrow R' = 3 \end{cases}$$

$$d = OO' = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{((m-1) - 2)^2 + (4 - 1)^2} = \sqrt{(m-3)^2 + 9}$$

$$\xrightarrow{d=R+R'} \sqrt{(m-3)^2 + 9} = 5 \xrightarrow{\text{به توان دو می‌رسانیم}} (m-3)^2 + 9 = 25 \Rightarrow (m-3)^2 = 16$$

$$\xrightarrow{\text{جذر}} |m-3| = 4 \Rightarrow \begin{cases} m-3 = 4 \Rightarrow m = 7 \\ m-3 = -4 \Rightarrow m = -1 \end{cases}$$

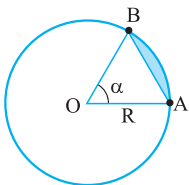
سؤال‌های امتحانی

۱- نقطه $A(m-1, 2)$ روی دایره $C(O, 5)$ قرار دارد و مرکز دایره نقطه $O(1, -2)$ است. مقدار m را بیابید.

۲- دایره $C(O, R)$ را در نظر بگیرید. وترهایی به طول ثابت L را در این دایره رسم می‌کنیم. وسط این وترها روی چه شکلی قرار می‌گیرند؟

۳- مطابق شکل در دایره $C(O, R)$ دو شعاع با زاویه بین α بر حسب درجه نسبت به هم رسم شده‌اند. قسمت رنگی را

که محدود به دایره و وتر AB است، قطعاً از دایره می‌نامیم. مساحت این قطعه را بر حسب α و R بیابید.



۴- مساحت دایره $C(O, R)$ برابر 169π است. اگر وتر $AB = 24$ در این دایره رسم شود، فاصله مرکز دایره تا این وتر کدام است؟

۵- طول کوتاه‌ترین و بلندترین وتر گذرنده از نقطه M درون دایره $C(O, R)$ به ترتیب ۱۶ و ۲۰ است. فاصله M از مرکز دایره را بیابید.

۶- دایره $C(O, R)$ مفروض است. چگونه نقاطی از صفحه این دایره را پیدا می‌کنید که از آن‌ها بتوان دو مماس بر دایره رسم کرد که با هم زاویه α می‌سازند؟

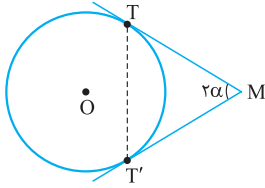
۷- نقطه P به فاصله $3R$ از مرکز دایره $C(O, R)$ واقع است. کسینوس زاویه بین دو مماس را بیابید.

۸- دایره $C(O, R)$ مفروض است. مجموعه نقاطی از صفحه این دایره را مشخص کنید که از آن‌ها بتوان دو مماس عمود بر هم بر دایره رسم کرد.

۹- از نقطه P دو مماس عمود بر هم، بر دایره‌ای به شعاع R رسم شده است. سطح بین دو مماس و محیط دایره را بیابید.

۱۰- مطابق شکل از نقطه M دو مماس با زاویه بین 2α بر دایره $C(O, R)$ رسم شده است. مساحت مثلث

MTT' را بر حسب R و نسبت‌های مثلثاتی α بیابید.



۱۱- دایره $C(O, R)$ مفروض است.

الف) مرکز دایره‌هایی با شعاع R' که خارج این دایره قرار دارند و روی محیط دایره C می‌غلتنند روی چه شکلی قرار دارد؟

ب) اگر این دایره‌های غلتنان داخل دایره $C(O, R)$ و مماس بر آن باشند، مرکزشان روی چه شکلی می‌افتد؟ ($R > R'$)

۱۲- ثابت کنید خط‌المركزین دو دایره متقاطع، عمودمنصف وتر مشترک این دو دایره است.

۱۳- ثابت کنید در هر دایره، وترهای مساوی از مرکز دایره به یک فاصله‌اند و برعکس.



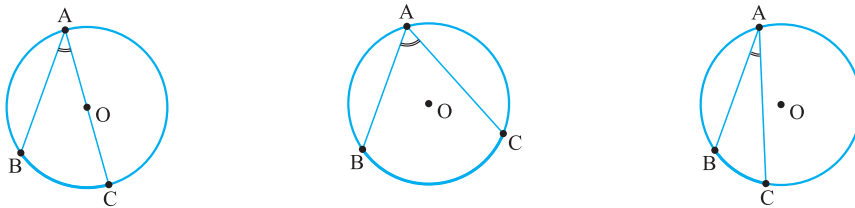
زاویه در دایره



همان طور که در درس اول این فصل مشاهده فرمودید، کمان، زاویه مرکزی و ... را تعریف نمودیم. حالا می‌خواهیم بحث زاویه در دایره را تکمیل کنیم. در این درس، ابتدا زاویه‌های محاطی و ظلی را که رأس آن‌ها روی دایره است مطرح می‌کنیم، سپس به زاویه بین دو وتر متقاطع درون دایره یا امتداد دو وتر و همچنین زاویه بین امتداد یک وتر و مماس خواهیم پرداخت.

زاویه محاطی

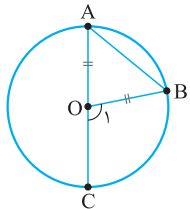
زاویه‌ای را که رأس آن روی دایره و اضلاعش دو وتر از دایره باشند، زاویه محاطی می‌نامیم. کمانی از دایره را که به دو ضلع زاویه محاطی محدود بوده و داخل زاویه قرار دارد، کمان روبه‌رو به آن زاویه می‌نامند. مطابق شکل‌های رسم‌شده، \hat{A} محاطی رو به کمان BC است.



حالا طبق قضیه زیر، می‌خواهیم رابطه بین زاویه محاطی و کمان روبه‌رویش را پیدا کنیم.

قضیه: اندازه هر زاویه محاطی برابر نصف کمان روبه‌رویش است.

اثبات:



فرض	\hat{A} زاویه محاطی رو به کمان BC است
حکم	$\hat{A} = \frac{\widehat{BC}}{2}$

مطابق شکل، حالتی را در نظر می‌گیریم که یکی از اضلاع زاویه محاطی \hat{A} ، قطری از دایره باشد. در این صورت نقطه B را به مرکز دایره وصل می‌کنیم:

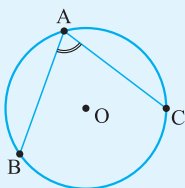
$$\Delta OAB: \begin{cases} OA = OB = R \Rightarrow \hat{A} = \hat{B} \\ \hat{O}_1 \text{ خارجی} = \hat{A} + \hat{B} \end{cases} \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{A} + \hat{A} = 2\hat{A} \Rightarrow \hat{A} = \frac{\hat{O}_1}{2} \quad (*)$$

از طرفی \hat{O}_1 یک زاویه مرکزی رو به کمان BC است، پس $\hat{O}_1 = \widehat{BC}$ بوده و طبق رابطه (*) به راحتی نتیجه می‌شود $\hat{A} = \frac{\widehat{BC}}{2}$.

ممکن است از خود بپرسید آیا حتماً باید یکی از اضلاع زاویه محاطی، قطری از دایره باشد تا اندازه این زاویه نصف کمان روبه‌رویش شود؟

پاسخ این سؤال منفی است! طبق مثال‌هایی که مطرح می‌شود، ثابت می‌کنیم تحت هر شرایطی، اندازه زاویه محاطی نصف کمان روبه‌روی آن می‌باشد.

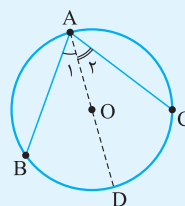
مثال و پاسخ



مثال: در شکل روبه‌رو ثابت کنید $\hat{BAC} = \frac{\widehat{BC}}{2}$.

پاسخ:

فرض	\hat{BAC} زاویه محاطی رو به کمان BC است
حکم	$\hat{BAC} = \frac{\widehat{BC}}{2}$

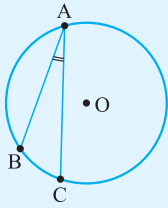


مطابق شکل، رأس A زاویه محاطی را به مرکز دایره وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا دایره را در D قطع کند. می‌دانیم اندازه هر زاویه محاطی که یک ضلع آن قطری از دایره باشد، نصف کمان روبه‌رویش است:

$$\hat{BAC} = \hat{BAD} + \hat{DAC} = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = \frac{\widehat{BD}}{2} + \frac{\widehat{DC}}{2} = \frac{\widehat{BD} + \widehat{DC}}{2} = \frac{\widehat{BC}}{2}$$

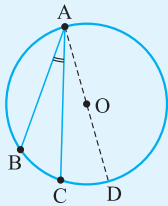
مثال و پاسخ

مثال: در شکل روبه‌رو ثابت کنید $\widehat{BAC} = \frac{\widehat{BC}}{2}$.



پاسخ

فرض	\widehat{BAC} زاویهٔ محاطی رو به کمان \widehat{BC} است
حکم	$\widehat{BAC} = \frac{\widehat{BC}}{2}$



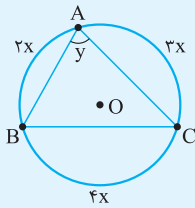
مطابق شکل رأس A زاویهٔ محاطی را به مرکز دایره وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا دایره را در D قطع کند. می‌دانیم اندازهٔ هر زاویهٔ محاطی که یک ضلع آن قطری از دایره باشد، نصف کمان روبه‌رویش است:

$$\widehat{BAC} = \widehat{BAD} - \widehat{CAD} = \frac{\widehat{BD}}{2} - \frac{\widehat{CD}}{2} = \frac{\widehat{BD} - \widehat{CD}}{2} = \frac{\widehat{BC}}{2}$$

حالا می‌خواهیم کاربرد رابطهٔ زاویهٔ محاطی و کمان روبه‌رویش را بررسی نماییم. به مثال‌هایی که مطرح می‌کنیم بسیار توجه کنید:

مثال و پاسخ

مثال: در شکل روبه‌رو مقادیر x و y را بیابید.

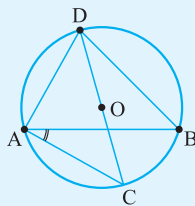


پاسخ: کمان‌های \widehat{AB} ، \widehat{AC} و \widehat{BC} یک دایرهٔ کامل را تشکیل می‌دهند:

$$\widehat{AB} + \widehat{AC} + \widehat{BC} = 360^\circ \Rightarrow 2x + 3x + 4x = 360^\circ \Rightarrow x = 40^\circ$$

در نهایت \widehat{BAC} یک زاویهٔ محاطی روبه‌رو به کمان BC است: $y = \frac{\widehat{BC}}{2} = \frac{4x}{2} = 2x \xrightarrow{x=40^\circ} y = 80^\circ$

مثال: در شکل روبه‌رو O مرکز دایره بوده و $\widehat{AD} = 100^\circ$ و $\widehat{BAC} = 25^\circ$ است. موارد زیر را تعیین کنید:



الف \widehat{B}

ب \widehat{C}

پ \widehat{DB}

ت \widehat{DAB}

ث \widehat{DAC}

الف محاطی $\widehat{B} = \frac{\widehat{AD}}{2} = \frac{100^\circ}{2} = 50^\circ$

ب محاطی $\widehat{C} = \frac{\widehat{AD}}{2} = \frac{100^\circ}{2} = 50^\circ$

پاسخ

پ محاطی $\widehat{BAC} = \frac{\widehat{BC}}{2} \Rightarrow 25^\circ = \frac{\widehat{BC}}{2} \Rightarrow \widehat{BC} = 50^\circ \xrightarrow{\text{قطر دایره } DC} \widehat{BC} + \widehat{DB} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{DB} = 130^\circ$

ت محاطی $\widehat{DAB} = \frac{\widehat{DB}}{2} = \frac{130^\circ}{2} = 65^\circ$ ث محاطی $\widehat{DAC} = \frac{\widehat{DBC}}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$

$\widehat{DAC} = \widehat{DAB} + \widehat{BAC} = 65^\circ + 25^\circ = 90^\circ$

می‌توان گفت: