سپاس و قدردانی

www.gajmarket.com

عطیه پوردرخشان ـ نیلوفر حاجیلو

- **شورای برنامه‌ریزی:** مهندس ابوالفضل جوکار ـ مهندس محمد جوکار ـ علیرضا مزرعتی
- **شورای تألیف:** حکیم رجبی ـ پروانه سعادت‌خواه ـ مینا پروین ـ صبا کریمی سیده‌زینب‌صالحی
- **گروه گرافیک و فنی:** صغری قربانی ـ ساناز عاشقی ـ مریم نایبی ـ فرزانه رجبی مهسا هوشیار ـ الناز دارانی ـ لیلا فرجی امین ـ رامین حاتمی
- **گروه طراح شکل:** وحیده معینی رجبی ـ حمیده میرزایی ـ محبوب رازی ـ شیرین قیژان‌زاده
- **گروه تصویرگری:** مجید باقرزادگان ـ پریسا رسولی ـ سارا نیک‌فروز
- **گروه رسانه و تصویر:** راضیه یادگاری

پس از تألیف این کتاب و عرضه آن به شما معلمان گرامی و دانش‌آموزان عزیز، کماکان در کنار شما هستیم و شما می‌توانید کاستی‌ها و نقایصی که در کتاب موجود است را با مؤلفین کتاب در میان بگذارید و ما را در جهت بهبود کیفیت کتاب یاری کنید.

سخن مدیر تألیف

به نام آنکه هستی نام از او یافت ...

اندیشه در آفرینش هستی و نگاه به زندگی موجودات کوچک و بزرگ برای انسان درس‌های بزرگی به همراه دارد، باید تلاش کنیم با یادآوری این نعمت‌ها مسیر اندیشیدن، راه و روش درست زندگی کردن و سعادتمند شدن و استفاده درست از موهبت‌های الهی را بیاموزیم. خیلی مهم است که همیشه رویکردی مثبت به زندگی داشته باشیم، موانعی در زندگی وجود دارد که برای عبور از این موانع نباید دست از تلاش برداریم و نا امید شویم بلکه باید به‌دنبال راه‌های جایگزین برای رسیدن به اهدافمان باشیم.

یادگیری حل مسئله از مهم‌ترین موضوعاتی است که نظام آموزشی در کتاب‌های درسی جدید توجه ویژه‌ای به آن داشته است. اما چرا حل مسئله مهم است؟ وقتی صحبت از حل مسئله می‌کنیم لزوماً قرار نیست دربارهٔ ریاضیات صحبت کنیم، ما در زندگی روزانهٔ خود با مسائل متفاوتی مواجه می‌شویم که باید یاد بگیریم چگونه با آن‌ها برخورد کنیم و از همه مهم‌تر بیاموزیم با تکیه بر تحلیل‌های همه‌جانبه از عهده حل آن‌ها برآییم. این هدفی است که ما برای آن برنامه داریم و قصدمان این است که با تألیف کتاب‌هایی مبتنی بر محتوای کتاب‌های درسی جدید در کنار شما باشیم. کتاب‌های جدید انتشارات گاج تحت عنوان آموزش ساده یا به اختصار آس قرار است از دریچهٔ تازه‌تری به رشد و ارتقای سطح علمی و همچنین فهم عمیق مفاهیم مختلف به شما کمک کند.

هدف ما در کتاب‌های آس تنها این نیست که به‌صورت کلیشه‌ای سؤال‌ها و مثال‌هایی را در صفحه‌های مختلف همراه نکته‌های فراوان جا دهیم و در واقع با این کار به بمباران ذهن شما بپردازیم. آس می‌خواهد علم را به زبان ساده‌تر و صمیمی‌تری به نسلی که آینده برای آن‌هاست انتقال دهد. کسب مهارت‌های لازم برای حل مسئله از دیگر اولویت‌های مهم کتاب آس است که برای تحقق این هدف در بخش‌های مختلف آموزشی، سؤال‌ها و تست‌هایی از ساده به دشوار برای شما دانش‌آموزان عزیز فراهم شده است. برای خواندن آس این احساس را درخودتان به‌وجود بیاورید که قصد خواندن یک کتاب داستان را دارید، سطر به سطر را با حوصله بخوانید و از آن لذت ببرید. تمام تلاش خود را برای ارائهٔ کتابی متفاوت و بی‌نقص به‌کار برده‌ایم اما علاقمند هستیم که شما نیز در این شیوه آموزشی با ما مشارکت داشته باشید، بنابراین ما را از نظرات و ایده‌هایتان بی‌نصیب نگذارید. منتظر انتقادات و پیشنهادات و راه‌حل‌های خلاقانه شما هستیم.

علیرضا مزرعتی

@mazraati

عطیه پوردرخشان، نیلوفر حاجیلو

مقدمه مؤلفان

سخن اوّل

سلام. دوازدهمی عزیز، ای کسی که تمام کتاب‌های تازه تألیف روی تو آزموده می‌شود و در خط مقدم انقلاب کتاب‌های درسی، استوار و مقتدر، به پیش می‌روی! در این سال حتماً حتماً لازمه روش مطالعه‌ات رو تغییر بدی چون قراره در آزمون کنکور شرکت کنی و موفقیت بیشتری کسب کنی. مطمئن باش در این نبرد تنها نیستی و همیشه پشت تو خواهیم بود، مثل همیشه ... قبل از هر کاری کافیه چند تا سؤال جدی از خودتون بپرسید و پاش وایسید تا راز موفقیت را در جواب‌هایی که به خودتون می‌دید کشف کنید: «چرا باید درس بخونیم؟ و این همه دانش‌ها و آموخته‌هامون، کی و کجا قراره به دردمون بخوره؟» خصوصاً سؤال همیشگی‌تون: «ریاضیات به این سختی بالاخره به چه دردی می‌خوره؟!» چون به نظر ما هر دانش‌آموزی که بتونه جواب‌های منطقی برای این سؤالات پیدا کنه، دیگه درس خوندن براش سخت نیست!

ویژگی‌های بارز کتاب

در تألیف کتاب‌های درسی جدید، با مواردی روبه‌رو هستیم که شاید بتوان به جرأت گفت تا پیش از این، در کتاب‌های قدیمی‌تر با آن‌ها مواجه نبودیم. از جمله این موارد، کاربردی بودن مطالب و بیان مفهومی آن‌ها است که شخصاً در این مورد از مؤلفین محترم کتب درسی، حمایت می‌کنم. اما این مسئله، وظیفه سنگینی را بر دوش ما قرار می‌دهد تا بتوانیم در قالب کتاب درسی و هم راستا با اهداف در نظر گرفته شده، کتاب کمک درسی گردآوری کنیم تا با بیانی ساده، به انتقال هر چه بیشتر و بهتر مطالب، کمک کند. این در حالی است که بسیاری از کتاب‌های کمک درسی، همچنان با روش قدیمی و به اصطلاح مکتب‌خانه‌ای و برخلاف اهداف آموزش مفهومی کتب جدیدالتألیف، به بیان رگباری نکات، تست‌ها و سؤالات تکراری می‌پردازند و ذهن خواننده را تیر باران می‌کنند! بنابراین نسل جدیدی از کتاب‌های کمک درسی، منطبق بر آخرین تغییرات کتب درسی و رعایت اصول و چارچوب‌های مدنظر این کتب را خدمت شما عزیزان معرفی می‌کنیم: واضح است که این کتاب‌ها، در واحد انتشارات بین‌المللی گاج «آس» نامیده شده که این خود مخفف «آموزش ساده» است.در سری کتاب‌های آس، سعی بر این است تا ضمن مطالعه مطالب درسی، بتوانید با کشف کاربرد مطالب در زندگی روزمره، لذت یادگیری واقعی و تفکر خلاق را بچشید. کتاب پیش روی شما، کتاب آموزش ساده «ریاضی و آمار ۳» نیز از این قاعده مستثنی نیست و مانند کتاب درسی ریاضی و آمار ۳ رشته انسانی، دارای ۳ فصل است که در هر فصل، به بیان دروس مربوطه پرداخته است. اما چگونه؟

در ادامه به توضیح ساختار کتاب برای راهنمایی نحوه استفاده از آن می‌پردازیم.

◆ شیوه بهره‌مندی و استفاده مفید از این کتاب

عصر حاضر، عصر اطلاعات است و بمباران اطلاعات و چالش‌های موجود، به رشد هوش و خلاقیت دانش‌آموزان از یک سو و به افزایش تنوع طلبی بصری از سوی دیگر دامن زده است. و از آن‌جایی که سلیقه مخاطب بسیار اهمیت دارد، سعی کرده‌ایم در این کتاب از بخش‌های خلاق و جذابی برای تفکیک مطالب به کمک گرافیک استفاده کنیم. بنابراین می‌توان گفت یکی از ویژگی‌های به خصوص کتاب‌های آس، بهره‌گیری از بخش‌های موضوعی ـ گرافیکی متنوع است. از جمله: «ماجرا چیه؟ ـ فکر کن تا کشف کنی ـ درسنامه ـ سؤال ـ مثال‌های آموزشی ـ روزنامه ریاضی ـ کافه سؤال ـ گزینه چند؟ ـ جمع‌بندی کنکوری ـ ایستگاه کنکور و بسیاری موارد دیگر که ماهیت کلی و کاربرد هر کدام با ورق زدن کتاب و مطالعه آن‌ها، قابل تحصیل هستند. اما درباره برخی از اصلی‌ترین موارد، توضیحاتی ارائه می‌دهیم:

ماجرا چیه؟

درابتدای هر فصل، بخشی به‌عنوان «ماجرا چیه؟» قرار گرفته شده که به نوعی چشم‌انداز فصل پیش روی شما خواهد بود. در این بخش با بیان یک داستان، نوعی احساس نیاز به یادگیری مطالب را در ذهن شما ایجاد می‌کند و فضا را برای درک مطالب آماده می‌کند.

فکر کن تا کشف کنی

در این بخش با مطرح کردن یک مسئله چالشی، هدفمند و در عین حال ساده، سعی کرده‌ایم کمی

ذهن را درگیر مسائل مربوطه کرده و زمینه را برای یادگیری مطالب موجود، فراهم کنیم. ممکن است سؤالات به‌گونه‌ای باشند که با کمی تفکر و به کمک دانسته‌های قبلی، قابل حل باشند و ممکن است برخی به گونه‌ای باشند که با ورود به فصل، مطالعه و تسلط بر مفاهیم مطرح شده، بازگشته و قله این مسائل را فتح کنند.

درسنامه

و اما بخش مهم و حساس درسنامه ... برای نگارش درسنامه، نکات بسیاری مدنظر گرفته شده که مهم‌ترین آن‌ها، توجه به محتوا و در نظر گرفتن اهداف کتاب درسی یعنی همان کاربردی و مفهومی بودن است. اما این تمام ماجرا نیست!

هر درسنامه با بیان یک داستان یا یک ماجرا که ممکن است هر کدام از آن‌ها در زندگی روزمره هم رخ دهند، آغاز می‌شود. مفاهیم درس همگی در خلال این داستان‌ها یا ماجراها بیان می‌شود و مطالب بنیادین کاملاً ساده، خلاقانه و ماجراجویانه دنبال می‌شود و همین مسئله باعث می‌شود اولاً خواننده نیاز موضوعات درسی مطرح شده را احساس کند ثانیاً گام به گام و کاملاً مفهومی آن‌ها را فرا بگیرد. همچنین تصویر ذهنی که توسط این داستان‌ها در ذهن او ایجاد می‌شود، همواره به یادآوری مطالب به او کمک می‌کند.

درخلال این داستان‌ها تنها به پیکره‌بندی موضوعات درسی پرداخته شده و این درسنامه‌ها خالی از هرگونه نکته اضافه‌ای هستند تا مانع هرگونه سردرگمی و پیچیدگی شود. درواقع این وظیفه سنگین و خطیر بر عهده قسمت بعدی گذاشته شده است.

مثال‌های آموزشی

این بخش اگر از درسنامه مهم‌تر نباشد، کم اهمیت‌تر هم نیست. درواقع مثال‌های آموزشی، بخش تکمیلی درسنامه‌ها هستند که توصیه می‌شود پس از تسلط بر مفاهیم مطرح‌شده در درسنامه‌ها، به آن بپردازید.

در بخش مثال‌های آموزشی، سؤالات به‌گونه‌ای مرتب شده‌اند که روال منطقی آموزش در آن‌ها رعایت شود. این بخش دقیقاً خلاف سایر کتاب‌های کمک آموزشی طراحی شده است! در کتاب‌های کمک آموزشی دیگر، ابتدا نکات را مسلسل‌وار بیان می‌کنند و بعد از ایجاد خستگی ذهنی، مثال‌ها و تمرین‌ها را بیان و حل می‌کنند. اما در این بخش، ابتدا مثال‌ها مطرح می‌شود تا ذهن را آماده پذیرش نکته کند و سپس با بیان حل مثال و در خلال توضیحات آمده، نکته موردنظر مطرح می‌شود و به این ترتیب نکات را طبقه‌بندی و مرتب شده آموزش می‌دهد. البته شوخی‌های مطرح شده در خلال درسنامه و حل مثال‌ها نیز خستگی‌های ناشی از مطالعه را به حداقل ممکن می‌رساند.

روزنامه ریاضی

بخشی با عنوان «روزنامه ریاضی» در این کتاب آمده است که مطالب کاربردی و مرتبط با درس در آن‌ها آورده شده است که دانستن آن‌ها خالی از لطف نیست. البته در برخی موارد، قسمت‌های جدا مانده کتاب درسی گذشته مطرح شده است که حتی تا پیش از این از مطالب آن‌ها، سؤالات کنکوری هم مطرح می‌شدند. متن برخی از این مجلات به‌گونه‌ای تنظیم شده‌اند که دانش‌آموز بتواند از آن‌ها به‌عنوان یک پروژه تحقیقی هم استفاده کند.

کافه سؤال ـ گزینه چند

در بخش «کافه سؤال» و «گزینه چند» سعی کرده‌ایم انواع تیپ‌های سؤالات و مسائل را در سطح استاندارد کتاب درسی بیان کنیم و در عین حال سعی کرده‌ایم از تکرار بپرهیزیم. تا بدین‌ترتیب بتوانید به‌راحتی برای آزمون‌های مدرسه و کنکور، خود را آماده کنید. این سؤالات همگی دارای پاسخ‌های تشریحی هستند و در پاسخگویی به سؤالات سعی کرده‌ایم بیان ساده را فراموش نکنیم. امّا توجه کنید ممکن است راه‌حل‌های متنوع دیگری هم برای پاسخگویی به سؤالات موجود باشند. توجه کنید مهم‌ترین بخش برای موفقیت در ریاضیات کسب مهارت و تجربه است و این تجربه جز با حل تمرین و مسئله کسب نمی‌شود. این بخش شما را به یک انسان باتجربه در ریاضیات تبدیل خواهد کرد.

ایستگاه کنکور ـ جمع‌بندی کنکوری

از آن‌جایی که شما دوازدهمی هستید و رویداد بزرگی به نام کنکور را پیش روی خود دارید، سعی کرده‌ایم بتوانیم نیاز شما را در این کتاب پاسخگو باشیم. البته در بیان درسنامه‌ها و مثال‌های آموزشی، تمام نکات موردنیاز یک کنکوری مطرح شده است امّا با تمام این توضیحات، بخشی با عنوان جمع‌بندی کنکوری قرار گرفته است که به شما این امکان را می‌دهد تمام نکات مطرح شده در درس را یک‌جا مشاهده و مطالعه کنید و بعد از آن سؤالات کنکورهای سراسری داخل و خارج از کشور گروه آزمایشی علوم انسانی، به همراه پاسخ کاملاً ساده و تشریحی مطرح شده است تا بتواند شما را به حد اعلایی از آموزش برساند تا بتوانید به راحتی از پس حل سؤالات کنکوری هم برآیید.

◆◆◆

آن‌چه در طراحی پاسخ‌نامه‌ها بیشتر اهمیت داشته است، حل خلاقانه و بیان ساده مطالب بوده تا هر سؤال بتواند شما را ایده‌پرداز و خلاق پرورش دهد. قطعاً روش‌های مختلفی برای حل سؤالات وجود دارد که مطمئناً شما به آن‌ها خواهید رسید. امیدوارم ما را در جریان راه‌حل‌های پیشنهادی خود و یا اشتباهات احتمالی کتاب قرار دهید. همچنین ممکن است پیشنهاد یا انتقادی داشته باشید که بیان آن‌ها می‌تواند به هرچه بهتر شدن کتاب کمک کند و حتماً آن‌ها را در چاپ‌های بعدی لحاظ خواهیم کرد.

ارتباط با ما

هرگونه پیشنهاد و انتقاد و همچنین مشاوره درسی و سؤالات علمی خود را با مؤلفان این کتاب در میان بگذارید، برای این منظور می‌توانید همه روزه از ساعت ۱۶ تا ۱۸ با تلفن ثابت ۶۴۳۴۴۳۶۰-۰۲۱ تماس گرفته و یا با ارسال ایمیل به آدرس Acebook@gaj.ir با مؤلفین این کتاب ارتباط برقرار کنید.

فهرست مطالب

CONTENTS

Statistics and Probability فصل اول

۱ آمار و احتمال

ماجرا چیه؟!

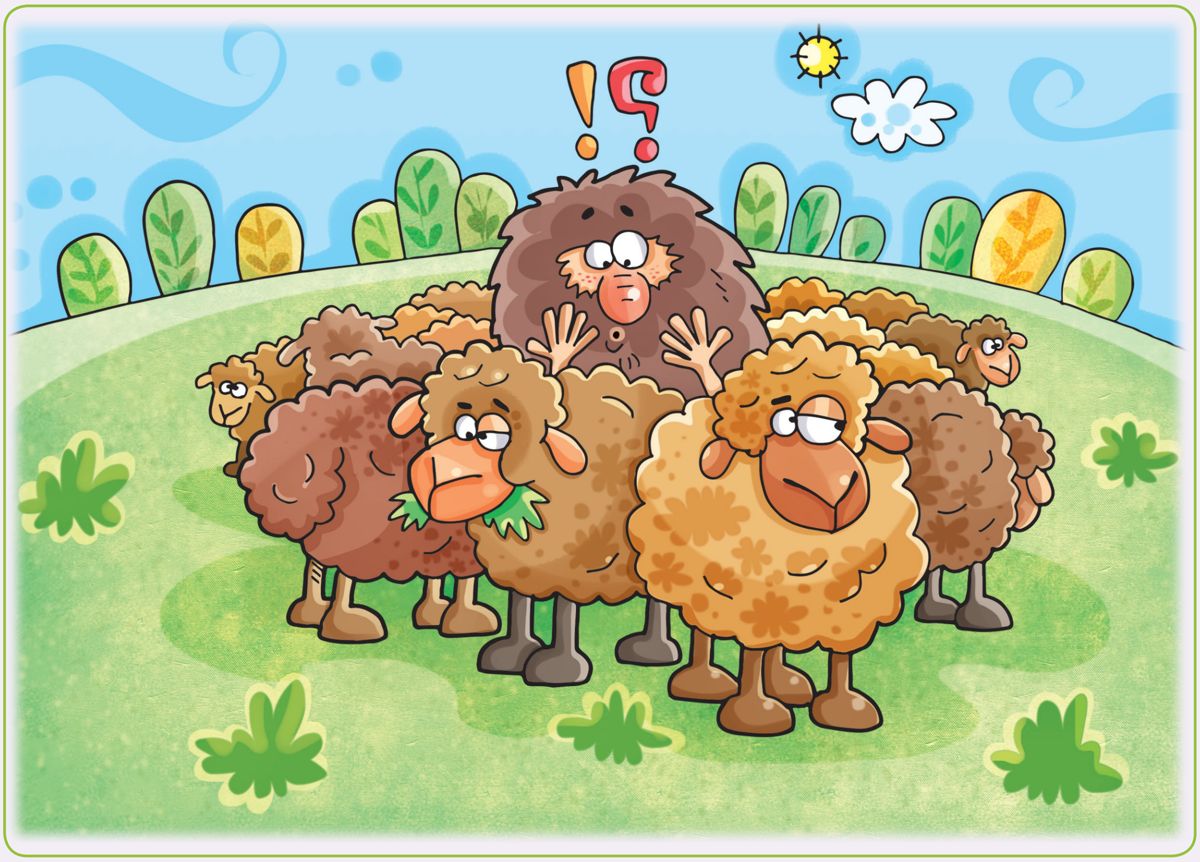
شاید بتوان گفت «شمارش» توسط بشر، ابتدا برای دانستن تعداد گوسفندانش بوده است که این کار بسیار خطیر را به شکل کاملاً ساده و ابتدایی، به کمک دستان خود انجام می‌داده. (البته گاهی اوقات انگشتان دست کم بوده و به ناچار انگشتان پا هم دخیل می‌شدند و وضعیتی بس ناجور پدید می‌آمد!) با پیشرفت روزافزون دانش، او هر روز بیشتر از روز قبل به «شمارش» نیاز پیدا کرد و روش سنتی (انگشت دست و پا!!) دیگر پاسخگوی نیازش نبود. بنابراین به مسئله جدیدی فکر کرد که «چگونه می‌توان بدون شمردن، شمرد؟» (چه جمله فلسفی سنگینی!) وی ابتدا مسائل را دسته‌بندی نمود و برای هر یک راه‌حلی ارائه داد، راه‌حل‌هایی که همگی به شیوه‌ای بدیع، طراحی و اجرا شده و بر هر یک نامی نهاد ... اصل جمع، اصل ضرب، جایگشت و ترکیب از جمله روش‌هایی است که به آن‌ها پی برده بود و تاکنون از آن‌ها بهره جسته است. یکی از زمینه‌هایی که اصول شمارش در آن کاربرد ویژه و وسیع پیدا کرده است، محاسبه احتمال وقوع پیشامدها است. تاریخچه دقیقی از زمان پیدایش احتمال به ذهنم نمی‌رسد ولی فکر کنم از ساخت اولین سکه تاکنون بشر می‌خواسته بداند می‌تواند حرکت سکه برای «پشت (خط)» یا «رو (شیر)» آمدن را پیش‌بینی کند یا خیر (استغفرالله، اصلاً فکر نکنین از اون بازیا در کار بوده!!) هم‌چنین مفهوم احتمال را برای کل جامعه مطرح کرد و برای به نتیجه رساندن سؤالات خود، به مسائلی از جمله جمع‌آوری داده، داده پرت، تحلیل داده‌ها و نتیجه‌گیری برخورد کرد (که در هر مرحله جد خود را به یاد آورده و به ایشان سلام و درود فراوان رسانده است.)

آنچه در این فصل به آن خواهیم پرداخت:

۱ بررسی اصول شمارش: ۱- اصل جمع ۲- اصل ضرب ۳- جایگشت ۴- ترتیب و ترکیب

۲ آشنایی با مفهوم احتمال و محاسبه احتمال با استفاده از روش‌های شمارش

۳ بررسی روش‌های دقیق مطالعه آماری (از جمع‌آوری داده گرفته تا تحلیل و نتیجه‌گیری).

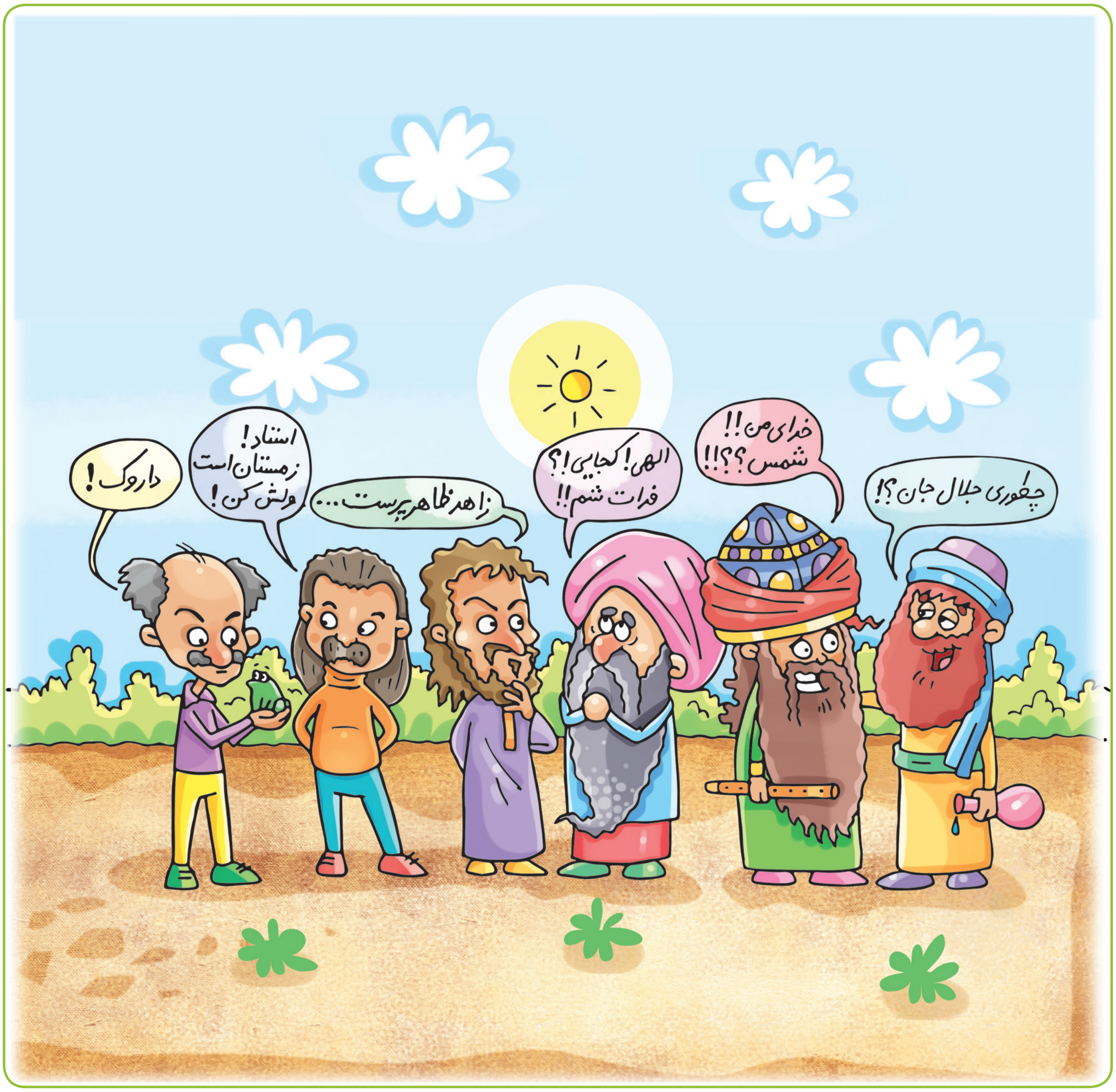


آس

۱

◆ فرض کنید جمع خوبان شعر و ادب فارسی جمع است و قرار است تنی چند از افتخارات ادب پارسی، کنار هم ایستاده، عکسی از خود به یادگار بگذارند. در این جمع، نیمایوشیج، خواجه عبدالله انصاری معروف به پیر هرات، مولانا جلال الدین بلخی، شمس تبریزی، جناب لسان الغیب و ماث (مهدی اخوان ثالث) حضور دارند. مولانا برای بودن و ماندن کنار شمس، دل دل می‌کند و جناب نیما هم می‌خواهد کنار ماث، از نحوه پدری کردنش برای شعر نو بگوید. بنابراین ادبا برای نحوه ایستادن، شرایطی ایجاد می‌کنند.

اگر سبک ایستادن آن‌ها کنار هم مانند شکل زیر باشد، احتمال اینکه حضرات کنار هم قرار بگیرند طوری که مولانا کنار شمس باشد و نیما هم فارغ از روزهای ابری، کنار ثالث نشیند چه‌قدر است؟



درس اول: شمارش

اصل جمع

فرض کنید در یک روز خوب و آفتابی به همراه خانواده خود به سفر رفته‌اید. مسیر بس طولانی و پرپیچ و خم است و شما به ناچار برای صرف وعده نهار متوقف می‌شوید. پس از بررسی‌های صورت گرفته توسط هِد فامیل (بزرگتر خانواده) متوجه دو رستوران می‌شوید. یکی رستوران قمرخانم با منوی غذاهای محلی «باقالی قاتوق»، «ترشی تره» و «مرغ ترش» و رستوران دیگر رستوران اصغر جوجه و برادران به جز برادر کوچیکه که در آن «جوجه کباب»، «چلوکباب»، «قیمه» و «قورمه سبزی» تهیه می‌شود.

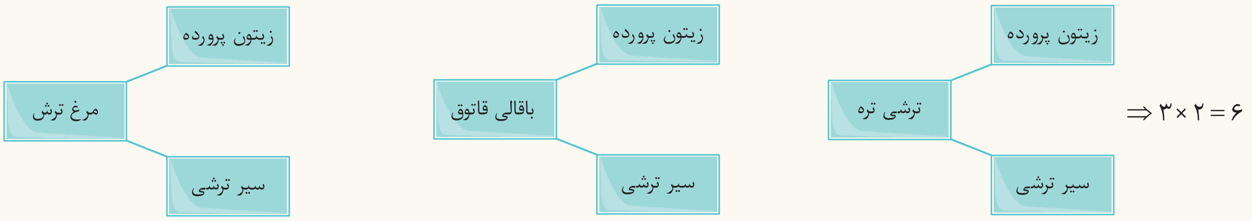
در واقع در رستوران قمرخانم ۳ نوع غذا و در رستوران اصغر جوجه و برادران (با تأکید بر به جز برادر کوچیکه) ۴ نوع غذا در منو وجود دارد. از آنجایی که شما انسان هستید و تنها می‌توانید در یک زمان، در یک مکان مشخص حضور داشته باشید و غذا سفارش دهید، به‌طور کلی ۷ = ۳ + ۴ نوع غذا را می‌توانید سفارش دهید.

در این مثال، با کمی دقت متوجه می‌شوید که «هم‌زمان» نمی‌توانید از هر دو رستوران غذایی سفارش دهید و انتخاب‌های شما به هم وابستگی ندارند. «یا» باید در رستوران اول باشید «یا» در رستوران دوم. تمام صحبت ما سر «زمان متفاوت انجام کارها» و وجود داشتن مفهوم «یا» در مسئله است. اگر این شرایط حاکم بودند، حالت‌ها را با هم جمع می‌کنیم. حال بیایید کمی مرتب و علمی و دقیق، اصل جمع را تعریف کنیم:

تعریف **اصل جمع**: اگر عملی را به m روش و عمل دیگری را به n روش انجام دهیم طوری که این دو کار هم‌زمان رخ ندهند در این صورت به $(m+n)$ روش می‌توان کار اول «یا» کار دوم را انجام داد.

اصل ضرب[1]

اینجا رستوران قمرخانم با منوی غذاهای محلی «باقالی قاتوق»، «ترشی تره» و «مرغ ترش» است. فرض کنید قمرخانم «زیتون پرورده» و «سیر ترشی» را هم کنار غذا فراهم کرده است. هر یک از غذاها را می‌توان با هر یک از موارد ذکر شده سفارش داد. مثلاً می‌توان «باقالی قاتوق» را با «زیتون پرورده» سفارش داد. البته «سیر ترشی» هم دلبری‌های خودش را دارد ... یعنی برای «باقالی قاتوق»، دو انتخاب وجود دارد. همین انتخاب‌ها برای «ترشی تره» و «مرغ ترش» هم وجود دارند. یعنی برای هر غذا دو انتخاب داریم.



در اصل ضرب داستان از این قرار است: کاری که انجام می‌دهیم در دو مرحله انجام می‌گیرد و برای هر مرحله هم روش‌های مختلفی پیش‌رو داریم. در این مثال می‌خواهیم از گرسنگی نجات پیدا کنیم (!)

در راستای این هدف عالی در مرحله اول غذایی را سفارش می‌دهیم که در منو ۳ گزینه وجود دارد و در مرحله بعد باید کنار غذا را سفارش دهیم که برای آن هم دو انتخاب پیش‌روی ماست بنابراین ۶ = ۲ × ۳ انتخاب داریم. باز هم اگر بخواهیم کمی علمی‌تر صحبت کنیم تعریف زیر را خواهیم داشت:

تعریف **اصل ضرب**: اگر عملی طی دو مرحله انجام پذیرد طوری که برای مرحله اول m روش و برای مرحله دوم n روش اجرا وجود داشته باشد، در این صورت به‌طور کلی آن کار به $m \times n$ روش انجام می‌پذیرد. به‌عبارت دیگر می‌توان $m \times n$ حق انتخاب داشت.

۱. نام دیگر اصل ضرب، اصل انتخاب است.

مثال‌های آموزشی

۱) در یک فرودگاه، برنامه پروازها به سمت مشهد مقدس به‌صورت زیر است:

از ۸ صبح تا ۱۲، سه پرواز، از ۱۳ تا ۱۷، چهار پرواز، از ۱۸ تا ۲۳، چهار پرواز و از ۲۴ تا ۶ صبح سه پرواز

اگر بخواهیم به سمت مشهد سفر کنیم، چند انتخاب پیش‌رو داریم؟

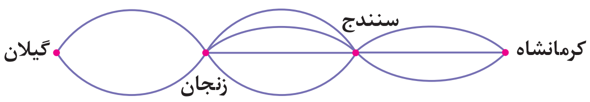
پاسخ اگر بخواهیم به سمت مشهد سفر کنیم «یا» باید در بازه زمانی ۸ تا ۱۲ حرکت کنیم که در این صورت ۳ انتخاب داریم؛ «یا» در بازه زمانی ۱۳ تا ۱۷ با ۴ انتخاب، «یا» در بازه زمانی ۱۸ تا ۲۳ با ۴ انتخاب و «یا» در بازه زمانی ۲۴ تا ۶ صبح که در این صورت ۳ انتخاب پیش‌روی ما خواهد بود. هم‌چنین نمی‌توان هیچ‌کدام از حالت‌ها را به‌طور همزمان انجام داد. تمامی شواهد حاکی از آن است که پای «اصل جمع» در میان است. پیش از این مثال، اصل جمع را برای دو حالت مطرح کردیم. می‌توان اصل جمع را برای تعداد حالت‌های بیشتر هم تعمیم داد. بنابراین در این مثال داریم:

$$۳+۴+۴+۳=۱۴$$

پس ۱۴ انتخاب وجود دارد. (البته اگر بلیط پیدا کردی واسه مشهد ☺)

> **نکته:** **تعمیم اصل جمع: اگر کاری را بتوان به k روش انجام داد به‌طوری‌که در روش اول m_1 انتخاب، در روش دوم m_2 انتخاب، ... و در روش kام، m_k انتخاب داشته باشیم (به‌طوری که هیچکدام از این کارها را نتوان به‌طور هم‌زمان انجام داد و در مفهوم مسئله برای هر کدام مفهوم «یا» تداعی شود) در این صورت برای کار مورد نظرمان $m_1 + ... + m_k$ روش وجود دارد.**

۲) یک کامیون حاوی بسته‌های هلال احمر برای کمک به زلزله‌زدگان کرمانشاه در گیلان آماده شده است. برای رسیدن این کامیون به کرمانشاه، باید از شهرهای زنجان و سنندج هم عبور کرد. اگر راه‌های موجود برای عبور از هر شهر طبق تصویر مقابل باشد، به چند طریق می‌توان از گیلان به کرمانشاه رفت؟



پاسخ به شکل داده شده دقت کنید:

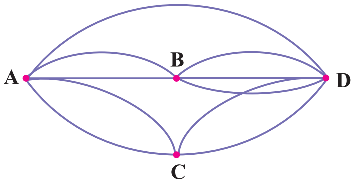
سفر ما از شهر گیلان به کرمانشاه طی سه مرحله انجام می‌شود. ابتدا باید از زنجان عبور کنیم که برای رسیدن به زنجان ۲ راه وجود دارد. سپس از زنجان به سنندج می‌رسیم که چهار راه برای انتخاب وجود دارد و در پایان از سنندج به کرمانشاه با سه راه در نظر گرفته شده، به سفر خود پایان می‌دهیم. با کمی دقت در **چند مرحله انجام شدن** سفر و وجود چند حالت در هر مرحله می‌توان حضور «اصل ضرب» را حس کرد. پیش از این اصل ضرب را برای دو حالت بررسی کرده بودیم. می‌توان این اصل را به حالت‌های بیشتر هم تعمیم داد.

۲۴ مسیر برای رسیدن از گیلان به کرمانشاه وجود دارد.

$$۲\times ۴\times ۳=۲۴$$

> **نکته:** **تعمیم اصل ضرب: اگر انجام کاری به k مرحله تفکیک شود به‌طوری که برای انجام مرحله اول m_1 روش، برای انجام مرحله دوم m_2 روش و ... و برای انجام مرحله kام، m_k روش وجود داشته باشد، در این صورت این کار به $m_1 \times m_2 \times ... \times m_k$ روش قابل اجرا است.**

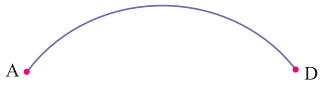
۳) می‌خواهیم از شهر A به شهر D سفر کنیم. به چند طریق می‌توانیم مسیر انتخاب کنیم؟



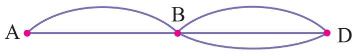
پاسخ برای رفتن از شهر A به شهر D، «یا» مستقیماً عمل می‌کنیم و مسیر AD را انتخاب می‌کنیم، «یا» از شهر B عبور کرده و به شهر D می‌رسیم و «یا» از شهر C می‌گذریم تا در نهایت به D برسیم.

پس سه روش پیش‌رو داریم. امّا در هر روش، شرایط و مسیرهای دیگری هم وجود دارند. هر کدام را جداگانه بررسی می‌کنیم.

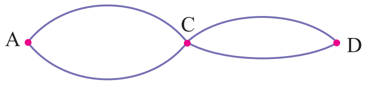
۱ مسیر



اصل ضرب: ۶ مسیر ⇐ ۶ = ۳ × ۲



اصل ضرب: ۴ مسیر ⇐ ۴ = ۲ × ۲



حال باتوجه به چراغ چشمک‌زن «یا» در طول مسئله، طبق اصل جمع داریم: ۱۱ = ۴ + ۶ + ۱

پس به‌طور کلی ۱۱ مسیر وجود دارد.

نکته: هنر استفاده از اصل جمع این است که مسئله را به حالت‌هایی تقسیم کنیم که هر حالت، طبق روش‌هایی که در اختیار داریم، قابل شمارش باشد. برای این منظور مسئله را به حالت‌هایی تقسیم می‌کنیم که اولاً این حالت‌ها با هم نقطه اشتراکی نداشته باشند و ثانیاً همه حالت‌های ممکن را پوشش دهند.

فاکتوریل

یادم میاد اول دبستان بودیم و معلم مهربان داشت ریاضی درس می‌داد. «علی سه سیب در یک ظرف و چهار سیب در ظرف دیگر دارد. علی چند سیب دارد؟» و بعد پای‌تخته نوشت: ۷ = ۴ + ۳ . اولین بار بود که علامت جمع‌رو دیدم قیافه‌اش برام یه کم جالب و عجیب بود. بزرگ‌تر شدیم و رفتیم کلاس سوم؛ این‌بار علی سه سیب داشت در سه ظرف مختلف. اول همه نوشتیم ۹ = ۳ + ۳ + ۳ تا اینکه معلم که نقش ناجی رو داشت وارد شد و گفت «یه علامت جدید داریم که به‌جای سه بار جمع کردن ۳ با خودش می‌تونیم ازش استفاده کنیم» شاید (+) فقط یه کم چرخیده بود و شده بود (×). ولی کلی با شخصیت‌تر شده بود و کلی کار عجیب برامون می‌کرد. این‌بار علی ۹ = ۳ × ۳ سیب داشت. اصلاً چی شد یاد خاطرات گذشته کردم؟! آها یادم افتاد ... یه نماد جدید دیدم که قراره کلی کارمونو راحت کنه.☺

هر عدد طبیعی رو که دوست دارید تصور کنید. حال این عدد را در همه اعداد قبلی‌اش ضرب کنید تا برسید به ۱. مثلاً برای ۵ داریم: ۵ × ۴ × ۳ × ۲ × ۱ نوشتن این حاصل ضرب شاید کمی طولانی به‌نظر برسد مخصوصاً اگر به‌جای ۵، ۵۰ یا حتی یک عدد بزرگ‌تر باشد. برای همین یک نماد جدید طراحی شده به‌نام «فاکتوریل»، ایشون از خوبای ریاضی هستند و علامت انحصاری هم دارند. آرم تجاری ایشون «!» می‌باشد. بنابراین:

۱ × ۲ × ۳ × ۴ × ۵ = !۵

البته ما دوست داریم یک تعریف دقیق و علمی برای اصول و نمادهایمان داشته باشیم. بنابراین سعی می‌کنیم فاکتوریل را هم به‌طور دقیق تعریف کنیم.

تعریف **فاکتوریل**: فرض کنید n یک عدد طبیعی باشد ({...,۱،۲،۳،۴} ∋ n) بنابراین: $n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$

قرارداد: درست است که ۰ یک عدد طبیعی نیست اما به‌طور کاملاً قراردادی داریم: ۱ = !۰

مثال‌های آموزشی

۱) کدام‌یک درست و کدام‌یک نادرست است؟

الف) $۸!$ ب) $(-۳)!$ ج) $\left(\frac{۳}{۲}\right)!$ د) $(\sqrt{۲})!$ هـ) $\left(\frac{۸}{۲}\right)!$ و) $\frac{۸!}{۱۳}$

پاسخ

الف) چون ۸ یک عدد طبیعی است پس $۸!$ درست است.

ب) -۳ یک عدد طبیعی نیست پس $(-۳)!$ بی‌معنی و نادرست است. (-۳ یک عدد صحیح است)

ج) $\frac{۳}{۲}$ یک عدد طبیعی نیست بلکه یک عدد گویا است. پس $\left(\frac{۳}{۲}\right)!$ نادرست است.

د) $\sqrt{۲}$ یک عدد گنگ است پس $\sqrt{۲}!$ بی‌معنی است.

هـ) توجه کنید $\left(\frac{۸}{۲}\right)!$ در واقع $۴!$ است. ۴ یک عدد طبیعی است. پس به‌طور کلی $\left(\frac{۸}{۲}\right)!$ معنی‌دار و درست است.

و) $\frac{۸!}{۱۳}$ معنی‌دار است. چون ۸ عددی طبیعی است پس $۸!$ تعریف می‌شود. لذا $\frac{۸!}{۱۳}$ عددی گویا و به‌صورت زیر است:

$$\frac{۸!}{۱۳}=\frac{۸\times۷\times\ldots\times۳\times۲\times۱}{۱۳}$$

۲) عبارت $۱۳!+۱۴!$ را به حاصل ضرب تبدیل کنید.

پاسخ برای تبدیل جمع به ضرب در این عبارت به شیوهٔ زیر عمل می‌کنیم:

$$۱۴!=۱۴\times\overbrace{۱۳\times\ldots\times۲\times۱}^{۱۳!}=۱۴\times۱۳!$$

$$۱۴!+۱۳!=۱۴\times۱۳!+۱۳!=۱۳!(۱۴+۱)=۱۵\times۱۳!$$

توجه کنید در این مثال، فاکتورگیری از عامل مشترک $۱۳!$ خیلی راحت ما را به جواب رساند.

۳) عبارت $\frac{۸!}{۵!}$ را ساده کنید.

پاسخ

$$\frac{۸!}{۵!}=\frac{۸\times۷\times۶\times\cancel{۵!}^{۱}}{\cancel{۵!}_{۱}}=۸\times۷\times۶=۳۳۶$$

توجه داشته باشید چه در صورت و چه در مخرج کسر، می‌توان $۵!$ را به شکل گسترده نوشت. امّا لزومی ندارد زیرا کاری بی‌فایده است و ما هم وقت و اعصاب نداریم!!

۴) عبارت $\frac{۱۲!+۱۰!}{۱۱!}$ را ساده کنید.

پاسخ ابتدا لازم است یادآوری کنم که اگر در صورت یا مخرج کسر، یا هر دو، دو یا چند عبارت داشته باشیم که با هم جمع شده‌اند نمی‌توانیم کسر را ساده کنیم. برای ساده کردن ابتدا باید با عملیات فاکتورگیری، اتحاد و یا هر روش شناخته شده یا شناخته نشده‌ای (!) عبارت‌های صورت و مخرج کسر را به حاصل‌ضرب تبدیل کرده و سپس ادامه مراحل را طی کنیم.

$$۱۲!+۱۰!=۱۲\times۱۱\times۱۰!+۱۰!=۱۰!(۱۲\times۱۱+۱)=۱۰!\times۱۳۳$$

$$\frac{۱۲!+۱۰!}{۱۱!}=\frac{\cancel{۱۰!}^{۱}\times۱۳۳}{۱۱\times\cancel{۱۰!}_{۱}}=\frac{۱۳۳}{۱۱}$$

۵) حاصل عبارت مقابل را به کمک نماد فاکتوریل به‌صورتی ساده بازنویسی کنید. $۲۵\times۲۴\times۲۳\times\ldots\times۸\times۷$

پاسخ اگر عبارت بالا را در $۶!$ ضرب و تقسیم کنیم، هیچ اتفاق عجیبی در نتیجه نهایی رخ نمی‌دهد و حاصل تغییر نمی‌کند. (می‌توانید امتحان کنید!!) امّا کمک بزرگی برای ساده‌نویسی می‌کند.

$$\frac{۲۵\times۲۴\times\cdots\times۸\times۷\times۶!}{۶!}=\frac{۲۵!}{۶!}$$

به این ترتیب به راحتی به نتیجه دلخواه می‌رسیم.

۶) آیا می‌توان به‌جای $\frac{a!}{b!}$ از عبارت $\left(\frac{a}{b}\right)!$ استفاده کرد؟

پاسخ هیچ‌گاه نمی‌توان از این تکنیک‌ها استفاده کرد مثال‌های بسیاری وجود دارند که نادرستی این کار را ثابت می‌کنند. مثلاً $\frac{5!}{3!}$ یک عبارت بامعنی است اما $\left(\frac{5}{3}\right)!$ وجود خارجی ندارد.

۷) حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $4!\times 3!$ ب) $(4^2)!$ ج) $4\times 3!$ د) $(4\times 3)!$ هـ) $(4!)^2$

پاسخ

الف) $4!\times 3! = 4\times 3\times 2\times 1\times 3\times 2\times 1 = 144$

ب) $(4^2)! = 16!$

ج) $4\times 3! = 4\times 3\times 2\times 1 = 24$

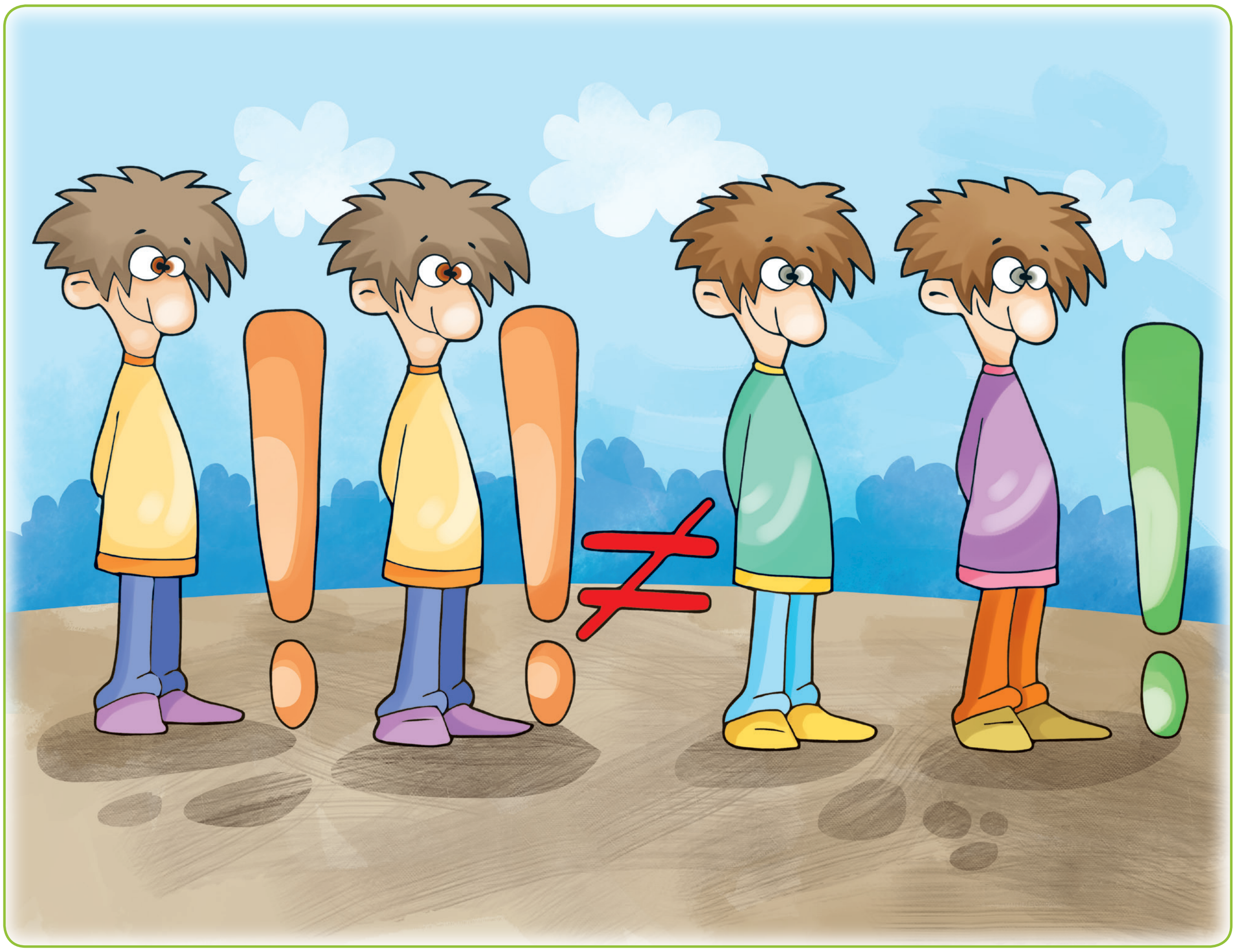
د) $(4\times 3)! = 12! = 12\times 11\times \ldots \times 2\times 1$

هـ) $(4!)^2 = (4\times 3\times 2\times 1)^2 = 24^2$

نکته: اگر m و n دو عدد طبیعی باشند:

۱) $(mn)! \neq m!n!$ ۲) $(m!)^2 \neq (m^2)!$ ۳) $m(n!) \neq (mn)!$

به عبارت دیگر در موارد فوق تساوی همیشه برقرار نیست.



جایگشت

فرض کنید می‌خواهیم رمز یک گاوصندوق را پیدا کنیم. (فکر بد نکنید. این مثال صرفاً جنبه آموزشی دارد!) این رمز یک کد چهار رقمی است که هر رقم آن می‌تواند یکی از ارقام صفر تا ۹ باشد. در دفترچه راهنمای این گاوصندوق آمده است صفر در هر جایگاه کد می‌تواند قرار گیرد. به‌نظر شما چند کد چهار رقمی را باید امتحان کنیم تا کد اصلی پیدا شود؟ در جواب به این سؤال باید گفت: اگر خوش‌شانس باشیم، با اولین کدی که امتحان می‌کنیم در گاوصندوق باز می‌شود. امّا ممکن است شانس با ما یار نباشد و مجبور باشیم همه کدها را یکی‌یکی امتحان کنیم. به‌نظر کار ساده‌ای می‌آید...! (بیایید حساب کنیم در کل چند کد می‌توان ساخت.) کد مورد قبول ما یک کد چهار رقمی است. پس در کل چهار جایگاه داریم:

از طرفی از صفر تا ۹، ۱۰ رقم وجود دارد. چون در دفترچه راهنما آمده است صفر می‌تواند در هر جایگاه قرار گیرد پس برای هر جایگاه ۱۰ انتخاب داریم. طبق اصل ضرب $10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^4$ کد می‌توان ساخت. (یا خود خدا! فرض کنید یکی‌یکی این کدها را امتحان می‌کردیم.) اگر وارد کردن کد، تأیید کردن و مشاهده خطا برای هر کد ۳۰ ثانیه طول بکشد، حساب کنید چند روز وقت شما را می‌گیرد تا همه کدها را امتحان کنید.☹

حال بیایید فرض کنیم داخل دفترچه راهنما گفته شده باشد کد چهار رقمی نباید ارقام تکراری داشته باشد. برای مثال کد ۵۵۰۱ قابل قبول نیست. به‌نظر شما چند کد با این شرایط می‌توان ساخت؟

چهار جایگاه و ۱۰ رقم داریم: ۱۰

برای جایگاه اول هر ۱۰ رقم می‌توانند قرار بگیرند. پس ۱۰ انتخاب داریم. کد نباید رقم تکراری داشته باشد. بنابراین برای یافتن سایر ارقام به‌صورت زیر عمل می‌کنیم: در جایگاه اول هر عددی از این ارقام انتخاب شده را می‌توانیم قرار دهیم، اگر آن را از چک لیستمان حذف کنیم در نهایت ۹ رقم باقی می‌ماند. بنابراین جایگاه دوم، ۹ انتخاب دارد به‌همین ترتیب جایگاه سوم، ۸ انتخاب و جایگاه چهارم، ۷ انتخاب پیش‌رو خواهند داشت. پس داریم:

$$\underline{10} \times \underline{9} \times \underline{8} \times \underline{7} = 5040$$

همانطور که در مثال‌ها مشاهده کردید، می‌خواهیم نوعی «چیدمان» برای اعداد بسازیم. البته تنها به «صف» کردن ارقام مدنظر ما نیست و صابون این کار به تن حروف، کلمات، اشخاص حقیقی و حقوقی و هر آنچه در جهان مادی وجود دارد هم می‌خورد! باز هم جای خالی یک تعریفِ دقیق حس می‌شود.

تعریف **جایگشت**: اگر n شی متمایز داشته باشیم، به هر حالت چیدن آن‌ها کنار هم، یک جایگشت از آن n شی می‌گوییم. در واقع دوست داریم به این سؤالات پاسخ دهیم که چگونه و به چند روش می‌توان n شی متمایز را در یک ردیف کنار هم قرار داد؟ به‌عبارت دیگر، چند جایگشت از n شی متمایز وجود دارد؟

مثال‌های آموزشی

۱) **با ارقام ۱، ۴ و ۷ چند عدد چهار رقمی زوج می‌توان ساخت؟**

پاسخ برای آنکه عدد زوج بسازیم باید یکان را از اعداد زوج انتخاب کنیم. در این مثال تنها عدد زوج ۴ است. پس برای جایگاه یکان تنها یک انتخاب داریم. ولی در سایر جایگاه‌ها، هر سه عدد می‌توانند انتخاب شوند. بنابراین داریم:

۳ × ۳ × ۳ × ۱ = ۲۷

۲) **با ارقام ۳، ۵ و ۹ چند عدد سه رقمی بدون تکرار می‌توان ساخت؟**

پاسخ عدد سه رقمی است پس سه جایگاه داریم. هر یک از این سه رقم را می‌توان در جایگاه اول قرار داد. برای جایگاه دوم باید کاری کنیم که رقم تکراری نداشته باشیم. بنابراین یک رقم را از لیست حذف می‌کنیم. (در واقع رقم حذف شده رقمی است که در جایگاه اول قرار گرفته است) و با دو رقم باقی‌مانده ادامه می‌دهیم! همین کار را برای جایگاه سوم هم تکرار می‌کنیم. پس داریم:

۳ × ۲ × ۱ = ۶

۳) **با ارقام ۳، ۵ و ۷ چند عدد می‌توان نوشت که حداکثر ۲ رقمی باشد؟**

پاسخ عددی که قرار است بسازیم حداکثر دو رقمی است. فیلسوفان عزیز ترجمه بفرمایید:☺

این جمله به این معنی است که عدد موردنظر «یا» دو رقمی است و «یا» یک رقمی! برای آنکه عدد یک رقمی باشد ۳ انتخاب داریم و برای آنکه عدد دو رقمی بسازیم، ۹ = ۳ × ۳ انتخاب داریم. از آنجایی که «اصل جمع» چشمک می‌زند، حداکثر ۱۲ = ۳ + ۹ عدد می‌توان ساخت.

۴) **در چند جایگشت از حروف کلمه «شهریار»، عبارت «یار» وجود دارد؟**

پاسخ قبل از شروع به حل، ابتدا تکلیف حالت‌هایمان را مشخص می‌کنیم. در این مثال گفته شده عبارت «یار» در چند جایگشت وجود دارد. اگر بخواهیم کمی این جمله را ترجمه کنیم، منظور این است که «یار» تماماً یک حالت در نظر گرفته شود و خود حروف «ی» و «الف» و «ر» نباید تغییری داشته باشند. پس تعداد حالت‌های موردنظر ما تماماً در مجموعه مقابل قرار دارد: {ش، ه، ر، یار}

باز هم با کمی دقت در متن سؤال در می‌یابیم که همه جایگشت‌ها را از ما می‌خواهد؛ بنابراین ۴ حالت داریم (با توجه به مجموعه‌ای که نوشتیم) پس در نهایت ۴ جایگاه خواهیم داشت. سپس جایگاه‌ها را مانند مثال‌های قبلی پر می‌کنیم.

۴ × ۳ × ۲ × ۱ = !۴

نکته: ۱) تعداد کل جایگشت‌های n تایی متمایز از n شی متمایز برابر است با $n!$.

۲) هر مثال یا مسئله دارای شرایط خاصی است که باید همهٔ شرایط را در نظر بگیریم. ممکن است برای یک جایگاه، حالت خاصی و یا برای هر یک از حالات شرایطی در نظر گرفته شده باشد. مثلا برای زوج بودن عدد، در جایگاه یکان و برای وجود داشتن کلمه «یار» در عبارات ساخته شده، شرایطی وجود دارد. در نظر داشته باشید ابتدا به سراغ شرایط جدید و خاص حالت‌ها و جایگاه‌ها می‌رویم و سپس بقیه جایگاه‌ها را پر می‌کنیم.

۵) **سه فیلسوف و چهار عارف به چند طریق کنار هم قرار گیرند به‌طوری که، هیچ دو فیلسوف و هیچ دو عارفی کنار هم نباشند؟**

پاسخ سه فیلسوف و چهار عارف داریم. پس به‌طور کلی هفت جایگاه وجود دارد. از طرفی نباید هیچ دو فیلسوف و هیچ دو عارفی کنار هم باشند پس باید به‌صورت یکی در میان کنار هم قرار بگیرند درنتیجه نحوه چیدمان آن‌ها به‌صورت زیر خواهد بود:

عارف فیلسوف عارف فیلسوف عارف فیلسوف عارف

دقت کنید اگر در جایگاه اول فیلسوف قرار بگیرد، در این صورت دو عارف کنار هم قرار می‌گیرند و شرط مسئله اجرا نمی‌شود.

از طرفی برای عارف جایگاه اول ۴ انتخاب، جایگاه سوم ۳ انتخاب، جایگاه پنجم ۲ انتخاب و جایگاه هفتم ۱ انتخاب وجود دارد (چون عارف نمی‌تواند در یک زمان در دو مکان باشد، پس از لیست حذف می‌شود، پس تعداد آن‌ها یکی‌یکی کم می‌شود ...)

برای فیلسوف هم، همین روند را داریم. حالا زیر هر جایگاه تعداد انتخاب‌های آن را قرار می‌دهیم.

عارف	فیلسوف	عارف	فیلسوف	عارف	فیلسوف	عارف
۱	۱	۲	۲	۳	۳	۴

بنابراین ۱ × ۱ × ۲ × ۲ × ۳ × ۳ × ۴ حالت داریم.

با کمی مرتب کردن حالت‌های فوق داریم:

۴ × ۳ × ۲ × ۱ × ۳ × ۲ × ۱ = !۴ × !۳

۶) یک ریاضیدان، یک فیلسوف، یک وکیل و یک پزشک در یک مهمانی حاضر شدند. از همان ابتدا بین ریاضیدان و فیلسوف بحث در گرفت. می‌خواهیم این چهار نفر را طوری کنار هم قرار دهیم که ریاضیدان و فیلسوف کنار هم قرار گیرند و به صحبت ادامه دهند. به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد؟

پاسخ می‌خواهیم ریاضیدان و فیلسوف کنار هم باشند. بنابراین برای آن‌ها یک جایگاه اختصاصی درست می‌کنیم و در مورد آن مجدد تصمیم‌گیری می‌کنیم. بنابراین سه جایگاه و سه حالت خواهیم داشت: {وکیل، پزشک، {فیلسوف و ریاضیدان}}.

تعداد جایگشت‌های موجود !۳ خواهد بود. امّا ما یک جایگاه اختصاصی برای ریاضیدان و فیلسوف هم داشتیم. اینکه فیلسوف سمت چپ باشد یا سمت راست، خودش !۲ حالت ایجاد می‌کند، بنابراین طبق اصل ضرب به‌طور کلی !۳×!۲ جایگشت وجود دارد.

۷) چند عدد سه رقمی غیرتکراری را بدون در نظر گرفتن صفر می‌توان نوشت؟

پاسخ عدد سه رقمی است پس سه جایگاه و ۹ حالت داریم. از طرفی تکرار مجاز نیست، بنابراین تعداد اعداد سه رقمی غیرتکراری بدون صفر برابر است با:

$$\underline{۷} \times \underline{۸} \times \underline{۹}$$

امّا بیایید کمی با جواب بازی کنیم:

$$۹ \times ۸ \times ۷ \times \frac{۶!}{۶!} = \frac{۹!}{۶!} = \frac{۹!}{(۹-۳)!}$$

به نظر شما جالب نیست؟ اگر تعداد حالت‌ها r و تعداد اشیا متمایز n باشد، تعداد جایگشت‌های rتایی از n شی متمایز دارای فرمول و شخصیت خواهد بود.

ترتیب، ترکیب

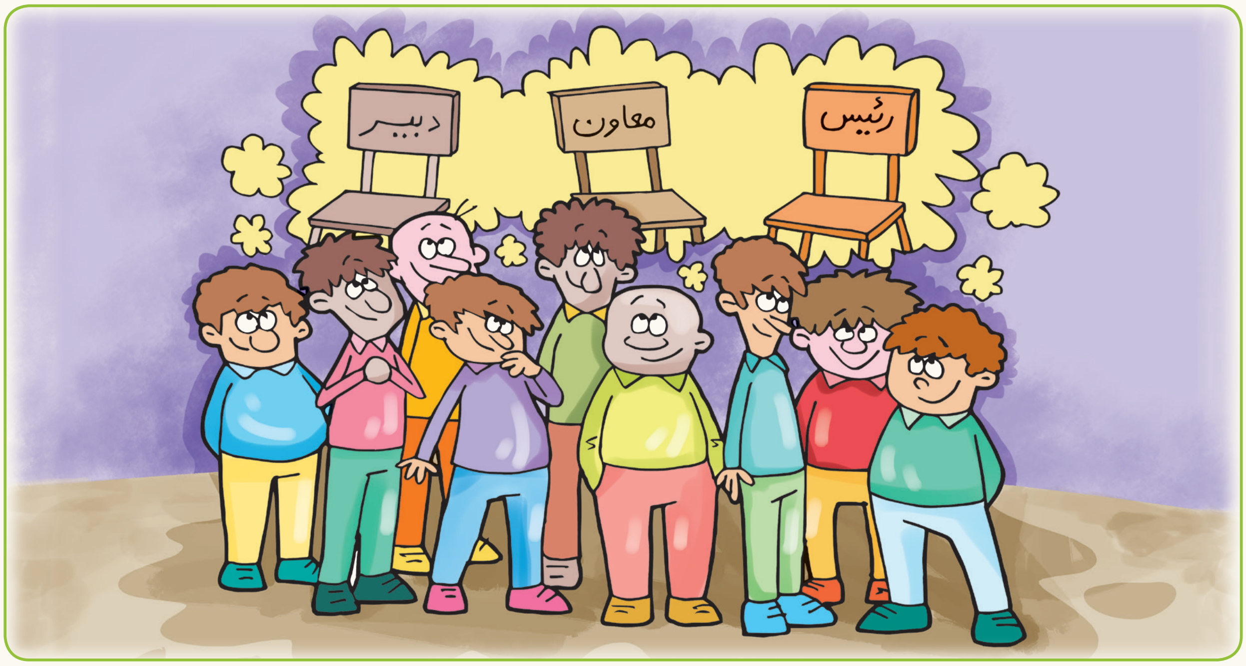
ترتیب

◆ تاکنون در مثال‌هایی که بررسی کردیم، دسته مشخصی از اشیا را به ما می‌دادند و از ما می‌خواستند آن‌ها را «بچینیم». در این مواقع از مفهوم «جایگشت» استفاده می‌کردیم. حال فرض کنید می‌خواهیم از بین تعدادی اشیاء مشخص، ابتدا تعدادی را انتخاب کرده و سپس کنار هم بچینیم. یعنی در این‌جا، «ترتیب» چیدمان برایمان اهمیت دارد.

فکر کنم بیان یک مثال، بهتر بتواند حق مطلب را ادا کند!

فرض کنید در انتخابات شورای دانش‌آموزی، ۹ نفر در یک مدرسه کاندیدا شده‌اند و قرار است ۳ نفر انتخاب شوند و به‌ترتیب در جایگاه رئیس، معاون و دبیر شورا قرار گیرند. برای اینکه بدانیم این‌کار به چند روش قابل انجام است، یک راه استفاده از روش قدیمی یعنی نوشتن جایگاه‌های رئیس، معاون و دبیر و مشخص کردن تعداد انتخاب‌های هر کدام است که به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\underbrace{\underline{۹}}_{\text{رئیس}} \times \underbrace{\underline{۸}}_{\text{معاون}} \times \underbrace{\underline{۷}}_{\text{دبیر}} = ۵۰۴$$



۵۰۴ روش برای انتخاب افراد موردنظر موجود است. حال یک روش جدید برای به‌دست آوردن نتیجه وجود دارد و آن $P(n,r)$ است. حتماً می‌پرسید: «این دیگه چه موجودیه!» در پاسخ به این سؤال باید بگوییم زمانی که بخواهیم یک دسته rتایی از n شی متمایز را انتخاب کنیم و کنار هم بچینیم به گونه‌ای که جایگاه افراد با هم متفاوت باشد از نماد $P(n,r)$ استفاده می‌کنیم، که به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}$$

حال می‌توانیم مثال مطرح شده را متمدنانه‌تر و به روزتر حل کنیم! ۳ نفر از ۹ نفر قرار است انتخاب شوند و آن‌ها را در سه جایگاه متفاوت کنار هم بچینیم. $r=۳$ و $n=۹$ خواهد بود. داریم:

$$P(۹,۳)=\frac{۹!}{۶!}=\frac{۹\times ۸\times ۷\times ۶!}{۶!}=۹\times ۸\times ۷=۵۰۴$$

از آنجایی که ما دوست داریم برای هر چیز یک تعریف علمی و دقیق ارائه کنیم، پس داریم:

تعریف **ترتیب**: عبارت است از تعداد انتخاب‌های r شی متمایز از n شی متمایز که جابه‌جایی و ترتیب در آن‌ها مهم است و آن را با نماد $P(n,r)$ نشان می‌دهیم و از فرمول زیر محاسبه می‌کنیم:

$$P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}$$

ترکیب

◆ در مثال‌های قبل «ترتیب قرارگیری اشیا»، «چیدمان اشیا» و «نحوه قرار گرفتن اشیا کنار هم» مهم بودند. مثل رمز گاوصندوق، قرارگیری اعضا کنار یکدیگر، ساخت اعداد و ... .

حال مسائلی را بررسی می‌کنیم که در آن‌ها ترتیب اهمیتی ندارد. بیایید با یک مثال شروع کنیم.

قرار است برای مدرسه، یک تیم پنج نفره المپیاد ادبی تشکیل دهیم. برای این‌کار از دانش‌آموزان توانمند و علاقه‌مند برای شرکت در این رویداد علمی مهم، خواسته شد، فرم معرفی خود را پر کنند. از میان فرم‌های پر شده، ۵ نفر از پایه یازدهم و ۴ نفر از پایه دهم واجد شرایط هستند (واجد شرایط المپیادم می‌دونین دیگه ... ادبیاتشون باید در حد لالیگا باشه...!) به‌نظر شما چند ترکیب پنج نفره از این اعضا می‌توانیم داشته باشیم؟

اگر کمی به عمق مسئله فکر کنیم، درمی‌یابیم که ترتیب انتخاب افراد، در کار انتخاب اثر ندارد. یعنی اگر قرار باشد شما هم جزء نفرات انتخابی باشید مهم نیست به‌عنوان نفر اول انتخاب شده‌اید یا به عنوان نفر دوم و ... بلکه صرفاً مهم است که شما المپیادی هستید (چه خفن!!) اگر مانند آنچه تاکنون محاسبه کردیم عمل کنیم و تعداد جایگشت‌ها را پیدا کنیم، تعداد حالت‌هایی که شما به‌عنوان فرد اول، فرد دوم، ... و فرد پنجم انتخاب شده‌اید را نیز حساب کردیم در صورتی که به آن نیاز نداشتیم، پس باید به نحوی این بخش‌های تکراری را حذف کنیم. برای ۵ نفر انتخاب شده، به‌طور کلی !۵ جایگشت داریم. از طرفی ۵ نفر در پایه یازدهم و ۴ نفر در پایه دهم واجد شرایط هستند، پس به‌طور کلی ۹ نفر واجد شرایطند.

$$\text{جایگشت‌های ۵تایی از ۹ نفر}=\frac{۹!}{(۹-۵)!}=\frac{۹!}{۴!}$$

$$\text{حذف تکراری‌ها}:\ \frac{\frac{۹!}{۴!}}{۵!}=\frac{۹!}{۴!\times ۵!}=\frac{۹\times \overset{۲}{\cancel{۸}}\times ۷\times \overset{\overset{۱}{\cancel{۳}}}{\cancel{۶}}\times \cancel{۵!}}{\cancel{۵!}\times \underset{۱}{\cancel{۴}}\times \underset{۱}{\cancel{۳}}\times \underset{۱}{\cancel{۲}}\times ۱}=۹\times ۷\times ۲=۱۲۶$$

به این ترتیب اعضای تکراری (جایگشت‌ها) را حذف کردیم. تمام بحث سر «بی‌اهمیت بودن ترتیب» است. اگر ترتیب برای انتخاب اشیا اهمیت نداشته باشد، با مفهوم جدیدی به‌نام «ترکیب» مواجه هستیم. طبق معمول به دنبال یک تعریف دقیق و علمی هستیم.

تعریف **ترکیب**: عبارت است از تعداد انتخاب‌های r شی متمایز از n شی متمایز که جابه‌جایی و ترتیب در آن‌ها اهمیت نداشته باشد.

آن را با نماد $C_r^n=\binom{n}{r}$ نمایش می‌دهیم و از فرمول زیر محاسبه می‌کنیم:

$$C_r^n=\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

مثال‌های آموزشی

۱) **تعداد زیرمجموعه‌های سه عضوی یک مجموعه ۴ عضوی چندتا است؟**

پاسخ با مطالعه صورت سؤال به کلید واژه‌ای برخورد می‌کنیم که تا حدودی مسیر ما را مشخص می‌کند و آن «زیرمجموعه سه عضوی از مجموعه چهار عضوی» است که شاید ما را به سمت حساب کردن جایگشت ۳ شی از ۴ شی منحرف کند. امّا سؤالی در ذهن ایجاد می‌شود که آیا $\{۱،۲\}$ و $\{۲،۱\}$ با هم تفاوت دارند؟ می‌دانیم جابه‌جایی اعضا در مجموعه‌ها، تفاوتی ایجاد نمی‌کند. بنابراین حساب کردن جایگشت، تمام حالت‌های مجموعه‌های برابر را هم حساب می‌کند. پس به سراغ ترکیب می‌رویم:

$$\binom{۴}{۳}=\frac{۴!}{۳!\,۱!}=\frac{۴!}{۳!}=\frac{۴\times\cancel{۳!}}{\cancel{۳!}}=۴$$

۲) **حاصل عبارت‌های زیر را حساب کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟**

$$\binom{n}{۰}\ ,\ \binom{n}{n}$$

پاسخ

$$\binom{n}{۰}=\frac{n!}{۰!(n-۰)!}=\frac{n!}{۱\times n!}=۱$$

$$\binom{n}{n}=\frac{n!}{n!(n-n)!}=\frac{\overset{۱}{\cancel{n!}}}{\underset{۱}{\cancel{n!}}\ \underset{۱}{\cancel{۰!}}}=۱$$

نکته: $\binom{n}{۰}=\binom{n}{n}=۱$

۳) **حاصل عبارت‌های زیر را حساب کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟**

$$\binom{n}{r}\ ,\ \binom{n}{n-r}$$

پاسخ

$$\binom{n}{n-r}=\frac{n!}{(n-r)!(n-(n-r))!}=\frac{n!}{(n-r)!\ r!}=\binom{n}{r}$$

نکته: $\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$

۴) **فرض کنید می‌خواهیم از میان ۵ مرد و ۳ زن، یک تیم داوری ۵ نفره متشکل از ۳ مرد و ۲ زن تشکیل دهیم. به چند طریق می‌توانیم این‌کار را انجام دهیم؟**

پاسخ باید از میان ۵ مرد، ۳ نفر را انتخاب کنیم و ترتیب انتخاب آن‌ها برای ما اهمیت ندارد پس $\binom{۵}{۳}=۱۰$ انتخاب داریم. از طرفی برای انتخاب زنان هم $\binom{۳}{۲}=۳$ انتخاب پیش روی ماست. پس به‌طور کلی $\binom{۵}{۳}\times\binom{۳}{۲}=۳\times۱۰=۳۰$ انتخاب خواهیم داشت.

یادداشت

کافه سؤال

۱ در یک دنباله حسابی، اختلاف مشترک $-\frac{1}{5}$ و جمله اول ۵ است. جمله عمومی و ۵ جمله اول دنباله را مشخص کنید. این دنباله کاهشی است یا افزایشی؟

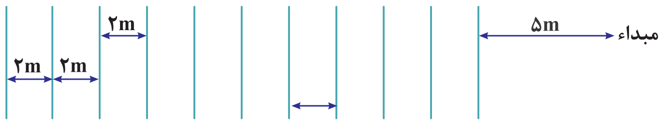
۲ جمله عمومی یک دنبالهٔ حسابی $a_n = 7n - 3$ است. اختلاف مشترک و جمله اول را به‌دست آورید.

۳ دنباله مقابل را در نظر بگیرید. جمله بیستم را مشخص کنید. $-\frac{1}{2}, \frac{-1}{4}, \dots$

۴ جمله چندم دنباله حسابی ...,۴۵۰,۴۴۰ برابر صفر است؟

۵ جملات یک دنبالهٔ حسابی به‌صورت $2x, 2x+2, 2x+4, \dots$ است. اگر جمله دهم برابر ۳۶ باشد، x را پیدا کنید.

۶ یک ورزشکار برای بالارفتن سطح آمادگی جسمانی خود باید هر بار به یک خط دست بزند و به مبدأ خود برگردد. اولین خط در مبدأ ۵ متر و هر خط با خط قبلی خود، ۲ متر فاصله دارند. در انتها اگر به‌طور کلی ۱۱ خط داشته باشیم، او چند متر پیموده است؟



۷ در یک دنبالهٔ حسابی داریم: $S_5 = 15S_6$. اگر اختلاف مشترک ۴ باشد، a_1 را پیدا کنید.

۸ مجموع ۳۰ جمله سوم دنبالهٔ حسابی با جمله اول ۲ و اختلاف مشترک ۵، چند است؟

۹ مجموع n جملهٔ اول دنباله ...,۲,۵,۸ برابر با ۴۹۵ است. n را پیدا کنید.

۱۰ مجموع ۲۰ جمله اول دنباله $-2, 2, 6, \dots$ چند برابر مجموع ۱۰ جمله اول آن است؟

گزینـهٔ چنـــد؟!!!!

۱- در یک دنباله هندسی، حاصل‌ضرب جمله پنجم و هشتم، جمله دوازدهم را می‌سازد. جمله اول چند است؟

- ۱) ۲
- ۲) ۳
- ۳) ۱
- ۴) اطلاعات مسئله کافی نیست.

۲- در یک دنباله هندسی بین سه جمله اول رابطه مقابل را داریم. a_1 چه‌قدر باشد تا جمله دهم و هفتم برابر شوند؟ $2a_2 - a_1 = a_3$

- ۱) ۳
- ۲) ۵
- ۳) ۱
- ۴) هر مقدار a_1

۳- در یک دنباله هندسی، جمله پنجم برابر با ۱۴۴ و جمله سوم ۱۶ است. جمله هشتم کدام است؟

- ۱) 16×3^5
- ۲) -16×3^5
- ۳) 16×3^6
- ۴) گزینه‌های ۱ و ۲

۴- مقدار x چه‌قدر باشد تا $4, x, 36$ تشکیل یک دنباله هندسی افزایشی دهد؟

- ۱) -12
- ۲) ۱۲
- ۳) ۱۶
- ۴) گزینه‌های ۱ و ۲

۵- جمله چندم دنباله هندسی $12, 8, \frac{16}{3}, \cdots$ برابر $\frac{64}{27}$ است؟

- ۱) پنجم
- ۲) ششم
- ۳) چهارم
- ۴) سوم

۶- در یک دنباله هندسی، $S_n = 4(9^{\frac{n}{2}} - 1)$ جمله n ام کدام است؟

- ۱) 4×3^n
- ۲) $8 \times 3^{n-1}$
- ۳) $4 \times 3^{n-1}$
- ۴) 8×3^n

۷- در یک دنباله هندسی داریم: $2a_2a_5 = 6a_6$ مقدار جمله اول را به‌دست آورید.

- ۱) ۵
- ۲) ۲
- ۳) ۳
- ۴) ۴

۸- مجموع چند جمله از دنباله هندسی $9, -18, 36, \cdots$ برابر با ۳۸۷ است؟

- ۱) ۶ جمله
- ۲) ۷ جمله
- ۳) ۸ جمله
- ۴) ۹ جمله

۹- در یک دنباله هندسی، $a_n = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$. مجموع ۱۰ جمله اول کدام است؟

- ۱) $\left(\frac{1}{2}\right)^9 - 4$
- ۲) $4 - \left(\frac{1}{2}\right)^8$
- ۳) $2\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{10} - 1\right)$
- ۴) $2\left(\left(\frac{1}{2}\right)^9 - 1\right)$

۱۰- علی و محمد با هم قرار گذاشتند محمد روز اول ماه ۱۰ هزار تومان، روز دوم ۲۰ هزار تومان، روز سوم ۳۰ هزار تومان و به همین ترتیب تا پایان ماه به علی پول بدهد و علی روز اول ۱۰ هزار تومان، روز دوم ۲۰ هزار تومان، روز سوم ۴۰ هزار تومان و با همین روند تا پایان ماه به محمد پول بدهد. در این معامله کدام‌یک سود کرده‌اند؟

- ۱) علی
- ۲) محمد
- ۳) هر کدام به یک اندازه سود کرده‌اند.
- ۴) اطلاعات مسئله کافی نیست.

درس ۲ پاسخنامهٔ تشریحی کافه سؤال

۱

با کمی دقت متوجه می‌شویم دنباله داده شده، یک دنباله هندسی است. ابتدا تکلیف نسبت مشترک را مشخص می‌کنیم:

$$\begin{cases} r = \frac{۱۲}{-۶} = -۲ \\ a_۱ = ۳ \end{cases} \Rightarrow a_n = a_۱ r^{n-۱} = ۳ \times (-۲)^{n-۱}$$

$a_۹ = a_۱ \times r^۸ = ۳ \times (-۲)^۸ = ۳ \times ۲^۸$ مثبت است

$a_{۱۰} = a_۱ \times r^۹ = ۳ \times (-۲)^۹ = -۳ \times ۲^۹$ منفی است

$a_{۱۱} = a_۱ \times r^{۱۰} = ۳ \times (-۲)^{۱۰} = ۳ \times ۲^{۱۰}$ مثبت است

همان‌طور که ملاحظه می‌شود، $a_۹$ و $a_{۱۱}$ اعدادی مثبت و $a_{۱۰}$ عددی منفی است. بنابراین نه می‌توان گفت دنباله کاهشی و نه می‌توان گفت دنباله افزایشی است. این دنباله یک دنباله هندسی متناوب است.

۲

$$a_۱ = \frac{۱}{۸} a_۴ \Rightarrow a_۱ = \frac{۱}{۸} \times a_۱ \times r^۳ \Rightarrow \frac{۱}{۸} \times r^۳ = ۱ \Rightarrow r^۳ = ۸ \Rightarrow r = ۲$$

$$\frac{a_{۱۰}}{a_۸} = \frac{\cancel{a_۱} \times r^۹}{\cancel{a_۱} \times r^۷} = r^۲ = ۴ \Rightarrow a_{۱۰} = ۴a_۸$$

جمله دهم چهار برابر جمله هشتم است.

۳

ابتدا تکلیف نسبت مشترک را مشخص می‌کنیم:

$$a_۴ = ۱۶a_۲ \Rightarrow \cancel{a_۱} r^{\overset{۲}{\cancel{۳}}} = ۱۶\cancel{a_۱}\cancel{r} \Rightarrow r^۲ = ۱۶ \Rightarrow r = \pm ۴$$

با حل معادله درجه دوم و ریشه‌گیری، دو مقدار ۴ و ۴- به‌دست آمد. از طرفی $a_۱$ عددی منفی است $(a_۱ = -۲)$ پس اگر $r > ۱$، دنباله کاهشی خواهد بود. در نتیجه $r = ۴$ جواب خواهد بود.

۴

ابتدا چند جمله از این دنباله بازگشتی را می‌نویسیم:

$t_۱ = ۵$

$t_۲ = ۳ \times ۵ = ۱۵$

$t_۳ = ۳ \times ۱۵ = ۳^۲ \times ۵$

$t_۴ = ۳ \times ۳^۲ \times ۵ = ۳^۳ \times ۵$

$\vdots$

با ادامه این روند، متوجه می‌شویم دنبالهٔ داده شده دنبالهٔ هندسی است پس جملهٔ عمومی آن به‌صورت زیر است:

$t_n = ۵ \times ۳^{n-۱}$

۵

در این دنباله، $a_۳ = \frac{۱}{۸}$ و $a_۴ = \frac{۱}{۱۶}$ در نتیجه داریم:

$$\frac{a_۴}{a_۳} = \frac{\cancel{a_۱} r^{\cancel{۳}}}{\cancel{a_۱} r^{\cancel{۲}}} \Rightarrow \frac{\frac{۱}{۱۶}}{\frac{۱}{۸}} = r \Rightarrow r = \frac{۱}{۲}$$

چون تمام جملات مشخص شده اولاً متوالی، ثانیاً مثبت هستند، پس $a_۱ > ۰$. از طرفی $۰ < r < ۱$ پس این دنباله، یک دنباله کاهشی است. بنابراین a بزرگ‌ترین جمله این دنباله خواهد بود. پس جمله اول $(a_۱)$ را حساب می‌کنیم:

$$a_۳ = a_۱ r^۲ = \frac{۱}{۸} \Rightarrow a_۱ \times \left(\frac{۱}{۲}\right)^۲ = \frac{۱}{۸} \Rightarrow a_۱ = \frac{\frac{۱}{۸}}{\frac{۱}{۴}} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow a = \frac{۱}{۲}$$

درس ۲ پاسخ‌نامهٔ تشریحی کافه سؤال

۱

الف) فرجه هر دو عبارت یکسان است، پس می‌توانیم عبارت‌های زیر را درهم ضرب کنیم:

$$\sqrt[۴]{۷-۴\sqrt{۳}}\times\sqrt[۴]{۷+۴\sqrt{۳}}=\sqrt[۴]{(۷-۴\sqrt{۳})(۷+۴\sqrt{۳})}=\sqrt[۴]{۴۹-(۴\sqrt{۳})^{۲}}=\sqrt[۴]{۴۹-(۱۶\times ۳)}=\sqrt[۴]{۴۹-۴۸}=۱$$

البته توجه به این نکته بسیار اهمیت دارد که $\sqrt[۴]{۷-۴\sqrt{۳}}$ و $\sqrt[۴]{۷+۴\sqrt{۳}}$ هر دو قابل تعریف هستند.

ب) برای حل این سؤال تنها به این نکته توجه می‌کنیم که $\sqrt{۳}=۳^{\frac{۱}{۲}}$، بنابراین داریم:

$$(\sqrt{۳\sqrt{۳\sqrt{۳}}})^{۸}=((۳\sqrt{۳\sqrt{۳}})^{\frac{۱}{۲}})^{۸}=(۳\sqrt{۳\sqrt{۳}})^{\frac{۸}{۲}}=۳^{۴}\times(\sqrt{۳\sqrt{۳}})^{۴}$$

$$=۳^{۴}\times\left((۳\sqrt{۳})^{\frac{۱}{۲}}\right)^{۴}=۳^{۴}\times(۳\sqrt{۳})^{\frac{۴}{۲}}=۳^{۴}\times ۳^{۲}\times(\sqrt{۳})^{۲}=۳^{۴}\times ۳^{۲}\times ۳=۳^{۷}$$

۲

الف) به این نکته توجه داریم که $۰<a<۱$ در این صورت $a^{۴}>a^{۵}$. اگر از دو طرف نامساوی جذر با فرجه ۳ بگیریم، جهت نامساوی تغییر نمی‌کند، پس $a^{\frac{۴}{۳}}>a^{\frac{۵}{۳}}$

ب) چون $۰<a<۱$، از $\sqrt[۴]{a}$ و $\sqrt[۵]{a}$، هر کدام فرجه کمتری دارد، بزرگ‌تر است پس $\sqrt[۵]{a}<\sqrt[۴]{a}$

۳

الف) توجه داریم هر دو رادیکال که در صورت و مخرج قرار دارند، فرجه یکسان دارند. پس می‌توان هردو را زیر رادیکال، بر هم تقسیم کرد و چون فرجه زوج است، داشتن قدرمطلق از نان شب هم واجب‌تر است.

$$\frac{\sqrt[۴]{x^{۵}y^{۵}}}{\sqrt[۴]{xy}}=\sqrt[۴]{\frac{x^{۵}y^{۵}}{xy}}=\sqrt[۴]{x^{۴}y^{۴}}=|xy|$$

ب) همانطور که ملاحظه می‌شود فرجه رادیکال‌ها یکسان نیست اما این دلیل خوبی برای کنار کشیدن ما از حل سؤال نیست! سعی می‌کنیم عبارات را با توان‌های گویا بنویسیم:

$$\sqrt[۳]{۲\sqrt{۲}}\times\sqrt[۶]{۶+۴\sqrt{۲}}=(۲\sqrt{۲})^{\frac{۱}{۳}}\times(۶+۴\sqrt{۲})^{\frac{۱}{۶}}\underline{\underline{\frac{۱}{۳}=\frac{۲}{۶}}}(۲\sqrt{۲})^{\frac{۲}{۶}}\times(۶+۴\sqrt{۲})^{\frac{۱}{۶}}$$

$$=\left((۲\sqrt{۲})^{۲}\right)^{\frac{۱}{۶}}\times(۶+۴\sqrt{۲})^{\frac{۱}{۶}}=۸^{\frac{۱}{۶}}\times(۶+۴\sqrt{۲})^{\frac{۱}{۶}}=(۴۸+۳۲\sqrt{۲})^{\frac{۱}{۶}}$$

به نظر می‌رسد از این ساده‌تر نمی‌شود!

۴

الف) هر دو عبارت زیر رادیکال، می‌توانند از رادیکال خارج شوند. امّا چون فرجه زوج است، به میدان مین قدرمطلق می رسیم!

$$\sqrt[۴]{(c-۱)^{۴}}-\sqrt[۴]{(۱+c)^{۴}}=|c-۱|-|۱+c|$$

از طرفی در مسئله گفته شده $c\ge ۱$. در چنین شرایطی $c-۱\ge ۱-۱=۰$، پس $c-۱\ge ۰$. واضح است که $۱+c\ge ۲$ خواهد بود بنابراین در هر صورت مثبت است و عبارت‌ها، قدرمطلق را با علامت مثبت ترک می‌کنند!

$$|c-۱|-|۱+c|=c-۱-(۱+c)=c-۱-۱-c=-۲$$

ب) از داخلی‌ترین عبارت زیر رادیکال‌ها شروع می‌کنیم یعنی $\sqrt{x^{۲}}$ و $\sqrt{\frac{۱}{x^{۲}}}$. حاصل این عبارت به ترتیب $|x|$ و $\left|\frac{۱}{x}\right|$ است و چون $x\le ۰$، پس:

$$\left|\frac{۱}{x}\right|=\frac{-۱}{x},|x|=-x$$

$$x\sqrt[۳]{\frac{۱}{x}\sqrt{\frac{۱}{x^{۲}}}}+\frac{۱}{x}\sqrt[۳]{x\sqrt{x^{۲}}}=x\sqrt[۳]{\frac{۱}{x}\times\frac{-۱}{x}}+\frac{۱}{x}\sqrt[۳]{x(-x)}$$

سعی می‌کنیم x و $\frac{۱}{x}$ را هم داخل رادیکال ببریم. می‌دانیم $\sqrt[۳]{x^{۳}}=x$ و $\sqrt[۳]{\left(\frac{۱}{x}\right)^{۳}}=\frac{۱}{x}$، پس:

$$x\sqrt[۳]{\frac{-۱}{x^{۲}}}+\frac{۱}{x}\sqrt[۳]{-x^{۲}}=\sqrt[۳]{\frac{-x^{۳}}{x^{۲}}}+\sqrt[۳]{\frac{-x^{۲}}{x^{۳}}}=\sqrt[۳]{-x}+\sqrt[۳]{\frac{-۱}{x}}$$

۵

در مورد تساوی $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$، باید بگوییم اگر $\sqrt[m]{a}$ و $\sqrt[n]{a}$ هر دو قابل تعریف باشند، رخ می‌دهد. در این صورت طبق نکاتی که در طول درس با آن آشنا شدیم، داریم:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}=\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}\Rightarrow\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$$

۶

می‌خواهیم n را به‌دست آوریم. بنابراین در دو طرف تساوی باید پایه‌های یکسان داشته باشیم اما میان آنها تفاوت از زمین تا آسمان است! شواهد حاکی از آن است که باید از تمام نکات گفته شده استفاده کنیم.

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{3}=3^{-1}\Rightarrow\left(\frac{1}{3}\right)^{3n-4}=3^{-(3n-4)}=3^{4-3n}\\ 9\times 81^{2n}=3^{2}\times(3^{4})^{2n}=3^{2}\times 3^{8n}=3^{8n+2}\end{array}\right\}\Rightarrow 3^{4-3n}=3^{8n+2}$$

$$\Rightarrow 4-3n=8n+2\Rightarrow 4-2=3n+8n\Rightarrow 2=11n\Rightarrow n=\frac{2}{11}$$

۷

مشابه سؤال قبل، همهٔ پایه‌ها را یکسان می‌کنیم!

$$\left.\begin{array}{l}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2^{2}}\right)^{n-1}=(2^{2})^{1-n}=2^{2-2n}\\ \sqrt[3]{\frac{1}{16}}=\sqrt[3]{\frac{1}{2^{4}}}=\sqrt[3]{2^{-4}}=2^{\frac{-4}{3}}\\ 8=2^{3}\end{array}\right\}\Rightarrow 2^{2-2n}\times 2^{\frac{-4}{3}}\geq 2^{3}\Rightarrow 2^{\frac{2}{3}-2n}\geq 2^{3}$$

تا اینجای کار داریم: $2^{\frac{2}{3}-2n}\geq 2^{3}$ سؤالی که پیش می‌آید این است که چه زمانی طرف چپ، از طرف راست نامساوی بیشتر می‌شود. چون پایه‌ها همگی یکسان و بیشتر از ۱ هستند $(a\geq 1)$ پس زمانی که توان بیشتر باشد، مقدار عبارتش هم بیشتر می‌شود:

$$2^{\frac{2}{3}-2n}\geq 2^{3}\Rightarrow \frac{2}{3}-2n\geq 3\Rightarrow \frac{2}{3}-3\geq 2n\Rightarrow -\frac{7}{3}\geq 2n\Rightarrow \frac{\frac{-7}{3}}{\frac{2}{1}}\geq n\Rightarrow \frac{-7}{6}\geq n$$

۸

می‌دانیم مجموع زوایای داخلی یک مثلث 180° است، پس:

$$3x^{5}-50+2x^{5}-130+40-4x^{5}=180\Rightarrow 3x^{5}+2x^{5}-4x^{5}=180+130+50-40$$

$$\Rightarrow x^{5}=320\Rightarrow x=\sqrt[5]{320}=\sqrt[5]{2^{5}\times 10}=2\sqrt[5]{10}$$

۹

روش اول: برای گویا کردن کسر باید کاری کنیم مخرج کسر، رادیکالی نباشد، بنابراین داریم:

$$\sqrt[6]{9^{2}}=(3^{2})^{\frac{2}{6}}=3^{\frac{4}{6}}=3^{\frac{2}{3}}$$

به نظر شما $3^{\frac{2}{3}}$ در چه عددی ضرب شود تا توان کسری خود را از دست بدهد؟

$$3^{\frac{2}{3}}\times 3^{x}=3^{1}\Rightarrow 3^{\frac{2}{3}+x}=3^{1}\Rightarrow \frac{2}{3}+x=1\Rightarrow x=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

پس صورت و مخرج کسر را در $3^{\frac{1}{3}}$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{4\sqrt{3}\times 3^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{2}{3}}\times 3^{\frac{1}{3}}}=\frac{4\times 3^{\frac{1}{2}}\times 3^{\frac{1}{3}}}{3}=\frac{4\times 3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}}{3}=\frac{4\times 3^{\frac{5}{6}}}{3}=\frac{4\times\sqrt[6]{3^{5}}}{3}$$

روش دوم:

$$\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt[6]{9^{2}}}=\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt[6]{(3^{2})^{2}}}=\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt[6]{3^{4}}}\times\frac{\sqrt[6]{3^{2}}}{\sqrt[6]{3^{2}}}=\frac{4\sqrt{3}\times\sqrt[6]{3^{2}}}{\sqrt[6]{3^{6}}}=\frac{4\times 3^{\frac{1}{2}}\times 3^{\frac{2}{6}}}{3}=\frac{4\times 3^{\frac{1}{2}}\times 3^{\frac{1}{3}}}{3}=\frac{4\times 3^{\frac{5}{6}}}{3}=\frac{4}{3}\sqrt[6]{3^{5}}$$

۱۰

با یک ترفند ساده، می‌توان این سؤال را به راحتی حل کرد می‌دانیم $x^{12}=(x^{6})^{2}$. بیایید به جای x^{6}، مقدار دیگری مثل y قرار دهیم: یعنی $y=x^{6}$، بنابراین:

$$\begin{cases}x^{12}=y^{2}\\ x^{6}=y\end{cases}$$

$$x^{12}-2x^{6}+1=y^{2}-2y+1=0$$

به نظر شما جالب نیست؟! به اتحاد مربع دو جمله‌ای تبدیل شد.

$$y^{2}-2y+1=(y-1)^{2}=0\Rightarrow y-1=0\Rightarrow y=1$$

از طرفی $y=x^{6}$ پس:

$$x^{6}=1\Rightarrow |x|=1\Rightarrow x=\pm 1$$

ایستگاه کنکور

۱. از تساوی $\left(\frac{8}{3}\right)^{-2}\times 36^{3}=9^{x+4}$ مقدار x کدام است؟ **سراسری انسانی ـ ۹۰**

۱) صفر ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{3}{2}$

پاسخ

ابتدا سعی می‌کنیم پایه‌ها را یکی کنیم:

$$9^{x+4}=36^{3}\times\left(\frac{8}{3}\right)^{-2}\Rightarrow (3^{2})^{x+4}=(6^{2})^{3}\times\left(\frac{3}{2^{3}}\right)^{2}\Rightarrow$$

$$3^{2x+8}=3^{6}\times\cancel{2^{6}}\times\frac{3^{2}}{\cancel{2^{6}}}\Rightarrow 3^{2x+8}=3^{8}$$

پایه‌ها برابر است پس برای برقراری تساوی، توان‌ها باید برابر باشند. داریم:

$$2x+8=8\Rightarrow 2x=0\Rightarrow x=0$$

پس گزینهٔ (۱) درست است.

۲. اگر با نرخ بهره ۲۴ درصد در سال، پایان هر ماه سود را به سرمایه اضافه کنند پس از ۵ سال سرمایه چند برابر می‌شود؟ **سراسری انسانی ۹۳ ـ با کمی تغییر**

۱) $(1/02)^{5}$ ۲) $(1/24)^{5}$ ۳) $(1/02)^{60}$ ۴) $(1/24)^{60}$

پاسخ

ابتدا توجه کنید نرخ سود سالیانه است و از ما میزان سود در هر ماه را می‌خواهند. پس:

$$r=\frac{0/24}{12}=0/02$$

هم‌چنین این مقدار سود را در زمان ۵ سال محاسبه می‌کنیم. پس:

$$t=5\times 12=60$$

$$f(t)=c(1+r)^{t}\Rightarrow f(t)=c(1+0/02)^{60}\Rightarrow \frac{f(t)}{c}=(1/02)^{60}$$

پس گزینهٔ (۳) درست است.

۳. کربن یک استخوان فسیل شده ۳۵ درصد مقدار معمولی c^{14} دارد. زمان نیم عمر ۵۷۰۰ سال و عدد $\frac{20}{7}$ معادل $2\sqrt{2}$ فرض می‌شود. قدمت این استخوان کدام است؟ **انسانی خارج از کشور ـ ۹۰**

۱) ۷۸۵۰ ۲) ۷۹۵۰ ۳) ۸۴۵۰ ۴) ۸۵۵۰

پاسخ

کربن این استخوان ۳۵ درصد مقدار معمولی را دارد. پس:

$$f(t)=c\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\Rightarrow \frac{35}{100}c=c\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\Rightarrow \frac{7}{20}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\Rightarrow\left(\frac{20}{7}\right)^{-1}=(2)^{-n}$$

$$\Rightarrow\frac{20}{7}=2^{n}\xRightarrow{\frac{20}{7}\approx 2\sqrt{2}}2\sqrt{2}=2^{n}\Rightarrow 2^{\frac{3}{2}}=2^{n}\Rightarrow n=\frac{3}{2}$$

تعداد دوره‌های سپری شده $\frac{3}{2}$ است که هر ۵۷۰۰ سال، نیمی از ماده از بین می‌رود. پس:

$$\text{قدمت استخوان}=5700\times\frac{3}{2}=8550$$

پس گزینهٔ (٤) درست است.

۴. از تساوی $(0/5)^{x}=4\times 2^{x+1}$ مقدار x کدام است؟ **سراسری انسانی ـ ۹۶**

۱) $-\frac{3}{4}$ ۲) $-\frac{5}{4}$ ۳) $-\frac{3}{2}$ ۴) $-\frac{5}{2}$

پاسخ

ابتدا سعی می‌کنیم پایه‌های دو طرف تساوی را یکی کنیم:

$$4\times 2^{x+1}=(0/5)^{x}\Rightarrow 2^{2}\times 2^{x+1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}\Rightarrow 2^{x+3}=2^{-x}\Rightarrow x+3=-x\Rightarrow 2x=-3\Rightarrow x=-\frac{3}{2}$$

پس گزینهٔ (۳) درست است.

ایستگاه کنکور

انسانی خارج از کشور ـ ۹۶

۵. از تساوی $(0/75)^3 \times 16^{x+1} = 216$ مقدار x کدام است؟

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) $\frac{4}{5}$ ۳) $\frac{5}{4}$ ۴) $\frac{4}{3}$

پاسخ

باز هم ابتدا به سراغ پایه‌ها می‌رویم:

$$\left(\frac{75}{100}\right)^3 \times 16^{x+1} = 216 \Rightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^3 \times 16^{x+1} = 2^3 \times 3^3 \Rightarrow$$

$$\frac{\cancel{3^3}}{4^3} \times (2^4)^{x+1} = 2^3 \times \cancel{3^3} \Rightarrow 2^{4x+4} = 2^3 \times (2^2)^3 \Rightarrow 2^{4x+4} = 2^9$$

$$\Rightarrow 4x + 4 = 9 \Rightarrow 4x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{4}$$

پس گزینه (۳) درست است.