

..... حاصل ضرب ریشه‌های معادله $x^2 + 4x + 3 = \sqrt{x^2 + 4x + 5}$ کدام است؟
 (۱) -۲ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۴

LILIPOOTBOX

🍏 در حل بسیاری از معادله‌های رادیکالی نیز مانند BOX قبل، می‌توانیم با تغییر متغیر مناسب، معادله درجه دوم ایجاد کنیم.

❁ فرض کنید می‌خواهیم معادله $x^2 - 1 = \sqrt{x^2 + 1}$ را حل کنیم. اگر طرفین را به توان ۲ برسانیم حل سؤال سخت و زمان‌بر می‌شود. می‌توانیم از تغییر متغیر $x^2 - 1 = t$ استفاده کنیم، در این صورت پس: $x^2 + 1 = t + 2$

$$x^2 - 1 = \sqrt{x^2 + 1} \Rightarrow t = \sqrt{t + 2} \quad \text{توان ۲} \quad t^2 = t + 2 \Rightarrow \dots$$

ANALYSE

❑ فرض می‌کنیم $x^2 + 4x + 3 = t$ ، بنابراین:

$$x^2 + 4x + 3 = \sqrt{x^2 + 4x + 5} \Rightarrow t = \sqrt{t + 2} \xrightarrow[\text{طرفین به توان ۲}]{t > 0} t^2 = t + 2$$

$$\Rightarrow t^2 - t - 2 = 0 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} t = -1 & \times \\ t = 2 & \checkmark \end{cases}$$

(دقت کنید جواب رادیکال همیشه یک عدد مثبت است.)

حال چون $t = x^2 + 4x + 3$ پس:

$$t = 2 \Rightarrow x^2 + 4x + 3 = 2 \Rightarrow x^2 + 4x + 1 = 0$$

$$\Delta = 4^2 - 4(1)(1) = 12$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{-4 + \sqrt{12}}{2} = -2 + \sqrt{3}, \quad x_2 = \frac{-4 - \sqrt{12}}{2} = -2 - \sqrt{3}$$

$$x_1 \cdot x_2 = (-2 + \sqrt{3})(-2 - \sqrt{3}) = (-2)^2 - (\sqrt{3})^2 = 4 - 3 = 1$$

پاسخ گزینه ۲

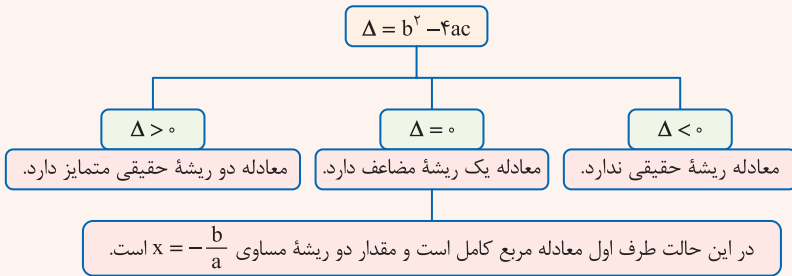
تعداد ریشه‌ها

TEST 120

به‌ازای کدام مقادیر a ، معادله $x^2 - 2ax + 6 - a = 0$ ریشهٔ مضاعف دارد؟
 (۱) ۲ و ۳ (۲) ۳ و ۴ (۳) ۴ و ۱ (۴) ۱ و ۴

LILIPOOTBOX

چون در محاسبهٔ ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2 + bx + c = 0$ به روش Δ ، عبارت Δ زیر رادیکال قرار دارد، پس با توجه به علامت Δ با سه حالت کلی مواجه می‌شویم:



❁ اگر بخواهیم ببینیم به‌ازای کدام مقدار m ، معادلهٔ درجهٔ دوم $2x^2 + (m+1)x + \frac{1}{p} = 0$ فاقد ریشهٔ حقیقی است، باید Δ را کوچکتر از صفر قرار دهیم:

$$\Delta < 0 \Rightarrow (m+1)^2 - 4(2)\left(\frac{1}{p}\right) < 0 \Rightarrow m^2 + 2m - 3 < 0 \Rightarrow \dots$$

ANALYSE

❑ برای این‌که معادله $x^2 - 2ax + 6 - a = 0$ ریشهٔ مضاعف داشته باشد، باید شرط $\Delta = 0$ برقرار باشد، پس:

$$\Delta = 0 \xrightarrow{\Delta = b^2 - 4ac} (-2a)^2 - 4(1)(6 - a) = 0 \Rightarrow 4a^2 - 24 + 4a = 0$$

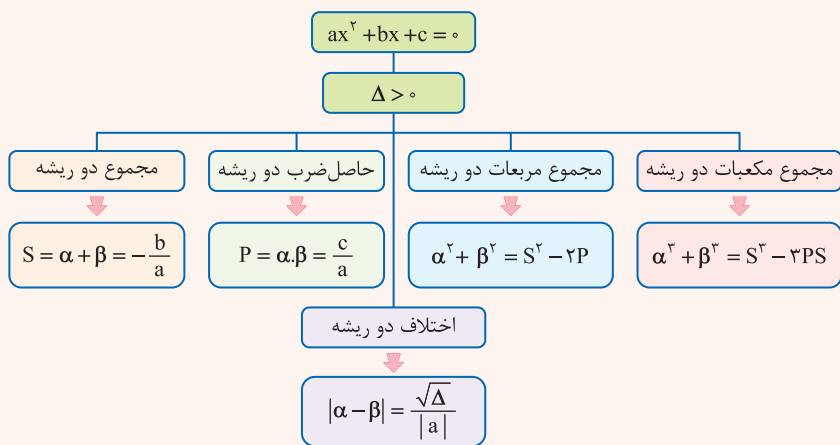
$\div 4$ $\Rightarrow a^2 + a - 6 = 0 \Rightarrow (a+3)(a-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = -3 \end{cases}$

پاسخ گزینهٔ ۱

مجموع ریشه‌های معادله $x^2 - (a-2)x + 2a = 0$ برابر با ۱۰ است. حاصل ضرب ریشه‌ها کدام است؟
 ۶ (۱) ۸ (۲) ۱۶ (۳) ۲۴ (۴)

LILIPOOTBOX

اگر ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ را α و β بنامیم، در این صورت مجموع ریشه‌ها را با S و حاصل ضرب ریشه‌ها را با P نشان می‌دهیم و خواهیم داشت:



ANALYSE

ریشه‌های معادله درجه دوم را α و β در نظر می‌گیریم. می‌دانیم مجموع ریشه‌های معادله برابر با ۱۰ است:

$$\alpha + \beta = 10 \Rightarrow \frac{-b}{a} = 10 \Rightarrow \frac{(a-2)}{1} = 10 \Rightarrow a-2 = 10 \Rightarrow a = 12$$

پس معادله به صورت $x^2 - 10x + 24 = 0$ است و حاصل ضرب ریشه‌های آن برابر است با:

$$\alpha\beta = \frac{c}{a} \Rightarrow \alpha\beta = \frac{24}{1} = 24$$

پاسخ گزینه ۴

روابط متقارن بین ریشه‌ها

TEST 122

اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 5x + 2 = 0$ باشند، کدام گزینه درست است؟

(۱) $\alpha^2\beta + \beta^2\alpha = 7$ (۲) $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{2}{5}$ (۳) $\alpha^3 + \beta^3 = 125$ (۴) $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{21}{2}$

LILIPOOTBOX

🍏 فرض کنید α و β ریشه‌های یک معادله درجه دوم باشند و حاصل عبارتی را بخواهیم که برحسب α و β به صورت متقارن نوشته شده باشد (مثل $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ یا $\alpha\beta^3 + \beta\alpha^3$ یا ...). برای این کار به کمک اتحاد، فاکتورگیری، تجزیه و یا مخرج مشترک‌گیری می‌توانیم عبارت داده‌شده را به S و P تبدیل کنیم.

🍏 اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 5x + 2 = 0$ باشند و بخواهیم حاصل $\alpha(1 + \frac{1}{\beta}) + \beta(1 + \frac{1}{\alpha})$ را به دست آوریم به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\alpha(1 + \frac{1}{\beta}) + \beta(1 + \frac{1}{\alpha}) = \alpha + \frac{\alpha}{\beta} + \beta + \frac{\beta}{\alpha} = (\alpha + \beta) + (\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha})$$

$$= S + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = S + \frac{S^2 - 2P}{P} = \frac{1}{2} + \frac{(\frac{1}{2})^2 - 2(-2)}{-2} = -\frac{13}{8}$$

ANALYSE

📌 چون α و β ریشه‌های معادله هستند، پس:

$$x^2 - 5x + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = -\frac{-5}{1} = 5 \\ P = \alpha\beta = \frac{2}{1} = 2 \end{cases}$$

حال تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

$\alpha^2\beta + \beta^2\alpha = \alpha\beta(\alpha + \beta) = 2 \times 5 = 10$ • گزینه (۱):

$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\beta + \alpha}{\alpha\beta} = \frac{5}{2}$ • گزینه (۲):

$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = 5^3 - 3 \times 2(5) = 125 - 30 = 95$ • گزینه (۳):

$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta} = \frac{5^2 - 2(2)}{2} = \frac{25 - 4}{2} = \frac{21}{2}$ • گزینه (۴):

روابط متقارن و رادیکالی بین ریشه‌ها

TEST 123

اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $4x^2 - 12x + 1 = 0$ باشند، حاصل عبارت $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$ کدام است؟
 ۴ (۱) ۲ (۲) $2\sqrt{2}$ (۳) $4\sqrt{2}$ (۴)

LILIPOOTBOX

اگر حاصل عبارتی متقارن و رادیکالی برحسب ریشه‌ها را بخواهیم، کافی است آن عبارت را برابر با A قرار داده و طرفین را به توان ۲ برسانیم تا به S و P تبدیل شود.

❖ فرض کنید α و β ریشه‌های معادله درجه دوم باشند و حاصل عبارت $\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}}$ را بخواهیم، داریم:

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}} = A \quad \text{توان ۲} \Rightarrow \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{2}{\sqrt{\alpha\beta}} = A^2$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} + \frac{2}{\sqrt{\alpha\beta}} = A^2 \Rightarrow \frac{S}{P} + \frac{2}{\sqrt{P}} = A^2 \Rightarrow \dots$$

ANALYSE

❑ چون x_1 و x_2 ریشه‌های معادله هستند، پس:

$$4x^2 - 12x + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{-12}{4} = 3 \\ x_1 x_2 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

حال فرض می‌کنیم $A = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$ ، داریم:

$$A = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} \Rightarrow A^2 = x_1 + x_2 + 2\sqrt{x_1 x_2}$$

$$\Rightarrow A^2 = 3 + 2\sqrt{\frac{1}{4}} = 3 + 2\left(\frac{1}{2}\right) = 3 + 1 = 4 \Rightarrow A = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

چون A مجموع دو عدد مثبت است، پس نمی‌تواند برابر -2 باشد.

پاسخ گزینه ۲

استفاده از S و P در مسائل پارامتری

TEST 124

مجموع مربعات ریشه‌های حقیقی معادله $mx^2 - (m+3)x + 5 = 0$ برابر ۶ است. مقدار m کدام است؟

- ۱) $-\frac{9}{5}$ ۲) ۱ ۳) $-\frac{9}{5}$ و ۱ ۴) $\frac{9}{5}$ و $-\frac{9}{5}$

LILIPOOTBOX

🍎 هنگامی که در سوالات معادله درجه دوم از S و P استفاده می‌کنیم، باید مطمئن باشیم که شرط $\Delta > 0$ برقرار است، یعنی معادله حتماً ریشه داشته باشد. 📌 کاربرد اصلی این نکته در مواقعی است که بعد از استفاده از S و P، برای مجهول مسئله دو جواب به دست آمده و هر دو جواب در گزینه‌ها وجود دارد و می‌خواهیم جواب درست را مشخص کنیم.

🍷 هنگام استفاده از S و P در مسائل پارامتری باید شرط $\Delta > 0$ را حتماً چک کنیم.

ANALYSE

📌 اگر ریشه‌های معادله را α و β در نظر بگیریم، با توجه به گفته سؤال، داریم:

$$\alpha^2 + \beta^2 = 6 \Rightarrow S^2 - 2P = 6$$

از طرفی در معادله داده شده S و P برابر است با:

$$P = \frac{5}{m}, S = -\frac{-(m+3)}{m} = \frac{m+3}{m}$$

$$S^2 - 2P = 6 \Rightarrow \frac{(m+3)^2}{m^2} - 2\left(\frac{5}{m}\right) = 6 \Rightarrow \frac{m^2 + 6m + 9 - 10m}{m^2} = 6$$

$$\Rightarrow m^2 - 4m + 9 = 6m^2 \Rightarrow 5m^2 + 4m - 9 = 0 \xrightarrow{\text{مجموع ضرایب}} \begin{cases} m = 1 \\ m = -\frac{9}{5} \end{cases}$$

حال باید ببینیم Δ به ازای کدام مقدار m مثبت است:

معادله ریشه حقیقی ندارد. $m = 1 \Rightarrow x^2 - 4x + 5 = 0 \xrightarrow{\Delta = b^2 - 4ac} \Delta = (-4)^2 - 4(1)(5) = 16 - 20 = -4 < 0$

$m = -\frac{9}{5} \Rightarrow -\frac{9}{5}x^2 - \frac{6}{5}x + 5 = 0 \xrightarrow{\Delta = b^2 - 4ac} \Delta = \left(-\frac{6}{5}\right)^2 - 4\left(-\frac{9}{5}\right)(5) = \frac{36}{25} + 36 > 0$ ✓

پاسخ گزینه ۱

ترکیب دنباله‌های حسابی و هندسی با معادله درجه دوم

TEST 125

به ازای کدام مقدار m ، عدد $\frac{1}{8}$ واسطه حسابی بین ریشه‌های حقیقی معادله $(m^2 - 4)x^2 - 3x + m = 0$ است؟

- ۳ (۱) -۳ (۲) ۴ (۳) -۴ (۴)

LILIPOOTBOX

دنباله‌های حسابی و هندسی، ارتباط زیبایی با معادله درجه دوم دارند. فرض کنیم:

x_1 و x_2 ریشه‌های یک معادله درجه دوم باشند:

$$2 \times \text{🍌} = \underbrace{x_1 + x_2}_{\text{جمع ریشه‌ها}}$$

🍌 اگر عددی مثل واسطه حسابی x_1 و x_2 باشد:

$$\text{🍌}^2 = \underbrace{x_1 x_2}_{\text{حاصل ضرب ریشه‌ها}}$$

🍌 اگر عددی مثل واسطه هندسی x_1 و x_2 باشد:

ANALYSE

🍌 اگر ریشه‌های معادله را α و β در نظر بگیریم، چون عدد $\frac{1}{8}$ واسطه حسابی بین ریشه‌های حقیقی معادله است، بنابراین:

$$\alpha + \beta = 2\left(\frac{1}{8}\right) \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{1}{4}$$

از طرفی در معادله داده شده، مجموع ریشه‌ها برابر است با:

$$S = -\frac{-3}{m^2 - 4} = \frac{3}{m^2 - 4}$$

پس:

$$\text{مجموع ریشه‌ها} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{3}{m^2 - 4} = \frac{1}{4} \Rightarrow m^2 - 4 = 12 \Rightarrow m^2 = 16 \Rightarrow m = \pm 4$$

حال Δ را به ازای $m = 4$ و $m = -4$ به دست می‌آوریم تا ببینیم کدام مقدار m قابل قبول است:

$$m = 4 \Rightarrow 12x^2 - 3x + 4 = 0 \quad \Delta = b^2 - 4ac \rightarrow \Delta = (-3)^2 - 4(12)(4) = 9 - 192 = -183 < 0 \quad \times$$

این معادله، ریشه حقیقی ندارد.

$$m = -4 \Rightarrow 12x^2 - 3x - 4 = 0 \quad \Delta = b^2 - 4ac \rightarrow \Delta = (-3)^2 - 4(12)(-4) = 9 + 192 = 201 > 0 \quad \checkmark$$

پاسخ گزینه ۴

تبدیل رابطهٔ دو ریشه به S و P

TEST 126

به‌ازای کدام مقدار a، ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $ax^2 + 3x + a^2 = 2$ معکوس یکدیگر هستند؟
 (۱) ۲ و -۱ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) هیچ مقدار a

LILIPOOTBOX

وقتی بین ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم، رابطه‌ای بیان می‌شود، می‌توانیم آن رابطه را به زبان ریاضی نوشته و به S و P تبدیل کنیم.

❁ فرض کنید در یک معادلهٔ درجهٔ دوم ریشه‌ها **قرینه** هم هستند، در این صورت می‌توانیم رابطهٔ داده شده را به مجموع ریشه‌ها تبدیل کنیم:

$$\alpha = -\beta \Rightarrow \alpha + \beta = 0 \Rightarrow S = 0$$

❁ فرض کنید در یک معادلهٔ درجهٔ دوم ریشه‌ها **عکس و قرینه** هم هستند، در این صورت می‌توانیم رابطهٔ داده شده را به حاصل ضرب ریشه‌ها تبدیل کنیم:

$$\alpha = -\frac{1}{\beta} \Rightarrow \alpha\beta = -1 \Rightarrow P = -1$$

ANALYSE

❑ ابتدا معادله را به صورت $ax^2 + 3x + a^2 - 2 = 0$ مرتب می‌کنیم، حال اگر ریشه‌های معادله را با α و β نمایش دهیم، داریم: $\alpha, \beta = \frac{a^2 - 2}{a}$ از طرفی چون ریشه‌ها معکوس یکدیگر هستند، پس:

$$\alpha = \frac{1}{\beta} \Rightarrow \alpha\beta = 1 \Rightarrow \frac{a^2 - 2}{a} = 1 \Rightarrow a^2 - 2 = a \Rightarrow a^2 - a - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (a+1)(a-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = 2 \end{cases}$$

حال چون دو مقدار برای a به دست آمد و هر دو در گزینه‌ها وجود دارند، شرط مثبت بودن Δ را بررسی می‌کنیم:

$$a = -1 \Rightarrow -x^2 + 3x - 1 = 0 \xrightarrow{\Delta = b^2 - 4ac} \Delta = (3)^2 - 4(-1)(-1) = 5 > 0 \quad \checkmark$$

$$a = 2 \Rightarrow 2x^2 + 3x + 2 = 0 \xrightarrow{\Delta = b^2 - 4ac} \Delta = (3)^2 - 4(2)(2) = 9 - 16 = -7 < 0 \quad \times$$

پاسخ گزینهٔ ۲

روابط مستقل از S و P بین ریشه‌ها (I)

TEST 127

یکی از ریشه‌های معادله $x^2 - 8x + m = 0$ از نصف ریشه دیگر، ۵ واحد بیشتر است. حاصل ضرب ریشه‌ها کدام است؟

- ۸ (۱) ۱۲ (۲) ۱۶ (۳) ۲۰ (۴)

LILIPOOTBOX

🍊 اگر رابطه‌ای بین ریشه‌ها بیان شود که قابل تبدیل به S و P نباشد (برحسب ریشه‌ها متقارن نباشد)، در این صورت به دلخواه S یا P را به دست آورده، سپس آن را به همراه رابطه داده شده در یک دستگاه دو معادله دو مجهول حل می‌کنیم تا ریشه‌ها به دست آیند.

🍯 فرض کنید در معادله $2x^2 - mx + 16 = 0$ یکی از ریشه‌ها مربع دیگری باشد، یعنی $\alpha = \beta^2$. اگر دقت کنید این رابطه به S و P تبدیل نمی‌شود، پس:

$$\begin{cases} \alpha = \beta^2 \\ \alpha\beta = 8 \end{cases} \xrightarrow{\alpha = \beta^2} \beta^2 \times \beta = 8 \Rightarrow \beta^3 = 8 \Rightarrow \beta = 2$$

حال اگر $\beta = 2$ را در معادله به جای X قرار دهیم، مقدار $m = 12$ به دست می‌آید.

ANALYSE

📌 اگر ریشه‌های معادله را با α و β نمایش دهیم، آنگاه چون یکی از ریشه‌ها از نصف ریشه دیگر، ۵ واحد بیشتر است، پس:

$$\alpha = \frac{\beta}{2} + 5$$

از طرفی با توجه به معادله، مجموع ریشه‌ها برابر است با:

$$\alpha + \beta = -\frac{-8}{1} = 8$$

بنابراین با توجه به دو معادله به دست آمده، داریم:

$$\begin{cases} \alpha = \frac{\beta}{2} + 5 \\ \alpha + \beta = 8 \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{\beta}{2} + 5\right) + \beta = 8 \Rightarrow \frac{3\beta}{2} = 3 \Rightarrow \beta = 2 \Rightarrow \alpha = \frac{2}{2} + 5 = 6$$

بنابراین حاصل ضرب ریشه‌ها برابر است با:

$$\alpha\beta = 2 \times 6 = 12$$

پاسخ گزینه ۲



روابط مستقل از S و P بین ریشه‌ها (II)

TEST 128

اگر α و β ریشه‌های $x^2 - 4x + 1 = 0$ باشند، حاصل عبارت $\sqrt{\alpha^2(4\beta - 1)} + \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha}$ کدام است؟

۱ (۱)

۴ (۲)

۵ (۳)

۸ (۴)

LILIPOOTBOX

🍏 در بعضی از سؤالات یک رابطه برحسب ریشه‌های معادله درجه دوم داده می‌شود که نمی‌توان آن را برحسب S یا P نوشت. برای حل این سؤالات باید به این نکته توجه کرد که ریشه‌های هر معادله در آن معادله صدق می‌کنند. بنابراین با جای‌گذاری ریشه‌ها در معادله درجه دوم داده شده، به دو معادله برحسب ریشه‌ها می‌رسیم و با مرتب کردن این معادله‌ها برحسب عبارت داده شده در سؤال، می‌توانیم حاصل آن عبارت را به دست آوریم.

🍀 به فرض، در معادله $3x^2 - x - 1 = 0$ اگر α و β ریشه‌های معادله باشند، می‌توانیم بنویسیم:

$$3\alpha^2 - \alpha - 1 = 0 \quad \text{یا} \quad 3\beta^2 - \beta - 1 = 0$$

📌 در مواقعی که در صورت سؤال، رابطه‌ای بین ریشه‌ها مطرح شده که قابل تبدیل به S و P نیست، این روش بسیار کارساز است.

ANALYSE

📌 چون α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 4x + 1 = 0$ هستند، پس در آن صدق می‌کنند، بنابراین:

$$\text{1} \quad \alpha^2 - 4\alpha + 1 = 0 \Rightarrow \alpha^2 + 1 = 4\alpha$$

$$\text{2} \quad \beta^2 - 4\beta + 1 = 0 \Rightarrow \beta^2 = 4\beta - 1$$

حال با جای‌گذاری مقادیر 1 و 2 در عبارت $\sqrt{\alpha^2(4\beta - 1)} + \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha}$ داریم:

$$\sqrt{\alpha^2(4\beta - 1)} + \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha} = \sqrt{\alpha^2\beta^2} + \frac{4\alpha}{\alpha} = |\alpha\beta| + 4$$

از طرفی با توجه به معادله داده شده، حاصل ضرب ریشه‌ها برابر $\alpha\beta = \frac{c}{a} = 1$ است، بنابراین:

$$|\alpha\beta| + 4 = |1| + 4 = 5$$

پاسخ گزینه ۳

نوشتن معادله درجه دوم با داشتن دو ریشه

TEST 129

ریشه‌های کدام معادله از دو برابر ریشه‌های معادله $2x^2 - x - 5 = 0$ یک واحد کم‌تر است؟

..... (۱) $x^2 - x + 1 = 0$ (۲) $x^2 + x - 1 = 0$

..... (۳) $3x^2 + 2x - 6 = 0$ (۴) $2x^2 + 3x - 6 = 0$

LILIPOOTBOX

🍏 اگر ریشه‌های یک معادله درجه دوم را داشته باشیم و بخواهیم خود معادله را بنویسیم، کافی است ابتدا $S = x_1 + x_2$ و $P = x_1 x_2$ را به دست آوریم سپس معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

❖ فرض کنید می‌خواهیم معادله‌ای را بنویسیم که ریشه‌های آن -2 و 5 باشند، داریم:

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -2 + 5 = 3 \\ P = x_1 x_2 = (-2)(5) = -10 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 3x - 10 = 0$$

🍏 اگر بخواهیم معادله‌ای بنویسیم که ریشه‌های آن با ریشه‌های یک معادله دیگر دارای رابطه‌ای باشند، کافی است S و P معادله اولیه را تشکیل دهیم و به کمک آن‌ها، S و P معادله خواسته شده را به دست آوریم.

❖ فرض کنید α و β ریشه‌های معادله $2x^2 - x - 1 = 0$ باشند و بخواهیم معادله‌ای بنویسیم که ریشه‌هایش α^2 و β^2 باشند، یعنی ریشه‌هایش مربع ریشه‌های معادله اولیه باشد. در معادله اولیه داریم: $\alpha + \beta = \frac{1}{2}$ و $\alpha\beta = -\frac{1}{2}$ پس:

$$\begin{cases} S_{\text{جدید}} = \alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4} \\ P_{\text{جدید}} = \alpha^2 \beta^2 = P^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{1}{4} = 0$$

ANALYSE

🍏 ریشه‌های معادله $2x^2 - x - 5 = 0$ را α و β در نظر می‌گیریم:

$$2x^2 - x - 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = -\frac{-1}{2} = \frac{1}{2} \\ \alpha\beta = \frac{-5}{2} \end{cases}$$

به دنبال معادله‌ای هستیم که ریشه‌هایش از دو برابر ریشه‌های معادله $x^2 - x - 5 = 0$ یک واحد کمتر است، یعنی ریشه‌های معادله مورد نظر به صورت $2\beta - 1$ و $2\alpha - 1$ می‌باشند. مجموع و حاصل ضرب این ریشه‌ها را می‌یابیم و با کمک رابطه $x^2 - Sx + P = 0$ ، معادله مورد نظر را می‌نویسیم:

$$S = (2\alpha - 1) + (2\beta - 1) = 2(\alpha + \beta) - 2 = 2\left(\frac{1}{2}\right) - 2 = 1 - 2 = -1$$

$$P = (2\alpha - 1)(2\beta - 1) = 4\alpha\beta - 2(\alpha + \beta) + 1 = 4\left(-\frac{5}{2}\right) - 2\left(\frac{1}{2}\right) + 1 = -10 - 1 + 1 = -10$$

در نتیجه معادله مورد نظر به صورت زیر خواهد بود:

$$x^2 - (-1)x + (-10) = 0 \Rightarrow x^2 + x - 10 = 0$$

پاسخ گزینه ۲

نوشتن یک معادله از روی یک معادله دیگر

TEST 130

ریشه‌های کدام یک از معادله‌های زیر عکس و قرینه ریشه‌های معادله $3x^2 - 2x + 1 = 0$ است؟

..... (۱) $3x^2 + 2x + 1 = 0$

..... (۲) $x^2 - 2x + 3 = 0$

..... (۳) $3x^2 + 2x - 1 = 0$

..... (۴) $x^2 + 2x + 3 = 0$

LILIPOOTBOX

🍏 اگر معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ را داشته باشیم، در حالت‌های خاص می‌توانیم بدون به‌دست آوردن مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها، معادله جدید را بنویسیم. [البته می‌توانیم با روش کلی گفته شده در BOX قبل نیز، این معادلات را بنویسیم.]

📌 ریشه‌های معادله $ax^2 - bx + c = 0$ ، قرینه ریشه‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ است.

🍀 ریشه‌های معادله $2x^2 - 3x - 6 = 0$ ، قرینه ریشه‌های معادله $2x^2 + 3x - 6 = 0$ است.

📌 ریشه‌های معادله $cx^2 + bx + a = 0$ ، عکس ریشه‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ است.

🍀 ریشه‌های معادله $6x^2 + 3x + 2 = 0$ ، عکس ریشه‌های معادله $2x^2 + 3x - 6 = 0$ است.

📌 ریشه‌های معادله $cx^2 - bx + a = 0$ ، عکس و قرینه ریشه‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ است.

🍀 ریشه‌های معادله $6x^2 - 3x + 2 = 0$ ، عکس و قرینه ریشه‌های معادله $2x^2 + 3x - 6 = 0$ است.

ANALYSE

📌 باید در معادله $3x^2 - 2x + 1 = 0$ ، جای a و c را با هم عوض کرده و b را قرینه کنیم، پس معادله

مورد نظر برابر است با:

$1x^2 + 2x + 3 = 0$: معادله جدید $\Rightarrow 3x^2 - 2x + 1 = 0$: معادله اولیه

قرینه

پاسخ گزینه ۴

NOTE

درس دوم

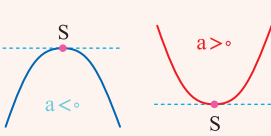
سهمی

معرفی سهمی

TEST 131

رأس سهمی $y = -x^2 + 2x + 3$ کدام نقطه است و چه خاصیتی دارد؟
 ۱) $(1, 4)$ ، ماکسیمم ۲) $(1, 5)$ ، ماکسیمم ۳) $(1, 4)$ ، مینیمم ۴) $(1, 5)$ ، مینیمم

LILIPOOTBOX



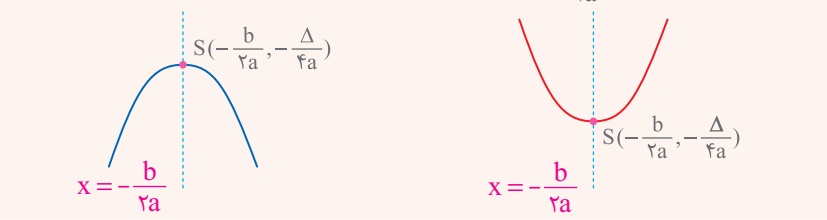
نمودار هر رابطه به شکل $y = ax^2 + bx + c$ با شرط $a \neq 0$ نشان دهنده یک سهمی است، معمولاً رأس سهمی را با S نشان می‌دهند، که با توجه به علامت a به صورت مقابل است:

اگر $a > 0$ ، رأس سهمی همان نقطه مینیمم سهمی و اگر $a < 0$ ، رأس سهمی همان نقطه ماکسیمم سهمی است.

طول رأس سهمی $x = -\frac{b}{2a}$ که با جای‌گذاری آن در تابع $y = ax^2 + bx + c$ ، عرض رأس سهمی

به صورت $y = -\frac{\Delta}{4a}$ به دست می‌آید؛ یعنی:

محور تقارن سهمی خط $x = -\frac{b}{2a}$ است.



ANALYSE

چون ضریب x^2 منفی است، پس سهمی دارای ماکسیمم است. از طرفی طول رأس سهمی برابر است با:

$$x_{\text{رأس}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2(-1)} = 1$$

حال با جای‌گذاری طول رأس سهمی در معادله، می‌توانیم عرض نقطه رأس را به دست آوریم:

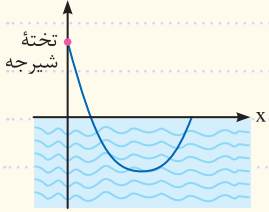
$$x_{\text{رأس}} = 1 \Rightarrow y_{\text{رأس}} = -(1)^2 + 2(1) + 3 = 4$$

پس مختصات نقطه ماکسیمم سهمی به صورت $(1, 4)$ است.

پاسخ گزینه ۱

مسائل کاربردی سهمی **TEST 132**

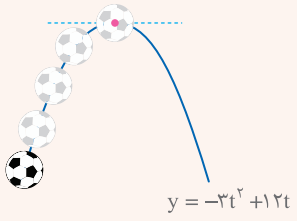
شکل زیر مسیر حرکت یک شناگر را از لحظه‌ای که تخته شیرجه را ترک می‌کند تا زمانی که دوباره به سطح آب برمی‌گردد، نشان می‌دهد. اگر معادله مسیر حرکت شناگر به صورت $y = x^2 - 8x + 7$ باشد، حداکثر عمق شیرجه زدن شناگر چقدر است؟



- (۱) ۴
- (۲) ۵
- (۳) ۷
- (۴) ۹

LILIPOOTBOX

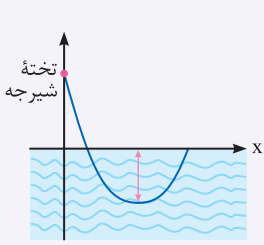
در بعضی از مسائل که به صورت کاربردی بیان می‌شوند، می‌توانیم از معادله سهمی استفاده کنیم. در این مسائل برخی نقاط از جمله رأس سهمی و محل برخورد با محورهای مختصات از اهمیت بیشتری برخوردار هستند.



●● علی توپی را به هوا پرتاب می‌کند. اگر معادله ارتفاع توپ در لحظه t پس از پرتاب به صورت $y = -3t^2 + 12t$ باشد، برای به‌دست‌آوردن بیش‌ترین ارتفاع توپ به‌صورت زیر عمل می‌کنیم: چون ضریب t^2 منفی است، پس سهمی رو به پایین است. از طرفی بیشترین ارتفاع توپ، همان عرض رأس سهمی، یعنی $-\frac{\Delta}{4a}$ است.

$$y = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{144 - 4(-3)(0)}{4(-3)} = -\frac{144}{4(-3)} = 12$$

ANALYSE



■ حداکثر عمق شیرجه زدن، برابر با عرض رأس سهمی است، پس:

$$\begin{aligned} \text{حداکثر عمق} &= -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} \\ &= -\frac{(-8)^2 - 4(1)(7)}{4(1)} = -\frac{64 - 28}{4} = -\frac{36}{4} = -9 \end{aligned}$$

دقت کنید که منفی شدن جواب به خاطر این است که عدد مورد نظر بیان‌گر عمق است.

پاسخ گزینه ۴

سهمی‌های بالا یا پایین محور x ها

TEST 133

نمودار کدام گزینه، همواره زیر محور x قرار دارد؟

(۱) $y = x^2 - 2x + 3$

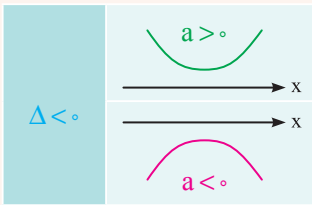
(۲) $y = x^2 + 2x - 3$

(۳) $y = -x^2 + 2x + 3$

(۴) $y = -x^2 + 2x - 3$

LILIPOOTBOX

در سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + c$ در صورتی که $\Delta < 0$ باشد، نمودار محور x ها را قطع نخواهد کرد؛ یعنی همواره بالای محور x ها یا پایین محور x ها قرار خواهد گرفت که بستگی به علامت a دارد:



اگر $a > 0$ باشد، نمودار سهمی همواره بالای محور x ها قرار دارد.

اگر $a < 0$ باشد، نمودار سهمی همواره پایین محور x ها قرار دارد.

ANALYSE

برای این‌که نمودار پایین محور x باشد، باید ضریب x^2 و Δ هر دو منفی باشند، چون در تابع‌های گزینه‌های (۱) و (۲) ضریب x^2 برابر یک و مثبت است، نمی‌توانند پایین محور x قرار گیرند. حال بررسی می‌کنیم Δ در کدام یک از گزینه‌های (۳) و (۴) منفی است:

گزینه (۳): $y = -x^2 + 2x + 3 \xrightarrow{\Delta = b^2 - 4ac} \Delta = (2)^2 - 4(-1)(3) = 4 + 12 = 16 > 0$

گزینه (۴): $y = -x^2 + 2x - 3 \xrightarrow{\Delta = b^2 - 4ac} \Delta = (2)^2 - 4(-1)(-3) = 4 - 12 = -8 < 0$

پاسخ گزینه ۴

W
T
O
N

TEST 134 نمودار سهمی‌های مماس بر محور x ها

به ازای کدام مقدار m نمودار سهمی $y = (m-3)x^2 + 6x + m + 3$ بالای محور x و مماس بر آن است؟

(۱) $3\sqrt{2}$

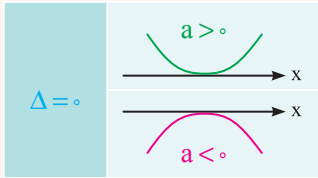
(۲) $2\sqrt{3}$

(۳) $5\sqrt{2}$

(۴) $2\sqrt{5}$

LILIPOOTBOX

🍏 در سهمی به معادله $ax^2 + bx + c = 0$ ، در صورتی که $\Delta = 0$ باشد، معادله دارای ریشه مضاعف بوده و نمودار سهمی در این ریشه بر محور x مماس است و جهت باز شدن دهانه سهمی بستگی به علامت a دارد.



📌 اگر $a > 0$ باشد، دهانه سهمی رو به بالا باز می‌شود.

📌 اگر $a < 0$ باشد، دهانه سهمی رو به پایین باز می‌شود.

ANALYSE

📌 برای این‌که نمودار بالای محور x و مماس بر آن باشد، باید ضریب x^2 مثبت و Δ برابر صفر باشد:

$$\left\{ \begin{aligned} a > 0 &\Rightarrow (m-3) > 0 \Rightarrow m > 3 \\ \Delta = 0 &\xrightarrow{\Delta = b^2 - 4ac} (6)^2 - 4(m-3)(m+3) = 0 \\ &\Rightarrow 36 - 4(m^2 - 9) = 0 \quad \color{orange}{\Rightarrow +4} \quad 9 - (m^2 - 9) = 0 \Rightarrow 9 - m^2 + 9 = 0 \\ &\Rightarrow m^2 = 18 \Rightarrow m = \pm 3\sqrt{2} \end{aligned} \right.$$

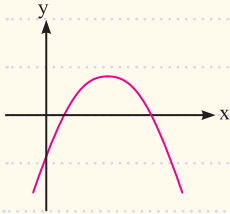
چون $m > 3$ ، پس $m = 3\sqrt{2}$ قابل قبول است.

پاسخ گزینه ۱

تعیین علامت ضرایب به کمک نمودار

TEST 135

نمودار زیر مربوط به سهمی $y = ax^2 + bx + c$ است. علامت a ، b ، c و Δ به ترتیب از راست به چپ کدام است؟



(۱) منفی، مثبت، منفی، منفی

(۲) منفی، مثبت، منفی، مثبت

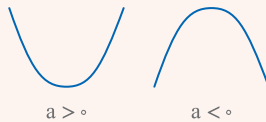
(۳) منفی، منفی، مثبت، منفی

(۴) مثبت، مثبت، منفی، مثبت

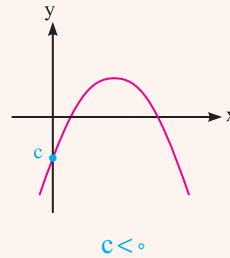
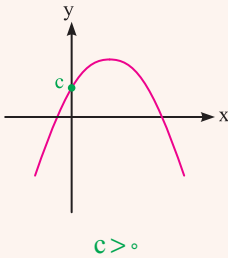
LILIPOOTBOX

برای تشخیص علامت a ، b ، c و Δ در سهمی $y = ax^2 + bx + c$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

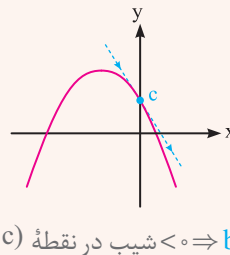
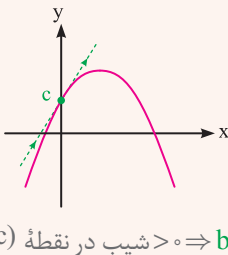
علامت a بستگی به جهت باز شدن دهانه سهمی دارد:



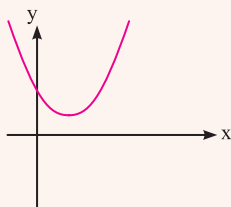
علامت c بستگی به محل برخورد نمودار با محور y ها دارد:



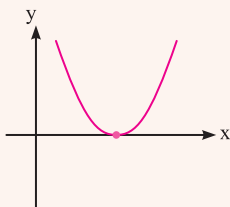
علامت b بستگی به شیب نمودار در نقطه $(0, c)$ دارد:



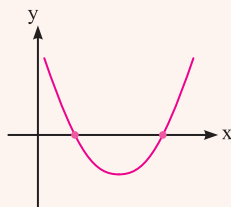
علامت Δ بستگی به تعداد نقاط برخورد نمودار با محور x ها دارد:



$$\Delta < 0$$

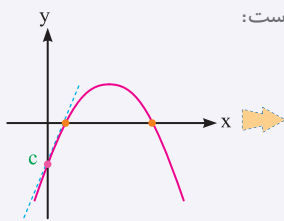


$$\Delta = 0$$



$$\Delta > 0$$

ANALYSE



با توجه به نمودار داده شده، علامت a ، b ، c و Δ به صورت زیر است:

- دهانه سهمی رو به پایین باز شده است، پس: $a < 0$
- محل برخورد با محور y ها منفی است، پس: $c < 0$
- شیب نمودار در نقطه $(0, c)$ مثبت است، پس: $b > 0$
- سهمی محور x ها را در دو نقطه قطع کرده است. پس: $\Delta > 0$

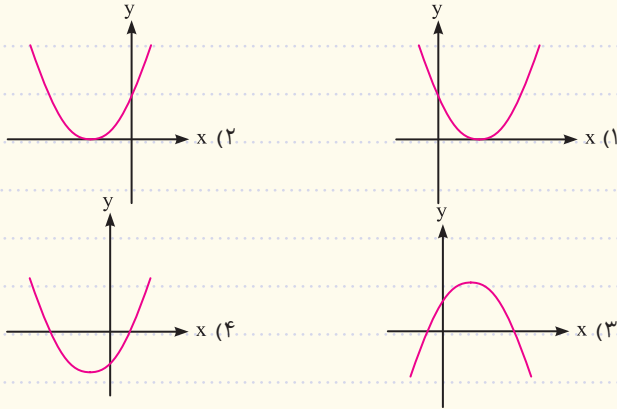
پاسخ گزینه ۲

NOTE

رسم نمودار سهمی

TEST 136

نمودار سهمی با ضابطه $y = 3x^2 + x - \frac{3}{4}$ کدام است؟



LILIPOOTBOX

برای رسم نمودار یک سهمی به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

- ابتدا با یافتن مقدار Δ تعداد نقاط برخورد سهمی با محور x ها را مشخص می‌کنیم.
- سپس رأس سهمی را پیدا می‌کنیم تا موقعیت آن در دستگاه مختصات مشخص شود.
- در انتها از روی علامت a (جهت باز شدن دهانه سهمی) و علامت c (محل برخورد نمودار سهمی با محور y ها) نمودار را دقیق رسم می‌کنیم.

ANALYSE

■ ابتدا Δ را محاسبه می‌کنیم تا تعداد نقاط برخورد منحنی با محور x ها مشخص شود:

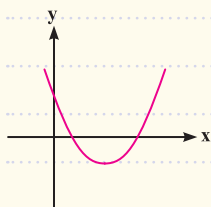
$$y = 3x^2 + x - \frac{3}{4} \rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4(3)\left(-\frac{3}{4}\right) = 1 + 9 = 10$$

پس نمودار محور x ها را در دو نقطه قطع می‌کند. بنابراین گزینه‌های (۱) و (۲) حذف می‌شوند. حال چون ضریب x^2 مثبت است، پس دهانه سهمی رو به بالا باز می‌شود، بنابراین گزینه (۴) صحیح است.

پاسخ گزینه ۴

نوشتن ضابطه سهمی از روی نمودار (I)

TEST 137



معادله سهمی داده شده به کدام صورت است؟

(1) $y = -x^2 + 2x + 3$

(2) $y = x^2 - 2x + 4$

(3) $y = x^2 - 3x + 1$

(4) $y = x^2 + 3x + 1$

LILIPOOTBOX

🍏 اگر نمودار یک سهمی را داشته باشیم و بخواهیم ضابطه آن را مشخص کنیم، فرض می‌کنیم

که ضابطه سهمی به صورت $y = ax^2 + bx + c$ باشد، در این صورت:

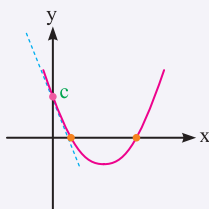
🟩 اگر دهانه سهمی رو به بالا باشد، $a > 0$ و اگر رو به پایین باشد، $a < 0$ است.

🟩 اگر محل برخورد نمودار با محور y ها بالای محور x ها باشد، $c > 0$ و اگر پایین محور x ها باشد، $c < 0$ است.

🟩 اگر شیب خط مماس بر نمودار در نقطه $(0, c)$ مثبت باشد، $b > 0$ و اگر منفی باشد، $b < 0$ است.

🟩 اگر نمودار سهمی محور x را قطع نکند، $\Delta < 0$ ، اگر بر محور x مماس باشد، $\Delta = 0$ و اگر محور x را در دو نقطه قطع کند، $\Delta > 0$ خواهد بود.

ANALYSE



• دهانه سهمی رو به بالا است، در نتیجه $a > 0$ پس گزینه (1) نادرست است.

• محل برخورد با محور y ها مثبت است، در نتیجه $c > 0$.

• شیب در نقطه $(0, c)$ منفی است، در نتیجه $b < 0$ و گزینه (4) نادرست است.

• سهمی محور x ها را در دو نقطه قطع کرده است، در نتیجه $\Delta > 0$.

حال باید بررسی کنیم در کدام یک از گزینه‌های (2) و (3)، Δ مثبت است:

• گزینه (2):

$y = x^2 - 2x + 4 \rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(1)(4) = 4 - 16 = -12 < 0$ ✗

• گزینه (3):

$y = x^2 - 3x + 1 \rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4(1)(1) = 9 - 4 = 5 > 0$ ✓

پاسخ گزینه 3