



با درخت دانش، گام به گام پیشرفت خود را ارزیابی کنید.

گام اول: میزان تسلط خود را با رنگ مشخص کنید.
آبی: خیلی خوب
سبز: متوسط
زرد: مسلط نیستم.
گام‌های بعدی: اگر در گام اول به آن مبحث مسلط نیستید و دانش خود را در حد رنگ زرد ارزیابی کردید، در نوبت‌های بعدی مطالعه و تمرین، در صورتی که پیشرفت کردید می‌توانید خانه‌های سبز یا آبی را رنگ کنید.

آبی سبز زرد
معادله‌های توصیفی

استفاده از اتحادها
 حل معادله به روش مربع کامل کردن
 حل معادله به روش کلی (دلتا)

آبی سبز زرد
حل معادله‌ی درجه‌ی ۲

معادله‌ی درجه‌ی ۲

آبی سبز زرد
معادلات گویا

معادله‌ی درجه‌ی اول

هر معادله به صورت $ax + b = 0$ که در آن a و b اعداد حقیقی و $a \neq 0$ باشد را یک معادله‌ی درجه‌ی اول می‌نامند. جواب این معادله برابر $x = \frac{-b}{a}$ است.

مسائل توصیفی

برای حل مسائل و معادلات توصیفی، مراحل زیر باید انجام داد:

- ۱- **تشخیص متغیرها:** پیدا کردن مقداری که مسأله از ما می‌خواهد، اولین قدم در حل مسأله است و در اکثر موارد در انتهای مسأله است. این مقادیر و کمیت‌ها را معمولاً با حرف x ، y و ... نام‌گذاری می‌کنیم.
- ۲- **بیان مسأله به زبان ریاضی:** خواندن چند باره‌ی مسأله و تشریح آن بر حسب متغیرها، بخش مهم دیگر حل مسأله است. در این بخش، اطلاعات مسأله را مرتب می‌کنیم.
- ۳- **ساختن مدل ریاضی:** یافتن رابطه‌ی بین اطلاعات جمع‌آوری شده در بخش (۲) و ساختن معادله از این اطلاعات.
- ۴- **حل معادله و چک کردن جواب:** در این بخش معادله‌ی به‌دست آورده را حل می‌کنیم و جواب را چک می‌کنیم.

مثال

می‌خواهیم محوطه‌ای مستطیل شکل در کنار رودخانه را نرده بکشیم. اگر طول این محوطه به موازات دوبرابر عرض نرده‌ی مورد نیاز ۶۴۰ متر باشد، مساحت محوطه چند متر مربع است؟ (کنار رودخانه نرده می‌خواهد)

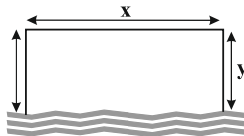
- ۱- تشخیص متغیرها: مسأله از ما مساحت محوطه را می‌خواهد و چون مساحت مستطیل حاصل ضرب طول در عرض آن است. پس در واقع طول و عرض را هم می‌خواهد.

x : طول مستطیل

y : عرض مستطیل

$S = xy$: مساحت محوطه

۲- بیان مسأله به زبان ریاضی: اطلاعاتی را که مسأله به ما داده است را دسته‌بندی می‌کنیم.



۳- ساختن مدل ریاضی

$x = 2y$: طول دو برابر عرض

طول نرده $x + 2y = 2y + 2y = 4y$

مساحت باغ $S = xy = (2y)(y) = 2y^2$

طول نرده $4y = 640$

۴- حل معادله

متر $4y = 640 \Rightarrow y = 160$

متر مربع $S = 2y^2 = 2(160)^2 = 51200$

سوالات تستی

۱. جواب x از معادله‌ی $2(3x - 7) = -(2 + 4x)$ کدام است؟
 (کتاب درسی مشابه فعالیت ۲ - صفحه‌ی ۲۶)
- ① $1/2$ ② 6 ③ $7/5$ ④ $0/8$
۲. اگر $a \neq b$ ، جواب معادله‌ی $a(x-1) - 2bx + 2b = 0$ کدام است؟
 (سراسری انسانی - ۷۴)
- ① -1 ② a ③ b ④ 1
۳. معادله‌ی مربوط به عبارت «ثلث مربع یک عدد از قرینه‌ی آن عدد، یک واحد بیشتر است» کدام است؟
 (کتاب درسی مشابه تمرین ۱ - صفحه‌ی ۳۰)
- ① $x^2 = -3x + 1$ ② $\frac{x^2}{3} = -x - 1$ ③ $x^2 = 3(-x + 1)$ ④ $x^2 = -3x - 1$
۴. معادله‌ی $x(x^2 - 1) = x(x + 1)(1 - x + x^2)$ ، چند ریشه دارد؟
 (آزادانسانی - ۷۴)
- ① یک ② دو ③ سه ④ صفر
۵. $\frac{5}{7}$ عددی به اضافه ۱۸، دو برابر آن عدد است. این عدد کدام است؟
 (سراسری تجربی - ۷۲)
- ① 14 ② 21 ③ 28 ④ 36
۶. حاصل ضرب عدد x در ۱۴، به اندازه‌ی ۸۴ واحد از حاصل ضرب عدد x در هفده کم‌تر است. x کدام است؟
 (سراسری انسانی - ۶۳)
- ① 24 ② 26 ③ 28 ④ 30
۷. تفاضل عددی از ۲۵، ثلث مجموع همان عدد با ۳۵ است. آن عدد کدام است؟
 (سراسری انسانی - ۷۶)
- ① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12
۸. اگر به ۳ برابر عددی ۴ واحد اضافه گردد و از نصف حاصل، همان عدد کم شود، باقی مانده ۵ می‌گردد، آن عدد کدام است؟
 (آزادانسانی - ۷۸)
- ① 19 ② 14 ③ 8 ④ 6
۹. اکنون پدر علی ۴۰ ساله است و سن او ۵ برابر سن علی به علاوه ۵ سال است. وقتی علی ۲۰ ساله شود، پدر او چند ساله خواهد شد؟
 (آزمون کانون - ۹۱)
- ① 51 ② 52 ③ 53 ④ 54
۱۰. با افزایش $12/5$ درصد به قیمت، کالایی را به مبلغ ۹۴۵ ریال خریداری کرده‌ایم. قیمت کالا قبل از افزایش چه قدر بوده است؟
 (سراسری انسانی - ۷۷)
- ① 810 ② 820 ③ 840 ④ 860
۱۱. مجموع ارقام یک عدد دو رقمی ۱۲ و تفاضل ارقام آن ۴ است. حاصل ضرب ارقام این عدد کدام است؟
 (سراسری انسانی - ۶۳)
- ① 27 ② 32 ③ 35 ④ 36
۱۲. از حاصل ضرب دو عدد، مجموع همان دو عدد کسر گردیده و تفاضل آن دو عدد به دست آمده است، یکی از آن دو عدد برابر است با:
 (آزادانسانی - ۸۲)
- ① 2 ② 1 ③ -2 ④ -1
۱۳. $\frac{2}{3}$ عددی برابر $\frac{3}{4}$ عدد دیگر است، اگر مجموع این دو عدد ۱۳۶ باشد، عدد کوچک‌تر کدام است؟
 (سراسری انسانی - ۵۸)
- ① 72 ② 60 ③ 64 ④ 40

۱۴. در قلکی، تعدادی سکه‌ی ۵، ۱۰ و ۲۵ تومانی وجود دارد. اگر تعداد هر سه نوع سکه با هم مساوی و در مجموع، ۲۴۰ تومان در

(آزمون کانون-۹۲)

قلک باشد، تعداد سکه‌های ۱۰ تومانی موجود در قلک، کدام است؟

- ۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۱۰

۱۵. محیط یک مستطیل ۸۲ واحد است. اگر از طول آن ۷ واحد کم کنیم باقی مانده یک مربع می‌شود. ضلع کوچک‌تر این مستطیل

(سواری انسان-۸۲)

کدام است؟

- ۱) ۱۶ ۲) ۱۷ ۳) ۱۸ ۴) ۱۹

۱۶. نرخ کرایه‌ی نوعی سواری برای هر کیلومتر طی مسافت، مبلغ ۱۵۰۰ ریال به اضافه ورودی ثابت ۶۰۰۰ ریال بوده، با پرداخت

(اولاد انسان-۸۵)

مبلغ ۳۰۰۰۰ ریال، از این نوع سواری «چند کیلومتر» می‌توان استفاده نمود؟

- ۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۱۶ ۴) ۲۰

۱۷. یک شرکت کرایه دهنده‌ی ماشین، برای کرایه‌ی هر روز ماشین‌های خود ۳۰ هزار تومان و برای هر کیلومتر مسافت با آن ۱۵۰

تومان دریافت می‌کند، اگر فردی یکی از ماشین‌های این شرکت را دو روز کرایه کرده باشد و ۱۰۸ هزار تومان پرداخت کرده باشد، با

(کتاب درسه مشابه تمرین ۴-صفحه‌ی ۳۱)

این ماشین چه مسافتی را طی کرده است؟

- ۱) ۳۲۰ کیلومتر ۲) ۱۸۰ کیلومتر ۳) ۲۰۰ کیلومتر ۴) ۲۴۰ کیلومتر

۱۸. دو شمع هم‌طول را در یک لحظه روشن می‌کنیم، شمع اول در ۴ ساعت می‌سوزد و شمع دوم در ۳ ساعت، با فرض آنکه هر شمع

با سرعت ثابتی بسوزد، پس از گذشت چند ساعت، طول شمع اول دو برابر طول شمع دوم می‌شود؟ (کتاب درسه مشابه تمرین ۳-صفحه‌ی ۳۱)

- ۱) $\frac{3}{4}$ ۲) $\frac{2}{5}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۱۹. علی و حمید در مدت ۳ دقیقه با سرعتی ثابت از یک نقطه شروع به دویدن در مسیری مستقیم می‌کنند. در انتهای زمان تعیین

شده علی به اندازه‌ی $\frac{1}{4}$ کل مسافتی که حمید در این مدت زمان طی کرده، از او جلوتر است. ۱۵ برابر مسافتی که علی در این

مدت زمان طی کرده از ۱۲ برابر آن ۱۸ واحد بیش‌تر است. مسافتی که حمید در این مدت زمان طی کرده، چند واحد است؟

(آزمون کانون-نهم، ۹۰)

- ۱) ۱۲ ۲) ۶ ۳) ۱۴ ۴) ۴

۲۰. اگر طول مستطیلی را ۲ سانتی‌متر بیش‌تر و عرض آن را یک سانتی‌متر کمتر کنیم، یا طول آن ۲ سانتی‌متر کمتر و عرض آن را ۲

سانتی‌متر بیش‌تر کنیم، مساحت آن تغییر نمی‌کند. مساحت این مستطیل چند سانتی‌متر مربع است؟ (کتاب درسه مشابه تمرین ۸-صفحه‌ی ۳۳)

- ۱) ۲۴ ۲) ۱۲ ۳) ۱۸ ۴) ۳۶

۲۱. در یک قلک، تعداد سکه‌های پنج تومانی ۲ برابر سکه‌های ۱۰ تومانی و $\frac{4}{3}$ برابر سکه‌های ۲۵ تومانی است. اگر پول داخل

(کتاب درسه مشابه تمرین ۲-صفحه‌ی ۳۰)

قلک ۴۶۰ تومان باشد، چند سکه داخل قلک است؟

- ۱) ۳۲ ۲) ۴۲ ۳) ۲۸ ۴) ۲۶

معادله‌ی درجه‌ی ۲

معادله‌هایی به فرم $x^2 = -x + 1$ ، $x^2 - 1 = 0$ و $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x = 0$ را معادله‌ی درجه‌ی دوم گویند.

تعریف: به‌طور کلی هر معادله به شکل کلی $ax^2 + bx + c = 0$ را که در آن a ، b و c اعداد حقیقی باشند و $a \neq 0$ باشد را معادله‌ی درجه‌ی دوم می‌گویند. در حقیقت اگر در یک معادله بعد از ساده‌سازی بزرگ‌ترین توان x برابر ۲ باشد، معادله‌ی درجه‌ی دوم است.

روش‌های حل معادله‌ی درجه‌ی دوم

منظور از حل معادله‌ی درجه‌ی دوم، پیدا کردن مقادیری است که به‌ازای آن معادله برقرار شود. معادله‌ی درجه‌ی دوم را به روش‌های زیر می‌توان حل کرد:

۱- روش حدسی ۲- روش تجزیه ۳- روش مربع کامل ۴- روش کلی (روش Δ)

۱- روش حدسی:

در این روش عبارت درجه‌ی دوم را به‌ازای x ‌های مختلف به‌دست می‌آوریم. هرچه به صفر نزدیک‌تر شویم، یعنی به جواب معادله نزدیک‌تر شده‌ایم. اگر به‌ازای دو عدد x_1 و x_2 علامت عبارت درجه‌ی دوم تغییر کرد، جواب معادله بین x_1 و x_2 است. به مثال زیر دقت کنید.

مثال

جواب‌های معادله‌ی $2x^2 - 7x = -3$ را به‌دست آورید.

کله‌پس‌خ: ابتدا تمامی عبارات را به یک سمت تساوی منتقل می‌کنیم.

$$2x^2 - 7x + 3 = 0$$

حال به جدول روبه‌رو دقت کنید.

x	-2	-1	0	1	2	3
$2x^2 - 7x + 3$	25	12	3	2	-3	0
	علامت عبارت عوض شده است					

همان‌طور که در بالا مشاهده می‌کنید، به‌ازای $x = 3$ عبارت درجه دوم $2x^2 - 7x + 3$ برابر صفر شده است. پس $x = 3$ یکی از جواب‌های معادله است. از طرف دیگر، به‌ازای $x = 0$ و $x = 1$ ، علامت عبارت عوض شده است. پس جواب دیگر معادله بین این دو عدد است.

$$x = \frac{1}{4} \Rightarrow 2\left(\frac{1}{4}\right)^2 - 7\left(\frac{1}{4}\right) + 3 = \frac{1}{4} - \frac{7}{4} + 3 = 0 \rightarrow \text{جواب دیگر معادله} = \frac{1}{4}$$

۲- روش تجزیه:

در فصل اول با اتحادهای جبری آشنا شدید. بعضی از معادلات درجه‌ی دوم را می‌توان با فاکتورگیری و یا استفاده از اتحادهای جبری تجزیه نمود.

نکته:

اگر $a \times b = 0$ باشد، آنگاه می‌توان نتیجه گرفت $a = 0$ یا $b = 0$.
یادآوری: اتحادهای زیر را به یاد داشته باشید:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

مثال

معادلات زیر را حل کنید.

$$۱) 3x^2 - 7x = 0$$

$$۲) x^2 - 4x = -4$$

$$۳) 9x^2 - 1 = 0$$

$$۴) x^2 = 6x - 5$$

کلاس پاسخ:

در معادله‌ی (۱) می‌توان از x فاکتور گرفت:

$$3x^2 - 7x = 0 \Rightarrow x(3x - 7) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 3x - 7 = 0 \Rightarrow x = \frac{7}{3} \end{cases}$$

در معادله‌ی (۲) ابتدا تمامی جملات را به یک سمت تساوی منتقل می‌کنیم و از اتحاد مربع دو جمله‌ای داریم:

$$x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow x^2 - 2(2)x + 2^2 = 0 \Rightarrow (x - 2)^2 = 0 \Rightarrow x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

در معادله‌ی (۳) با استفاده از اتحاد مزدوج داریم:

$$9x^2 - 1 = 0 \Rightarrow (3x)^2 - 1^2 = 0 \Rightarrow (3x - 1)(3x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 3x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \\ 3x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

در معادله‌ی (۴) ابتدا تمامی جملات را به یک سمت تساوی منتقل می‌کنیم و از اتحاد جمله‌ی مشترک استفاده می‌کنیم:

$$x^2 - 6x + 5 = 0 \Rightarrow x^2 + (-1 - 5)x + (-5)(-1) = 0 \Rightarrow (x - 5)(x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5 \\ x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

۱- اگر $b = 0$ باشد، معادله را می‌توان به روش ریشه‌گیری حل نمود.

۲- در معادله‌ی درجه‌ی دوم اگر $c = 0$ باشد، بهتر است از روش فاکتورگیری و اگر $b = 0$ باشد، از روش ریشه‌گیری معادله را حل کنید.

مثال

معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$x^2 - 16 = 0$$

گله پاسخ:

$$x^2 - 16 = 0 \Rightarrow x^2 = 16 = 4^2 \Rightarrow x = \pm 4$$

۳- روش مربع کامل کردن

تبدیل یک معادله‌ی درجه‌ی دوم را به فرم $(x+h)^2 = k$ را مربع کامل کردن می‌گویند. برای حل یک معادله‌ی درجه‌ی دوم به روش مربع کامل کردن، مراحل زیر را طی می‌کنیم.

مثال

معادله‌ی $2x^2 + 7x - 4 = 0$ را به روش مربع کامل حل کنید.

گله پاسخ:

۱- ابتدا جمله‌ای که فاقد x است را به سمت راست تساوی منتقل کرده و طرفین معادله را به ضریب x^2 تقسیم می‌کنیم. (ضریب x^2 را یک می‌کنیم):

$$2x^2 + 7x - 4 = 0 \xrightarrow{\div 2} \frac{2x^2}{2} + \frac{7x}{2} = \frac{4}{2} \Rightarrow x^2 + \frac{7}{2}x = 2$$

۲- به طرفین تساوی «نصف ضریب x به توان ۲» را اضافه می‌کنیم.

$$x^2 + \frac{7}{2}x - 2 = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{7}{2}x = 2 \xrightarrow{\text{طرفین به اضافه } \left(\frac{7}{4}\right)^2} x^2 + \frac{7}{2}x + \left(\frac{7}{4}\right)^2 = 2 + \left(\frac{7}{4}\right)^2$$

۳- عبارت سمت چپ مربع کامل است. با تبدیل آن به مربع کامل و ریشه‌گیری، معادله را حل می‌کنیم.

$$x^2 + 2\left(\frac{7}{4}\right)x + \left(\frac{7}{4}\right)^2 = 2 + \frac{49}{16} \Rightarrow \left(x + \frac{7}{4}\right)^2 = \frac{81}{16} = \left(\frac{9}{4}\right)^2 \Rightarrow x + \frac{7}{4} = \pm \frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-7}{4} - \frac{9}{4} = \frac{-16}{4} = -4 \\ x_2 = \frac{-7}{4} + \frac{9}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

سوالات تستی

۲۲. به ازای کدام مقدار m ، معادله $mx^2 + (m-1)x - 4x^2 - 8 = 0$ یک معادله درجه دوم نخواهد بود؟ (آزمون کانون-۹۴)

- ① -۴ ② صفر ③ ۳ ④ ۴

۲۳. اگر a ، b و c ضرایب استاندارد معادله درجه دوم زیر باشند، مقدار a چند برابر مقدار c است؟ (آزمون کانون-۹۴)

$$x(3x-2) = 7x+6$$

- ① $-\frac{1}{2}$ ② -۲ ③ $-\frac{1}{3}$ ④ ۱

۲۴. مجموعه جواب معادله $(2x-1)(x+2) = 0$ کدام است؟ (کتاب درسه مشابه تمرین ۱-صفحه ۳۶)

- ① $\left\{2, \frac{1}{2}\right\}$ ② $\left\{-3, \frac{1}{2}\right\}$ ③ $\left\{3, -\frac{1}{2}\right\}$ ④ $\left\{-3, -\frac{1}{2}\right\}$

۲۵. مجموعه جواب معادله $x^2 + 10x + 25 = 0$ کدام است؟ (کتاب درسه مشابه تمرین ۱-صفحه ۳۶)

- ① $\{-5\}$ ② $\{-5, 5\}$ ③ $\left\{\frac{1}{5}\right\}$ ④ $\left\{-\frac{1}{5}, +\frac{1}{5}\right\}$

۲۶. معادله $-1 + 6x - 9x^2 = 0$ چند ریشه حقیقی دارد؟ (آزمون کانون-۹۴)

- ① دو ریشه‌ی متمایز و هم‌علامت ② دو ریشه مختلف‌العلامت
③ یک ریشه ④ ریشه ندارد.

۲۷. مجموع جواب‌های معادله $3x^2 - 6x = 0$ کدام است؟ (کتاب درسه مشابه تمرین ۱-صفحه ۳۶)

- ① -۲ ② ۲ ③ ۶ ④ -۶

۲۸. حاصل ضرب جواب‌های معادله $9x^2 - 1 = 0$ کدام است؟ (کتاب درسه مشابه تمرین ۱-صفحه ۳۶)

- ① ۹ ② -۹ ③ $\frac{1}{9}$ ④ $-\frac{1}{9}$

۲۹. اگر $a - 2 \neq 0$ باشد، معادله $ax^2 + 6 = 2x^2 + 2a$ چند جواب دارد؟ (آزمون کانون-۹۳)

- ① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ جواب ندارد.

۳۰. ریشه‌های معادله $7x^2 + 6x + 4 = 3x^2 + 6x + 5$ کدام‌اند؟ (سراسری انسانی-۹۷)

- ① $\frac{1}{2}, -1$ ② $-\frac{1}{2}, 1$ ③ $\frac{1}{2}, 1$ ④ $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$

۳۱. به ازای کدام مقدار m ، معادله $x^2 - (m-1)x - m = 0$ دو ریشه حقیقی قرینه دارد؟ (آزمون کانون-۹۰)

- ① صفر ② ۱ ③ -۱ ④ ۲

۳۲. ریشه بزرگ‌تر معادله $9(x-2)^2 - 16 = 0$ کدام است؟ (آزمون کانون-۹۳)

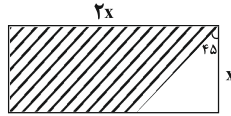
- ① $\frac{2}{3}$ ② ۲ ③ $\frac{10}{3}$ ④ ۶

۳۳. طول مستطیلی ۲ برابر عرض آن است. اگر مساحت مستطیل ۳۲ باشد، محیط این مستطیل کدام است؟ (آزمون کانون-۹۳)

- ① ۱۶ ② ۳۰ ③ ۲۵ ④ ۲۴

کتاب درسه مشابه تمرین ۲ - صفحه‌های ۳۷

۳۴. اگر مساحت قسمت هاشور خورده برابر ۱۵۰ سانتی‌متر مربع باشد، x کدام است؟



- ① ۶
② ۸
③ ۱۰
④ ۱۲

آزمون کانون - ۹۳

۳۵. یکی از جواب‌های معادله $(2x+1)^2 - 5 = 0$ کدام است؟

- ① $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ ② $\frac{-\sqrt{5}+1}{2}$ ③ $\frac{-\sqrt{5}-1}{2}$ ④ $\frac{1-\sqrt{2}}{5}$

آزمون کانون - ۹۴

۳۶. نسبت دو عدد مثبت برابر $\frac{3}{4}$ و مجموع مربع‌های آن دو ۵۲ است. مجموع دو عدد کدام است؟

- ① ۱۰ ② ۲۴ ③ ۶ ④ ۵

کتاب درسه مشابه تمرین ۲ - صفحه‌های ۳۶

۳۷. جواب معادله $2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$ کدام است؟

- ① $\sqrt{2}$ ② $-\sqrt{2}$ ③ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

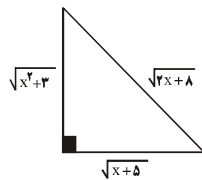
کتاب درسه مشابه تمرین ۱ - صفحه‌های ۳۶

۳۸. مجموع جواب‌های معادله $(2x-1)^2 - 5(2x-1) = 0$ کدام است؟

- ① $\frac{7}{2}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $-\frac{7}{2}$ ④ $-\frac{5}{2}$

آزمون کانون - ۹۳

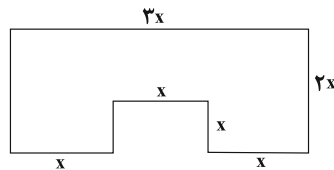
۳۹. مساحت مثلث روبه‌رو چند واحد مربع است؟



- ① $\sqrt{6}$ یا $\frac{\sqrt{15}}{2}$
② ۳ یا ۵
③ $\frac{\sqrt{6}}{2}$ یا $\sqrt{15}$
④ $2\sqrt{6}$ یا $\sqrt{15}$

کتاب درسه مشابه فعالیت ۲ - صفحه‌های ۴۹

۴۰. محیط شکل زیر با مساحت آن برابر است. x کدام است؟



- ① $\frac{2}{4}$
② $\frac{1}{2}$
③ ۲
④ $\frac{0}{6}$

سوالاتی انسانه - ۷۳

۴۱. حاصل ضرب ریشه‌های معادله $(x+1)(x-5) + 12(x+1) = 0$ کدام است؟

- ① ۵ ② ۶ ③ ۷ ④ ۸

آزمون کانون - ۹۴

۴۲. جواب کوچک‌تر معادله‌ی زیر کدام است؟

$$(50x+28)^2 = (37x+2)^2$$

- ① ۲ ② -۲ ③ $-\frac{30}{87}$ ④ $\frac{87}{30}$

کتاب درسه مشابه تمرین ۱ - صفحه‌های ۳۶

۴۳. مجموع ریشه‌های معادله $(\frac{x}{3}-1)^4 - 25(\frac{x}{3}-1)^2 = 0$ کدام است؟

- ① ۹ ② ۳۳ ③ ۳ ④ -۳

۴۴. اگر یکی از ریشه‌های معادله‌ی $x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0$ عدد -1 باشد، مجموع ریشه‌های این معادله کدام است؟ (سراسری انسانی-۷۴)

- ① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2

۴۵. اگر $A = \{x \mid x^2 + 2x - 3 = 0\}$ ، آن‌گاه A با کدام مجموعه‌ی زیر برابر است؟ (سراسری انسانی-۶۴)

- ① $\{1, 3\}$ ② $\{1, -3\}$ ③ $\{-1, 3\}$ ④ $\{-1, -3\}$

۴۶. مجموعه جواب معادله‌ی $4x^2 - 4x - 3 = 0$ کدام است؟ (کتاب درسه‌ی مشابه ترم ۲، صفحه‌ی ۳۶)

① $\left\{\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right\}$ ② $\left\{-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right\}$

③ $\left\{-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right\}$ ④ $\left\{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right\}$

۴۷. مجذور عددی ۴۲ واحد از خود آن عدد بزرگ‌تر است. مجموع این عدد و مجذورش کدام می‌تواند باشد؟ (آزمون کانون-۹۳)

- ① 42 ② 56 ③ 32 ④ 72

۴۸. مجموع مربعات دو عدد طبیعی متوالی برابر با ۲۵ است. عدد کوچکتر کدام است؟ (آزمون کانون-۹۱)

- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5

۴۹. برای آن‌که $x=1$ ریشه‌ی معادله‌ی $x^3 + a^2x^2 - 3ax + 1 = 0$ باشد a کدام است؟ (سراسری انسانی-۶۶)

① $a=0, a=1$ ② $a=1, a=-1$

③ $a=2, a=0$ ④ $a=1, a=2$

۵۰. اگر $x=2$ و $x=-\frac{3}{2}$ ریشه‌های معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ باشد، در این صورت $a + b + c = 0$ کدام می‌تواند باشد؟ (آزمون کانون-۹۱)

- ① 5 ② -5 ③ -3 ④ 3

۵۱. در کدام معادله، مجموعه‌ی جواب‌ها به صورت $\{-1, \frac{1}{3}\}$ است؟ (سراسری انسانی-۷۹)

① $2x^2 - 3x + 1 = 0$ ② $x^2 - x - 2 = 0$

③ $2x^2 + x - 1 = 0$ ④ $2x^2 - x - 1 = 0$

۵۲. قدرمطلق تفاضل جواب‌های معادله‌ی $3x^2 + 5x - 2 = 0$ کدام است؟ (آزمون کانون-۹۳)

① $\frac{7}{3}$ ② $\frac{5}{3}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ $\frac{3}{5}$

۵۳. مساحت زمین مستطیل شکلی ۳۵ مترمربع و اختلاف طول و عرض آن ۲ متر است. محیط این مستطیل چند متر است؟ (آزمون کانون-۹۳)

- ① 25 ② 30 ③ 24 ④ 26

۵۴. زمینی مستطیل شکل به مساحت ۳۰۰ متر مربع در کنار رودخانه را می‌خواهیم جدا کنیم که اختلاف طول و عرض آن ۵ متر می‌باشد. اگر بخواهیم دور این زمین طناب بکشیم، حداقل به چند متر طناب نیاز داریم؟ (ضلعی که سمت رودخانه قرار دارد نیاز به طناب ندارد.)

(آزمون کانون-۹۴)

- ۳۵ (۱) ۵۰ (۲) ۵۵ (۳) ۷۰ (۴)

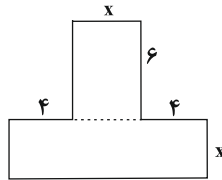
۵۵. یک قالی در اتاقی به ابعاد ۶ متر و ۴ متر قرار دارد، به طوری که فاصله‌ی هر طرف آن تا کنار اتاق یکسان است. اگر مساحت قالی ۸ متر مربع باشد، فاصله‌ی هر طرف قالی تا دیوار اتاق چند متر است؟

(آزمون کانون-۹۳)

- ۲ (۱) ۱ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۵۶. مساحت شکل زیر ۲۴۰ سانتی‌متر مربع است، x چند سانتی‌متر است؟

(کتاب درسیه مشابه نهم، پین ۴-صفحه‌ی ۳۱)



۸ (۱)

۱۴ (۲)

۲۴ (۳)

۱۰ (۴)

۵۷. عددی غیرصفر ۲ برابر عدد دیگر و مربع آن برابر مکعب عدد دیگری می‌باشد، «میانگین آن دو» چه قدر است؟

(آزادانسانی-۸۴)

- ۱۲ (۱) ۸ (۲) ۶ (۳) ۴ (۴)

۵۸. برای حل معادله‌ی $x^2 - 6x = k$ به روش مربع کامل، کدام عدد را باید به طرفین تساوی اضافه کنیم؟

(آزمون کانون-۹۳)

- $\frac{9}{4}$ (۱) ۹ (۲) $\frac{25}{4}$ (۳) ۳ (۴)

۵۹. معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2 - 10x - 1 = 0$ ، در حل به روش مربع کامل کردن به صورت $(x+h)^2 = k$ درآمده است، $h+k$ کدام است؟

(آزمون کانون-۹۴)

- ۳۱ (۱) ۲۵ (۲) ۲۱ (۳) ۱۸ (۴)

۶۰. اگر معادله‌های زیر را به روش مربع کامل حل کنیم، قدرمطلق اختلاف اعدادی که در هر معادله باید به طرفین اضافه کنیم تا مربع کامل ساخته شود، برابر با کدام گزینه است؟ (ضریب x^2 برابر با یک باشد.)

(آزمون کانون-۹۴)

a) $2x^2 + 14x + 24 = 0$

b) $x^2 - 6x + 5 = 0$

- $\frac{4}{13}$ (۱) ۴۰ (۲) ۱۳ (۳) $\frac{13}{4}$ (۴)

۶۱. در حل معادله‌ی $x^2 + 3x - 2 = 0$ به روش مربع کامل: از «چه عددی» جذر گرفته می‌شود؟

(آزادانسانی-۹۴)

- ۹ (۱) $\frac{17}{4}$ (۲) $\frac{9}{4}$ (۳) ۱۱ (۴)

۶۲. برای حل معادله‌ی $4x - 2x^2 = 0$ به روش مربع کامل کردن، پس از یک شدن ضریب x^2 ، چه مقداری را باید به دو طرف معادله اضافه کنیم؟

(آزمون کانون-۹۴)

- ۳ (۱) ۱ (۲) ۴ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴)

۴- روش کلی (روش Δ)

در روش کلی معادله‌ی درجه‌ی دوم، با استفاده از مربع کامل کردن، جواب‌های معادله‌ی درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ به صورت زیر است:

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

عبارت زیر رادیکال را دلتا یا ممیز (Δ) می‌نامند. ($\Delta = b^2 - 4ac$)

شرایط وجود جواب

با استفاده از علامت Δ می‌توان در مورد تعداد جواب‌های معادله اظهار نظر کرد.

۱- اگر $\Delta > 0$ باشد، معادله ۲ جواب متمایز دارد.

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

۲- اگر $\Delta = 0$ باشد، معادله یک جواب دارد و معادله دارای ریشه‌ی مضاعف است.

$$x = \frac{-b}{2a}$$

۳- اگر $\Delta < 0$ باشد، معادله جواب ندارد.

برخی از حالت‌های خاص

۱- اگر $c = 0$ باشد، آنگاه جواب‌های معادله $x = 0$ و $x = \frac{-b}{a}$ است.

$$x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 0, x = \frac{-(-2)}{1} = 2$$

۲- اگر $b = 0$ باشد، آنگاه جواب‌های معادله در صورت وجود قرینه‌ی یکدیگر و برابرند $x = \sqrt{-\frac{c}{a}}$ و $x = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$ است.

$$x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$$

۳- اگر مجموع ضرایب صفر باشد، ($a + b + c = 0$) آنگاه جواب‌های معادله $x = 1$ و $x = \frac{c}{a}$ است.

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \xrightarrow{1-4+3=0} x = 1, x = \frac{3}{1} = 3$$

۴- اگر $a + c = b$ باشد، آنگاه جواب‌های معادله $x = -1$ و $x = \frac{-c}{a}$ است.

$$x^2 - 4x - 5 = 0 \xrightarrow{1-5=-4} x = -1, x = \frac{-(-5)}{1} = 5$$

روابط بین جواب‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم

اگر $\Delta > 0$ باشد، یعنی معادله دارای دو جواب x_1 و x_2 باشد، آنگاه بین این دو جواب و ضرایب a ، b و c روابط زیر برقرار است.

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \quad \text{مجموع جواب‌ها}$$

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \quad \text{حاصل ضرب جواب‌ها}$$

$$D = |x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} \quad \text{تفاضل جواب‌ها}$$

نکات:

۱- اگر $S = 0$ باشد، آنگاه معادله دو جواب قرینه دارد. (در صورت وجود جواب)

۲- اگر $P = 1$ باشد، آنگاه معادله دو جواب معکوس دارد. (در صورت وجود جواب)

۳- اگر x_1 و x_2 جواب‌های معادله باشند، آنگاه روابط زیر را می‌توان به‌دست آورد.

$$1) x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = S^2 - 2P$$

$$2) \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = \frac{S}{P}$$

۴- تشکیل معادله‌ی درجه‌ی دوم: با داشتن S و P ، معادله‌ی درجه‌ی دوم به صورت $x^2 - Sx + P = 0$ را می‌توان تشکیل داد.

مثال

معادله‌ی درجه‌ی دومی بنویسید که جواب‌های آن $-3 \pm \sqrt{7}$ باشد.

پاسخ:

$$S = (-3 + \sqrt{7}) + (-3 - \sqrt{7}) = -6$$

$$P = (-3 + \sqrt{7})(-3 - \sqrt{7}) = (-3)^2 - (\sqrt{7})^2 = 9 - 7 = 2$$

$$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - (-6)x + 2 = 0 \Rightarrow x^2 + 6x + 2 = 0$$

سوالات تستی

(آزمون کانون-۹۳)

۶۳. مبین معادله‌ی $6x^2 - x - 12 = 0$ برابر کدام است؟

- ① ۷۳ ② ۲۸۹ ③ -۷۱ ④ -۲۸۷

(کتاب درسه کاردرکلاس - صفحه ۴۳)

۶۴. ریشه‌ی بزرگتر معادله‌ی $6x^2 - x - ۳۵ = 0$ کدام است؟

- ① $\frac{5}{2}$ ② $-\frac{7}{3}$ ③ $-\frac{5}{2}$ ④ $\frac{7}{3}$

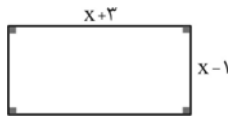
(آزمون کانون-۹۴)

۶۵. معکوس ریشه‌ی کوچکتر معادله‌ی $x^2 - 2\sqrt{5}x + 3 = 0$ کدام است؟

- ① $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3}$ ② $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{5}}{3}$ ④ $\frac{-\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3}$

(آزمون کانون-۹۳)

۶۶. اگر مساحت مستطیل زیر ۷ واحد مربع باشد، محیط آن چند واحد است؟



- ① $\sqrt{11}-1$ ② $4\sqrt{11}$ ③ $8\sqrt{11}$ ④ $2\sqrt{11}$

(کتاب درسه کاردرکلاس - صفحه ۴۴)

۶۷. معادله‌ی $x^2 + ax - 5 = 0$ چند جواب حقیقی دارد؟

- ① دو جواب ② معادله جواب ندارد.
③ یک ریشه ④ بستگی به مقدار a دارد.

(آزادانسانی-۶۹)

۶۸. معادله‌ی درجه‌ی دوم $(a^2 + 1)x^2 - 2ax - 1 = 0$ همواره ...

- ① دو ریشه‌ی مختلف‌العلامه دارد. ② دو ریشه‌ی مثبت دارد.
③ ریشه‌ی مضاعف دارد. ④ ریشه ندارد.

(خارج از کشور-۹۱)

۶۹. به ازای کدام مقادیر a ، معادله‌ی درجه‌ی دوم $3x^2 + ax - 3 = 0$ دو جواب حقیقی و متمایز دارد؟

- ① هر مقدار a ② هیچ مقدار a ③ فقط $a = \pm 6$ ④ فقط $a > 6$

۷۰. برای آن‌که معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2 - 3x + 1 = 0$ دو جواب حقیقی متمایز داشته باشد، محدوده‌ی a کدام است؟

(آزمون کانون-۹۴)

- ① $a > \frac{9}{4}$ ② $a > -\frac{9}{4}$ ③ $a < \frac{9}{4}$ ④ $a < 3$

(آزمون کانون-۹۳)

۷۱. معادله‌ی $x^2 + 3x - k = 0$ در چه شرایطی همواره دو جواب حقیقی متمایز دارد؟

- ① $k \geq \frac{-9}{4}$ ② $k \leq \frac{9}{4}$ ③ $k > \frac{-9}{4}$ ④ $k < \frac{9}{4}$

(سراسری انسانی-۹۳)

۷۲. معادله‌ی درجه‌ی دوم $x(2x - 5) = a$ به ازای یک مقدار a ریشه‌ی مضاعف دارد، مقدار ریشه‌ی مضاعف کدام است؟

- ① $-\frac{5}{2}$ ② $-\frac{5}{4}$ ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{5}{2}$

(خارج از کشور-۹۱)

۷۳. اگر در معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2 - 12x + 9 = 0$ تفاضل دو ریشه برابر صفر باشد، یک ریشه‌ی این معادله کدام است؟

- ① $-\frac{3}{4}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ ۳

(آزمون کانون-۹۳)

۷۴. به‌ازای کدام مقدار k ، معادله‌ی $2x^2 + 3x - k + 1 = 0$ دارای دو ریشه‌ی مساوی است؟

- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $-\frac{1}{8}$ ④ $-\frac{3}{5}$

(سراسری‌انسان-۶۷)

۷۵. به‌ازای چه مقدار a ریشه‌های معادله‌ی $x^2 + 4x - a - 1 = 0$ مساوی‌اند؟

- ① -5 ② -3 ③ 1 ④ 2

(آزمون کانون-۹۴)

۷۶. به‌ازای کدام مقدار m معادله‌ی $x^2 + (m-1)x + 1 = 0$ ریشه‌ی مضاعف دارد؟

- ① -3 ② 1 ③ 3 ④ صفر

(سراسری‌انسان-۶۸)

۷۷. به‌ازای چه مقدار a ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - (3a+1)x + 2a^2 + 2 = 0$ با هم برابرند؟

- ① صفر ② 1 ③ 2 ④ 3

(آزادانسان-۸۰)

۷۸. ریشه‌ی مضاعف معادله‌ی $mx^2 - mx + 1 = 0$ (که $m \neq 0$) کدام است؟

- ① 4 ② 1 ③ $\frac{1}{2}$ ④ صفر

(آزادانسان-۸۲)

۷۹. به‌ازای چه مقدار n معادله‌ی $m^2x^2 - 6mx + 2m + n = 0$ دارای ریشه‌ی مضاعف $\frac{3}{4}$ است؟

- ① 4 ② 3 ③ 2 ④ 1

(آزادانسان-۷۸)

۸۰. دو ریشه‌ی مثبت معادله‌ی $x^2 - 2mx + 3m = 0$ با هم مساوی بوده، ریشه‌ی معادله‌ی کدام قدر است؟

- ① 3 ② 4 ③ 6 ④ 9

(آزمون کانون-۹۳)

۸۱. کدام‌یک از معادلات زیر دارای ریشه‌ی حقیقی نیست؟

- ① $-3x^2 - 5x + 4 = 0$ ② $x^2 + 9x + 11 = 5x - 2$
③ $x^2 - 4x + 3 = 3x^2 - 1$ ④ $x^2 + 3x - 5 = x^2 + 7$

(آزمون کانون-۹۴)

۸۲. اگر معادله‌ی $x^2 - x + 2m - 1 = 0$ ریشه‌ی حقیقی نداشته باشد، حدود m کدام است؟

- ① $m < \frac{5}{8}$ ② $m < -\frac{1}{2}$ ③ $m > \frac{5}{8}$ ④ $m > -\frac{1}{2}$

(آزادانسان-۷۵)

۸۳. معادله‌ی $x(1-x) = (x+2)(x+1)$ دارای ...

- ① دو ریشه‌ی متمایز منفی است ② یک ریشه است.
③ ریشه‌ی حقیقی نیست ④ دو ریشه‌ی مختلف‌العلامه است.

(آزمون کانون-۹۳)

۸۴. در کدام‌یک از معادلات زیر مجموع ریشه‌ها از حاصل‌ضرب آن‌ها بزرگ‌تر است؟

- ① $2x^2 = 13 - 7x$ ② $x^2 + 4x = 3$ ③ $-x^2 - 6x = -3$ ④ $x^2 + 4 = 2x$

(سراسری‌انسان-۷۷)

۸۵. یکی از جواب‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $3x^2 + kx - 10 = 0$ برابر 5 است. جواب دیگر این معادله کدام است؟

- ① $-\frac{3}{2}$ ② $-\frac{2}{3}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{3}{2}$

۸۶. اگر مجموع ریشه‌های یک معادله‌ی درجه‌ی دوم ثلث حاصل‌ضرب آن‌ها و یک ریشه برابر 4 باشد، ریشه‌ی دیگر کدام است؟

(سراسری‌انسان-۷۴)

- ① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12

(آزمون کانون-۹۰)

۸۷. اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی $1 - 2x^2 = x(7 - 4x)$ باشند، حاصل $\frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2}$ کدام است؟

- ① 26 ② $\frac{1}{26}$ ③ 7 ④ $\frac{1}{7}$

۸۸. در معادله $x^2 + (1-m)x + 2m = 0$ مجموع ریشه‌ها برابر حاصل ضرب ریشه‌هاست. m کدام است؟ (سراسری انسانی-۶۳)

- ① -۲ ② -۱ ③ ۱ ④ ۲

۸۹. اگر $x = -\frac{1}{4}$ یکی از ریشه‌های معادله $4x^2 - 2ax + a = 1$ باشد، حاصل ضرب ریشه‌های این معادله کدام است؟ (آزمون کانون-۹۴)

- ① $\frac{2}{5}$ ② $-\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $-\frac{1}{8}$

۹۰. به ازای یک مقدار m ، ریشه‌های معادله $2x^2 + 2mx + 2m + 6 = 0$ ، معکوس یکدیگرند. مجموع این دو ریشه، کدام است؟

(خارج کشور-۹۵)

- ① $-\frac{1}{5}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ ۲ ④ ۳

۹۱. یکی از جواب‌های معادله $(m-1)x^2 - 7x + 2m = 0$ برابر با ۲ بوده، جواب دیگر این معادله چه قدر است؟ (زاد انسانی-۷۸)

- ① $\frac{3}{2}$ ② ۳ ③ $\frac{7}{2}$ ④ ۱

۹۲. در معادله درجه دوم $4x^2 + kx = 21$ ، اگر مجموع دو ریشه، برابر -2 باشد، ریشه‌ی بزرگ‌تر کدام است؟ (خارج کشور-۸۷)

- ① $\frac{3}{4}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{7}{4}$ ④ $\frac{7}{2}$

۹۳. در معادله درجه‌ی دوم $2x^2 + kx + 1 - k = 0$ ، اگر حاصل ضرب دو ریشه برابر ۵ باشد، ریشه‌ی بزرگ‌تر، کدام است؟ (خارج کشور-۸۴)

- ① $\frac{2}{5}$ ② ۳ ③ ۴ ④ ۵

۹۴. در معادله درجه دوم $2x^2 + ax + 4 = 0$ ، به ازای یک مقدار a مجموع دو ریشه‌ی حقیقی معادله $\frac{-9}{2}$ است. ریشه‌ی بزرگ‌تر کدام است؟

(خارج کشور-۹۰)

- ① $-\frac{3}{2}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{3}{2}$

۹۵. در معادله درجه دوم $x^2 - (b-2)x + 2b = 0$ مجموع ریشه‌ها برابر ۱۰ است. ریشه‌ی بزرگ‌تر کدام است؟

(سراسری انسانی-۸۴)

- ① ۵ ② ۶ ③ ۷ ④ ۸

۹۶. در معادله درجه دوم $6x^2 + (k+1)x + k = 0$ اگر مجموع دو ریشه‌ی حقیقی برابر $\frac{1}{6}$ باشد، ریشه‌ی مثبت آن کدام است؟ (سراسری-۹۴)

- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ ۱ ④ $\frac{3}{4}$

۹۷. k چه قدر باشد تا یکی از ریشه‌های معادله $x^2 - 12x + 3k + 2 = 0$ ، ۵ برابر ریشه‌ی دیگر باشد؟ (آزمون کانون-۹۴)

- ① ۲۰ ② ۶ ③ ۲۵ ④ ۱

۹۸. در معادله درجه‌ی دوم $27x^2 + mx + 16 = 0$ ، یکی از ریشه‌ها ثلث ریشه‌ی دیگر است. مجموع دو ریشه‌ی منفی معادله کدام است؟

(آزمون کانون-۹۳)

- ① $\frac{16}{9}$ ② $-\frac{16}{9}$ ③ $\frac{4}{3}$ ④ $-\frac{4}{3}$

۹۹. یکی از ریشه‌های معادله $x^2 - 6ax + 8a = 0$ نصف ریشه‌ی دیگر است. a کدام است؟ (سراسری انسانی-۶۴)

- ① -۱ ② ۱ ③ ۲ ④ ۳

۱۰۰. اگر یکی از ریشه‌های معادله $x^2 + 5x - 3a + 1 = 0$ سه واحد بیش‌تر از ریشه‌ی دیگر باشد، مقدار a کدام است؟

(آزمون کانون-۹۴)

- ① -۲ ② -۱ ③ ۴ ④ ۵

۱۰۱. در معادله‌ی درجه‌ی دوم $4x^2 - 4x + a = 0$ به ازای کدام مقدار a یکی از ریشه‌ها ۲ واحد بیش‌تر از ریشه‌ی دیگر است؟

(سراسری-اسانه-۸۶)

- ① -۳ ② -۲ ③ ۱ ④ ۳

۱۰۲. اگر قدر مطلق تفاضل ریشه‌های معادله‌ی $2x^2 + 5x + k = 0$ برابر یک باشد، مقدار k کدام می‌تواند باشد؟

(آزمون کانون-۹۳)

- ① ۲۱ ② $\frac{21}{8}$ ③ $\frac{8}{21}$ ④ صفر

۱۰۳. اگر x' و x'' ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 2\sqrt{3}x - 2 = 0$ باشند، حاصل $A = x'x''^2 + x''x'^2$ کدام است؟

(آزادانسان-۷۷)

- ① ۱۲ ② $4\sqrt{3}$ ③ $-4\sqrt{3}$ ④ -۱۲

۱۰۴. در معادله‌ی $x^2 - x - 1 = 0$ مقدار $x'^2 + x''^2$ کدام است؟

(آزادانسان-۷۷)

- ① ۳ ② ۲ ③ ۴ ④ ۶

۱۰۵. در معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2 + 2mx + (2m - 2) = 0$ ، معکوس جمع دو ریشه برابر با حاصلضرب آن دو ریشه است. m کدام

(آزمون کانون-۹۱)

است؟

- ① $-\frac{1}{4}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{2}$

۱۰۶. اگر در معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2 - m^2x + \frac{1}{m^2} = 0$ ، x_1, x_2 جواب‌های معادله باشند، حاصل عبارت $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$ کدام است؟

(آزمون کانون-۹۳)

- ① m^6 ② m^2 ③ $m^2 - 2$ ④ $m^{10} - 2$

۱۰۷. اگر x_1 و x_2 جواب‌های معادله‌ی $x^2 - \frac{m+2}{3}x - m - 6 = 0$ باشند، به‌ازای کدام مقدار m رابطه‌ی

(آزمون کانون-۹۳)

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{-3}{10}$$

- ① ۵ ② ۴ ③ ۳ ④ صفر

۱۰۸. اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 7x + 4 = 0$ باشند، حاصل $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$ کدام است؟

(آزمون کانون-۹۳)

- ① $\sqrt{11}$ ② $\sqrt{15}$ ③ ۱۱ ④ ۱۵

۱۰۹. ریشه‌های کدام یک از معادلات درجه‌ی دوم زیر برابر $-1 + 2\sqrt{3}$ و $-1 - 2\sqrt{3}$ است؟

(آزمون کانون-۹۴)

- ① $x^2 + 3\sqrt{3}x - 1 = 0$ ② $x^2 + 6\sqrt{3}x + 2 = 0$
③ $x^2 - 2\sqrt{3}x - 9 = 0$ ④ $x^2 - 4\sqrt{3}x + 11 = 0$

(سراسری-اسانه-۹۱)

۱۱۰. جواب‌های کدام معادله به‌صورت $\frac{2 \pm \sqrt{3}}{3}$ است؟

① $x^2 + 2x - 1 = 0$ ② $x^2 - 2x + \frac{1}{4} = 0$

③ $2x^2 - 2x + 1 = 0$ ④ $4x^2 - 2x + 1 = 0$

(آزمون کانون-۹۴)

۱۱۱. معادله‌ی درجه‌ی دومی که ریشه‌های آن $2\sqrt{2} \pm \sqrt{10}$ می‌باشد، کدام است؟

① $x^2 - 3\sqrt{2}x + 1 = 0$ ② $x^2 + 6\sqrt{2}x + 2 = 0$

③ $x^2 - 4\sqrt{2}x - 2 = 0$ ④ $x^2 - \sqrt{2}x - 1 = 0$

(سراسری-اسانه-۷۳)

۱۱۲. اگر مجموع دو عدد $S = \frac{11}{3}$ و حاصلضرب آن‌ها $P = 6$ باشد، نسبت عدد بزرگ‌تر به کوچک‌تر کدام است؟

- ① ۲ ② $\frac{8}{3}$ ③ ۳ ④ $\frac{11}{3}$

(سراسری-اسانه-۷۸)

۱۱۳. اگر $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$ و $xy = \frac{9}{2}$ باشند، کوچک‌ترین مقدار y کدام است؟

- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ ۳

۱۱۴. مساحت زمین مستطیل شکلی ۱۸ متر مربع و محیط آن ۱۷ متر است، اختلاف طول و عرض زمین، «چند متر» است؟ (از آسانساز-۸۶)

- ① ۰/۲۵ ② ۱ ③ ۰/۵ ④ ۲

۱۱۵. کدام معادله ریشه‌هایش معکوس ریشه‌های معادله $x^2 + 3x - 2 = 0$ است؟ (سراسری آسانساز-۶۸)

- ① $2x^2 - 3x - 2 = 0$ ② $2x^2 - 3x - 1 = 0$ ③ $x^2 + 3x + 1 = 0$ ④ $x^2 + 3x + 2 = 0$

۱۱۶. جواب‌های کدام یک از معادله‌های زیر، معکوس جواب‌های معادله $x^2 - 3x + 2 = 0$ است؟ (آزمون کانون-۹۴)

- ① $x^2 + 2x - 3 = 0$ ② $2x^2 - 3x + 1 = 0$ ③ $2x^2 - x - 3 = 0$ ④ $x^2 - \frac{x}{3} - \frac{1}{2} = 0$

۱۱۷. اگر α و β ریشه‌های معادله $2x^2 - 3x + 1 = 0$ و $\alpha > \beta$ ، آنگاه معادله‌ای که 5α و 4β ریشه‌های آن باشد، کدام است؟ (آزمون کانون-۹۳)

- ① $x^2 - 15x + 9 = 0$ ② $x^2 + 7x + 1 = 0$ ③ $x^2 - 7x + 10 = 0$ ④ $x^2 + 15x + 9 = 0$

۱۱۸. اگر α و β ریشه‌های معادله $2x^2 - 3x - 4 = 0$ باشند، مجموعه‌ی جواب‌های کدام معادله، به صورت $\left\{ \frac{1}{\alpha} + 1, \frac{1}{\beta} + 1 \right\}$ است؟ (آزمون کانون-۹۳)

- ① $4x^2 - 5x + 1 = 0$ ② $4x^2 - 3x + 1 = 0$ ③ $4x^2 - 3x - 1 = 0$ ④ $4x^2 - 5x - 1 = 0$

۱۱۹. مجموع ضرایب معادله‌ی درجه‌ی دومی صفر است، کدام عدد همواره ریشه‌ی معادله است؟ (سراسری آسانساز-۷۲)

- ① -۱ ② صفر ③ $\frac{1}{2}$ ④ ۱

۱۲۰. کدام یک از مقادیر زیر ریشه‌ی معادله $150x^2 - 2x - 148 = 0$ است؟ (سراسری آسانساز-۶۲)

- ① $-\frac{2}{150}$ ② $-\frac{148}{150}$ ③ $\frac{2}{150}$ ④ $\frac{148}{150}$

۱۲۱. در معادله‌ی درجه‌ی دوم $(2m - 3)x^2 - 6x + (m + 3) = 0$ اگر یکی از جواب‌ها عدد یک باشد، جواب دیگر کدام است؟ (آزمون کانون-۹۴)

- ① ۵ ② -۵ ③ $\frac{7}{13}$ ④ $-\frac{7}{13}$

۱۲۲. اگر $x = 1$ یکی از ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $5x^2 - 3x + k = 0$ باشد، ریشه‌ی دیگر آن کدام است؟ (سراسری آسانساز-۸۳)

- ① -۰/۴ ② -۰/۳ ③ ۰/۳ ④ ۰/۴

۱۲۳. در معادله درجه دوم $6 = (x-1) + 2\sqrt{3}(x-1) + (x-1)^2$ ، بزرگ‌ترین جواب x کدام است؟ (سراسری آسانساز-۸۷)

- ① $4 - \sqrt{3}$ ② $2 - \sqrt{3}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ $2\sqrt{3}$

۱۲۴. بزرگترین جواب معادله‌ی $16(z-1)^2 - 8(z-1) - 2 = 0$ کدام است؟ (آزمون کانون-۹۲)

- ① $\frac{\sqrt{3}-1}{4}$ ② $\frac{1+\sqrt{3}}{4}$ ③ $\frac{5+\sqrt{3}}{4}$ ④ $\frac{5-\sqrt{3}}{4}$

۱۲۵. مجموع ریشه‌های معادله‌ی $x^6 - 6x^2 + 8 = 0$ کدام است؟ (آزمون کانون-۹۲)

- ① صفر ② ۱ ③ $-4 - 2\sqrt{2}$ ④ $4 + \sqrt{2}$

۱۲۶. تعداد جواب‌های حقیقی معادله‌ی $x^6 + 10x^2 + 9 = 0$ کدام است؟ (آزمون کانون-۹۲)

- ① صفر ② ۱ ③ ۲ ④ ۴

۱۲۷. مجموع مربع‌های جواب‌های معادله‌ی $x^4 - 6x^2 + 4 = 0$ کدام می‌باشد؟ (آزمون کانون-۹۳)

- ① ۴ ② ۶ ③ ۱۲ ④ ۲

گزینه ۴

عدد مورد نظر را x فرض کنیم، اگر به ۳ برابر عدد مورد نظر ۴ واحد اضافه کنیم، معادل $3x + 4$ می‌شود و از نصف این حاصل، همان عدد کم شود، معادل $x - \frac{3x+4}{2}$ می‌شود که برابر ۵ می‌باشد.

$$\frac{3x+4}{2} - x = 5 \Rightarrow \frac{3x+4-2x}{2} = 5 \Rightarrow x+4=10 \Rightarrow x=6$$

گزینه ۳

اگر سن علی را برابر x فرض کنیم، ۵ برابر سن علی به علاوه‌ی ۵ معادل $5x + 5$ می‌شود که برابر ۴۰ است. ابتدا سن علی x را می‌یابیم:

$$5x + 5 = 40 \Rightarrow 5x = 40 - 5 \Rightarrow 5x = 35 \Rightarrow x = \frac{35}{5} = 7$$

حال هنگامی که علی ۲۰ ساله می‌شود یعنی ۱۲ سال به سن کنونی او اضافه می‌شود، پس به سن پدر علی نیز ۱۲ سال اضافه می‌شود پس سن پدر او $53 = 40 + 12$ سال می‌شود.

گزینه ۳

اگر قیمت اولیه‌ی کالا را x فرض کنیم، $12/5$ درصد به قیمت کالا اضافه شده یعنی قیمت کالا برابر $x + \frac{12}{100}x$ شده است، داریم:

$$x + \frac{12}{100}x = 945 \Rightarrow \frac{100x + 125x}{100} = 945$$

$$\Rightarrow \frac{1125}{100}x = 945 \Rightarrow x = \frac{945 \times 100}{1125} = 840$$

گزینه ۲

اگر ارقام عدد دو رقمی را x و y در نظر بگیریم، مجموع ارقام معادل $x + y$ و تفاضل ارقام معادل $x - y$ می‌باشد، داریم:

$$\begin{cases} x + y = 12 \Rightarrow y = 12 - x & (1) \\ x - y = 4 \xrightarrow{(1)} x - (12 - x) = 4 \Rightarrow x - 12 + x = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2x = 16 \Rightarrow x = 8 \xrightarrow{(1)} y = 12 - 8 \Rightarrow y = 4$$

$$\Rightarrow xy = 8 \times 4 = 32$$

گزینه ۱

اگر دو عدد مورد نظر را x و y در نظر بگیریم، داریم:

$$xy - (x + y) = x - y \Rightarrow xy - x - y = x - y$$

$$\Rightarrow xy - x - y - x + y = 0 \Rightarrow xy - 2x = 0 \Rightarrow x(y - 2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 & \text{ق ق} \\ y - 2 = 0 \Rightarrow y = 2 & \text{ق ق} \end{cases}$$

گزینه ۳

یکی از اعداد را x و دیگری را y در نظر می‌گیریم، داریم:

$$\frac{2}{3}x = \frac{3}{4}y \xrightarrow{\times(12)} 12\left(\frac{2}{3}x\right) = 12\left(\frac{3}{4}y\right)$$

$$\Rightarrow 8x = 9y \Rightarrow x = \frac{9}{8}y \quad (1)$$

$$x + y = 136 \xrightarrow{(1)} \frac{9}{8}y + y = 136$$

$$\Rightarrow \frac{9+8}{8}y = 136 \Rightarrow \frac{17}{8}y = 136 \Rightarrow y = \frac{136 \times 8}{17} = 64$$

پاسخ سوالات تستی

گزینه ۱

ابتدا معادله را ساده می‌کنیم، داریم:

$$2(3x - 7) = -(2 + 4x) \Rightarrow 6x - 14 = -2 - 4x$$

$$\Rightarrow 6x - 14 + 2 + 4x = 0 \Rightarrow 10x - 12 = 0$$

$$\Rightarrow 10x = 12 \Rightarrow x = \frac{12}{10} = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$$

گزینه ۴

ابتدا معادله را به فرم معادله‌ی خطی $mx + n = 0$ ساده می‌کنیم، داریم:

$$a(x - 1) - 2bx + 2b = 0 \Rightarrow ax - a - 2bx + 2b = 0$$

$$\Rightarrow (a - 2b)x = a - 2b \Rightarrow x = \frac{a - 2b}{a - 2b} = 1$$

گزینه ۳

با توجه به عبارت صورت سؤال، اگر عدد مورد نظر را x در نظر بگیریم، ثلث مربع یک عدد برابر $\frac{x^2}{3}$ می‌باشد و قرینه عدد مورد نظر برابر $-x$ می‌باشد، داریم:

$$\frac{x^2}{3} = -x + 1 \Rightarrow x^2 = 3(-x + 1)$$

گزینه ۱

با استفاده از اتحاد چاق و لاغر معادله را ساده می‌کنیم، داریم:

$$(1 - x + x^2)(x + 1) = x(x^2 - 1) \Rightarrow x^3 + 1 = x^3 - x$$

$$\Rightarrow 1 = -x \Rightarrow x = -1 \text{ جواب دارد}$$

گزینه ۱

اگر عدد مورد نظر را x در نظر بگیریم، $\frac{5}{y}$ عدد مورد نظر به اضافه $\frac{5}{y}x + 18$ که برابر دو برابر آن عدد یعنی $2x$ می‌باشد، داریم:

$$\frac{5}{y}x + 18 = 2x \Rightarrow 2x - \frac{5}{y}x = 18 \Rightarrow \frac{14x}{y} - \frac{5x}{y} = 18$$

$$\Rightarrow \frac{14x - 5x}{y} = 18 \Rightarrow \frac{9x}{y} = 18 \Rightarrow x = \frac{7 \times 18}{9} = 14$$

گزینه ۳

اگر عدد مورد نظر را x در نظر بگیریم، حاصل ضرب عدد x در ۱۴ برابر که به اندازه‌ی ۸۴ واحد از حاصل ضرب عدد x در ۱۷ یعنی $17x$ کمتر است، پس داریم:

$$14(x) = 17x - 84 \Rightarrow 14x - 17x = -84 \Rightarrow -3x = -84$$

$$\Rightarrow x = \frac{-84}{-3} = 28$$

گزینه ۲

عدد مورد نظر را x فرض می‌کنیم. با توجه به فرض، تفاضل عدد مورد نظر از ۲۵ معادل $25 - x$ و ثلث مجموع عدد مورد نظر با ۲۵ معادل $\frac{x + 25}{3}$ است که باید با یکدیگر برابر باشند، یعنی:

$$25 - x = \frac{x + 25}{3} \Rightarrow 3 \times (25 - x) = 3 \times \frac{(x + 25)}{3}$$

$$\Rightarrow 75 - 3x = x + 25 \Rightarrow 75 - 25 = 3x + x \Rightarrow 40 = 4x$$

$$\Rightarrow x = \frac{40}{4} = 10$$

۱۴

گزینه ۳

ابتدا فرض می‌کنیم تعداد هر کدام از سکه‌ها x باشد، دقت کنید در صورت سؤال گفته شده تعداد هر سه نوع سکه با هم مساوی است.

$$5x + 10x + 25x = 240 \Rightarrow 40x = 240 \Rightarrow x = \frac{240}{40} = 6$$

پس تعداد هر کدام از سکه‌ها ۶ می‌باشد، پس تعداد سکه‌های

۱۰ تومانی ۶ عدد می‌باشد.

۱۵

گزینه ۲

اگر طول مستطیل را برابر x و عرض آن را y فرض کنیم، محیط مستطیل برابر $p = 2(x + y)$ می‌شود.

$$\begin{array}{l} \begin{array}{|c|} \hline x \\ \hline y \\ \hline \end{array} \Rightarrow p = 2(x + y) \xrightarrow{p=82} 2(x + y) = 82 \\ \Rightarrow x + y = 41 \Rightarrow x = 41 - y \quad (1) \end{array}$$

حال اگر از طول آن y واحد کم کنیم مستطیل تبدیل به مربع می‌شود، در این حالت داریم:

$$\begin{array}{l} \begin{array}{|c|} \hline x-y \\ \hline y \\ \hline \end{array} \Rightarrow y = x - y \Rightarrow x - y = y \end{array}$$

$$(1) \rightarrow (41 - y) - y = y \Rightarrow 41 - 2y = y$$

$$\Rightarrow 2y = 24 \Rightarrow y = 12$$

پس طول ضلع کوچکتر مستطیل برابر ۱۲ واحد می‌باشد.

۱۶

گزینه ۳

اگر مقدار مسافت طی شده توسط اتومبیل برحسب کیلومتر را x و هزینه‌ی این مسافت را C فرض کنیم، داریم:

$$C = 1500x + 6000 \xrightarrow{C=30000} 30000 = 1500x + 6000$$

$$\Rightarrow 1500x = 30000 - 6000 \Rightarrow 1500x = 24000 \Rightarrow x = \frac{24000}{1500} = 16$$

۱۷

گزینه ۱

اگر مسافتی را که ماشین طی کرده است را با x نشان دهیم، در مدت ۲ روز مبلغ $2 \times 20000 = 40000$ هزار تومان کرایه ماشین می‌باشد و هر کیلومتر مسافت برابر ۱۵۰ تومان می‌باشد. پس داریم:

$$150x + 60000 = 108000 \Rightarrow 150x = 108000 - 60000 = 48000$$

$$\Rightarrow x = \frac{48000}{150} = 320 \text{ کیلومتر}$$

۱۸

گزینه ۲

اگر طول شمع‌ها را x در نظر بگیریم، سرعت سوختن شمع اول برابر $\frac{x}{4}$ و سرعت شمع دوم برابر $\frac{x}{3}$ می‌باشد، اگر زمانی که طول شمع اول دو برابر طول شمع دوم می‌شود را برابر t در نظر بگیریم داریم:

$$x - \frac{x}{4}t = 2\left(x - \frac{x}{3}t\right) \Rightarrow x - \frac{x}{4}t = 2x - \frac{2x}{3}t$$

$$\Rightarrow \frac{2x}{3}t - \frac{xt}{4} = 2x - x$$

$$\Rightarrow \frac{8xt}{12} - \frac{3xt}{12} = x \Rightarrow \frac{5xt}{12} = x \Rightarrow t = \frac{12x}{5x} = \frac{12}{5} = 2\frac{2}{5}$$

۱۹

گزینه ۴

ابتدا مسافتی که علی طی می‌کند را به دست می‌آوریم، اگر مسافتی که علی طی می‌کند را با x نشان دهیم، ۱۵ برابر مسافت طی شده برابر ۱۵۰ می‌شود که این مقدار ۱۲ برابر مسافت مورد نظر به علاوه ۱۸ می‌باشد، که معادل $12x + 18$ می‌باشد، داریم:

$$15x = 12x + 18 \Rightarrow 15x - 12x = 18$$

$$\Rightarrow 3x = 18 \Rightarrow x = \frac{18}{3} = 6 \quad (1)$$

حال مسافتی که حمید طی می‌کند را برابر y در نظر می‌گیریم،

مسافتی که علی طی می‌کند برابر $y + \frac{y}{3}$ می‌باشد، در نتیجه

مسافتی که علی طی می‌کند برابر $\frac{4}{3}y$ می‌باشد. داریم:

$$(1) \rightarrow \frac{4}{3}y = 6 \Rightarrow y = \frac{2 \times 6}{3} = 4$$

پس مسافتی که حمید طی می‌کند برابر ۴ می‌باشد.

۲۰

گزینه ۱

اگر طول مستطیل را x و عرض آن را y فرض کنیم در حالت اول طول آن $x + 2$ و عرض آن $y - 1$ می‌شود که مساحت آن برابر مستطیل اولیه است.

$$xy = (x + 2)(y - 1) \Rightarrow xy = xy - x + 2y - 2$$

$$\Rightarrow xy - xy + x - 2y = -2 \Rightarrow x - 2y = -2 \quad (1)$$

در حالت دوم طول آن برابر $x - 2$ و عرض آن برابر $y + 2$ می‌شود، در این حالت نیز مساحت مستطیل برابر مساحت مستطیل اولیه است.

$$xy = (x - 2)(y + 2) \Rightarrow xy = xy + 2x - 2y - 4$$

$$\Rightarrow xy - xy - 2x + 2y = -4 \Rightarrow -2x + 2y = -4 \quad (2)$$

از حل معادله‌های (۱) و (۲) در یک دستگاه داریم:

$$(2), (1) \rightarrow \begin{cases} x - 2y = -2 \\ -2x + 2y = -4 \end{cases}$$

$$x - 2y - 2x + 2y = -6 \Rightarrow -x = -6 \Rightarrow x = 6 \quad (1)$$

$$6 - 2y = -2 \Rightarrow -2y = -2 - 6 = -8 \Rightarrow -2y = -8 \Rightarrow y = \frac{-8}{-2} = 4$$

$$\text{مساحت مستطیل} = xy = 6 \times 4 = 24$$

۲۱

گزینه ۴

اگر تعداد سکه‌های پنج تومانی را برابر x ، تعداد سکه‌های ۱۰ تومانی را برابر y و تعداد سکه‌های ۲۵ تومانی برابر z در نظر بگیریم داریم:

$$x = 2y \Rightarrow y = \frac{x}{2} \quad (1)$$

$$x = \frac{4}{3}z \Rightarrow z = \frac{3}{4}x \quad (2)$$

حال مبلغ پول داخل قلم را به دست می‌آوریم:

$$5x + 10y + 25z = 460 \xrightarrow{(2), (1)} 5x + 10 \times \frac{x}{2} + 25 \times \frac{3}{4}x = 460$$

$$\Rightarrow 5x + 5x + \frac{75}{4}x = 460 \Rightarrow 10x + \frac{75}{4}x = 460$$

$$\Rightarrow \frac{40}{4}x + \frac{75}{4}x = 460$$

$$\Rightarrow \frac{115x}{4} = 460 \Rightarrow x = \frac{4 \times 460}{115} = 16$$

حال تعداد سکه‌های ۱۰ تومانی و ۲۵ تومانی را به دست می‌آوریم:

$$y = \frac{x}{2} = \frac{16}{2} = 8$$

$$z = \frac{3}{4}x = \frac{3}{4} \times 16 = 12$$

$$\Rightarrow \text{تعداد کل سکه‌ها} = x + y + z = 16 + 8 + 12 = 36$$

گزینه ۲ .۲۲

ابتدا با استفاده از خاصیت فاکتورگیری معادله را ساده می‌کنیم:

$$3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow 3x(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 3x = 0 \Rightarrow x = \frac{0}{3} = 0 \\ x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \end{cases}$$

پس مجموع جواب‌های معادله $2+0=2$ می‌باشد.

گزینه ۴ .۲۸

با استفاده از اتحاد مزدوج ابتدا معادله را تجزیه می‌کنیم:

$$9x^2 - 1 = 0 \Rightarrow (3x)^2 - 1^2 = 0 \\ \Rightarrow (3x-1)(3x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 3x-1=0 \Rightarrow 3x=1 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \\ 3x+1=0 \Rightarrow 3x=-1 \Rightarrow x = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

پس ریشه‌های معادله $\frac{1}{3}$ و $-\frac{1}{3}$ می‌باشد که حاصل ضرب آن‌ها

$$-\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = -\frac{1}{9}$$

گزینه ۲ .۲۹

ابتدا معادله را ساده‌تر می‌کنیم، داریم:

$$ax^2 + 6 = 2x^2 + 3a \Rightarrow ax^2 - 2x^2 = 3a - 6 \\ \Rightarrow (a-2)x^2 = 3(a-2) \xrightarrow{\text{حالت با استفاده از روش ریشه‌گیری داریم}} \\ x^2 = \frac{3(a-2)}{a-2} \xrightarrow{a-2 \neq 0} x^2 = 3 \Rightarrow x = \sqrt{3} \text{ یا } x = -\sqrt{3}$$

که معادله در این حالت دو جواب دارد.

گزینه ۴ .۳۰

ابتدا معادله را ساده‌تر می‌کنیم، داریم:

$$7x^2 + 6x + 4 = 3x^2 + 6x + 5 \\ \Rightarrow 7x^2 + 6x + 4 - 3x^2 - 6x - 5 = 0 \Rightarrow 4x^2 - 1 = 0 \\ \text{حال با استفاده از روش ریشه‌گیری داریم:} \\ x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \frac{1}{2} \text{ یا } x = -\frac{1}{2}$$

گزینه ۲ .۳۱

در معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2 + bx + c = 0$ هنگامی دو ریشه‌ی

قرینه داریم که اولاً ضریب x یعنی $b = 0$ باشد، ثانیاً $-\frac{c}{a}$ مقداری مثبت باشد.

$$\text{ضریب } x \text{ باید صفر باشد} \\ x^2 - (m-1)x - m = 0 \xrightarrow{m-1=0} m-1=0 \Rightarrow m=1 \\ \text{با استفاده از روش ریشه‌گیری} \\ \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \\ x = 1 \text{ یا } x = -1$$

گزینه ۴ .۲۲

برای اینکه معادله‌ی مورد نظر درجه دوم نباشد باید بعد از ساده‌سازی ضریب x^2 معادله برابر صفر باشد، در این حالت داریم:

$$mx^2 + (m-1)x - 4x^2 - 8 = 0 \\ \Rightarrow (m-4)x^2 + (m-1)x - 8 = 0 \xrightarrow{m-4=0} m=4 \\ \text{که یک معادله‌ی درجه‌ی اول است. } (4-1)x - 8 = 0 \Rightarrow 3x - 8 = 0$$

گزینه ۱ .۲۳

در حالت کلی فرم استاندارد معادله‌ی درجه دوم به صورت $ax^2 + bx + c = 0$ می‌باشد، که a برابر ضریب x^2 و b ضریب x و c عدد ثابت می‌باشد، برای حل این مسأله ابتدا معادله را به فرم استاندارد در می‌آوریم:

$$x(3x-2) = 7x+6 \Rightarrow 3x^2 - 2x = 7x+6 \\ \Rightarrow 3x^2 - 2x - 7x - 6 = 0 \\ \Rightarrow 3x^2 - 9x - 6 = 0 \\ \text{مقایسه با فرم استاندارد} \\ \begin{cases} a=3 \\ b=-9 \\ c=-6 \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{3}{-6} = -\frac{1}{2}$$

گزینه ۲ .۲۴

اگر در حالت کلی حاصل ضرب چند عبارت برابر صفر باشد، هر یک از عبارت‌ها می‌تواند برابر صفر باشد، یا به عبارت دیگر اگر $a \times b = 0$ باشد نتیجه می‌گیریم: $b = 0$ یا $a = 0$ حال با توجه به این موضوع داریم:

$$(2x-1)(x+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} (2x-1)=0 \Rightarrow 2x=1 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \\ (x+3)=0 \Rightarrow x = -3 \end{cases}$$

پس مجموعه جواب معادله به فرم $\{-3, \frac{1}{2}\}$ می‌باشد.

گزینه ۱ .۲۵

با استفاده از اتحاد مربع مجموع دو جمله‌ای معادله را ساده‌تر می‌کنیم، داریم:

$$x^2 + 10x + 25 = (x+5)^2 = 0 \Rightarrow (x+5)(x+5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -5 \\ x = -5 \end{cases}$$

که دو ریشه با یکدیگر برابرند و معادله ریشه‌ی مضاعف دارد، در این حالت مجموعه جواب به صورت $\{-5, -5\}$ یا $\{-5\}$ می‌باشد.

گزینه ۳ .۲۶

ابتدا با استفاده از اتحاد مربع تفاضل دو جمله‌ای معادله را ساده‌تر می‌کنیم، داریم:

$$-1+6x-9x^2 = 0 \Rightarrow -(1-6x+9x^2) = 0 \\ 9x^2 - 6x + 1 = 0 \Rightarrow (3x)^2 - 2(3x) + 1^2 = 0 \\ \Rightarrow (3x-1)^2 = 0 \Rightarrow (3x-1)(3x-1) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

که معادله دارای یک ریشه‌ی مضاعف یا دو ریشه‌ی مساوی است.

گزینه ۳ ۳۲

با استفاده از روش ریشه‌گیری داریم:

$$9(x-2)^2 - 16 = 0 \Rightarrow 9(x-2)^2 = 16 \Rightarrow (x-2)^2 = \frac{16}{9}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{ریشه‌ی بزرگتر } (x-2) = \frac{4}{3} \Rightarrow x = \frac{4}{3} + 2 = \frac{4}{3} + \frac{6}{3} = \frac{10}{3} \\ \text{ریشه‌ی کوچک‌تر } (x-2) = -\frac{4}{3} \Rightarrow x = 2 - \frac{4}{3} = \frac{6}{3} - \frac{4}{3} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

پس ریشه بزرگتر معادله $\frac{10}{3}$ می‌باشد.

گزینه ۴ ۳۳

اگر طول مستطیل را برابر x و عرض آن را y در نظر بگیریم، داریم:

$$\Rightarrow x = 2y$$

مساحت مستطیل برابر حاصل ضرب طول در عرض مستطیل است. اگر مساحت مستطیل را با S نمایش دهیم:

$$S = xy \xrightarrow{x=2y} S = (2y)y \xrightarrow{S=22} 22 = 2y^2 \Rightarrow y^2 = \frac{22}{2} = 11$$

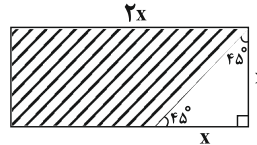
$$\Rightarrow \begin{cases} \text{ق ق } y = 4 \\ \text{غ غ ق } y = -4 \end{cases}$$

دقت کنید عرض مستطیل نمی‌تواند عددی منفی باشد پس $y = 4$ قابل قبول است. در این حالت طول مستطیل برابر ۸ واحد می‌باشد. پس محیط آن برابر است با:

$$P = 2(x+y) \Rightarrow P = 2(8+4) = 2 \times 12 = 24$$

گزینه ۳ ۳۴

با توجه به شکل مساحت قسمت هاشور خورده برابر است با:



مساحت مثلث - مساحت مستطیل = مساحت قسمت هاشور خورده

$$\begin{aligned} \text{مساحت قسمت هاشور خورده} &= 2x \times x - \frac{1}{2}(x)(x) = 2x^2 - \frac{x^2}{2} \\ &= \frac{4x^2 - x^2}{2} = \frac{3x^2}{2} \end{aligned}$$

$$\text{مساحت قسمت هاشور خورده} = \frac{3x^2}{2} = 150 \Rightarrow x^2 = \frac{2 \times 150}{3} = 100$$

$$x^2 = 100 \xrightarrow{\text{با استفاده از روش ریشه‌گیری}} \begin{cases} \text{ق ق } x = 10 \text{ cm} \\ \text{غ غ ق } x = -10 \end{cases}$$

عرض مستطیل نمی‌تواند عددی منفی باشد پس $x = 10 \text{ cm}$ قابل قبول است.

گزینه ۳ ۳۵

ابتدا با استفاده از اتحاد مزدوج معادله را تجزیه می‌کنیم، داریم:

$$(2x+1)^2 - 5 = 0 \Rightarrow ((2x+1) - \sqrt{5})(2x+1) + \sqrt{5} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (2x+1) - \sqrt{5} = 0 \Rightarrow 2x = \sqrt{5} - 1 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \\ (2x+1) + \sqrt{5} = 0 \Rightarrow 2x = -\sqrt{5} - 1 \Rightarrow x = \frac{-\sqrt{5}-1}{2} \end{cases}$$

گزینه ۱ ۳۶

اگر دو عدد را x و y در نظر بگیریم، داریم:

$$\frac{x}{y} = \frac{3}{2} \Rightarrow x = \frac{3}{2}y \quad (1)$$

$$x^2 + y^2 = 52 \xrightarrow{(1)} \left(\frac{3}{2}y\right)^2 + y^2 = 52 \Rightarrow \frac{9}{4}y^2 + y^2 = 52$$

$$\Rightarrow \frac{9y^2 + 4y^2}{4} = 52 \Rightarrow \frac{13y^2}{4} = 52$$

$$\Rightarrow y^2 = \frac{4 \times 52}{13} = \frac{4 \times 4 \times 13}{13} = 16$$

با استفاده از روش ریشه‌گیری معادله را حل می‌کنیم، داریم:

$$\Rightarrow y^2 = 16 \Rightarrow y = 4 \text{ یا } y = -4$$

چون دو عدد مثبت در نظر گرفته شده‌اند پس $y = 4$ قابل قبول است، که در این حالت از معادله (۱) داریم:

$$x = \frac{3}{2} \times 4 = 6 \Rightarrow x + y = 6 + 4 = 10$$

گزینه ۴ ۳۷

با استفاده از اتحاد مربع تفاضل دو جمله داریم:

$$2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0 \Rightarrow (\sqrt{2}x)^2 - 2(\sqrt{2}x) + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (\sqrt{2}x - 1)^2 = 0 \Rightarrow \sqrt{2}x - 1 = 0 \Rightarrow \sqrt{2}x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

گزینه ۱ ۳۸

با استفاده از روش فاکتورگیری معادله را تجزیه می‌کنیم:

$$(2x-1)^2 - 5(2x-1) = 0 \Rightarrow (2x-1)((2x-1) - 5) = 0$$

$$\Rightarrow (2x-1)(2x-6) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x-1=0 \Rightarrow 2x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{2} \\ 2x-6=0 \Rightarrow 2x=6 \Rightarrow x=\frac{6}{2}=3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{مجموع جواب‌ها} = 3 + \frac{1}{2} = \frac{6}{2} + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$$

گزینه ۳ .۴۱

ابتدا با استفاده از روش فاکتورگیری معادله را تجزیه می‌کنیم:

$$\begin{aligned}(x+1)(x-5)+12(x+1) &= 0 \Rightarrow (x+1)((x-5)+12) = 0 \\ \Rightarrow (x+1)(x+7) &= 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} x+1=0 \Rightarrow x=-1 \\ x+7=0 \Rightarrow x=-7 \end{cases} \\ \Rightarrow \text{ریشه‌ها حاصل ضرب ریشه‌ها} &= (-7) \times (-1) = 7\end{aligned}$$

گزینه ۲ .۴۲

ابتدا با استفاده از اتحاد مزدوج معادله را تجزیه می‌کنیم، داریم:

$$\begin{aligned}(50x+28)^2 &= (37x+2)^2 \Rightarrow (50x+28)^2 - (37x+2)^2 = 0 \\ \Rightarrow ((50x+28)-(37x+2))((50x+28)+(37x+2)) &= 0 \\ \Rightarrow (13x+26)(87x+30) &= 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} 13x+26=0 \Rightarrow 13x=-26 \Rightarrow x=-\frac{26}{13}=-2 \\ 87x+30=0 \Rightarrow 87x=-30 \Rightarrow x=-\frac{30}{87}=-\frac{10}{29} \end{cases}\end{aligned}$$

ریشه‌ی کوچک‌تر $x = -2$ می‌باشد.

گزینه ۱ .۴۳

با استفاده از روش فاکتورگیری ابتدا معادله را تجزیه می‌کنیم، داریم:

$$\begin{aligned}\left(\frac{x}{3}-1\right)^2 - 25\left(\frac{x}{3}-1\right) &= 0 \Rightarrow \left(\frac{x}{3}-1\right)\left(\frac{x}{3}-1-25\right) = 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{x}{3}-1\right)^2 = 0 & (1) \\ \left(\frac{x}{3}-1\right)^2 - 25 = 0 & (2) \end{cases}\end{aligned}$$

حال معادله‌های (۱) و (۲) را جداگانه حل می‌کنیم:

$$(1): \left(\frac{x}{3}-1\right)^2 = 0 \Rightarrow \frac{x}{3}-1=0 \Rightarrow \frac{x}{3}=1 \Rightarrow x=3$$

معادله‌ی (۲) را با استفاده از اتحاد مزدوج تجزیه می‌کنیم:

$$\begin{aligned}(2): \left(\frac{x}{3}-1\right)^2 - 25 = 0 &\Rightarrow \left(\frac{x}{3}-1\right) - 5 = 0 \Rightarrow \left(\frac{x}{3}-1\right) + 5 = 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{3}-1-5=0 \Rightarrow \frac{x}{3}=6 \Rightarrow x=18 \\ \frac{x}{3}-1+5=0 \Rightarrow \frac{x}{3}=-4 \Rightarrow x=-12 \end{cases}\end{aligned}$$

پس مجموع ریشه‌های معادله برابر است با:

$$2+3+18-12=9$$

گزینه ۲ .۴۴

ابتدا معادله را با استفاده از روش فاکتورگیری تجزیه می‌کنیم، داریم:

$$\begin{aligned}x^2+x^2-4x-4 &= 0 \Rightarrow x^2(x+1)-4(x+1) = 0 \\ \Rightarrow (x+1)(x^2-4) &= 0\end{aligned}$$

حال با استفاده از اتحاد مزدوج معادله را ساده‌تر می‌کنیم:

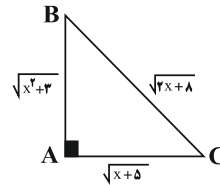
$$\Rightarrow (x+1)(x-2)(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x+1=0 \Rightarrow x=-1 \\ x+2=0 \Rightarrow x=-2 \\ x-2=0 \Rightarrow x=2 \end{cases}$$

حال مجموع ریشه‌ها را می‌یابیم:

$$x(\text{مجموع ریشه‌ها}) = -1-2+2 = -1$$

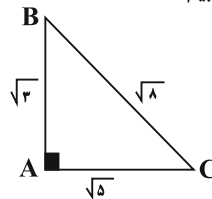
گزینه ۱ .۳۹

با استفاده از رابطه‌ی فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه ابتدا رابطه‌ی بین اضلاع مثلث را می‌یابیم:



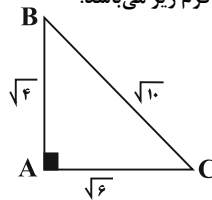
$$\begin{aligned}\Rightarrow BC^2 &= AB^2 + AC^2 \\ \Rightarrow (\sqrt{2x+8})^2 &= (\sqrt{x^2+3})^2 + (\sqrt{x+5})^2 \\ \Rightarrow 2x+8 &= x^2+3+x+5 \\ \Rightarrow x^2+3+x+5-2x-8 &= 0 \Rightarrow x^2-x=0 \Rightarrow x(x-1)=0 \\ \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x-1=0 \Rightarrow x=1 \end{cases}\end{aligned}$$

حال به ازای $x=0$ اضلاع مثلث را می‌یابیم:



$$S = \frac{1}{2} AB \times AC \Rightarrow S = \frac{1}{2} \sqrt{3} \times \sqrt{5} = \frac{\sqrt{15}}{2}$$

حال اگر $x=1$ در نظر بگیریم مثلث به فرم زیر می‌باشد:

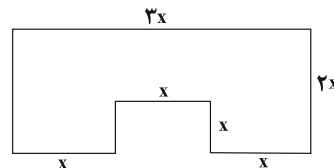


$$\Rightarrow \text{مساحت مثلث} = \frac{1}{2} \times \sqrt{4} \times \sqrt{6} = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{6} = \sqrt{6}$$

پس مساحت مثلث $\sqrt{6}$ یا $\frac{\sqrt{15}}{2}$ می‌باشد.

گزینه ۱ .۴۰

با توجه به شکل ابتدا مساحت و محیط شکل را جداگانه به دست می‌آوریم:



مساحت مربع - مساحت مستطیل = مساحت شکل

$$S = 3x \times 2x - x \times x = 6x^2 - x^2 = 5x^2$$

$$P = 3x + 2x + 2x + x + x + x + x = 12x$$

$$\Rightarrow S = P \Rightarrow 5x^2 = 12x \Rightarrow 5x^2 - 12x = 0$$

این معادله را از روش تجزیه حل می‌کنیم، داریم:

$$\begin{aligned}x(\text{غ ق ق}) &= 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ 5x-12=0 \Rightarrow x=\frac{12}{5}=2\frac{2}{5} \end{cases}\end{aligned}$$

۴۵

گزینه ۲

مجموعه جواب معادله برابر مجموعه A می‌باشد، پس ابتدا معادله را حل می‌کنیم. معادله را با استفاده از اتحاد جمله مشترک تجزیه می‌کنیم، داریم:

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow x^2 + (3-1) + (3)(-1) = 0 \\ \Rightarrow (x+3)(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x+3=0 \Rightarrow x=-3 \\ x-1=0 \Rightarrow x=1 \end{cases}$$

پس مجموعه‌ی جواب معادله که همان مجموعه‌ی A می‌باشد به صورت $\{-3, 1\}$ می‌باشد.

۴۶

گزینه ۱

ابتدا با استفاده از اتحاد جمله مشترک معادله را تجزیه می‌کنیم، داریم:

$$4x^2 - 4x - 3 = 0 \Rightarrow (2x)^2 - 2(2x) - 3 = 0 \\ \Rightarrow (2x)^2 + (-3+1)(2x) + (-3)(+1) = 0 \\ \Rightarrow (2x-2)(2x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x-2=0 \Rightarrow 2x=2 \Rightarrow x=\frac{2}{2} \\ 2x+1=0 \Rightarrow 2x=-1 \Rightarrow x=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

پس مجموعه جواب معادله به صورت $\{-\frac{1}{2}, \frac{2}{2}\}$ است.

۴۷

گزینه ۲

اگر عدد مورد نظر را x در نظر بگیریم مجذور آن برابر می‌باشد، داریم:

$$x^2 = x + 42 \Rightarrow x^2 - x - 42 = 0 \\ \text{با استفاده از اتحاد جمله مشترک معادله را تجزیه می‌کنیم:} \\ x^2 - x - 42 = 0 \Rightarrow x^2 + (-7+6)x + (-7)(+6) = 0 \\ \Rightarrow (x-7)(x+6) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-7=0 \Rightarrow x=7 \Rightarrow x^2+x=7^2+7=56 \\ x+6=0 \Rightarrow x=-6 \Rightarrow x^2+x=(-6)^2+(-6)=30 \end{cases}$$

که با توجه به گزینه‌ها گزینه‌ی «۲» پاسخ صحیح است.

۴۸

گزینه ۲

اگر دو عدد طبیعی متوالی را به ترتیب x و x+1 در نظر بگیریم، داریم:

$$x^2 + (x+1)^2 = 25 \\ \text{حال برای حل این معادله ابتدا با استفاده از اتحاد مربع مجموع دو جمله، معادله را ساده تر می‌کنیم:}$$

$$x^2 + x^2 + 2x + 1 = 25 \Rightarrow 2x^2 + 2x + 1 - 25 = 0 \\ \Rightarrow 2x^2 + 2x - 24 = 0$$

طرفین معادله را به ۲ تقسیم می‌کنیم:

$$x^2 + x - 12 = 0 \\ \text{حال با استفاده از اتحاد جمله مشترک معادله را تجزیه می‌کنیم:}$$

$$x^2 + (4-3) + (4)(-3) = 0 \Rightarrow (x+4)(x-3) = 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} x+4=0 \Rightarrow x=-4 \\ x-3=0 \Rightarrow x=3 \end{cases}$$

چون x عدد طبیعی می‌باشد پس مقدار x=3 قابل قبول می‌باشد و دو عدد مورد نظر به ترتیب ۳ و ۴ می‌باشند که عدد کوچکتر همان x=۳ می‌باشد.

۴۹

گزینه ۴

برای اینکه $x=1$ ریشه‌ی معادله باشد پس در معادله صدق می‌کند، ابتدا با جایگذاری $x=1$ در معادله داریم:

$$x^2 + a^2x^2 - 2ax + 1 = 0 \xrightarrow{x=1} 1 + a^2(1)^2 - 2a(1) + 1 = 0 \\ \Rightarrow a^2 - 2a + 2 = 0$$

حال برای اینکه مقادیر a را بیابیم می‌بایست این معادله درجه‌ی دوم برحسب a را حل کنیم که با استفاده از اتحاد جمله مشترک معادله را تجزیه می‌کنیم و داریم:

$$a^2 + (-2-1)a + (-2)(-1) = 0 \Rightarrow (a-2)(a-1) = 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} a-2=0 \Rightarrow a=2 \\ a-1=0 \Rightarrow a=1 \end{cases}$$

پس مقادیر قابل قبول برای a، ۱ و ۲ می‌باشند.

۵۰

گزینه ۲

اگر $x=\alpha$ و $x=\beta$ ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم باشند در این صورت معادله‌ی درجه‌ی دوم می‌تواند به فرم $a(x-\alpha)(x-\beta)=0$ باشد که در آن مقدار ثابتی است.

حال اگر ریشه‌های معادله $x=-\frac{3}{2}$ و $x=2$ باشند، داریم:

$$a(x - (-\frac{3}{2}))(x - 2) = 0 \Rightarrow a(x + \frac{3}{2})(x - 2) = 0$$

$$\text{با استفاده از اتحاد جمله مشترک} \Rightarrow a(x^2 + (\frac{3}{2}-2)x + (\frac{3}{2})(-2)) = 0$$

$$\Rightarrow a(x^2 - \frac{x}{2} - 3) = 0 \xrightarrow{\text{اگر فرض کنیم } a=2} 2(x^2 - \frac{x}{2} - 3) = 0 \\ \Rightarrow 2x^2 - x - 6 = 0$$

که اگر آن را با فرم $ax^2 + bx + c = 0$ مقایسه کنیم، داریم:

$$\begin{cases} a=2 \\ b=-1 \Rightarrow a+b+c=2-1-6=-5 \\ c=-6 \end{cases}$$

۵۱

گزینه ۳

اگر $x=\frac{1}{2}$ و $x=-1$ جواب‌های معادله‌ی درجه دومی باشند، معادله به صورت زیر می‌تواند باشد:

$$a(x - \frac{1}{2})(x - (-1)) = 0 \Rightarrow a(x - \frac{1}{2})(x + 1) = 0 \Rightarrow$$

با استفاده از اتحاد جمله مشترک داریم:

$$a(x^2 + (1 - \frac{1}{2})x + (-\frac{1}{2})(1)) = 0 \Rightarrow a(x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}) = 0$$

حال اگر $a=2$ فرض کنیم، داریم:

$$2(x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}) = 0 \Rightarrow 2x^2 + x - 1 = 0$$

۵۲

گزینه ۱

برای حل این معادله به روش تجزیه اتحاد جمله مشترک ابتدا مربع جمله‌ی مشترک را می‌سازیم، برای ساختن مربع جمله مشترک طرفین معادله را در ۳ ضرب می‌کنیم:

$$3x^2 + 5x - 2 = 0 \Rightarrow 9x^2 + 15x - 6 = 0 \Rightarrow (3x)^2 + 5(3x) - 6 = 0 \\ \Rightarrow (3x)^2 + (6-1)(3x) + (6)(-1) = 0 \Rightarrow (3x+6)(3x-1) = 0$$

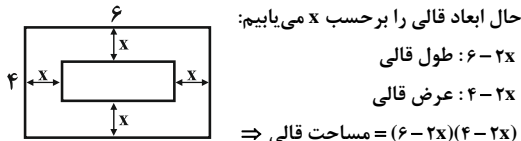
$$\Rightarrow \begin{cases} 3x+6=0 \Rightarrow 3x=-6 \Rightarrow x=\frac{-6}{3}=-2 \\ 3x-1=0 \Rightarrow 3x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{3} \end{cases}$$

حال برای یافتن قدرمطلق تفاضل جواب‌ها داریم:

$$|-2 - \frac{1}{3}| = |-\frac{6}{3} - \frac{1}{3}| = |-\frac{7}{3}| = \frac{7}{3}$$

گزینه ۲ .۵۵

با توجه به شکل زیر فاصله‌ی هر طرف قالی تا دیوار اتاق را برابر x فرض می‌کنیم، داریم:



حال ابعاد قالی را بر حسب x می‌یابیم:
طول قالی: $6-2x$
عرض قالی: $4-2x$
 \Rightarrow مساحت قالی $= (6-2x)(4-2x)$
 \Rightarrow مساحت قالی $= 8 = (6-2x)(4-2x)$

با استفاده از اتحاد جمله مشترک ابتدا معادله را ساده‌تر می‌کنیم.

$$(-2x)^2 + (6+4)(-2x) + 24 = 8 \Rightarrow 4x^2 - 20x + 24 - 8 = 0$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 20x + 16 = 0$$

طرفین معادله بر ۴ تقسیم می‌کنیم:

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

حال با استفاده از اتحاد جمله مشترک معادله را تجزیه می‌کنیم:

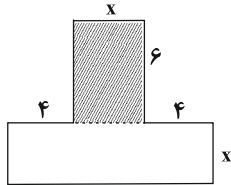
$$x^2 + (-1-4)x + (-1)(-4) = 0 \Rightarrow (x-1)(x-4) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \Rightarrow x=1 & \text{ق ق غ} \\ x-4=0 \Rightarrow x=4 & \text{ق ق غ} \end{cases}$$

$x=4$ قابل قبول نمی‌باشد زیرا ابعاد قالب منفی می‌شود که درست نیست پس $x=1$ قابل قبول است و فاصله‌ی قالی از هر طرف اتاق برابر ۱ متر می‌باشد.

گزینه ۴ .۵۶

با توجه به شکل داریم:



$$\text{مساحت شکل} : S = 6 \times x + x(x+4+4) = 240$$

$$6x + x^2 + 8x = 240 \Rightarrow x^2 + 14x - 240 = 0$$

حال این معادله را از روش تجزیه اتحاد جمله مشترک حل می‌کنیم:

$$x^2 + (24-10)x + (24)(-10) = 0 \Rightarrow (x+24)(x-10) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+24=0 \Rightarrow x=-24 \\ x-10=0 \Rightarrow x=10 \end{cases}$$

دقت کنید طول نمی‌تواند مقداری منفی باشد پس $x=10$ سانتی‌متر قابل قبول است.

گزینه ۳ .۵۷

دو عدد مورد نظر را به ترتیب x و y در نظر می‌گیریم، داریم:

$$x = 2y \quad (1) \quad (2), (1) \rightarrow (2y)^2 = y^2 \Rightarrow 4y^2 = y^2$$

$$x^2 = y^2 \quad (2)$$

$$\Rightarrow y^2 - 4y^2 = 0 \Rightarrow y^2(y-4) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y^2 = 0 \Rightarrow y = 0 & \text{ق ق غ} \\ y-4 = 0 \Rightarrow y = 4 & \text{ق ق غ} \end{cases}$$

چون دو عدد مورد نظر غیر صفر می‌باشد پس $y=4$ قابل قبول است که در این حالت x برابر است با:

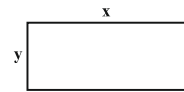
$$x = 2 \times 4 = 8$$

$$\Rightarrow y = \frac{x+y}{2} = \frac{8+4}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

میانگین دو عدد x و y

گزینه ۳ .۵۳

طول زمین را x و عرض آن را y در نظر می‌گیریم، طبق فرض صورت سؤال $x-y=2$ می‌باشد، داریم:



$$\text{مساحت زمین} : S = xy \xrightarrow{x-y=2} S = x(x-2)$$

$$\xrightarrow{S=35} x(x-2) = 35 \Rightarrow x^2 - 2x = 35 \Rightarrow x^2 - 2x - 35 = 0$$

حال این معادله را به روش تجزیه اتحاد جمله مشترک حل می‌کنیم:

$$x^2 + (-7+5)x + (-7)(5) = 0 \Rightarrow (x-7)(x+5) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-7=0 \Rightarrow x=7 & \text{ق ق غ} \\ x+5=0 \Rightarrow x=-5 & \text{ق ق غ} \end{cases}$$

چون طول مستطیل نمی‌تواند منفی باشد پس $x=7$ قابل قبول است پس عرض مستطیل برابر $y=7-2=5$ می‌باشد، حال برای یافتن محیط مستطیل داریم:

$$P = 2(x+y) \Rightarrow P = 2(7+5) = 2 \times 12 = 24$$

گزینه ۲ .۵۴

با توجه به شکل زیر چون حداقل طول طناب را می‌خواهیم پس باید یک طرف طول زمین در سمت رودخانه قرار گیرد، اگر طول مستطیل را x و عرض آن را y در نظر بگیریم طبق فرض سؤال

$x-y=5$ می‌باشد، داریم:

$$S = xy \xrightarrow{y=x-5} S = x(x-5) \xrightarrow{S=300}$$

$$x(x-5) = 300 \Rightarrow x^2 - 5x = 300 \Rightarrow x^2 - 5x - 300 = 0$$

با استفاده از اتحاد جمله مشترک این معادله را تجزیه می‌کنیم، داریم:

$$x^2 + (15-20)x + (15)(-20) = 0 \Rightarrow (x-20)(x+15) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-20=0 \Rightarrow x=20 & \text{ق ق غ} \\ x+15=0 \Rightarrow x=-15 & \text{ق ق غ} \end{cases}$$

چون طول مستطیل منفی نمی‌تواند باشد پس $x=20$ قابل قبول است در این حالت عرض زمین برابر است با:

$$y = 20 - 5 = 15$$

پس طول طناب مورد نیاز برابر است با:

$$x+y+y = x+2y = 20+2(15) = 50$$

طول طناب $= x+x+y = 2x+y = 2(20)+15 = 55$

چون مسأله گفته است حداقل، پس ۵۰ مورد قبول است.

۵۸

گزینه ۲

برای حل معادله‌ی درجه‌ی دوم به روش مربع کامل اگر ضریب x^2 عددی غیر از یک بود، ابتدا طرفین معادله را به ضریب x^2 تقسیم می‌کنیم سپس ضریب x را نصف می‌کنیم و در نهایت مربع حاصل را به طرفین معادله اضافه می‌کنیم. در این معادله چون ضریب x^2 برابر یک می‌باشد پس نیازی به تقسیم کردن طرفین معادله به ضریب x^2 نمی‌باشد.

$$x^2 - 6x = k$$

ضریب x در این معادله -6 می‌باشد، داریم:

$$-\frac{6}{2} = -3 \Rightarrow (-3)^2 = 9$$

پس به طرفین معادله عدد ۹ را اضافه می‌کنیم.

۵۹

گزینه ۳

ابتدا ۱- را به سمت راست تساوی منتقل می‌کنیم و سپس به طرفین تساوی مربع نصف ضریب x یعنی $(-\frac{10}{2})^2 = 25$ را اضافه می‌کنیم.

$$x^2 - 10x = 1 \Rightarrow x^2 - 10x + 25 = 25 + 1 \Rightarrow (x - 5)^2 = 26$$

حال با مقایسه معادله‌ی به‌دست آمده با فرم معادله صورت سؤال داریم:

$$\begin{cases} h = -5 \\ k = 26 \end{cases} \Rightarrow h + k = -5 + 26 = 21$$

۶۰

گزینه ۴

(a) ابتدا عدد ۲۴ را به سمت راست تساوی منتقل کرده و طرفین را به ضریب x^2 تقسیم می‌کنیم.

$$2x^2 + 14x + 24 = 0 \Rightarrow 2x^2 + 14x = -24 \xrightarrow{:(2)} x^2 + 7x = -12$$

باید به طرفین مربع نصف ضریب x را اضافه کنیم:

$$\left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{49}{4}$$

(b) ابتدا عدد ۵ را به سمت راست تساوی منتقل می‌کنیم

$$x^2 - 6x + 5 = 0 \Rightarrow x^2 - 6x = -5$$

باید به طرفین تساوی مربع نصف ضریب x را اضافه کنیم:

$$\left(\frac{-6}{2}\right)^2 = (-3)^2 = 9$$

$$= \frac{13}{4} \quad \left| \frac{49}{4} - 9 \right| = \frac{49 - 36}{4} = \frac{13}{4}$$

۶۱

گزینه ۲

ابتدا ۲- را به سمت راست تساوی می‌گیریم و سپس به طرفین تساوی مربع نصف ضریب x یعنی $(\frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4}$ را اضافه می‌کنیم، داریم:

$$x^2 + 3x - 2 = 0 \Rightarrow x^2 + 3x = 2$$

$$\Rightarrow x^2 + 3x + \frac{9}{4} = \frac{9}{4} + 2 \Rightarrow \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{17}{4}$$

برای حل معادله به روش ریشه‌گیری باید از عدد $\frac{17}{4}$ جذر گرفته شود.

۶۲

گزینه ۲

ابتدا طرفین معادله را به ضریب x^2 یعنی -2 تقسیم می‌کنیم، داریم:

$$4x - 2x^2 = 0 \Rightarrow -2x^2 + 4x = 0 \xrightarrow{:(-2)} x^2 - 2x = 0$$

حال باید مربع نصف ضریب x یعنی $(\frac{-2}{2})^2 = 1$ را به طرفین تساوی اضافه می‌کنیم، پس عدد ۱ باید به طرفین معادله اضافه شود.

۶۳

گزینه ۲

برای به‌دست آوردن مبین یا دلتای (Δ) معادله‌ی درجه دوم، ابتدا معادله را به فرم استاندارد $ax^2 + bx + c = 0$ درآورده سپس از رابطه‌ی $\Delta = b^2 - 4ac$ ، دلتا را به‌دست می‌آوریم، داریم:

$$6x^2 - x - 12 = 0 \xrightarrow{\text{مقایسه با فرم استاندارد}} ax^2 + bx + c = 0$$

$$\begin{cases} a = 6 \\ b = -1 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(6)(-12) \Rightarrow \Delta = 289 \\ c = -12 \end{cases}$$

۶۴

گزینه ۱

برای حل معادله‌ی درجه‌ی دوم به روش کلی ابتدا معادله را به فرم استاندارد $ax^2 + bx + c = 0$ تبدیل کرده، سپس مبین یا دلتا را حساب می‌کنیم و در نهایت ریشه‌ها را از رابطه‌های زیر به‌دست می‌آوریم:

$$x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

یا

$$x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$6x^2 - x - 35 = 0 \xrightarrow{\text{مقایسه با فرم استاندارد}} ax^2 + bx + c = 0$$

$$\begin{cases} a = 6 \\ b = -1 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(6)(-35) = 841 \\ c = -35 \end{cases}$$

$$x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) + \sqrt{841}}{2 \times (6)} = \frac{1 + 29}{12} = \frac{30}{12} = \frac{5}{2}$$

ریشه‌ی بزرگتر $\frac{5}{2}$

یا

$$x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) - \sqrt{841}}{2 \times (6)} = \frac{1 - 29}{12} = \frac{-28}{12} = -\frac{7}{3}$$

ریشه‌ی کوچکتر $-\frac{7}{3}$

پس ریشه‌ی بزرگتر معادله $\frac{5}{2}$ می‌باشد.

گزینه ۱ ۶۷

در یک معادله‌ی درجه دوم هرگاه ممیز معادله مثبت باشد، معادله دو ریشه متمایز و هرگاه ممیز برابر صفر باشد معادله ریشه‌ی مضاعف یا دو ریشه مساوی و هرگاه ممیز منفی باشد معادله ریشه‌ی حقیقی ندارد.

حال برای تعیین تعداد جواب‌های این معادله، ممیز آن را به دست می‌آوریم، داریم:

$$\begin{aligned} \text{مقایسه با فرم استاندارد} \rightarrow \\ ax^2 + bx + c = 0 \\ x^2 + ax - 5 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = a \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = a^2 - 4(1)(-5) = a^2 + 20 \\ c = -5 \end{cases}$$

چون ممیز معادله یک مقدار مثبت می‌باشد پس معادله دو جواب دارد.

گزینه ۱ ۶۸

برای تعیین تعداد جواب‌های این معادله ممیز معادله را به دست می‌آوریم، داریم:

$$\begin{aligned} \text{مقایسه با فرم استاندارد} \rightarrow \\ ax^2 + bx + c = 0 \\ (a^2 + 1)x^2 - 2ax - 1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} a = a^2 + 1 \\ b = -2a \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (-2a)^2 - 4(a^2 + 1)(-1) \Rightarrow \\ c = -1 \end{cases}$$

$\Delta = 4a^2 + 4a^2 + 4 = 8a^2 + 4$
چون ممیز معادله یک مقدار مثبت می‌باشد پس معادله دارای دو ریشه می‌باشد. در ضمن چون حاصل ضرب ریشه‌ها برابر $\frac{-1}{a^2 + 1} = \frac{c}{a}$ است و این مقدار منفی است پس معادله ریشه مختلف‌العلامت هستند.

گزینه ۱ ۶۹

برای اینکه معادله‌ی درجه دوم دو جواب حقیقی و متمایز داشته باشد، می‌بایست ممیز معادله مثبت باشد، داریم:

$$\begin{aligned} \text{مقایسه با فرم استاندارد} \rightarrow \\ ax^2 + bx + c = 0 \\ 3x^2 + ax - 3 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} a = 3 \\ b = a \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = a^2 - 4(3)(-3) = a^2 + 36 \\ c = -3 \end{cases}$$

پس ممیز معادله به ازای هر مقدار a همواره مثبت می‌باشد پس به ازای هر مقدار a معادله دارای دو جواب حقیقی و متمایز است.

گزینه ۳ ۷۰

برای اینکه معادله‌ی درجه دوم دو جواب حقیقی و متمایز داشته باشد، می‌بایست ممیز معادله مثبت باشد، داریم:

$$\begin{aligned} \text{مقایسه با فرم استاندارد} \rightarrow \\ ax^2 + bx + c = 0 \\ ax^2 - 3x + 1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} a = a \\ b = -3 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4(a)(1) = 9 - 4a \\ c = 1 \end{cases}$$

برای اینکه ممیز مثبت باشد، داریم:

$$\Delta = 9 - 4a > 0 \Rightarrow 4a < 9 \Rightarrow a < \frac{9}{4}$$

گزینه ۲ ۶۵

با استفاده از روش کلی معادله را حل می‌کنیم، داریم:

$$\begin{aligned} \text{مقایسه با فرم استاندارد} \rightarrow \\ x^2 - 2\sqrt{5}x + 3 = 0 \\ ax^2 + bx + c = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -2\sqrt{5} \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (-2\sqrt{5})^2 - 4(1)(3) = 8 \\ c = 3 \end{cases}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2\sqrt{5}) \pm \sqrt{8}}{2(1)} = \frac{2\sqrt{5} \pm 2\sqrt{2}}{2}$$

ریشه‌ی بزرگتر $\sqrt{5} + \sqrt{2}$

یا

$$x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2\sqrt{5}) - \sqrt{8}}{2(1)} = \frac{2\sqrt{5} - 2\sqrt{2}}{2}$$

ریشه‌ی کوچکتر $\sqrt{5} - \sqrt{2}$

برای به دست آوردن معکوس ریشه‌ی کوچکتر داریم:

$$\frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{5} + \sqrt{2}}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{2}}{3}$$

گزینه ۲ ۶۶

برای به دست آوردن مساحت مستطیل داریم:

$$(x+3)(x-1) = 7 \Rightarrow \text{مساحت مستطیل} = x-1$$

با استفاده از اتحاد جمله مشترک معادله را ساده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} x^2 + (3-1)x + (3)(-1) = 7 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 7 \\ \Rightarrow x^2 + 2x - 10 = 0 \end{aligned}$$

حال این معادله را به روش کلی حل می‌کنیم، داریم:

$$\begin{aligned} \text{مقایسه با فرم استاندارد} \rightarrow \\ ax^2 + bx + c = 0 \\ x^2 + 2x - 10 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (2)^2 - 4(1)(-10) = 44 \\ c = -10 \end{cases}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{44}}{2 \times (1)} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{11}}{2} = \sqrt{11} - 1$$

یا

$$x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 - \sqrt{44}}{2 \times (1)} = \frac{-2 - 2\sqrt{11}}{2} = -1 - \sqrt{11}$$

چون طول ضلع مستطیل نمی‌تواند منفی باشد پس $\sqrt{11} - 1$ قابل قبول است.

$$\begin{aligned} \text{مساحت مستطیل} &= 2(x+3+x-1) = 2(2x+2) = 2 \times 2(x+1) \\ &= 4(x+1) \xrightarrow{x=\sqrt{11}-1} 4(\sqrt{11}-1+1) = 4\sqrt{11} \end{aligned}$$

گزینه ۳ ۷۱

برای اینکه معادله‌ی درجه دوم دو جواب حقیقی متمایز داشته باشد، باید ممیز آن مثبت باشد، داریم:

$$x^2 + 2x - k = 0 \xrightarrow{\text{مقایسه با فرم استاندارد}} ax^2 + bx + c = 0$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = -k \end{cases} \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (2)^2 - 4(1)(-k) = 4 + 4k$$

حال باید $\Delta > 0$ باشد، داریم:

$$\Delta = 4 + 4k > 0 \Rightarrow 4k > -4 \Rightarrow k > -1$$

گزینه ۳ ۷۲

معادله‌ی درجه دوم هنگامی ریشه مضاعف دارد که ممیز معادله یا $\Delta = 0$ باشد، داریم:

$$x(2x - 5) = a \Rightarrow 2x^2 - 5x = a \Rightarrow 2x^2 - 5x - a = 0$$

$$\xrightarrow{\text{مقایسه با فرم استاندارد}} \begin{cases} a = 2 \\ b = -5 \\ c = -a \end{cases}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(2)(-a) = 25 + 8a = 0$$

$$\Rightarrow 8a = -25 \Rightarrow a = -\frac{25}{8}$$

در این حالت ریشه‌ی مضاعف از رابطه‌ی $x = \frac{-b}{2a}$ به دست می‌آید،

داریم:

$$x = \frac{-(-5)}{2 \times 2} = \frac{5}{4}$$

گزینه ۳ ۷۳

در معادله‌ی درجه دوم هنگامی که تفاضل دو ریشه برابر صفر است، ریشه‌های معادله با یکدیگر برابرند، در این حالت معادله دارای ریشه‌ی مضاعف است و ممیز معادله برابر صفر است، داریم:

$$ax^2 - 12x + 9 = 0 \xrightarrow{\text{مقایسه با فرم استاندارد}} ax^2 + bx + c = 0$$

$$\begin{cases} a = a \\ b = -12 \\ c = 9 \end{cases} \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4(a)(9) = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = 144 - 36a = 0 \Rightarrow 36a = 144 \Rightarrow a = \frac{144}{36} = 4$$

پس معادله به فرم $4x^2 - 12x + 9 = 0$ می‌باشد که ریشه‌ی مضاعف

آن از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-12)}{2 \times 4} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

گزینه ۳ ۷۴

معادله‌ی درجه دوم هنگامی دو ریشه‌ی مساوی دارد که ممیز معادله یا $\Delta = 0$ باشد، داریم:

$$2x^2 + 2x - k + 1 = 0 \xrightarrow{\text{مقایسه با فرم استاندارد}} ax^2 + bx + c = 0$$

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \\ c = -k + 1 \end{cases} \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (2)^2 - 4(2)(-k + 1)$$

$$\Rightarrow \Delta = 4 - 8(-k + 1) = 0 \Rightarrow \Delta = 4 + 8k - 8 = 0 \Rightarrow 8k - 4 = 0$$

$$\Rightarrow k = \frac{1}{2}$$

گزینه ۱ ۷۵

معادله‌ی درجه دوم هنگامی دو ریشه‌ی مساوی دارد که ممیز معادله یا $\Delta = 0$ باشد، داریم:

$$x^2 + 4x - a - 1 = 0 \xrightarrow{\text{مقایسه با فرم استاندارد}} ax^2 + bx + c = 0$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \\ c = -a - 1 \end{cases} \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (4)^2 - 4(1)(-a - 1)$$

$$\Rightarrow \Delta = 16 - 4(-a - 1) = 0 \Rightarrow \Delta = 16 + 4a + 4 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = 4a + 20 = 0$$

$$\Rightarrow a = -\frac{20}{4} = -5$$

گزینه ۳ ۷۶

معادله‌ی درجه دوم هنگامی ریشه‌ی مضاعف دارد که ممیز معادله یا $\Delta = 0$ باشد، داریم:

$$x^2 + (m-1)x + 1 = 0 \xrightarrow{\text{مقایسه با فرم استاندارد}} ax^2 + bx + c = 0$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = (m-1) \\ c = 1 \end{cases} \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (m-1)^2 - 4(1)(1) = 0$$

$$\Rightarrow (m-1)^2 - 4 = 0$$

این معادله را با استفاده از اتحاد مزدوج حل می‌کنیم، داریم:

$$((m-1) - 2)((m-1) + 2) = 0 \Rightarrow (m-3)(m+1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m-3 = 0 \Rightarrow m = 3 \\ m+1 = 0 \Rightarrow m = -1 \end{cases}$$

گزینه ۲ ۷۷

هنگامی در معادله‌ی درجه دوم دو ریشه برابرند که ممیز معادله یا $\Delta = 0$ باشد، داریم:

$$x^2 - (3a+1)x + 2a^2 + 2 = 0 \xrightarrow{\text{مقایسه با فرم استاندارد}} ax^2 + bx + c = 0$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -(3a+1) \\ c = 2a^2 + 2 \end{cases} \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (-(3a+1))^2 - 4(1)(2a^2 + 2)$$

$$\Delta = (3a+1)^2 - 4(2a^2 + 2) = 0 \Rightarrow \Delta = 9a^2 + 6a + 1 - 8a^2 - 8 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = a^2 + 6a - 7 = 0$$

با استفاده از اتحاد جمله مشترک معادله را تجزیه می‌کنیم، داریم:

$$a^2 + (+7-1)a + (-7)(-1) = 0 \Rightarrow (a+7)(a-1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+7 = 0 \Rightarrow a = -7 \\ a-1 = 0 \Rightarrow a = 1 \end{cases}$$

گزینه ۲ .۸۱

هنگامی معادله‌ی درجه دوم دارای ریشه‌ی حقیقی نیست که مبین معادله یا Δ منفی باشد، حال به بررسی تک‌تک گزینه‌ها می‌پردازیم:

۱) مقایسه با فرم استاندارد $ax^2+bx+c=0$ $-3x^2-5x+4=0$

$$\begin{cases} a = -3 \\ b = -5 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(-3)(4) \\ c = 4 \end{cases}$$

معادله دو ریشه‌ی حقیقی متمایز دارد. $\Delta = 25 + 48 = 73 > 0$

۲) $x^2 + 9x + 11 = 5x - 2 \Rightarrow x^2 + 9x + 11 - 5x + 2 = 0$

$\Rightarrow x^2 + 4x + 13 = 0$

مقایسه با فرم استاندارد $ax^2+bx+c=0$ $\begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \\ c = 13 \end{cases}$

$\Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (4)^2 - 4(1)(13) = 16 - 52 = -36$

معادله دارای ریشه‌ی حقیقی نمی‌باشد.

۳) $x^2 - 4x + 3 = 3x^2 - 1 \Rightarrow 3x^2 - 1 - x^2 + 4x - 3 = 0$

$\Rightarrow 2x^2 + 4x - 4 = 0$

مقایسه با فرم استاندارد $ax^2+bx+c=0$ $\begin{cases} a = 2 \\ b = 4 \\ c = -4 \end{cases}$

$\Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (4)^2 - 4(2)(-4) = 16 + 32 = 48$

معادله دارای دو ریشه‌ی حقیقی متمایز است.

۴) $x^2 + 3x - 5 = x^2 + 7 \Rightarrow x^2 + 3x - 5 - x^2 - 7 = 0$

$\Rightarrow 3x - 12 = 0 \Rightarrow 3x = 12 \Rightarrow x = \frac{12}{3} = 4$

این معادله یک معادله‌ی درجه اول است و تنها یک ریشه دارد.

پس گزینه‌ی «۲» پاسخ مسأله می‌باشد.

گزینه ۳ .۸۲

معادله‌ی درجه‌ی دوم هنگامی ریشه‌ی حقیقی ندارد که مبین معادله یا Δ منفی باشد، داریم:

مقایسه با فرم استاندارد $ax^2+bx+c=0$ $x^2 - x + 2m - 1 = 0$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(1)(2m - 1) \\ c = 2m - 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow \Delta = 1 - 4(2m - 1) = 1 - 8m + 4 = 5 - 8m < 0$

$\Rightarrow 8m > 5 \Rightarrow m > \frac{5}{8}$

گزینه ۳ .۸۳

ابتدا معادله را ساده می‌کنیم و به فرم استاندارد $ax^2+bx+c=0$ می‌نویسیم سپس مبین یا Δ معادله را می‌یابیم و بعدا اظهار نظر می‌کنیم:

$(x+2)(x+1) = x(1-x) \Rightarrow x^2 + (2+1)x + 2 \times 1 = x - x^2$

$\Rightarrow x^2 + 3x + 2 = x - x^2 \Rightarrow x^2 + 3x + 2 - x + x^2 = 0$

$\Rightarrow 2x^2 + 2x + 2 = 0 \xrightarrow{+2} x^2 + x + 1 = 0$

مقایسه با فرم استاندارد $ax^2+bx+c=0$ $\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac \\ c = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow \Delta = (1)^2 - 4(1)(1) = 1 - 4 = -3 < 0$

پس معادله جواب حقیقی ندارد.

گزینه ۳ .۷۸

در معادله‌ی درجه‌ی دوم ریشه‌ی مضاعف از رابطه‌ی $x = \frac{-b}{2a}$ به‌دست می‌آید، داریم:

مقایسه با فرم استاندارد $ax^2+bx+c=0$ $mx^2 - mx + 1 = 0$

$$\begin{cases} a = m \\ b = -m \Rightarrow x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-m)}{2m} = \frac{m}{2m} = \frac{1}{2} \\ c = 1 \end{cases}$$

گزینه ۴ .۷۹

در معادله‌ی درجه‌ی دوم هنگامی معادله دارای ریشه‌ی مضاعف است که $\Delta = 0$ باشد و ریشه‌ی مضاعف نیز از رابطه‌ی

$x = \frac{-b}{2a}$ به‌دست می‌آید، داریم:

مقایسه با فرم استاندارد $ax^2+bx+c=0$ $m^2x^2 - 6mx + 2m + n = 0$

$$\begin{cases} a = m^2 \\ b = -6m \\ c = 2m + n \end{cases}$$

\Rightarrow ریشه‌ی مضاعف $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-6m)}{2(m^2)} = \frac{6m}{2m^2} = \frac{3}{m} = \frac{3}{4}$

$\Rightarrow m = 4$

حال مقدار $m = 4$ و $x = \frac{3}{4}$ را در معادله قرار می‌دهیم تا n بیابیم:

$(4)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^2 - 6 \times 4 \times \left(\frac{3}{4}\right) + 2 \times (4) + n = 0$

$\Rightarrow 16 \times \frac{9}{16} - 24 \times \frac{3}{4} + 8 + n = 0 \Rightarrow 9 - 18 + 8 + n = 0$

$\Rightarrow n - 1 = 0 \Rightarrow n = 1$

گزینه ۴ .۸۰

در حقیقت منظور سؤال این است که معادله یک ریشه داشته باشد یعنی مبین معادله یا Δ برابر صفر باشد، داریم:

مقایسه با فرم استاندارد $ax^2+bx+c=0$ $x^2 - 2mx + 3m = 0$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -2m \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (-2m)^2 - 4(1)(3m) \\ c = 3m \end{cases}$$

$\Rightarrow \Delta = 4m^2 - 12m = 0$

این معادله را به روش فاکتورگیری تجزیه می‌کنیم سپس حل می‌کنیم، داریم:

$4m(m-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 4m = 0 \Rightarrow m = 0 \\ m - 3 = 0 \Rightarrow m = 3 \end{cases}$

ریشه‌ی مضاعف معادله از رابطه‌ی $x = \frac{-b}{2a}$ به‌دست می‌آید، داریم:

$m = 0 \Rightarrow x^2 - 2 \times (0)x + 3(0) = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

$m = 3 \Rightarrow x^2 - 2(3)x + 3(3) = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 = 0$

$\Rightarrow (x-3)^2 = 0 \Rightarrow x = 3$

پس ریشه‌ی مثبت معادله $x = 3$ می‌باشد.

۸۴

گزینه ۱

در معادله‌ی درجه‌ی دوم به فرم استاندارد $ax^2 + bx + c = 0$ اگر معادله دارای ریشه باشد، مجموع ریشه‌ها از رابطه‌ی $-\frac{b}{a}$ و حاصل ضرب آن‌ها از رابطه‌ی $\frac{c}{a}$ به دست می‌آید، حال به بررسی

تک تک گزینه‌ها می‌پردازیم:

$$\text{گزینه ۱: } 2x^2 = 13 - 7x \Rightarrow 2x^2 + 7x - 13 = 0$$

$$\frac{\text{مقایسه با فرم استاندارد}}{ax^2 + bx + c = 0} \rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 7 \\ c = -13 \end{cases} \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (7)^2 - 4(2)(-13) = 49 + 104 = 153 > 0$$

معادله دارای دو ریشه‌ی حقیقی متمایز است.

$$\begin{cases} \text{مجموع ریشه‌ها} = -\frac{b}{a} = -\frac{7}{2} = -\frac{7}{2} \\ \text{حاصل ضرب ریشه‌ها} = \frac{c}{a} = \frac{-13}{2} = -\frac{13}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow -\frac{13}{2} < -\frac{7}{2}$$

در این معادله مجموع ریشه‌ها از حاصل ضرب آن‌ها بزرگتر است.

$$\text{گزینه ۲: } x^2 + 4x = 3 \Rightarrow x^2 + 4x - 3 = 0$$

$$\frac{\text{مقایسه با فرم استاندارد}}{ax^2 + bx + c = 0} \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \\ c = -3 \end{cases} \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow$$

$$\Delta = (4)^2 - 4(1)(-3) = 16 + 12 = 28 > 0$$

پس معادله دو ریشه‌ی حقیقی دارد.

$$\text{مجموع ریشه‌ها} = -\frac{b}{a} = -\frac{4}{1} = -4$$

$$\text{حاصل ضرب ریشه‌ها} = \frac{c}{a} = \frac{-3}{1} = -3$$

$$\Rightarrow -4 < -3$$

مجموع ریشه‌ها از حاصل ضرب ریشه‌ها کمتر است.

$$\text{گزینه ۳: } -x^2 - 6x = -3 \Rightarrow x^2 + 6x - 3 = 0$$

$$\frac{\text{مقایسه با فرم استاندارد}}{ax^2 + bx + c = 0} \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 6 \\ c = -3 \end{cases}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (6)^2 - 4(1)(-3) = 36 + 12 = 48 > 0$$

پس معادله دو ریشه حقیقی دارید.

$$\text{مجموع ریشه‌ها} = -\frac{b}{a} = -\frac{6}{1} = -6$$

$$\text{حاصل ضرب ریشه‌ها} = \frac{c}{a} = \frac{-3}{1} = -3$$

مجموع ریشه‌ها از حاصل ضرب ریشه‌ها کمتر است. $\Rightarrow -6 < -3$

$$\text{گزینه ۴: } x^2 + 4 = 2x \Rightarrow x^2 - 2x + 4 = 0$$

$$\frac{\text{مقایسه با فرم استاندارد}}{ax^2 + bx + c = 0} \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 4 \end{cases}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(1)(4) = 4 - 16 = -12 < 0$$

معادله ریشه‌ی حقیقی ندارد.

۸۵

گزینه ۲

در معادله‌ی درجه دوم به فرم استاندارد حاصل ضرب ریشه‌ها از رابطه‌ی $\frac{c}{a}$ به دست می‌آید، داریم:

$$3x^2 + kx - 10 = 0 \rightarrow \frac{\text{مقایسه با فرم استاندارد}}{ax^2 + bx + c = 0} \rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = k \\ c = -10 \end{cases}$$

اگر ریشه‌ها را α و β فرض کنیم، داریم:

$$\text{ریشه‌ها} = \frac{c}{a} \Rightarrow \alpha\beta = \frac{-10}{3} \quad \alpha = 5$$

$$5\beta = -\frac{10}{3} \Rightarrow \beta = \frac{-10}{3 \times 5} = -\frac{2}{3}$$

گزینه ۴

اگر α و β ریشه‌های معادله باشند، داریم:

$$\alpha + \beta = \frac{1}{3}(\alpha\beta) \xrightarrow{\alpha=4} 4 + \beta = \frac{1}{3}(4\beta) \Rightarrow 4 + \beta = \frac{4}{3}\beta$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3}\beta - \beta = 4$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}\beta = 4 \Rightarrow \beta = 12$$

۸۷

گزینه ۳

در معادله‌ی درجه‌ی دوم به فرم استاندارد حاصل جمع ریشه‌ها از رابطه‌ی $-\frac{b}{a}$ و حاصل ضرب آن‌ها از رابطه‌ی $\frac{c}{a}$ به دست می‌آید. داریم:

$$1 - 2x^2 = x(7 - 4x) \Rightarrow 1 - 2x^2 = 7x - 4x^2$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 7x + 1 - 2x^2 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 7x + 1 = 0$$

$$\frac{\text{مقایسه با فرم استاندارد}}{ax^2 + bx + c = 0} \rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -7 \\ c = 1 \end{cases}$$

$$\text{مجموع ریشه‌ها: } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-7}{2} = \frac{7}{2}$$

$$\text{حاصل ضرب ریشه‌ها: } x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$$

حاصل عبارت مورد نظر سؤال را می‌یابیم:

$$\frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{\frac{7}{2}}{\frac{1}{2}} = 7$$

۸۸

گزینه ۲

در معادله‌ی درجه‌ی دوم به فرم استاندارد $ax^2 + bx + c = 0$ مجموع ریشه‌ها برابر $-\frac{b}{a}$ و حاصل ضرب ریشه‌ها $\frac{c}{a}$ است، داریم:

$$x^2 + (1-m)x + 2m = 0 \rightarrow \frac{\text{مقایسه با فرم استاندارد}}{ax^2 + bx + c = 0} \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = (1-m) \\ c = 2m \end{cases}$$

طبق فرض صورت سؤال مجموع ریشه‌ها برابر حاصل ضرب ریشه‌ها است.

$$\text{مجموع ریشه‌ها} = -\frac{b}{a} = -\frac{(1-m)}{1} = m - 1$$

$$\text{حاصل ضرب ریشه‌ها} = \frac{c}{a} = \frac{2m}{1} = 2m$$

$$\Rightarrow 2m = m - 1 \Rightarrow 2m - m = -1 \Rightarrow m = -1$$

گزینه ۲ ۰۹۲

در معادله‌ی درجه‌ی دوم مجموع دو ریشه برابر $-\frac{b}{a}$ می‌باشد، داریم:

$$4x^2 + kx = 21 \Rightarrow 4x^2 + kx - 21 = 0$$

$$\frac{\text{مقایسه با فرم استاندارد}}{ax^2 + bx + c = 0} \rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = k \\ c = -21 \end{cases}$$

$$\text{مجموع ریشه‌ها} \quad \frac{-b}{a} = \frac{-k}{4} = -2 \Rightarrow -k = -8 \Rightarrow k = 8$$

پس معادله به فرم زیر است:

$$4x^2 + 8x - 21 = 0$$

حال این معادله را به روش اتحاد جمله مشترک تجزیه می‌کنیم، داریم:

$$(2x)^2 + 4(2x) - 21 = 0 \Rightarrow (2x)^2 + (7-3)(2x) + (7)(-3) = 0$$

$$(2x+7)(2x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{ریشه‌ی کوچکتر } 2x+7=0 \Rightarrow x = -\frac{7}{2} \\ \text{ریشه‌ی بزرگ‌تر } 2x-3=0 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \end{cases}$$

گزینه ۱ ۰۹۳

$$2x^2 + kx + 1 - k = 0 \quad \frac{\text{مقایسه با فرم استاندارد}}{ax^2 + bx + c = 0} \rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = k \\ c = 1 - k \end{cases}$$

$$\text{حاصل ضرب ریشه‌ها} \quad \frac{c}{a} = \frac{1-k}{2} = 5 \Rightarrow 1-k = 10$$

$$\Rightarrow k = 1 - 10 = -9$$

پس معادله به فرم زیر می‌باشد و آن را از روش تجزیه اتحاد جمله

مشترک حل می‌کنیم:

$$2x^2 - 9x + 10 = 0 \quad \frac{\text{طرفین معادله را}}{\text{در ۲ ضرب می‌کنیم}} \rightarrow 4x^2 - 18x + 20 = 0$$

$$\Rightarrow (2x)^2 - 9 \times (2x) + 20 = 0$$

$$\Rightarrow (2x)^2 + (-5-4)(2x) + (-5)(-4) = 0$$

$$\Rightarrow (2x-5)(2x-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{ریشه‌ی کوچکتر } 2x-4=0 \Rightarrow x = \frac{4}{2} = 2 \\ \text{ریشه‌ی بزرگ‌تر } 2x-5=0 \Rightarrow x = \frac{5}{2} = 2 \frac{1}{2} \end{cases}$$

گزینه ۲ ۰۹۴

در معادله‌ی درجه‌ی دوم مجموع دو ریشه برابر $-\frac{b}{a}$ است، داریم:

$$x^2 + ax + 4 = 0 \quad \frac{\text{مقایسه با فرم استاندارد}}{ax^2 + bx + c = 0} \rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = a \\ c = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{مجموع ریشه‌ها} = \frac{-b}{a} = \frac{-a}{2} = -\frac{9}{2} \Rightarrow -a = 2 \times -\frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow a = 9$$

پس معادله به صورت زیر می‌باشد و آن را از روش کلی حل

می‌کنیم، داریم:

$$2x^2 + 9x + 4 = 0 \quad \frac{\text{مقایسه با فرم استاندارد}}{ax^2 + bx + c = 0} \rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 9 \\ c = 4 \end{cases}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (9)^2 - 4(2)(4) = 81 - 32 = 49$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{ریشه‌ی بزرگ‌تر } x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-9 + \sqrt{49}}{2 \times (2)} = \frac{-9 + 7}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \\ \text{ریشه‌ی کوچکتر } x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-9 - \sqrt{49}}{2 \times (2)} = \frac{-9 - 7}{4} = \frac{-16}{4} = -4 \end{cases}$$

گزینه ۴ ۰۸۹

ریشه‌ی معادله در خود معادله صدق می‌کند، ابتدا با قراردادن

ریشه‌ی معادله در خود معادله مقدار a را می‌یابیم، داریم:

$$4x^2 - 2ax + a = 1 \xrightarrow{x = -\frac{1}{4}} 4\left(-\frac{1}{4}\right)^2 - 2a\left(-\frac{1}{4}\right) + a = 1$$

$$\Rightarrow 4 \times \frac{1}{16} + 2a \times \frac{1}{4} + a = 1 \Rightarrow \frac{1}{4} + \frac{a}{2} + a = 1 \Rightarrow \frac{2a}{2} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

پس معادله به فرم زیر می‌باشد:

$$4x^2 - 2\left(\frac{3}{2}\right)x + \frac{3}{2} = 1 \Rightarrow 4x^2 - x + \frac{1}{2} - 1 = 0 \Rightarrow 4x^2 - x - \frac{1}{2} = 0$$

$$\frac{\text{مقایسه با فرم استاندارد}}{ax^2 + bx + c = 0} \rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = -1 \\ c = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{حاصل ضرب ریشه‌ها} = \frac{c}{a} = \frac{-\frac{1}{2}}{4} = -\frac{1}{8}$$

گزینه ۴ ۰۹۰

اگر x' و x'' جواب‌های معادله باشند و معکوس یکدیگر باشند، داریم:

$$x' = \frac{1}{x''} \Rightarrow x'x'' = 1$$

حال با توجه به معادله داریم:

$$2x^2 + 3mx + 2m + 6 = 0 \quad \frac{\text{مقایسه با فرم استاندارد}}{ax^2 + bx + c = 0} \rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3m \\ c = 2m + 6 \end{cases}$$

$$\text{حاصل ضرب ریشه‌ها} \quad \frac{c}{a} = \frac{2m+6}{2} = 1 \Rightarrow 2m+6=2$$

$$\Rightarrow 2m = 2 - 6 = -4 \Rightarrow m = -\frac{4}{2} = -2$$

حال مجموع ریشه‌ها را می‌یابیم:

$$\text{مجموع ریشه‌ها} \quad x' + x'' = \frac{-b}{a} = \frac{-3m}{2} \quad m = -2$$

$$x' + x'' = \frac{-3 \times (-2)}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

گزینه ۱ ۰۹۱

جواب معادله در خود معادله صدق می‌کند، با جایگذاری $x = 2$ در

معادله ابتدا m را می‌یابیم:

$$(m-1)x^2 - 7x + 2m = 0 \xrightarrow{x=2} (m-1)(2)^2 - 7 \times 2 + 2m = 0$$

$$\Rightarrow 4(m-1) - 14 + 2m = 0 \Rightarrow 4m - 4 - 14 + 2m = 0$$

$$\Rightarrow 6m - 18 = 0 \Rightarrow 6m = 18 \Rightarrow m = \frac{18}{6} = 3$$

پس معادله به صورت زیر می‌باشد:

$$(3-1)x^2 - 7x + 2 \times 3 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 7x + 6 = 0$$

حال با توجه به معادله حاصل ضرب ریشه‌ها را می‌یابیم:

$$2x^2 - 7x + 6 = 0 \quad \frac{\text{مقایسه با فرم استاندارد}}{ax^2 + bx + c = 0} \rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -7 \\ c = 6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{حاصل ضرب ریشه‌ها} = \frac{c}{a} = \frac{6}{2} = 3$$

یکی از ریشه‌ها را 2 و ریشه‌ی دیگر را α در نظر می‌گیریم، داریم:

$$2\alpha = 3 \Rightarrow \alpha = \frac{3}{2}$$

گزینه ۲ ۹۵

مجموع ریشه‌ها در معادله‌ی درجه‌ی دوم برابر $-\frac{b}{a}$ است، داریم:

$$x^2 - (b-2)x + 2b = 0 \quad \text{مقایسه با فرم استاندارد} \quad \begin{cases} a=1 \\ b=-(b-2) \\ c=2b \end{cases}$$

$$\text{مجموع ریشه‌ها} = \frac{-b}{a} = \frac{-(-(b-2))}{1} = b-2 = 10 \Rightarrow b=12$$

حال با یافتن b و جایگذاری در معادله، آن را حل می‌کنیم:

$$x^2 - (12-2)x + 2 \times 12 = 0 \Rightarrow x^2 - 10x + 24 = 0$$

این معادله را به روش اتحاد جمله مشترک تجزیه می‌کنیم، داریم:

$$x^2 + (-6-4)x + (-6)(-4) = 0$$

$$\Rightarrow (x-6)(x-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-6=0 \Rightarrow x=6 \text{ ریشه‌ی بزرگ‌تر} \\ x-4=0 \Rightarrow x=4 \text{ ریشه‌ی کوچک‌تر} \end{cases}$$

گزینه ۲ ۹۶

مجموع دو ریشه از رابطه‌ی $-\frac{b}{a}$ به دست می‌آید، داریم:

$$6x^2 + (k+1)x + k = 0 \quad \text{مقایسه با فرم استاندارد} \quad \begin{cases} a=6 \\ b=(k+1) \\ c=k \end{cases}$$

$$\text{مجموع دو ریشه} = \frac{-b}{a} = \frac{-(k+1)}{6} = \frac{1}{6} \Rightarrow -(k+1) = 1$$

$$\Rightarrow k+1 = -1 \Rightarrow k = -2$$

حال با جایگذاری مقدار k در معادله و حل آن داریم:

$$6x^2 + (-2+1)x - 2 = 0 \Rightarrow 6x^2 - x - 2 = 0$$

این معادله را به روش کلی حل می‌کنیم:

$$6x^2 - x - 2 = 0 \quad \text{مقایسه با فرم استاندارد} \quad \begin{cases} a=6 \\ b=-1 \\ c=-2 \end{cases}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(6)(-2) = 1 + 48 = 49$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{49}}{2(6)} = \frac{1 \pm 7}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \quad \text{ریشه‌ی مثبت}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{49}}{2 \times (6)} = \frac{1-7}{12} = \frac{-6}{12} = -\frac{1}{2} \quad \text{ریشه‌ی منفی}$$

گزینه ۲ ۹۷

اگر x' و x'' ریشه‌های معادله باشند، داریم:

$$x' = 5x''$$

$$x^2 - 12x + 2k + 2 = 0 \quad \text{مقایسه با فرم استاندارد} \quad \begin{cases} a=1 \\ b=-12 \\ c=2k+2 \end{cases}$$

$$\text{مجموع ریشه‌ها} : x' + x'' = \frac{-b}{a} = \frac{-(-12)}{1} = 12 \quad x' = 5x'' \Rightarrow$$

$$5x'' + x'' = 12 \Rightarrow 6x'' = 12 \Rightarrow x'' = \frac{12}{6} = 2$$

$$\Rightarrow x' : 5x'' = 5 \times 2 = 10$$

$$\text{حاصل ضرب ریشه‌ها} : x'x'' = \frac{c}{a} = \frac{2k+2}{1} \Rightarrow 2 \times 10 = 2k+2$$

$$\Rightarrow 2k+2 = 20 \Rightarrow 2k = 20-2 = 18$$

$$\Rightarrow k = \frac{18}{2} = 9$$

گزینه ۲ ۹۸

اگر x' و x'' ریشه‌های معادله باشند، داریم:

$$x' = \frac{x''}{3}$$

$$27x^2 + mx + 16 = 0 \quad \text{مقایسه با فرم استاندارد} \quad \begin{cases} a=27 \\ b=m \\ c=16 \end{cases}$$

$$\text{حاصل ضرب ریشه‌ها} : x'x'' = \frac{c}{a} = \frac{16}{27}$$

$$\frac{x' = \frac{x''}{3}}{\rightarrow} \frac{x''}{3} \times x'' = \frac{16}{27} \Rightarrow x''^2 = \frac{3 \times 16}{27} = \frac{16}{9}$$

$$\text{از طریق روش ریشه‌گیری} \quad \begin{cases} x'' = \frac{4}{3} \text{ ق ق غ} \\ x'' = -\frac{4}{3} \text{ ق ق غ} \end{cases}$$

چون در صورت سؤال فرض شده هر دو ریشه منفی می‌باشند،

داریم:

$$x' = \frac{x''}{3} \Rightarrow x' = \frac{-\frac{4}{3}}{3} = -\frac{4}{9}$$

$$\text{مجموع دو ریشه} : x' + x'' = -\frac{4}{9} - \frac{4}{9} = -\frac{8}{9}$$

گزینه ۲ ۹۹

اگر x' و x'' ریشه‌های معادله باشند، داریم:

$$x' = \frac{x''}{2}$$

$$x^2 - 6ax + 8a = 0 \quad \text{مقایسه با فرم استاندارد} \quad \begin{cases} a=1 \\ b=-6a \\ c=8a \end{cases}$$

$$\text{حاصل جمع ریشه‌ها} : x' + x'' = \frac{-b}{a} = \frac{-(-6a)}{1} = 6a$$

$$\frac{x' = \frac{x''}{2}}{\rightarrow} \frac{x''}{2} + x'' = 6a \Rightarrow \frac{3x''}{2} = 6a \Rightarrow x'' = \frac{2 \times 6a}{3} = 4a \quad (1)$$

$$\text{حاصل ضرب ریشه‌ها} : x'x'' = \frac{c}{a} = \frac{8a}{1} \quad \frac{x' = \frac{x''}{2}}{\rightarrow} \frac{x''}{2} \times x'' = 8a$$

$$\Rightarrow x''^2 = 2 \times 8a = 16a \quad (2)$$

$$\frac{(2), (1)}{\rightarrow} (4a)^2 = 16a \Rightarrow 16a^2 = 16a \Rightarrow 16a^2 - 16a = 0$$

$$\Rightarrow 16a(a-1) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 16a = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ ق ق غ} \\ 16a - 16 = 0 \Rightarrow a = 1 \text{ ق ق غ} \end{cases} \Rightarrow x^2 - 6(0)x + 8(0) = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 6(1)x + 8(1) = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 8 = 0$$

گزینه ۳ ۱۰۳

اگر x' و x'' ریشه‌های معادله باشند، حاصل جمع ریشه‌ها از رابطه‌ی $-\frac{b}{a}$ و حاصل ضرب آن‌ها از رابطه‌ی $\frac{c}{a}$ به دست می‌آید، داریم:

$$x^2 - 2\sqrt{3}x - 2 = 0 \xrightarrow{\text{مقایسه با فرم استاندارد}} \begin{cases} a=1 \\ b=-2\sqrt{3} \\ c=-2 \end{cases}$$

$$\text{حاصل جمع ریشه‌ها: } x' + x'' = \frac{-b}{a} = \frac{-(-2\sqrt{3})}{1} = 2\sqrt{3} \quad (1)$$

$$\text{حاصل ضرب ریشه‌ها: } x'x'' = \frac{c}{a} = \frac{-2}{1} = -2 \quad (2)$$

ابتدا عبارت A را تجزیه می‌کنیم:

$$A = x'x''^2 + x''x'^2 = x'x''(x'' + x') \xrightarrow{(2), (1)}$$

$$A = (-2)(2\sqrt{3}) = -4\sqrt{3}$$

گزینه ۱ ۱۰۴

اگر x' و x'' ریشه‌های معادله باشد، داریم:

$$A = x'^2 + x''^2 = (x' + x'')^2 - 2x'x''$$

حال با توجه به معادله‌ی درجه‌ی دوم ابتدا مجموع ریشه‌ها و حاصل ضرب ریشه‌ها را می‌یابیم، داریم:

$$x^2 - x - 1 = 0 \xrightarrow{\text{مقایسه با فرم استاندارد}} \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=-1 \end{cases}$$

$$\text{مجموع ریشه‌ها: } x' + x'' = \frac{-b}{a} = \frac{-(-1)}{1} = 1$$

$$\text{حاصل ضرب ریشه‌ها: } x'x'' = \frac{c}{a} = \frac{-1}{1} = -1$$

حال این مقادیر را در عبارت A جایگذاری می‌کنیم:

$$A = (1)^2 - 2 \times (-1) = 1 + 2 = 3$$

گزینه ۴ ۱۰۵

اگر x' و x'' ریشه‌های معادله باشند، طبق فرض صورت سؤال داریم:

$$\frac{1}{x' + x''} = x'x'' \Rightarrow x'x''(x' + x'') = 1 \quad (1)$$

حال با توجه به معادله مجموع ریشه‌ها و حاصل ضرب آن‌ها را می‌یابیم:

$$x^2 + 2mx + (2m - 2) = 0 \xrightarrow{\text{مقایسه با فرم استاندارد}} \begin{cases} a=1 \\ b=2m \\ c=2m-2 \end{cases}$$

$$\text{جمع دو ریشه: } x' + x'' = \frac{-b}{a} = \frac{-2m}{1} = -2m$$

$$\text{حاصل ضرب دو ریشه: } x'x'' = \frac{c}{a} = \frac{2m-2}{1} = 2m-2$$

حال مقادیر به دست آمده را در معادله‌ی (۱) جایگذاری می‌کنیم:

$$(2m-2)(-2m) = 1 \Rightarrow -4m^2 + 4m = 1 \Rightarrow 4m^2 - 4m + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (2m-1)^2 = 0 \Rightarrow (2m-1) = 0 \Rightarrow 2m = 1 \Rightarrow m = \frac{1}{2}$$

گزینه ۲ ۱۰۰

اگر x' و x'' ریشه‌های معادله باشد، داریم:

$$x' = x'' + 2$$

$$x^2 + 5x - 2a + 1 = 0 \xrightarrow{\text{مقایسه با فرم استاندارد}} \begin{cases} a=1 \\ b=5 \\ c=-2a+1 \end{cases}$$

$$\text{مجموع ریشه‌ها: } x' + x'' = \frac{-b}{a} = \frac{-5}{1} = -5 \xrightarrow{x'=x''+2}$$

$$x'' + 2 + x'' = -5 \Rightarrow 2x'' + 2 = -5$$

$$\Rightarrow 2x'' = -5 - 2 = -7 \Rightarrow x'' = \frac{-7}{2} \Rightarrow x' = -\frac{7}{2} + 2 = -\frac{3}{2}$$

$$\text{حاصل ضرب ریشه‌ها: } x'x'' = \frac{c}{a} = \frac{-2a+1}{1} = -2a+1$$

$$\Rightarrow (-\frac{3}{2})(-\frac{7}{2}) = -2a+1 \Rightarrow -2a+1 = \frac{21}{4}$$

$$\Rightarrow -2a = \frac{21}{4} - 1 = \frac{17}{4} \Rightarrow a = -\frac{17}{8}$$

گزینه ۱ ۱۰۱

اگر x' و x'' ریشه‌های معادله باشد، داریم:

$$x' = x'' + 2$$

$$4x^2 - 4x + a = 0 \xrightarrow{\text{مقایسه با فرم استاندارد}} \begin{cases} a=4 \\ b=-4 \\ c=a \end{cases}$$

$$\text{مجموع ریشه‌ها: } x' + x'' = \frac{-b}{a} = \frac{-(-4)}{4} = 1$$

$$\xrightarrow{x'=x''+2} x'' + 2 + x'' = 1 \Rightarrow 2x'' + 2 = 1$$

$$\Rightarrow 2x'' = 1 - 2 = -1 \Rightarrow x'' = \frac{-1}{2} \Rightarrow x' = -\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2}$$

$$\text{حاصل ضرب ریشه‌ها: } x'x'' = \frac{c}{a} = \frac{a}{4} \Rightarrow (\frac{3}{2})(\frac{-1}{2}) = \frac{a}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{-3}{4} = \frac{a}{4} \Rightarrow a = -3$$

گزینه ۲ ۱۰۲

در حالت کلی قدر مطلق تفاضل ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم

از رابطه‌ی $|\frac{\sqrt{\Delta}}{a}|$ به دست می‌آید، داریم:

$$2x^2 + 5x + k = 0 \xrightarrow{\text{مقایسه با فرم استاندارد}} \begin{cases} a=2 \\ b=5 \\ c=k \end{cases}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (5)^2 - 4(2)(k) = 25 - 4k$$

$$\text{قدر مطلق تفاضل دو ریشه: } |x' - x''| = \frac{\sqrt{\Delta}}{a} \Rightarrow$$

$$|\frac{\sqrt{\Delta}}{a}| = \frac{\sqrt{25 - 4k}}{2} = 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{25 - 4k}}{2} = \pm 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{25 - 4k} = \pm 2 \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} 25 - 4k = 4$$

$$\Rightarrow 4k = 25 - 4 = 21 \Rightarrow k = \frac{21}{4}$$

۱۰۶

گزینه ۴

اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله باشند، داریم:

$$A = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{x_1 x_2}$$

حال با توجه به معادله مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها را می‌یابیم:

$$x^2 - m^2 x + \frac{1}{m^2} = 0 \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -m^2 \\ c = \frac{1}{m^2} \end{cases}$$

$$\text{مجموع ریشه‌ها: } x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{-(-m^2)}{1} = m^2$$

$$\text{حاصل ضرب ریشه‌ها: } x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{\frac{1}{m^2}}{1} = \frac{1}{m^2}$$

حال مقادیر به‌دست آمده را در عبارت A جایگذاری می‌کنیم:

$$A = \frac{(m^2)^2 - 2 \cdot \frac{1}{m^2}}{\frac{1}{m^2}} = \frac{m^4 - \frac{2}{m^2}}{\frac{1}{m^2}} = \frac{m^4 - \frac{2}{m^2}}{1} = m^4 - 2$$

۱۰۷

گزینه ۲

اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله باشند، داریم:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -\frac{3}{10} \Rightarrow \frac{x_2 + x_1}{x_1 x_2} = -\frac{3}{10}$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 = -\frac{3}{10}(x_1 x_2) \quad (1)$$

با توجه به معادله مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها را می‌یابیم:

$$(m-3)x^2 - \frac{(m+2)}{2}x - m - 6 = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} a = (m-3) \\ b = -\frac{(m+2)}{2} \\ c = -m-6 \end{cases}$$

$$\text{مجموع ریشه‌ها: } x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{-(-\frac{(m+2)}{2})}{m-3} = \frac{m+2}{2(m-3)}$$

$$\text{حاصل ضرب ریشه‌ها: } x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-m-6}{m-3} = -\frac{(m+6)}{m-3}$$

حال مقادیر به‌دست آمده را در معادله (1) جایگذاری می‌کنیم:

$$\frac{m+2}{2(m-3)} = -\frac{3}{10} \left(-\frac{(m+6)}{m-3} \right)$$

$$10(m+2)(m-3) = 3 \times 2 \times (m-3)(m+6)$$

این معادله را با روش فاکتورگیری تجزیه می‌کنیم:

$$\Rightarrow 10(m+2)(m-3) - 6(m-3)(m+6) = 0$$

$$\Rightarrow (m-3)(10(m+2) - 6(m+6)) = 0$$

$$\Rightarrow (m-3)(10m+20-6m-36) = 0$$

$$\Rightarrow (m-3)(4m-16) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m-3=0 \Rightarrow m=3 \\ 4m-16=0 \Rightarrow 4m=16 \Rightarrow m=\frac{16}{4}=4 \end{cases}$$

دقت کنید $m=3$ قابل قبول نیست زیرا ریشه‌ی مخرج عبارت

گویا می‌باشد. پس $m=4$ قابل قبول است.

۱۰۸

گزینه ۱

اگر α و β ریشه‌های معادله باشند، داریم:

$$A = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} \Rightarrow A^2 = (\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2$$

$$\Rightarrow A^2 = \alpha + 2\sqrt{\alpha\beta} + \beta = \alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta}$$

با توجه به معادله ابتدا مجموع ریشه‌ها و حاصل ضرب ریشه‌ها را

می‌یابیم:

$$x^2 - 7x + 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -7 \\ c = 4 \end{cases}$$

$$\text{مجموع ریشه‌ها: } \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{-(-7)}{1} = 7$$

$$\text{حاصل ضرب ریشه‌ها: } \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{4}{1} = 4$$

حال این مقادیر را در عبارت A^2 قرار می‌دهیم:

$$A^2 = 7 + 2\sqrt{4} = 7 + 2 \times 2 = 7 + 4 = 11 \Rightarrow A = \sqrt{11}$$

۱۰۹

گزینه ۴

اگر S مجموع ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم و P حاصل ضرب

ریشه‌های معادله درجه دوم باشد، معادله‌ی درجه‌ی دوم مورد نظر

به صورت $x^2 - Sx + P = 0$ می‌باشد، داریم:

$$x' = -1 + 2\sqrt{3}, x'' = 1 + 2\sqrt{3}$$

$$\text{مجموع ریشه‌ها: } S = x' + x'' = -1 + 2\sqrt{3} + 1 + 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

$$\text{حاصل ضرب ریشه‌ها: } P = x'x'' = (-1 + 2\sqrt{3})(1 + 2\sqrt{3})$$

$$= (2\sqrt{3})^2 - (1)^2 = 12 - 1 = 11$$

معادله‌ی درجه‌ی دوم مورد نظر: $x^2 - Sx + P = 0$

$$\Rightarrow x^2 - 4\sqrt{3}x + 11 = 0$$

۱۱۰

گزینه ۲

اگر S مجموع ریشه‌ها و P حاصل ضرب ریشه‌ها باشد، داریم:

$$x' = \frac{2 + \sqrt{3}}{2}, x'' = \frac{2 - \sqrt{3}}{2}$$

$$\text{مجموع ریشه‌ها: } S = x' + x'' = \frac{2 + \sqrt{3}}{2} + \frac{2 - \sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{2 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3}}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\text{حاصل ضرب ریشه‌ها: } P = x'x'' = \left(\frac{2 + \sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{2 - \sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \frac{(2)^2 - (\sqrt{3})^2}{4} = \frac{4 - 3}{4} = \frac{1}{4}$$

معادله‌ی درجه‌ی دوم مورد نظر: $x^2 - Sx + P = 0$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + \frac{1}{4} = 0$$

گزینه ۳ ۱۱۴

اگر طول و عرض زمین را به ترتیب α و β در نظر بگیریم و α و β را ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم در نظر بگیریم، داریم:

$$\text{مجموع دو عدد } \alpha + \beta = \frac{17}{2} \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{17}{2}$$

$$\text{حاصل ضرب دو عدد } \alpha\beta = 18 = \text{مساحت زمین}$$

$$\text{معادله‌ی درجه‌ی دوم مورد نظر: } x^2 - \frac{17}{2}x + 18 = 0$$

$$\text{طرفین را در ۲ ضرب می‌کنیم} \rightarrow 2x^2 - 17x + 36 = 0$$

حال این معادله را به روش اتحاد جمله‌ی مشترک تجزیه می‌کنیم سپس حل می‌کنیم، داریم:

$$(2x)^2 - 17(2x) + 36 = 0 \Rightarrow (2x)^2 + (-8-9)(2x) + (-8)(-9) = 0$$

$$\Rightarrow (2x-8)(2x-9) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x-8=0 \Rightarrow 2x=8 \Rightarrow x=\frac{8}{2}=4 & \text{عرض} \\ 2x-9=0 \Rightarrow 2x=9 \Rightarrow x=\frac{9}{2} & \text{طول} \end{cases}$$

$$\text{اختلاف طول و عرض: } \frac{9}{2} - 4 = \frac{9}{2} - \frac{8}{2} = \frac{1}{2} = 0.5$$

گزینه ۲ ۱۱۵

اگر ریشه‌های معادله $x^2 + 3x - 2 = 0$ را به ترتیب α و β در نظر

بگیریم، ریشه‌های معادله‌ی مورد نظر $\frac{1}{\alpha}$ و $\frac{1}{\beta}$ می‌باشد، برای

به دست آوردن معادله‌ی مورد نظر ابتدا مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها را در حالت جدید می‌یابیم:

$$\text{مجموع ریشه‌ها } S' = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{S}{P}$$

$$\text{حاصل ضرب ریشه‌ها } P' = \frac{1}{\alpha} \times \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\alpha\beta} = \frac{1}{P}$$

$$x^2 + 3x - 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=3 \\ c=-2 \end{cases}$$

$$\text{مجموع ریشه‌ها } S = \frac{-b}{a} = \frac{-3}{1} = -3$$

$$\text{حاصل ضرب ریشه‌ها } P = \frac{c}{a} = \frac{-2}{1} = -2$$

$$S' = \frac{S}{P} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}, \quad P' = \frac{1}{P} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{معادله‌ی جدید مورد نظر: } x^2 - S'x + P' = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} = 0$$

$$\text{طرفین در ۲ ضرب شود} \rightarrow 2x^2 - 3x - 1 = 0$$

گزینه ۲ ۱۱۶

در حالت کلی معادله‌ی درجه‌ی دوم که ریشه‌های آن معکوس

ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2 + bx + c = 0$ باشد، معادله‌ی

جدید به فرم $cx^2 + bx + a = 0$ می‌باشد، داریم:

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-3 \\ c=2 \end{cases}$$

$$\text{معادله‌ی جدید مورد نظر: } cx^2 + bx + a = 0$$

$$\text{معادله‌ی جدید: } 2x^2 - 3x + 1 = 0$$

گزینه ۳ ۱۱۱

اگر S مجموع ریشه‌ها و P حاصل ضرب ریشه‌ها باشد، داریم:

$$x' = 2\sqrt{2} + \sqrt{10}, \quad x'' = 2\sqrt{2} - \sqrt{10}$$

$$\text{مجموع ریشه‌ها: } S = x' + x'' = 2\sqrt{2} + \sqrt{10} + 2\sqrt{2} - \sqrt{10} = 4\sqrt{2}$$

$$\text{حاصل ضرب ریشه‌ها: } P = x'x'' = (2\sqrt{2} + \sqrt{10})(2\sqrt{2} - \sqrt{10})$$

$$= (2\sqrt{2})^2 - (\sqrt{10})^2 = 8 - 10 = -2$$

$$\text{معادله‌ی درجه‌ی دوم مورد نظر: } x^2 - Sx + P = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 4\sqrt{2}x - 2 = 0$$

گزینه ۲ ۱۱۲

اگر دو عدد مورد نظر را ریشه‌های معادله درجه دومی در نظر بگیریم با توجه به اینکه مجموع آن‌ها و حاصل ضرب آن‌ها داده شده است، معادله درجه‌ی دوم مورد نظر را تشکیل می‌دهیم، سپس معادله را حل می‌کنیم تا دو عدد مورد نظر به دست آید، داریم:

$$P = 6 \quad S = \frac{11}{2} \quad \text{مجموع دو عدد و حاصل ضرب دو عدد مورد نظر}$$

$$\text{معادله‌ی درجه‌ی دوم مورد نظر: } x^2 - Sx + P = 0$$

$$\text{طرفین معادله در ۲ ضرب شود} \rightarrow 2x^2 - 11x + 6 = 0$$

حال این معادله را به روش تجزیه اتحاد جمله مشترک حل می‌کنیم:

$$(2x)^2 - 11(2x) + 6 = 0 \Rightarrow (2x)^2 + (-3-8)(2x) + (-3)(-8) = 0$$

$$\Rightarrow (2x-3)(2x-8) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x-8=0 \Rightarrow 2x=8 \Rightarrow x=\frac{8}{2}=4 & \text{عدد بزرگتر} \\ 2x-3=0 \Rightarrow 2x=3 \Rightarrow x=\frac{3}{2} & \text{عدد کوچکتر} \end{cases}$$

$$\frac{\text{عدد بزرگتر}}{\text{عدد کوچکتر}} = \frac{4}{\frac{3}{2}} = \frac{4 \times 2}{3} = \frac{8}{3}$$

گزینه ۳ ۱۱۳

دو عدد x و y را ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم در نظر می‌گیریم، داریم:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1 \Rightarrow \frac{x+y}{xy} = 1 \Rightarrow x+y = xy \xrightarrow{xy=\frac{9}{2}} x+y = \frac{9}{2}$$

$$\text{مجموع دو عدد مورد نظر: } S = \frac{9}{2}$$

$$\text{حاصل ضرب دو عدد مورد نظر: } P = \frac{9}{2}$$

$$\text{معادله‌ی درجه‌ی دوم مورد نظر: } x^2 - Sx + P = 0$$

$$\text{طرفین را در ۲ ضرب شود} \rightarrow 2x^2 - 9x + 9 = 0$$

معادله اخیر را به روش اتحاد جمله مشترک تجزیه می‌کنیم، سپس حل می‌کنیم، داریم:

$$(2x)^2 - 9(2x) + 18 = 0 \Rightarrow (2x)^2 + (-2-6)(2x) + (-2)(-6) = 0$$

$$\Rightarrow (2x-2)(2x-6) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x-6=0 \Rightarrow 2x=6 \Rightarrow x=\frac{6}{2}=3 \Rightarrow y=3 \\ 2x-2=0 \Rightarrow 2x=2 \Rightarrow x=\frac{2}{2}=1 \Rightarrow y=\frac{9}{1}=9 \end{cases}$$

کوچکترین مقدار y برابر $\frac{9}{1}$ می‌باشد.

۱۱۷

گزینه ۳

اگر α و β ریشه‌های معادله جدید باشند، ابتدا مجموع ریشه‌ها و حاصل ضرب آن‌ها را می‌یابیم، داریم:

$$P' = \alpha + \beta = \alpha + \alpha + \beta = 2\alpha + \beta$$

$$= 2(\alpha + \beta) + \alpha = 2S + \alpha$$

$$S' = \alpha \times \beta = 2\alpha \times \beta = 2\alpha P$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-2 \\ c=1 \end{cases}$$

$$S = \frac{-b}{a} = \frac{-(-2)}{2} = \frac{2}{2}$$

$$P = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$$

$$S' = 2\left(\frac{2}{2}\right) + \alpha = 2 + \alpha$$

$$P' = 2\alpha P = 2\alpha \times \frac{1}{2} = \alpha$$

$$x^2 - S'x + P' = 0 \Rightarrow x^2 - (2 + \alpha)x + \alpha = 0$$

که با توجه به گزینه‌ها، گزینه‌ی (۳) صحیح است چون عدد ثابت در گزینه‌ی (۲) فقط ۱۰ می‌باشد.

گزینه ۴

۱۱۸

اگر ریشه‌های معادله‌ی مورد نظر $\frac{1}{\alpha} + 1$ و $\frac{1}{\beta} + 1$ باشد، α و β ریشه‌های معادله‌ی $2x^2 - 2x - 4 = 0$ باشد، داریم:

$$S' = 1 + \frac{1}{\beta} + 1 + \frac{1}{\alpha} = 2 + \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta}$$

$$= 2 + \frac{S}{P}$$

$$P' = \left(1 + \frac{1}{\beta}\right)\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{اتحاد جمله مشترک}} (1)^2 + \left(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\alpha}\right)(1) + \frac{1}{\alpha\beta} = 1 + \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} + \frac{1}{\alpha\beta}$$

$$= 1 + \frac{S}{P} + \frac{1}{P}$$

$$2x^2 - 2x - 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-2 \\ c=-4 \end{cases}$$

$$S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{-(-2)}{2} = \frac{2}{2}$$

$$P = \alpha \times \beta = \frac{c}{a} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$S' = 2 + \frac{S}{P} = 2 + \frac{2}{-2} = 2 - 1 = 1$$

$$P' = 1 + \frac{S}{P} + \frac{1}{P} = 1 + \frac{2}{-2} + \frac{1}{-2} = 1 - 1 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$= 1 - \frac{2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{2-2-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$x^2 - S'x + P' = 0 \Rightarrow x^2 - 1x - \frac{1}{2} = 0$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین در ۲ ضرب می‌شود}} 2x^2 - 2x - 1 = 0$$

۱۱۹

گزینه ۴

اگر در معادله‌ی درجه دومی مجموع ضرایب برابر صفر باشد، الزاماً یکی از ریشه‌ها برابر ۱ و ریشه‌ی دیگر برابر $\frac{c}{a}$ می‌باشد، نحوه‌ی

اثبات این موضوع را در زیر دنبال کنید:

$$a + b + c = 0 \Rightarrow c = -a - b \quad (1)$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \xrightarrow{(1)} ax^2 + bx - a - b = 0$$

حال این معادله را به روش فاکتورگیری تجزیه می‌کنیم، سپس حل می‌کنیم:

$$a(x^2 - 1) + b(x - 1) = 0 \Rightarrow a(x - 1)(x + 1) + b(x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow (x - 1)(a(x + 1) + b) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \\ a(x + 1) + b = 0 \Rightarrow ax + a + b = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow ax = -a - b \xrightarrow{c = -a - b} ax = c \Rightarrow x = \frac{c}{a}$$

گزینه ۲

۱۲۰

چون مجموع ضرایب در معادله‌ی مورد نظر برابر صفر است، یکی از ریشه‌ها ۱ و ریشه‌ی دیگر $\frac{c}{a}$ می‌باشد، داریم:

$$150x^2 - 2x - 148 = 0 \rightarrow \begin{cases} a=150 \\ b=-2 \\ c=-148 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a + b + c = 0 \Rightarrow 150 - 2 - 148 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{c}{a} = \frac{-148}{150} \end{cases}$$

گزینه ۱

۱۲۱

در معادله‌ی درجه‌ی دوم هرگاه یکی از ریشه‌ها برابر یک باشد،

مجموع ضرایب برابر صفر است و ریشه‌ی دیگر برابر $\frac{c}{a}$ می‌باشد،

پس ابتدا با قرار دادن مجموع ضرایب برابر صفر، m را می‌یابیم، سپس ریشه‌ی دیگر معادله را به دست می‌آوریم:

$$(2m - 2)x^2 - 6x + (m + 2) = 0 \rightarrow \begin{cases} a = (2m - 2) \\ b = -6 \\ c = (m + 2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = (2m - 2) \\ b = -6 \\ c = (m + 2) \end{cases} \Rightarrow a + b + c = 0 \Rightarrow (2m - 2) - 6 + m + 2 = 0$$

$$\Rightarrow 3m - 6 = 0 \Rightarrow 3m = 6 \Rightarrow m = \frac{6}{3} = 2$$

$$\text{اگر } x = 1 \text{ یکی از ریشه‌های معادله باشد، پس مجموع ضرایب معادله برابر صفر است، داریم:}$$

گزینه ۱

۱۲۲

اگر $x = 1$ یکی از ریشه‌های معادله باشد، پس مجموع ضرایب معادله برابر صفر است، داریم:

$$5x^2 - 2x + k = 0 \rightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=-2 \\ c=k \end{cases}$$

$$\Rightarrow a + b + c = 5 - 2 + k = 0 \Rightarrow 2 + k = 0 \Rightarrow k = -2$$

$$\text{اگر } x = 1 \text{ یکی از ریشه‌های معادله باشد، پس مجموع ضرایب معادله برابر صفر است، داریم:}$$