فصل اول تابع

سلام به همهٔ دانش‌آموزان عزیز. به کتاب ریاضی تجربی جامع ما خوش اومدین. فصل تابع، مثل برخی فصل‌های دیگه، ترکیب چند تا فصل مختلف هستش. به طوری که هم توی دهم، هم یازدهم و هم دوازدهم باهاش دست و پنجه نرم می‌کنین. اگه یه کم دقت کنین، تمرینتون هم خوب باشه، خیلی راحت میتونین تستاشو توی کنکور درست حل کنین.

وارد یکی از فصل‌های مهم ریاضی شدین. توی این فصل، قبل از این‌که بخوایم بحث تابع رو شروع کنیم، اول باید به خوبی با زوج مرتب و مفهوم رابطه یه دست و پنجه‌ای نرم کنین! خُب، شروع می‌کنیم.

زوج مرتب ـ رابطه

زوج مرتب: یک زوج به شکل (a,b) است که ترتیب قرارگیری a و b در آن اهمیت دارد، به‌طوری که اگر جای a و b را با هم عوض کنیم، یک زوج مرتب دیگر ساخته می‌شود. a را مؤلفهٔ اول و b را مؤلفهٔ دوم می‌نامیم، مثل $(۳,-۱)$ یا $(-۱,۲)$ یا $(\sin\frac{\pi}{۳},۰)$.

توجه دو زوج مرتب را برابر می‌نامیم، هرگاه مؤلفه‌های اول آن‌ها با هم و مؤلفه‌های دوم آن‌ها نیز با هم برابر باشند.

$$(a,b)=(c,d) \Rightarrow a=c \ ، \ b=d$$

مثال **به ازای چه مقادیری از a و b، دو زوج مرتب $\left(\frac{a}{۲}-۱,b+۲\right)$ و $\left(۲a+۲,\frac{۱-b}{۳}\right)$ با هم برابرند؟**

پاسخ گفتیم در چنین شرایطی باید مؤلفه‌های اول با هم و مؤلفه‌های دوم نیز با هم برابر باشند، پس:

$$\begin{cases} ۲a+۲=\frac{a}{۲}-۱ \Rightarrow ۲a-\frac{a}{۲}=-۲-۱ \Rightarrow \frac{۳a}{۲}=-۳ \Rightarrow a=-۲ \\ \frac{۱-b}{۳}=b+۲ \xRightarrow{\times ۳} ۱-b=۳b+۶ \Rightarrow -۵=۴b \Rightarrow b=-\frac{۵}{۴} \end{cases}$$

رابطه: یک تناظر بین دو مجموعه است. به عبارتی، یک رابطه از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B، مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب است که مؤلفه‌های اول آن‌ها، عضوهای مجموعهٔ A و مؤلفه‌های دوم آن‌ها، عضوهای مجموعهٔ B هستند.

فرض کنید رابطه را با R نشان دهیم. در این صورت رابطه‌ای که از A به B تعریف می‌شود را به فرم $R:A\to B$ می‌نویسیم.

روش‌های نمایش رابطه: برای این‌کار روش‌هایی وجود دارد که عبارت‌اند از:

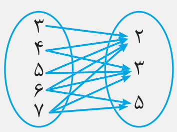
(۱) جدول (۲) نمودار پیکانی (نمودار ون) (۳) زوج مرتب (۴) نمودار مختصاتی

مثال **رابطه‌ای را که به هر عدد طبیعی در بازهٔ $(۲,۸)$، اعداد اول کوچک‌تر از آن را نسبت می‌دهد، به روش‌های مختلف نمایش دهید.**

پاسخ (۱) روش جدول:

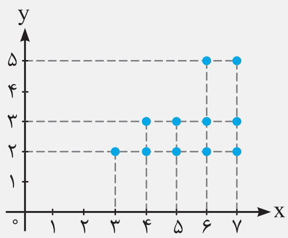
عدد	۳	۴	۵	۶	۷
اعداد اول	۲	۲,۳	۲,۳	۲,۳,۵	۲,۳,۵

(۲) روش نمودار پیکانی (نمودار ون):



③ روش زوج مرتب: $\{(۳,۲),(۴,۲),(۴,۳),(۵,۲),(۵,۳),(۶,۲),(۶,۳),(۶,۵),(۷,۲),(۷,۳),(۷,۵)\}$

④ روش نمودار مختصاتی:



مثال رابطهٔ $R=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbb{N}\ ,\ 2x^2+y<۱۱\}$ چند زوج مرتب دارد؟

پاسخ x و y اعداد طبیعی هستند که در نامعادلهٔ $2x^2+y<۱۱$ صدق می‌کنند، پس داریم:

اگر $x=۱\Rightarrow ۲(۱)^2+y<۱۱\Rightarrow y<۹\Rightarrow y\in\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸\}\Rightarrow \underbrace{(۱,۱),(۱,۲),(۱,۳),(۱,۴),(۱,۵),(۱,۶),(۱,۷),(۱,۸)}_{\text{۸ زوج مرتب}}$

اگر $x=۲\Rightarrow ۲(۲)^2+y<۱۱\Rightarrow y<۳\Rightarrow y\in\{۱,۲\}\Rightarrow \underbrace{(۲,۱),(۲,۲)}_{\text{۲ زوج مرتب}}$

اگر $x=۳\Rightarrow ۲(۳)^2+y<۱۱\Rightarrow y<-۷\Rightarrow$ مقدار طبیعی برای y وجود ندارد.

بنابراین ۱۰ زوج مرتب در رابطهٔ R با مشخصات فوق وجود دارد.

۱- اگر دو زوج مرتب $(۲k-۱,-b+۱)$ و $\left(k-\frac{۱}{۲},\frac{۲k-۱}{۳}\right)$ نمایش یک نقطه باشند، کدام گزینه درست است؟

۱) $k=۲b$ ۲) $k-b=۰$ ۳) $۲k=b$ ۴) $k+b=۰$

۲- رابطهٔ $R=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbb{Z}\ ,\ |x|+|y|=۲\}$ چند عضو زوج مرتب دارد؟ ریاضی داخل ۸۸

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۳- در رابطهٔ $R=\{(x,y)\mid x<y\}$ مؤلفه‌های هر زوج مرتب از مجموعهٔ $A=\{m\mid m\in\mathbb{Z},m^2\le ۴\}$ انتخاب می‌شوند. رابطهٔ R چند عضو دارد؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲ ریاضی داخل ۸۵

حالا می‌خوایم بهتون نحوهٔ تشخیص تابع بودن یا نبودن یه رابطه رو وقتی که به صورت جدول یا زوج مرتب یا نمودار پیکانی و یا نمودار نشون داده می‌شه، یاد بدیم.

تعریف تابع

یک تابع از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B، رابطه‌ای بین این دو مجموعه است که در آن به هر عضو از A دقیقاً یک عضو از B نسبت داده می‌شود.

توجه وقتی یک رابطه به صورت **جدول** نشان داده می‌شود، می‌گوییم تابع است به شرطی که اگر دو مؤلفه از مقادیر بالای جدول (یعنی ورودی‌ها) یکی بودند، آن‌گاه مقادیر پایین جدول (یعنی خروجی‌ها) نیز با هم یکی باشند. مثلاً به دو جدول زیر دقت کنید:

مؤلفهٔ اول (ورودی)	۴	۰	۴	-۱	۲
مؤلفهٔ دوم (خروجی)	۶	۱	-۲	۵	۲

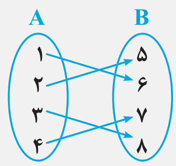
مؤلفهٔ اول (ورودی)	۴	۰	۴	-۱	۲
مؤلفهٔ دوم (خروجی)	۶	۱	$\sqrt{۳۶}$	۵	۲

جدول سمت راستی تابع نیست. چون ورودی ۴ توانسته دو خروجی یعنی ۲- و ۶ را اختیار کند. اما جدول سمت چپی تابع است. به این‌خاطر که به ازای هر ورودی از جدول، فقط یک خروجی حاصل شده است.

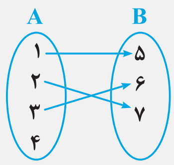
توجه حال اگر رابطه به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب نشان داده شود، هنگامی نشانگر یک تابع خواهد بود که هیچ دو زوج مرتب متمایزی در آن، مؤلفه‌های اول (یعنی x های) یکسان نداشته باشند. مثلاً رابطهٔ $f_1=\{(۵,-۱),(-۱,۲),(۶,۳)\}$ تابع است ولی $f_2=\{(۵,-۱),(-۱,۲),(۵,۳)\}$ تابع نیست، به دلیل وجود دو زوج مرتب متمایز که مؤلفهٔ اول هر دوی آن‌ها برابر ۵ است.

بحث را جمع‌وجور می‌کنیم، به این صورت که اگر دو زوج مرتب (a,b) و (a,c) داشتید و b و c با هم برابر نبودند، بگویید رابطهٔ داده‌شده، تابع نیست.

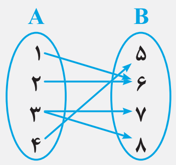
توجه اگر یک رابطه از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B با **نمودار پیکانی** نمایش داده شود، در این صورت می‌گوییم این رابطه تنها در شرایطی تابع است که از هر عضو مجموعهٔ A، دقیقاً یک پیکان خارج شود. برای درک بهتر، شکل‌های زیر را ببینید:



تابع است.

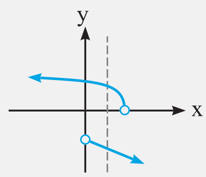


تابع نیست.
(چون از عضو ۴ هیچ پیکانی خارج نشده است.)

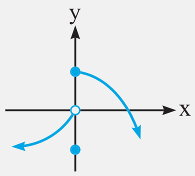


تابع نیست.
(چون از عضو ۳، دوتا پیکان خارج شده است.)

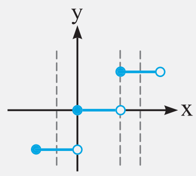
توجه در حالتی که **نمودار** رابطه را داشته باشیم، می‌گوییم در صورتی تابع است که هر خط موازی محور y ها، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند (یعنی اصلاً آن را قطع نکند و یا فقط در یک نقطه قطع کند). نمودارهای زیر را ببینید:



تابع نیست.



تابع نیست.



تابع است.

مثال **رابطهٔ $f=\{(۳,m^۲),(۲,۱),(-۲,m),(۳,m+۲),(m,۴)\}$ به ازای کدام مقدار m، یک تابع است؟**

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) هیچ مقدار m

پاسخ دو زوج مرتب $(۳,m^۲)$ و $(۳,m+۲)$ متعلق به رابطهٔ f هستند. قرار شده که این رابطه، یک تابع باشد، پس باید $m^۲=m+۲$، در نتیجه:

$$m^۲-m-۲=۰\Rightarrow(m-۲)(m+۱)=۰\Rightarrow m=۲ \text{ یا } m=-۱$$

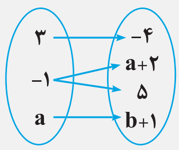
با جای‌گذاری این دو مقدار به‌جای m، داریم:

$m=۲\Rightarrow f=\{(۳,۴),(۲,۱),(-۲,۲),(۲,۴)\}\Rightarrow$ تابع نیست.

$m=-۱\Rightarrow f=\{(۳,۱),(۲,۱),(-۲,-۱),(-۱,۴)\}\Rightarrow$ تابع است.

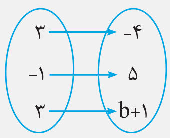
پس فقط $m=-۱$ قابل قبول است، بنابراین گزینهٔ (۲) درست است.

مثال **اگر نمودار پیکانی در شکل مقابل، مربوط به یک تابع باشد، مقدار $a^۲b$ کدام است؟**



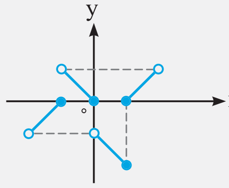
۱) -۳۶ ۲) -۴۵
۳) ۴۵ ۴) ۳۶

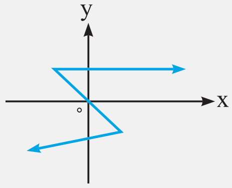
پاسخ حواستان باشد، گفته‌اند این نمودار پیکانی، یک تابع است، پس از هر عضو دامنه باید دقیقاً یک پیکان خارج شود، در نتیجه $a+۲=۵$ یا $a=۳$ است. حال داریم: $-۴=b+۱\Rightarrow b=-۵\Rightarrow a^۲b=۹\times(-۵)=-۴۵$

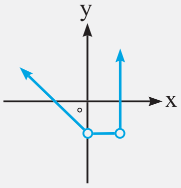


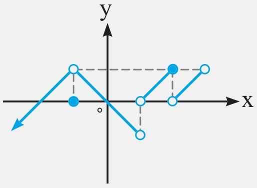
بنابراین گزینهٔ (۲) درست است.

مثال **کدام‌یک از نمودارهای زیر، یک تابع را نشان می‌دهد؟**

۱)


۲)


۳)


۴)


پاسخ در گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) می‌توانیم خطی به موازات محور yها رسم کنیم که نمودار را در بیشتر از یک نقطه قطع کند، پس مربوط به نمودار یک تابع نیستند، اما در گزینهٔ (۴) این اتفاق نمی‌افتد. هر خطی که به موازات محور yها رسم می‌کنیم، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند، بنابراین گزینهٔ (۴) درست است.

۴- به ازای کدام مقدار a، جدول مقابل، نشانگر یک تابع است؟

مؤلفهٔ اول (ورودی)	-۳	۱	-۳	۴
مؤلفهٔ دوم (خروجی)	۲a+۱	۰	۹	-۵

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۶

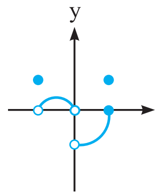
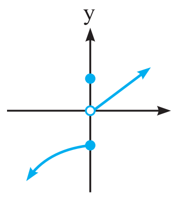
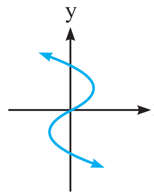
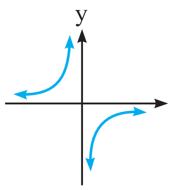
۵- رابطهٔ $f=\{(m,n),(۲,۱),(n+۱,۳),(-m,n+۱),(۲,m^۲-۳)\}$ یک تابع است. مقدار عددی $n-m$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۲ ۳) -۱ ۴) ۲

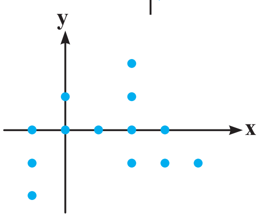
۶- اگر تابع $f=\{(-۲,a^۲-۴a+۶),(-۲,b),(c^۲+۳c,۳c+۵)\}$ شامل یک زوج مرتب باشد، حاصل $\frac{a+c}{b}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

۷- کدام‌یک از نمودارهای زیر، یک تابع را نمایش می‌دهد؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

۸- نمودار یک رابطه به صورت مقابل است. حداقل باید چند نقطه از نمودار حذف شود تا رابطه به یک تابع تبدیل گردد؟



۱) ۶
۲) ۷
۳) ۸
۴) ۱۱

قبلاً خوندین که دامنهٔ تابع یعنی ورودی‌های تابع و برد هم یعنی خروجی‌های اون. در این‌جا می‌خوایم روی این مسائل یه کم بیشتر باهاتون کار کنیم.

دامنه و برد توابع در نمایش جدول، زوج مرتب و ...

دامنهٔ تابع: مجموعهٔ ورودی‌های یک تابع است که آن را معمولاً با حرف D (حرف اول کلمهٔ Domain) نشان می‌دهند. برای تعیین دامنه، به موارد زیر توجه کنید:

۱) اگر تابع را به صورت **جدولی** نشان دهند: مجموعهٔ همهٔ مقادیری که در قسمت بالایی جدول قرار دارند، دامنهٔ تابع را تشکیل می‌دهند.

۲) اگر تابع را به صورت **مجموعهٔ زوج مرتبی** نشان دهند: مجموعهٔ همهٔ مؤلفه‌های اول، دامنهٔ تابع را تشکیل می‌دهند.

۳) اگر تابع را به صورت **نمودار پیکانی (وِن)** نشان دهند: اعضای مجموعهٔ اول که از آن‌ها، پیکان خارج می‌شود، دامنهٔ تابع را تشکیل می‌دهند.

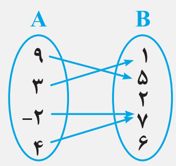
۴) اگر تابع را به صورت **نمودار مختصاتی** نشان دهند: تصویر نمودار روی محور xها، دامنهٔ تابع را تشکیل می‌دهد.

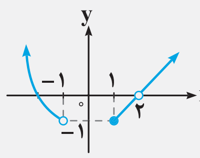
مثال **در هریک از موارد زیر، دامنهٔ تابع f را به دست آورید.**

الف) f :

ورودی	-۲	۰	۴	۷
خروجی	۲	۹	-۶	۹

ب) $f=\{(۲,۶),(-۱,۴),(۳,۳)\}$

پ) 

ت) 

پاسخ می‌توان نوشت:

الف) $D_f=\{-۲,۰,۴,۷\}$

ب) $D_f=\{۲,-۱,۳\}$

پ) $D_f=\{۹,۳,-۲,۴\}$

ت) $D_f=(-\infty,-۱)\cup[۱,۲)\cup(۲,+\infty)$

برد تابع: مجموعهٔ خروجی‌های یک تابع است که آن را با حرف R (حرف اول کلمهٔ Range) نشان می‌دهند. برای تعیین برد، به موارد زیر توجه کنید:

① اگر تابع را به صورت **جدولی** نشان دهند: مجموعهٔ همهٔ مقادیری که در قسمت پایینی جدول قرار دارند، برد تابع را تشکیل می‌دهند.

② اگر تابع را به صورت **مجموعهٔ زوج مرتبی** نشان دهند: مجموعهٔ همهٔ مؤلفه‌های دوم، برد تابع را تشکیل می‌دهند.

③ اگر تابع را به صورت **نمودار پیکانی (وِن)** نشان دهند: اعضای مجموعهٔ دوم که پیکان به آن‌ها وارد می‌شود، برد تابع را تشکیل می‌دهند.

④ اگر تابع را به صورت **نمودار مختصاتی** نشان دهند: تصویر نمودار روی محور y ها، برد تابع را تشکیل می‌دهد.

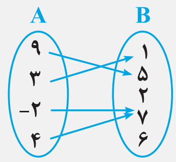
مثال در هریک از موارد زیر، برد تابع f را به دست آورید.

الف)

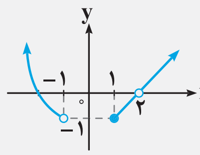
ورودی	-۲	۰	۴	۷
خروجی	۲	۹	-۶	۳

ب) $f=\{(۲,۶),(-۱,۴),(۳,۳)\}$

پ)



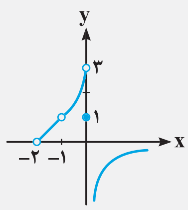
ت)



پاسخ می‌توان نوشت:

الف) $R_f=\{۲,۹,-۶,۳\}$ ب) $R_f=\{۶,۴,۳\}$ پ) $R_f=\{۱,۵,۷\}$ ت) $R_f=[-۱,+\infty)$

مثال با توجه به نمودار تابع f در شکل مقابل، برد تابع کدام است؟



۱) $(-۲,+\infty)-\{-۱\}$

۲) $(-\infty,۳)-\{-۲\}$

۳) $(-\infty,۳)-\{۰,۱\}$

۴) $(-\infty,۳)-\{۰\}$

پاسخ با تصویر کردن نمودار تابع f روی محور yها، خواهیم داشت:

$R_f=(-\infty,۳)-\{۰\}$

بنابراین گزینهٔ (۴) درست است.

◉ وقتی یک تابع از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B تعریف می‌شود، مجموعهٔ A همان دامنهٔ تابع است، اما مجموعهٔ B لزوماً برابر برد تابع نیست. به‌طور مثال داریم:

$A=\{۱,۲,۳\}\ ,\ B=\{۱,۲,۳,\cdots,۱۰\}\ ,\ f:A\to B$

$f=\{(۱,۲),(۲,۳),(۳,۵)\}$

در این‌جا دامنهٔ f مجموعهٔ $\{۱,۲,۳\}$ و برد آن مجموعهٔ $\{۲,۳,۵\}$ است. در واقع برد، زیرمجموعه‌ای از B می‌باشد.

◉ توجه داشته باشید که تعداد عضوهای مجموعهٔ دامنهٔ تابع، همیشه بزرگ‌تر یا مساوی تعداد عضوهای مجموعهٔ برد است. مثلاً امکان ندارد در یک تابع، تعداد اعضای دامنه، ۱۰تا و تعداد اعضای برد ۱۱تا باشد. اما حالا فرض کنید تعداد اعضای دامنهٔ تابع ۲۰تا باشد، در این صورت تعداد اعضای برد تابع، می‌تواند ۲۰ یا هر عدد طبیعی کم‌تر از آن باشد.

۹- جدول مقابل، بیانگر تابعی با دامنهٔ $\{-۱,-۴,-۶\}$ و برد $\{-۳,۳,۶\}$ است. $k+1$ کدام است؟

ورودی	-۶	$k(k+۴)$	-۱
خروجی	$۲k^۲-1$	$k-1$	۳

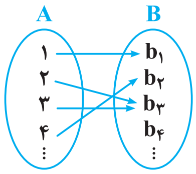
۱) صفر ۲) -۴ ۳) ۴ ۴) -۷

۱۰- تابع f را به صورت $f=\{(x,y)\,|\,-۳<x\le ۲, x\in\mathbb{Z}, y=|x-۱|\}$ در نظر بگیرید. برد تابع شامل چند عضو است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۱- فرض کنید $f=\{(۱۲,b^۲+۲),(a^۳-۷,۲c^۳-۱)\}$ تابعی با دامنهٔ $D_f=\{۱۲,۲۰\}$ و برد $R_f=\{۱,۶\}$ باشد، در این صورت مقدار $\frac{ac}{b^۲}$ کدام است؟

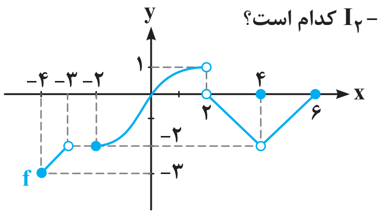
۱) ۰/۵ ۲) ۰/۷۵ ۳) ۱/۵ ۴) ۲/۲۵



۱۲- با توجه به نمودار پیکانی تابع f در شکل مقابل، دامنهٔ تابع دارای $(۵n-۷۲)$ عضو و برد آن دارای $(۴n+۳)$ عضو است. در این صورت چند عدد طبیعی برای n می‌توان یافت؟

۱) بی‌شمار ۲) ۶

۳) ۷ ۴) ۸



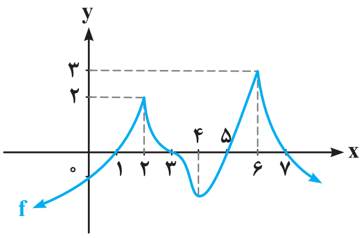
۱۳- با توجه به نمودار تابع f در شکل مقابل، اگر دامنه و برد این تابع به ترتیب برابر $I_۱$ و $I_۲$ باشد، آن‌گاه $I_۲-I_۱$ کدام است؟

۱) $[-۳,-۲]$

۲) $[-۲,۱)$

۳) $(-۲,۱)$

۴) $[-۳,-۲)$



۱۴- اگر نمودار تابع f به صورت مقابل باشد، برد تابع $y=\sqrt{f}$ کدام است؟

۱) $[۰,+\infty)$

۲) $[۰,۳]$

۳) $(-\infty,\sqrt{۳}]$

۴) $[۰,\sqrt{۳}]$

خب، حالا وقتش رسیده یه مقدار روی نمایش جبری یا همون ضابطهٔ تابع کار کنیم. بریم سراغ تستاش و ببینیم اصلاً حرف حسابشون چیه؟!

نمایش جبری (ضابطه)

داستان از چه قراره؟! ببینید بچه‌ها، ما می‌توانیم رابطهٔ بین دامنه و برد یک تابع را به صورت یک عبارت ریاضی نشان دهیم. در واقع می‌توانیم یک تابع را برحسب یک عبارت جبری از یک متغیر نمایش دهیم که این‌گونه نمایش دادن را **نمایش جبری** (یا همان **ضابطه**) می‌نامند. فراموش نکنید که در خیلی از جاها، کار با نمایش جبری یک تابع، ساده‌تر و مناسب‌تر از کار با دیگر نمایش‌های تابع است.

تذکر ما زمانی می‌توانیم ادعا کنیم که یک نمایش جبری مربوط به یک تابع است که به ازای هر مقداری که به عنوان ورودی به آن می‌دهیم، حداکثر یک مقدار خروجی به دست آید. به عنوان مثال نمایش جبری $|x|+y^۲=۱$، تابع نیست، زیرا کافی است $x=۰$ باشد، در این صورت $y^۲=۱$ بوده و $y=۱$ یا $y=-۱$ می‌شود. یعنی به ازای یک x، دو تا y پیدا شد.

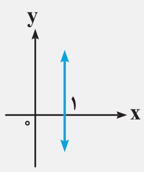
مثال در چه تعداد از روابط زیر، y تابعی از x است؟

الف) $\{(x,y)\,|\,x=۱\}$ ب) $\{(x,y)\,|\,y=۲\}$ پ) $y^۴-x^۴=۰$ ت) $y^۳-۲x=۰$ ث) $x-\cos y=۰$

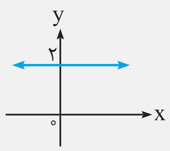
۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۲

پاسخ همهٔ موارد را بررسی می‌کنیم.

الف) $x=۱$، ضابطهٔ تابع نیست، زیرا نمودارش یک خط راست به موازات محور yها می‌باشد که یک تابع را نشان نمی‌دهد.



ب) $y=۲$، تابع است، زیرا به ازای هر x ، مقدار y فقط می‌تواند ۲ باشد. ببینید:



پ) $y^۴-x^۴=۰$، تابع نیست، زیرا $y^۴=x^۴$ است، در نتیجه $|y|=|x|$ و یا $y=\pm x$ خواهد بود. همان‌طور که می‌بینید به ازای هر x مخالف صفر، دو مقدار متفاوت برای y حاصل می‌شود.

ت) $y^۳-۲x=۰$، تابع است، زیرا $y=\sqrt[۳]{۲x}$ می‌باشد و به ازای هر x، فقط یک مقدار برای y به دست می‌آید.

ث) $x-\cos y=۰$، تابع نیست، زیرا کافی است $x=۰$ باشد. در این صورت $\cos y=۰$ می‌باشد و بی‌شمار مقدار برای y حاصل می‌شود، از جمله $y=\frac{\pi}{۲}$، $y=\frac{۳\pi}{۲}$، $y=\frac{۵\pi}{۲}$ و ... . خلاصه این‌که فقط موارد (ب) و (ت) تابع هستند، پس گزینهٔ (۴) درست است.

مثال مجموع دو عدد مثبت برابر ۴ است. نمایش جبری تابعی که حاصل‌ضرب آن دو عدد (P) را برحسب مجموع جذرهای آن دو عدد (x) نشان می‌دهد، کدام است؟

۱) $P(x)=(\frac{x}{۲}+۲)^۲$ ۲) $P(x)=(\frac{x^۲}{۲}+۲)^۲$ ۳) $P(x)=(\frac{x^۲}{۲}-۲)^۲$ ۴) $P(x)=(\frac{x}{۲}-۲)^۲$

پاسخ دو عدد مثبت را α و β در نظر می‌گیریم، در این صورت:

$$\alpha+\beta=۴\ ,\ P=\alpha\beta\ ,\ x=\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\xrightarrow{\text{توان ۲}}x^۲=(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^۲=\underbrace{\alpha+\beta}_{۴}+۲\underbrace{\sqrt{\alpha\beta}}_{P}$$

$$\Rightarrow x^۲=۴+۲\sqrt{P}\Rightarrow x^۲-۴=۲\sqrt{P}\Rightarrow\frac{x^۲-۴}{۲}=\sqrt{P}\xrightarrow{\text{توان ۲}}P=(\frac{x^۲-۴}{۲})^۲=(\frac{x^۲}{۲}-۲)^۲$$

بنابراین گزینهٔ (۳) صحیح است.

۱۵- براساس ماشین زیر، کدام گزینه می‌تواند نمایش جبری تابع f باشد؟

۱) $f(x)=x^۲+۴x-۴$
۲) $f(x)=x^۲+۴x+۴$
۳) $f(x)=x^۲-۴x+۴$
۴) $f(x)=x^۲-۴x-۴$

۱۶- در کدام رابطه، y تابعی از x است؟

۱) $\{(x,y)\mid x,y\in\mathbb{Z},|x|+|y|=۶\}$ ۲) $\{(x,y)\mid x,y\in\mathbb{N},|x|+|y|=۶\}$
۳) $\{(x,y)\mid x,y\in\mathbb{Q},|x|+|y|=۶\}$ ۴) $\{(x,y)\mid x,y\in\mathbb{R},|x|+|y|=۶\}$

۱۷- چه تعداد از روابط زیر، معرف یک تابع هستند؟ (x متغیر مستقل و y متغیر وابسته است.)

الف) $|x+۲|+\sqrt{y-۱}=۰$ ب) $x^۲+y^۲-۵=۰$ پ) $y^۲-۹y-x=۰$

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۸- چه تعداد از روابط زیر، تابع هستند؟

الف) $y=\sqrt{-x}+\sqrt{x}$ ب) $\frac{y}{x}+\frac{x}{y}+۲=۰$ پ) $xy=x$ ت) $f(x^۲)=x$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۱۹- چه تعداد از روابط زیر، نمایش ضابطهٔ یک تابع است؟

الف) $|x|=|y|$ ب) $y=\pm\sqrt{-۱+۶x-۹x^۲}$ پ) $y^۳+۳y^۲+۳y+x^۲-۱=۰$ ت) $y^۴-۴y+۴=\sin x$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۰- چه تعداد از روابط زیر، نمایش ضابطهٔ یک تابع است؟

الف) $\sqrt[۵]{x}\,|y|=۱$ ب) $y^۴=۵^x$ پ) $\sqrt{۲x-۱}+\sqrt{y^۲-۹}=۰$ ت) $\sqrt[۴]{x^۲y}\times\sqrt[۴]{x^۲y-۲}=۰$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۱- نمودار تابع $y=\frac{x^۲+۲x+۲}{x+۳}$ با شرط صحیح بودن x و y، شامل چند زوج مرتب است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) بی‌شمار

چند تا تست بعدی، شما رو مجبور می‌کنه که ضابطهٔ یه تابع رو بنویسین و بیشتر در مورد شکل‌های هندسی و این جور چیزا بحث می‌شه.

۲۲- طول میانه و مساحت یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ترتیب برابر m و S است. کدام گزینه تابعی است که S را برحسب m نشان می‌دهد؟

۱) $S(m)=\frac{\sqrt{۳}}{۳}m^۲$ ۲) $S(m)=\sqrt{۳}m^۲$ ۳) $S(m)=\frac{\sqrt{۳}}{۲}m^۲$ ۴) $S(m)=\frac{\sqrt{۳}}{۴}m^۲$

۲۳- در مثلث قائم‌الزاویه‌ای به مساحت ۱۵ مترمربع، طول وتر به عنوان تابعی از یک ضلع قائمه (x)، به کدام صورت زیر است؟

۱) $f(x)=\frac{\sqrt{x^۴+۹۰۰}}{x}$ ۲) $f(x)=\frac{\sqrt{۲۲۵-x^۴}}{x}$ ۳) $f(x)=\frac{\sqrt{۹۰۰-x^۴}}{x}$ ۴) $f(x)=\frac{\sqrt{x^۴+۲۲۵}}{x}$

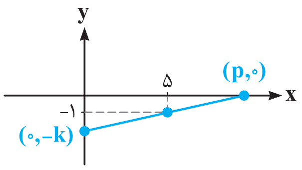
۲۴- اگر حجم و مساحت کل مکعب را به ترتیب با V و S نمایش دهیم، چه ارتباطی بین آن دو برقرار است؟

۱) $V(S)=\frac{S}{۲}\sqrt{S}$ ۲) $V(S)=\frac{S}{۶}\sqrt{\frac{S}{۶}}$ ۳) $V(S)=\sqrt{\frac{S}{۶}}$ ۴) $V(S)=\sqrt[۳]{\left(\frac{S}{۶}\right)^{۲}}$

۲۵- یک تانکر گاز از یک استوانه و دو نیم‌کره به شعاع r در دو انتهای استوانه، تشکیل شده است. اگر ارتفاع استوانه، ۳۰ متر باشد، حجم تانکر برحسب r، برابر چند π است؟

۱) $r\left(\frac{۴}{۳}r^{۲}+۳۰\right)$ ۲) $r^{۲}\left(\frac{۴}{۳}r+۳۰\right)$ ۳) $r^{۲}\left(\frac{۴}{۹}r+۱۵\right)$ ۴) $r\left(\frac{۴}{۳}r^{۲}+۱۵\right)$

۲۶- مطابق شکل زیر، خطی از نقطهٔ (۵,۱-) می‌گذرد و با محورهای مختصات، مثلث قائم‌الزاویه می‌سازد. مساحت این مثلث برحسب k کدام است؟ ($k>۱$)



۱) $S(k)=\frac{۲k^{۲}}{۵k-۵}$ ۲) $S(k)=\frac{۵k^{۲}}{k-۱}$

۳) $S(k)=\frac{۵k^{۲}}{۲k-۲}$ ۴) $S(k)=\frac{k^{۲}}{۲k-۲}$

شما قراره توی این قسمت با روش‌های تعیین دامنه برای تابع‌های مختلفی مانند چندجمله‌ای‌ها، توابع گویا، رادیکالی، لگاریتمی و مثلثاتی آشنا بشید. برخی از این توابع رو در کتاب ریاضی دهم دیدین و برخی هم در کتاب ریاضی یازدهم، حالا ما همهٔ اونا رو براتون به صورت یک‌جا، پیش هم‌دیگه جمع و جور کردیم، با ما همراه باشین.

روش‌های تعیین دامنه از روی ضابطه

در این بخش با دامنهٔ انواع توابع آشنا می‌شوید:

۱ توابع چندجمله‌ای و دامنهٔ آن‌ها: توابعی به فرم کلی $f(x)=a_{۰}x^{n}+a_{۱}x^{n-۱}+...+a_{n}$ هستند.

- دامنهٔ آن‌ها، کل مجموعهٔ اعداد حقیقی است، یعنی $D_f=\mathbb{R}$.

مثال **دامنهٔ توابع زیر را به دست آورید.**

الف) $f(x)=۳x^{۲}-۵x+۱$ ب) $g(x)=\frac{۱}{۴}x^{۳}-۲x^{۲}+\frac{x}{۳}-\frac{۲}{۵}$

پاسخ هم در مورد (الف) و هم در مورد (ب) با تابع‌های چندجمله‌ای سروکار داریم، بنابراین دامنهٔ هر دوی آن‌ها برابر $\mathbb{R}$ است.

۲ توابع گویا و دامنهٔ آن‌ها: هرگاه $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع چندجمله‌ای باشند و $g(x)\neq ۰$، آنگاه تابع $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ را **تابع گویا** می‌نامند (مانند توابع $y=\frac{۱}{x}$ یا $y=\frac{۲x+۱}{x-۴}$).

- برای تعیین دامنهٔ این‌گونه توابع باید ریشه‌های مخرج را از $\mathbb{R}$ حذف کنید، یعنی $D_f=\mathbb{R}-\{\text{ریشه‌های مخرج}\}$.

مثال **دامنهٔ توابع زیر را به دست آورید.**

الف) $f(x)=\frac{۲x}{x-۳}$ ب) $g(x)=\frac{x+۱}{x^{۲}-۹}$ پ) $h(x)=\frac{x^{۲}-x+۱}{x^{۲}-۵x+۴}$ ت) $k(x)=\frac{|x|-۶}{|x|-۶}$

پاسخ می‌توان نوشت:

الف) مخرج: $x-۳=۰\Rightarrow x=۳\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{۳\}$

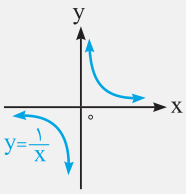
ب) مخرج: $x^{۲}-۹=۰\Rightarrow x^{۲}=۹\xRightarrow{\text{جذر}}|x|=۳\Rightarrow x=-۳$ یا $۳\Rightarrow D_g=\mathbb{R}-\{-۳,۳\}$

پ) مخرج: $x^{۲}-۵x+۴=۰\Rightarrow (x-۴)(x-۱)=۰\Rightarrow\begin{cases}x-۴=۰\Rightarrow x=۴\\ x-۱=۰\Rightarrow x=۱\end{cases}\Rightarrow D_h=\mathbb{R}-\{۱,۴\}$

ت) مخرج: $|x|-۶=۰\Rightarrow |x|=۶\Rightarrow x=-۶$ یا $۶\Rightarrow D_k=\mathbb{R}-\{-۶,۶\}$

تذکر از مثال (ت) نتیجه می‌گیریم که برای تعیین دامنهٔ یک تابع، به هیچ وجه، ضابطهٔ تابع را **نباید ساده کنیم**.

توجه فراموش نکنید که در کتاب درسی ریاضی یازدهم، ضابطهٔ **تابع سهم مشارکت** که به صورت $f(x)=\frac{۱}{x}$ معرفی شده است.
یعنی اگر در پروژه‌ای x نفر به‌طور مساوی مشارکت کرده باشند، سهم هر نفر برابر $\frac{۱}{x}$ است. نمودارش هم بلد باشید:



$$\Rightarrow\begin{cases}D_y=\mathbb{R}-\{۰\}\\ R_y=\mathbb{R}-\{۰\}\end{cases}$$

۳) توابع رادیکالی و دامنهٔ آن‌ها: منظور از این نوع توابع، همان $y=\sqrt[۲n]{f(x)}$ و $y=\sqrt[۲n+۱]{f(x)}$ $(n\in\mathbb{N})$ است (مانند توابع $y=\sqrt{x^۲-۱}$، $y=\sqrt[۳]{\frac{x+۲}{۳}}$، $y=\sqrt{\frac{x^۲}{x^۲-۴}}$ یا $y=\sqrt{|x|-۵}$).

برای تعیین دامنهٔ این‌گونه توابع، یکی از دو حالت زیر را خواهیم داشت:

حالت اول: **اگر تابع رادیکالی با فرجهٔ فرد** باشد، باید به عبارت زیر رادیکال توجه کنید (یعنی وجود رادیکال، هیچ تأثیری روی دامنه ندارد) و دامنهٔ آن عبارت را مشخص نمایید.

حالت دوم: **اگر تابع رادیکالی با فرجهٔ زوج** باشد، باید عبارت زیر رادیکال را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار دهید.

مثال **دامنهٔ توابع زیر را به دست آورید.**

الف) $f(x)=\sqrt[۳]{۹x^۴-۸x^۳+x^۲+۱}$ ب) $g(x)=\sqrt[۵]{\frac{۲x}{|x-۱|-۲}}$

پ) $h(x)=\sqrt{۳x-x^۲}$ ت) $k(x)=\sqrt[۴]{۹-|x+۲|}$

پاسخ می‌توان نوشت:

الف) $D_f=\mathbb{R}$

ب) مخرج: $|x-۱|-۲=۰\Rightarrow|x-۱|=۲\Rightarrow\begin{cases}x-۱=-۲\Rightarrow x=-۱\\ x-۱=۲\Rightarrow x=۳\end{cases}\Rightarrow D_g=\mathbb{R}-\{-۱,۳\}$

پ) مخرج: $۳x-x^۲\geq۰\Rightarrow x(۳-x)\geq۰\xRightarrow{\text{تعیین علامت}}$

x		۰		۳	
$-x^۲+۳x$	−	۰	+	۰	−

$\Rightarrow D_h=[۰,۳]$

ت) مخرج: $۹-|x+۲|\geq۰\Rightarrow|x+۲|\leq۹\Rightarrow-۹\leq x+۲\leq۹\xRightarrow{-۲}-۱۱\leq x\leq۷\Rightarrow D_k=[-۱۱,۷]$

۴) توابع لگاریتمی و دامنهٔ آن‌ها: منظور تابع با ضابطهٔ $y=\log_{g(x)}f(x)$ است (مانند توابع $y=\log x$، $y=\log_۳(\frac{x}{۲}-۱)$ یا $y=\log_{x+۲}(x^۲-۱)$)

برای تعیین دامنهٔ توابع لگاریتمی به فرم $y=\log_{g(x)}f(x)$، باید عبارت جلوی لگاریتم $(f(x))$ را بزرگ‌تر از صفر و مبنای لگاریتم $(g(x))$ را بزرگ‌تر از صفر و مخالف یک قرار دهید، به عبارتی دیگر می‌توان نوشت:

اگر $y=\log_{g(x)}f(x)\Rightarrow D_y=\{x\mid\underbrace{f(x)>۰}_{(۱)},\underbrace{g(x)>۰}_{(۲)},\underbrace{g(x)\neq۱}_{(۳)}\}$

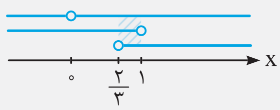
در نهایت با اشتراک گرفتن از موارد (۱)، (۲) و (۳)، دامنهٔ تابع لگاریتمی به دست می‌آید.

مثال **دامنهٔ توابع زیر را به دست آورید.**

الف) $f(x)=\log_{(۱-x)}(۳x-۲)$ ب) $g(x)=\log_{(x-۹)}(|x|-۵)$

پاسخ می‌توان نوشت:

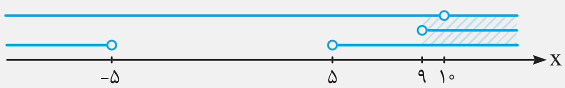
الف) $\begin{cases}۳x-۲>۰\Rightarrow۳x>۲\Rightarrow x>\frac{۲}{۳} & (۱)\\ ۱-x>۰\Rightarrow x<۱ & (۲)\\ ۱-x\neq۱\Rightarrow x\neq۰ & (۳)\end{cases}\xRightarrow{(۱)\cap(۲)\cap(۳)}$



$\Rightarrow D_f=(\frac{۲}{۳},۱)$

ب) $\begin{cases}|x|-۵>۰\Rightarrow|x|>۵\Rightarrow x<-۵ \text{ یا } x>۵ & (۱)\\ x-۹>۰\Rightarrow x>۹ & (۲)\\ x-۹\neq۱\Rightarrow x\neq۱۰ & (۳)\end{cases}$

$\xRightarrow{(۱)\cap(۲)\cap(۳)}$



$\Rightarrow D_g=(۹,+\infty)-\{۱۰\}$

۵ توابع مثلثاتی و دامنهٔ آن‌ها: منظور توابع $y=\sin(f(x))$ ، $y=\cos(f(x))$ ، $y=\tan(f(x))$ و $y=\cot(f(x))$ است.

- برای تعیین دامنهٔ توابع $y=\sin(f(x))$ و $y=\cos(f(x))$ ، کافی است همان دامنهٔ $f(x)$ را به دست آورید.
- اما در مورد تعیین دامنهٔ توابع $y=\tan(f(x))$ و $y=\cot(f(x))$ ، ابتدا آن‌ها را به فرم کسری بنویسید و ریشه‌های مخرجشان را تعیین کنید و بعد از دامنهٔ $f(x)$ کم کنید تا دامنهٔ تابع به دست آید. برای درک بهتر، موارد زیر را ببینید:

$$\begin{cases} \text{اگر } y=\tan x \Rightarrow y=\dfrac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow \text{مخرج: } \cos x=۰ \Rightarrow x=k\pi+\dfrac{\pi}{۲}\ (k\in\mathbb{Z}) \Rightarrow D_y=\mathbb{R}-\left\{k\pi+\dfrac{\pi}{۲}\,|\,k\in\mathbb{Z}\right\} \\ \text{اگر } y=\cot x \Rightarrow y=\dfrac{\cos x}{\sin x} \Rightarrow \text{مخرج: } \sin x=۰ \Rightarrow x=k\pi\ (k\in\mathbb{Z}) \Rightarrow D_y=\mathbb{R}-\{k\pi\,|\,k\in\mathbb{Z}\} \end{cases}$$

مثال دامنهٔ توابع زیر را به دست آورید.

الف) $f(x)=\sin(۲x^۲+۱)$ ب) $g(x)=\cos\left(\dfrac{۱}{x-۳}\right)$ پ) $h(x)=\tan ۲x$ ت) $k(x)=\cot\left(\dfrac{x}{۳}\right)$

پاسخ می‌توان نوشت:

الف) $D_f=\mathbb{R}$

ب) $D_g=\mathbb{R}-\{۳\}$

پ) $h(x)=\tan ۲x=\dfrac{\sin ۲x}{\cos ۲x} \Rightarrow \text{مخرج: } \cos ۲x=۰ \Rightarrow ۲x=k\pi+\dfrac{\pi}{۲}\ (k\in\mathbb{Z}) \xRightarrow{\div ۲} x=\dfrac{k\pi}{۲}+\dfrac{\pi}{۴}\quad (k\in\mathbb{Z})$

$\Rightarrow D_h=\mathbb{R}-\left\{\dfrac{k\pi}{۲}+\dfrac{\pi}{۴}\,|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$

ت) $k(x)=\cot\left(\dfrac{x}{۳}\right)=\dfrac{\cos\frac{x}{۳}}{\sin\frac{x}{۳}} \Rightarrow \text{مخرج: } \sin\dfrac{x}{۳}=۰ \Rightarrow \dfrac{x}{۳}=k\pi\ (k\in\mathbb{Z}) \Rightarrow x=۳k\pi\quad (k\in\mathbb{Z})$

$\Rightarrow D_k=\mathbb{R}-\{۳k\pi\,|\,k\in\mathbb{Z}\}$

۲۷– کدام‌یک از موارد زیر در رابطه با تابع $f(x)=-\dfrac{۱}{x}$ نادرست است؟

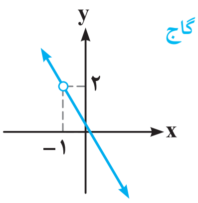
الف) همهٔ اعداد حسابی در دامنهٔ آن قرار دارند. **ب) دامنه و نمودار تابع، نسبت به مبدأ مختصات، متقارن هستند.**

۱) فقط (الف) ۲) فقط (ب) ۳) (الف) و (ب) ۴) هیچ‌کدام

۲۸– اگر $f(x)=x^۲-x$ و $g(x)=x+۲$ باشند، دامنهٔ کدام تابع زیر، برابر $\mathbb{R}$ است؟

۱) $y=\dfrac{۱}{g(x)-f(x)}$ ۲) $y=\left(\dfrac{g}{f}\right)(x)$ ۳) $y=\dfrac{g^۲(x)}{f(x)-۲}$ ۴) $y=\dfrac{f(x)+۱}{f(x)+g(x)}$

۲۹– نمودار مقابل مربوط به کدام تابع است؟



۱) $y=۲x$ ۲) $y=-۲x$

۳) $y=\dfrac{۲x^۲+۲x}{x+۱}$ ۴) $y=\dfrac{۲x^۲+۲x}{-x-۱}$

۳۰– به ازای چه مقادیری از a ، تابع $y=\dfrac{a}{۴x^۲-۵x+۳a}$ همواره تعریف‌شده است؟

۱) $۰<a<\dfrac{۲۵}{۴۸}$ ۲) $a>\dfrac{۲۵}{۴۸}$ ۳) $a<\dfrac{۲۵}{۴۸}$ ۴) $a=\dfrac{۲۵}{۴۸}$

۳۱– اگر دامنهٔ تابع $f(x)=\dfrac{\frac{۱}{x-۱}-۲}{\frac{۱}{x}-۱}$ برابر $\mathbb{R}-A$ باشد، مجموعهٔ A شامل چند عضو است؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۱

۳۲– کدام‌یک از جفت تابع‌های زیر، دامنه و برد مساوی دارند، ولی هیچ زوج مرتبی در بین آن‌ها، مشترک نیست؟

۱) $\begin{cases} y=۳ \\ y=۵ \end{cases}$ ۲) $\begin{cases} y=۲x+۴ \\ y=۲x-۱ \end{cases}$ ۳) $\begin{cases} y=\sqrt{-x} \\ y=-\sqrt{x} \end{cases}$ ۴) $\begin{cases} y=۱+۳x \\ y=۲-x \end{cases}$

۳۳- دامنهٔ چه تعداد از توابع زیر، درست محاسبه نشده است؟ ([ ] علامت جزءصحیح است.)

الف) $f(x)=\dfrac{3\sqrt[3]{x}}{x^2-1} \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{-1,1\}$

ب) $g(x)=\sqrt{\dfrac{5-x}{6-x}} \Rightarrow D_g=[5,6]$

پ) $t(x)=\sqrt[5]{\dfrac{x^2-9x+8}{x-8}} \Rightarrow D_t=\mathbb{R}-\{8\}$

ت) $u(x)=\dfrac{x}{x} \Rightarrow D_u=\mathbb{R}$

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۳۴- اگر $g(x)=x^3-3x$ باشد، دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{x-g(x)}$ کدام است؟

۱) $(-\infty,-2]\cup[0,2]$ ۲) $[-2,0]\cup[2,+\infty)$ ۳) $(-\infty,-2]$ ۴) $[0,2]$

۳۵- دامنهٔ تابع $y=\sqrt{\dfrac{3-|x|}{3+x^2}}$ کدام است؟

۱) $\{x:-3\le x\le 3\}$ ۲) $\{x:x\ge 3\}$ ۳) $\mathbb{R}$ ۴) $\{x:x\le 3\}$

۳۶- دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{-x^2(x^2-16)^4}$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) بی‌شمار

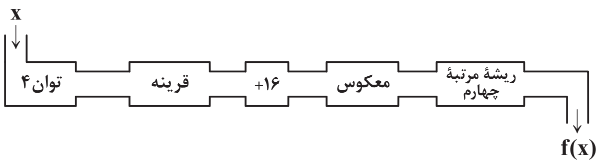
۳۷- دامنهٔ تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-9}}{\sqrt{16-x^2}}$ کدام است؟

۱) $|x|\ge 3$ ۲) $3\le |x|<4$ ۳) $3<|x|\le 4$ ۴) $|x|<4$

۳۸- اگر دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-3}+9}{\sqrt{x-3}-9}$ برابر $[a,+\infty)-\{b\}$ باشد، $\dfrac{b}{a}$ کدام است؟

۱) ۲۸ ۲) ۲۷ ۳) ۲۹ ۴) ۲۶

۳۹- اگر متغیرهایی که قابلیت ورود به ماشین زیر را دارند تا خروجی داشته باشیم، در بازهٔ (a,b) باشند، آن‌گاه بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟



۱) ۶ ۲) ۴ ۳) ۹ ۴) ۸

۴۰- دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{\dfrac{2x+1}{x+2}-x}$ کدام است؟

۱) $(-\infty,-2)\cup[1,+\infty)$ ۲) $(-2,-1]\cup[1,+\infty)$ ۳) $(-\infty,-2)\cup[-1,1]$ ۴) $(-\infty,-2]\cup(-1,1]$

۴۱- دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{11-\sqrt{x-5}}$ شامل چند عدد طبیعی است؟

۱) بی‌شمار ۲) ۱۲۳ ۳) ۱۲۲ ۴) ۱۲۴

۴۲- دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{2x-\sqrt{x+3}}$، شامل چند عدد طبیعی نمی‌باشد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۴۳- به ازای چند عدد طبیعی a، دامنهٔ تابع $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{ax^2+ax+1}}$، مجموعهٔ $\mathbb{R}$ است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۴۴- اگر دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt[4]{-4x^2+ax-2b}$ یک مجموعهٔ تک‌عضوی به صورت $\left\{-\dfrac{1}{3}\right\}$ باشد، حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) $-\dfrac{22}{9}$ ۲) $\dfrac{26}{9}$ ۳) $\dfrac{22}{9}$ ۴) $-\dfrac{26}{9}$

۴۵- حاصل‌ضرب اعداد صحیحی که در دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{|2-|x-3||-1}$ قرار ندارند، کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۱۰ ۳) ۱۵ ۴) ۲۰

۴۶- اگر $f(x)=\sqrt{x+|x+2|}$، دامنهٔ تابع $f(-x)$ کدام است؟ تجربی خارج ۹۲

۱) $x\le -1$ ۲) $x\ge -1$ ۳) $x\le 1$ ۴) $x\ge 1$

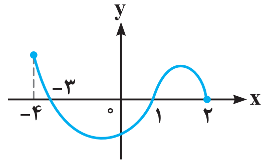
۴۷- دامنهٔ تابع $y=\sqrt{|x-6|-|x-3|}$ چند عدد طبیعی را شامل نمی‌شود؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) بی‌شمار

۴۸- دامنهٔ تابع $y=\dfrac{\sqrt{x(x^2-1)}}{\sqrt{|x|+x}}$ کدام است؟

۱) $x>1$ ۲) $-1\leq x<0$ ۳) $0<x\leq 1$ ۴) $x\geq 1$

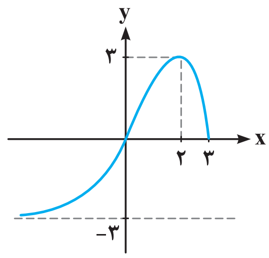
۴۹- شکل مقابل، نمودار تابع $y=f(x)$ است. دامنهٔ تابع $\sqrt{xf(x)}$ کدام است؟ ریاضی داخل ۹۲



۱) $[-3,2]$ ۲) $[0,2]$

۳) $[-4,-3]\cup[1,2]$ ۴) $[-3,0]\cup[1,2]$

۵۰- با توجه به نمودار تابع f در شکل روبه‌رو، دامنهٔ تابع $y=\dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{3-f(x)}}$ شامل چند عدد صحیح است؟



۱) بی‌شمار

۲) ۶

۳) ۴

۴) ۵

۵۱- اگر $f(x)=2^x$ باشد، دامنهٔ تابع $y=\sqrt{f(\frac{1}{x})-f(x)}$، به کدام صورت است؟ ریاضی خارج ۹۳

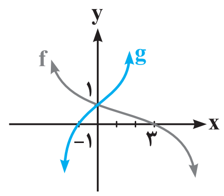
۱) $\mathbb{R}-(-1,1)$ ۲) $[-1,0)\cup(0,1]$ ۳) $[-1,0)\cup[1,+\infty)$ ۴) $(-\infty,-1]\cup(0,1]$

دو تا تست بعدی شما رو می‌بره توی حال و هوای توابع لگاریتمی و این حرفا. بریم ببینیم چه خبره!

۵۲- دامنهٔ تعریف تابع $y=\log_{(x-4)}(x^2-9)$ کدام است؟

۱) $(4,+\infty)$ ۲) $(4,+\infty)-\{5\}$ ۳) $\mathbb{R}-(3,4)$ ۴) $(3,+\infty)-\{5\}$

۵۳- با توجه به شکل مقابل، دامنهٔ تابع $y=\log_{g(x)}f(x)$ شامل چند عدد صحیح است؟



۱) صفر ۲) ۳

۳) ۲ ۴) ۱

یه تست از دامنهٔ مثلثاتی‌ها حل کنین.

۵۴- دامنهٔ تابع $f(x)=\tan(x-\frac{\pi}{4})+2$ کدام است؟ $(k\in\mathbb{Z})$

۱) $\mathbb{R}-\{k\pi-\frac{\pi}{4}\}$ ۲) $\mathbb{R}-\{k\pi+\frac{\pi}{4}\}$ ۳) $\mathbb{R}-\{k\pi\}$ ۴) $\mathbb{R}-\{k\pi+\frac{\pi}{2}\}$

حالا وقتش رسیده بریم سراغ محاسبهٔ برد تابع‌های مختلف.

تعیین برد از روی ضابطه

گاهی اوقات ضابطهٔ تابع f را به ما می‌دهند و برد آن (یعنی محدودهٔ تغییرات y) را می‌پرسند. روش‌های مختلفی در این‌باره وجود دارد.

در یک سری از توابع، دامنهٔ آن‌ها را به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب داریم. در این حالت کافی است با جای‌گذاری هریک از اعضای دامنه به جای متغیر x، مقدار y را به دست آوریم تا اعضای برد مشخص شوند.

مثال برد تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{x}{2x-1}$ و دامنهٔ $\{0,\frac{1}{4},1,3\}$ را به دست آورید.

پاسخ همان‌طور که گفتیم، با جای‌گذاری xها، مقادیر y حاصل می‌شوند، بنابراین می‌توان نوشت:

اگر $x=0 \Rightarrow f(0)=\dfrac{0}{2(0)-1}=0$

اگر $x=\frac{1}{4} \Rightarrow f(\frac{1}{4})=\dfrac{\frac{1}{4}}{2(\frac{1}{4})-1}=\dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}-1}=\dfrac{\frac{1}{4}}{-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}$

$x=۱ \Rightarrow f(۱)=\frac{۱}{۲(۱)-۱}=\frac{۱}{۱}=۱$ اگر

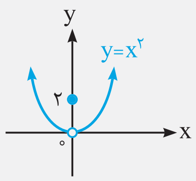
$x=۳ \Rightarrow f(۳)=\frac{۳}{۲(۳)-۱}=\frac{۳}{۶-۱}=\frac{۳}{۵}$ اگر

بنابراین برد تابع برابر مجموعهٔ $\left\{۰,-\frac{۱}{۲},\frac{۳}{۵},۱\right\}$ است.

فراموش نکنید که یکی از بهترین روش‌ها برای تعیین برد تابع، این است که نمودار تابع را رسم کنیم و آن را روی محور y ها تصویر نماییم.

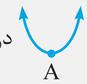
مثال برد تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} x^۲ & ; \ x\neq ۰ \\ ۲ & ; \ x=۰ \end{cases}$ را به دست آورید.

پاسخ با رسم نمودار به جواب می‌رسیم:

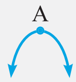


$\Rightarrow R_f=(۰,+\infty)$

برای تعیین برد توابع درجه دوم با ضابطهٔ $y=ax^۲+bx+c \ (a\neq ۰)$ ابتدا به علامت a نگاه کنید. در این صورت:

① اگر $a>۰$ باشد، نمودار تابع به فرم  درمی‌آید و برد آن برابر می‌شود با:

$$R_y=[y_A,+\infty)=\left[f\left(-\frac{b}{۲a}\right),+\infty\right)=\left[\frac{۴ac-b^۲}{۴a},+\infty\right)$$

② اگر $a<۰$ باشد، نمودار تابع به فرم  درمی‌آید و برد آن برابر می‌شود با:

$$R_y=(-\infty,y_A]=\left(-\infty,f\left(-\frac{b}{۲a}\right)\right]=\left(-\infty,\frac{۴ac-b^۲}{۴a}\right]$$

مثال **کم‌ترین مقدار تابع $f(x)=x^۲-۹x+۱۰$ را به دست آورید.**

پاسخ ضریب $x^۲$ برابر ۱ است، پس مثبت است، در نتیجه:

$$R_f=\left[\frac{۴ac-b^۲}{۴a},+\infty\right)=\left[\frac{۴(۱)(۱۰)-(-۹)^۲}{۴(۱)},+\infty\right)=\left[\frac{۴۰-۸۱}{۴},+\infty\right)=\left[-\frac{۴۱}{۴},+\infty\right)$$: برد تابع f

بنابراین کم‌ترین مقدار y برابر $-\frac{۴۱}{۴}$ است.

یکی دیگر از روش‌های تعیین برد در تابع $y=f(x)$ این است که آن را به صورت $x=f(y)$ درآوریم و دامنهٔ آن را بیابیم تا برد تابع $y=f(x)$ به دست آید.

مثال **برد تابع $y=\frac{x^۲}{x^۲+۱}$ را به دست آورید.**

پاسخ **روش اول:** می‌توان نوشت:

$$y=\frac{x^۲}{x^۲+۱}\Rightarrow yx^۲+y=x^۲\Rightarrow yx^۲-x^۲=-y\Rightarrow x^۲(y-۱)=-y\Rightarrow x^۲=\frac{-y}{y-۱}\xRightarrow{\text{جذر}}|x|=\sqrt{\frac{-y}{y-۱}}\Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{-y}{y-۱}}$$

بنابراین باید:

$$\frac{-y}{y-۱}\geq ۰ \xRightarrow{\text{تعیین علامت}}$$

y		۰		۱	
$-y$	+	۰	−		−
$y-۱$	−		−	۰	+
$\frac{-y}{y-۱}$	−	۰	+	تعریف‌نشده	−

$$\Rightarrow y\in[۰,۱)\Rightarrow R_y=[۰,۱)$$

روش دوم:

$$۰\leq x^۲<x^۲+۱ \xRightarrow{\div(x^۲+۱)>۰} ۰\leq \underbrace{\frac{x^۲}{x^۲+۱}}_{y}<۱\Rightarrow ۰\leq y<۱\Rightarrow R_y=[۰,۱)$$: می‌دانیم

نکتهٔ زیر را هم بلد باشید. برای تعیین برد یک سری از توابع به دردتان می‌خورد!

نکته اگر a یک عدد حقیقی و مخالف صفر باشد، آن‌گاه $a+\frac{۱}{a}\geq ۲$ یا $a+\frac{۱}{a}\leq -۲$، به عبارتی دیگر $\left|a+\frac{۱}{a}\right|\geq ۲$ است. در واقع داریم:

$$\begin{cases} a>۰\Rightarrow a+\frac{۱}{a}\geq ۲ & \text{(حالت تساوی برای وقتی است که } a=۱ \text{ باشد.)} \\ a<۰\Rightarrow a+\frac{۱}{a}\leq -۲ & \text{(حالت تساوی برای وقتی است که } a=-۱ \text{ باشد.)} \end{cases}$$ اگر

مثال برد تابع $y = x^2+8+\frac{1}{x^2+3}$ را به دست آورید.

پاسخ می‌توان نوشت:

$$y = x^2+3+5+\frac{1}{x^2+3} \Rightarrow y-5 = \underbrace{\boxed{x^2+3}}_{a} + \underbrace{\boxed{\frac{1}{x^2+3}}}_{\frac{1}{a}} \xrightarrow[a+\frac{1}{a}\ge 2]{a=x^2+3>0} y-5\ge 2 \Rightarrow y\ge 7 \Rightarrow \text{برد تابع}: R_y=[7,+\infty)$$

یک نکته هم در مورد برد تابع به فرم $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ بدانید.

نکته برد تابع با ضابطهٔ $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ (با شرط $c\neq 0$ و $ad-bc\neq 0$) برابر $\mathbb{R}-\left\{\frac{a}{c}\right\}$ است.

مثال برد تابع $y=\frac{2x+1}{3x+5}$ را به دست آورید.

پاسخ **روش اول:** ابتدا از روی $y=f(x)$، به $x=f(y)$ می‌رسیم و بعد با تعیین دامنهٔ آن، برد تابع $y=f(x)$ را مشخص می‌کنیم. ببینید:

$$y=\frac{2x+1}{3x+5} \Rightarrow 3xy+5y=2x+1 \Rightarrow 3xy-2x=-5y+1 \Rightarrow x(3y-2)=-5y+1 \Rightarrow x=\frac{-5y+1}{3y-2}$$

$$\Rightarrow \text{مخرج}: 3y-2=0 \Rightarrow 3y=2 \Rightarrow y=\frac{2}{3}\ (\text{ریشهٔ مخرج}) \Rightarrow y=\mathbb{R}-\left\{\frac{2}{3}\right\}$$

روش دوم: با نکته‌ای که گفتیم، می‌توان نوشت:

$$y=\frac{2x+1}{3x+5} \Rightarrow a=2\ ,\ c=3 \Rightarrow \text{برد تابع}: R_y=\mathbb{R}-\left\{\frac{a}{c}\right\}=\mathbb{R}-\left\{\frac{2}{3}\right\}$$

۵۵- مجموع اعضای دامنهٔ تابع $y=\frac{x-1}{2x+3}$ با برد $\left\{-2,0,\frac{1}{3}\right\}$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۵۶- برد تابع با ضابطهٔ $f(x)=2x-1+\frac{x-1}{|x-1|}$ چند عدد صحیح را شامل نمی‌شود؟

۱) بی‌شمار ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۱

۵۷- برد تابع $f(x)=\sqrt{4x^2-4x+2}$ کدام است؟

۱) $\left[\frac{3}{2},+\infty\right)$ ۲) $[0,1]$ ۳) $[1,+\infty)$ ۴) $[2,+\infty)$

۵۸- تابع $f(x)=x^2-6x+5$ با دامنهٔ $[-1,7)$ مفروض است. برد تابع کدام است؟

۱) $[-4,12)$ ۲) $[0,12]$ ۳) $[-4,12]$ ۴) $[0,12)$

۵۹- برد تابع با ضابطهٔ $y=x^6+x^3+1$ کدام است؟ $(x\ge 0)$

۱) $[0,+\infty)$ ۲) $[1,+\infty)$ ۳) $[0,1]$ ۴) $[1,3]$

۶۰- برد تابع $y=\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}$ کدام است؟ تجربی خارج ۸۹

۱) $[3\sqrt{2},+\infty)$ ۲) $[\sqrt{3},+\infty)$ ۳) $[2,+\infty)$ ۴) $[4,+\infty)$

۶۱- برد تابع $y=\sqrt{23-x^2}$ شامل چند عدد حسابی است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۴ ۴) بی‌شمار

۶۲- برد تابع $y=\sqrt{6-\sqrt{10-x}}$ کدام است؟

۱) $[-\sqrt{6},\sqrt{6}]$ ۲) $(0,\sqrt{6}]$ ۳) $[0,\sqrt{6}]$ ۴) $(0,\sqrt{6})$

۶۳- برد تابع با ضابطهٔ $f(x)=(x+|x|)\sqrt{\frac{2-x}{x}}$ کدام است؟ ریاضی خارج ۹۲

۱) $(0,1]$ ۲) $[0,2]$ ۳) $[1,2]$ ۴) $(1,3)$

۶۴- برد تابع $y=\frac{5x+1}{2x-4}$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $\mathbb{R}-\{2\}$ ۳) $\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{5}\right\}$ ۴) $\mathbb{R}-\left\{\frac{5}{2}\right\}$

رسیدیم به بخشی که باید یه عدد یا یه عبارت جبری رو توی تابع، به جای □ هاش جای‌گذاری کنیم، تا بتوانیم مقدار تابع یا ضابطهٔ اونو پس از این جای‌گذاری به دست بیاریم. با ما همراه باشید.

مقدار تابع

برای به دست آوردن مقدار تابع f به ازای یک عدد مشخص، کافی است آن عدد را **به‌جای□ ها** در نمایش جبری (ضابطه) تابع f قرار دهیم (البته حواستان باشد که x باید در دامنهٔ تابع f قرار داشته باشد).

مثال اگر $f(x)=\sqrt{x+۲|x|}$ باشد، مقدار $f(f(-۱۴۴))$ کدام است؟

۱) تعریف‌نشده ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۲

پاسخ ابتدا $f(-۱۴۴)$ را حساب می‌کنیم، بعد از آن می‌رویم سراغ محاسبهٔ $f(f(-۱۴۴))$.

$$f(x)=\sqrt{x+۲|x|}\Rightarrow f(-۱۴۴)=\sqrt{-۱۴۴+۲|-۱۴۴|}=\sqrt{-۱۴۴+۲(۱۴۴)}=\sqrt{-۱۴۴+۲۸۸}=\sqrt{۱۴۴}=\sqrt{۱۲^۲}=|۱۲|=۱۲$$

$$\Rightarrow f(f(-۱۴۴))=f(۱۲)=\sqrt{۱۲+۲|۱۲|}=\sqrt{۱۲+۲(۱۲)}=\sqrt{۳۶}=\sqrt{۶^۲}=|۶|=۶$$

پس گزینهٔ (۲) صحیح است.

مثال اگر $\frac{f(x)}{\cos x}+\frac{f(-x)}{\sin x}=۴$، آن‌گاه حاصل $f(\frac{\pi}{۴})+f(-\frac{\pi}{۴})$ کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $-۲\sqrt{۲}$ ۴) $-\sqrt{۲}$

پاسخ به‌جای x، $\frac{\pi}{۴}$ را قرار می‌دهیم:

$$\frac{f(-\frac{\pi}{۴})}{\sin\frac{\pi}{۴}}+\frac{f(\frac{\pi}{۴})}{\cos\frac{\pi}{۴}}=۴\Rightarrow\frac{f(-\frac{\pi}{۴})}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}+\frac{f(\frac{\pi}{۴})}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}=۴\xrightarrow{\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}}f(-\frac{\pi}{۴})+f(\frac{\pi}{۴})=۴\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}=۲\sqrt{۲}$$

بنابراین گزینهٔ (۱) صحیح است.

مثال اگر $f(x)=x+x^{-۱}$ باشد، حاصل $f(x^۲)-f(x)f(x^{-۱})$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) ۱

پاسخ داریم $f(x)=x+\frac{۱}{x}$، بنابراین:

$$f(x^۲)-f(x)f(\frac{۱}{x})=x^۲+\frac{۱}{x^۲}-(x+\frac{۱}{x})(\frac{۱}{x}+x)=x^۲+\frac{۱}{x^۲}-\left(۱+x^۲+\frac{۱}{x^۲}+۱\right)$$

$$=\cancel{x^۲}+\cancel{\frac{۱}{x^۲}}-۱-\cancel{x^۲}-\cancel{\frac{۱}{x^۲}}-۱=-۲$$

بنابراین گزینهٔ (۱) صحیح است.

مثال اگر $f(x)=۳^{۳x+۲}$ باشد، حاصل $\frac{f(۲x-۳)}{f^۲(x)}$ کدام است؟

۱) $(\frac{۱}{۳})^۹$ ۲) $(\frac{۱}{۳})^{۱۱}$ ۳) $۳^۹$ ۴) $۳^{۱۱}$

پاسخ از روی $f(x)=۳^{۳x+۲}$ می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}f(۲x-۳)=۳^{۳(۲x-۳)+۲}=۳^{۶x-۹+۲}=۳^{۶x-۷}\\ f^۲(x)=(۳^{۳x+۲})^۲=۳^{۶x+۴}\end{cases}\Rightarrow\frac{f(۲x-۳)}{f^۲(x)}=\frac{۳^{۶x-۷}}{۳^{۶x+۴}}=۳^{(۶x-۷)-(۶x+۴)}=۳^{-۱۱}=(\frac{۱}{۳})^{۱۱}$$

بنابراین گزینهٔ (۲) صحیح است.

مثال اگر نمودار تابع $f(x)=x^۲-۴x+۱$ از نقاط متمایز $(a,-۲)$ و $(b,-۲)$ عبور کند، حاصل ab کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ براساس داده‌های مسأله، نتیجه می‌گیریم $f(a)=-۲$ و $f(b)=-۲$، بنابراین می‌توان نوشت:

$$f(x)=x^۲-۴x+۱\Rightarrow\begin{cases}f(a)=a^۲-۴a+۱=-۲\Rightarrow a^۲-۴a=-۳ \quad (۱)\\ f(b)=b^۲-۴b+۱=-۲\Rightarrow b^۲-۴b=-۳ \quad (۲)\end{cases}$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)}a^۲-۴a=b^۲-۴b\Rightarrow a^۲-b^۲-۴a+۴b=۰\Rightarrow(a-b)(a+b)-۴(a-b)=۰$$

$$\Rightarrow(a-b)(a+b-۴)=۰\Rightarrow\begin{cases}a-b=۰\Rightarrow a=b \quad \text{غیرقابل قبول (چرا؟)}\\ a+b-۴=۰\Rightarrow a+b=۴ \quad (*)\end{cases}$$

حال برگردیم سراغ معادلات (۱) و (۲). اگر طرفین آن‌ها را با هم جمع کنیم، این‌طور می‌شود:

$$a^۲+b^۲-۴(a+b)=-۶ \Rightarrow (a+b)^۲-۲ab-۴(a+b)=-۶ \xrightarrow{(*)} ۴^۲-۲ab-۴(۴)=-۶$$

$$\Rightarrow ۱۶-۲ab-۱۶=-۶ \Rightarrow -۲ab=-۶ \Rightarrow ab=۳$$

پس گزینهٔ (۳) صحیح است.

مثال **اگر $۴f(x)+mf(-x)=۳x$ باشد، آن‌گاه تابع $f(x)$ به ازای چه مقدار m، به صورت $f(x)=-x$ خواهد بود؟**

۱) ۸ ۲) ۷ ۳) ۶ ۴) ۵

پاسخ می‌خواهیم $f(x)=-x$ باشد، پس $f(-x)=x$ است و در نتیجه:

$$۴f(x)+mf(-x)=۳x \Rightarrow ۴(-x)+m(x)=۳x \Rightarrow mx=۷x \Rightarrow m=۷$$

پس گزینهٔ (۲) صحیح است.

مثال **دو تابع $y=x^۲+ax-۳b$ و $y=-x+۲b$ در نقطهٔ $(۱,۳)$ هم‌دیگر را قطع می‌کنند. a کدام است؟**

۱) ۸ ۲) ۶ ۳) ۵ ۴) ۳

پاسخ طبق گفته‌های مسأله، نتیجه می‌گیریم نقطهٔ $(۱,۳)$ روی خط $y=-x+۲b$ قرار دارد، پس:

$$۳=-۱+۲b \Rightarrow ۲b=۴ \Rightarrow b=۲$$

از طرفی نقطهٔ $(۱,۳)$ روی منحنی $y=x^۲+ax-۳b$ هم قرار دارد، پس:

$$۳=(۱)^۲+a(۱)-۳(۲) \Rightarrow ۳=۱+a-۶ \Rightarrow a=۸$$

پس گزینهٔ (۱) صحیح است.

مثال **نمودارهای دو تابع با ضابطه‌های $y=-x+a$ و $y=x^۲+a-b$ هم‌دیگر را در نقطه‌ای به عرض ۱ روی محور yها قطع می‌کنند. مقدار b کدام است؟**

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) -۱

پاسخ نمودار دو تابع $y=-x+a$ و $y=x^۲+a-b$، هم‌دیگر را در نقطهٔ $(۰,۱)$ قطع می‌کنند، پس مختصات این نقطه در ضابطهٔ هر دو تابع صدق می‌کند.

$$y=-x+a \xRightarrow[y=۱]{x=۰} ۱=۰+a \Rightarrow a=۱$$

$$y=x^۲+a-b \xRightarrow[y=۱]{x=۰} ۱=۰+a-b \xRightarrow{(*)} ۱=۱-b \Rightarrow b=۰$$

بنابراین گزینهٔ (۱) صحیح است.

مثال **اگر تساوی $f\left(x+\frac{۱}{x}\right)=x^۲+\frac{۱}{x^۲}$ به ازای هر $x\in \mathbb{R}-\{۰\}$ برقرار باشد، ضابطهٔ $f(x)$ کدام است؟**

۱) $x^۲+۲x$ ۲) $x^۲-۲$ ۳) $x^۲-۲x$ ۴) $x^۲+۲$

پاسخ می‌دانیم $a^۲+b^۲=(a+b)^۲-۲ab$، پس می‌توان نوشت:

$$f\left(x+\frac{۱}{x}\right)=x^۲+\frac{۱}{x^۲}=\left(x+\frac{۱}{x}\right)^۲-۲(x)\left(\frac{۱}{x}\right) \Rightarrow f\left(x+\frac{۱}{x}\right)=\left(x+\frac{۱}{x}\right)^۲-۲ \quad (*)$$

حال با استفاده از تغییر متغیر $x+\frac{۱}{x}=t$ در تساوی $(*)$ خواهیم داشت:

$$f(t)=t^۲-۲ \Rightarrow f(x)=x^۲-۲$$

بنابراین گزینهٔ (۲) صحیح است.

مثال **اگر $f\left(\frac{x}{x^۲+x+۱}\right)=\frac{x}{x^۲-x+۱}$ باشد، ضابطهٔ $f(x)$ کدام است؟**

۱) $\frac{x}{۱+۲x}$ ۲) $\frac{x}{۱-۲x}$ ۳) $\frac{۲x}{۱+x}$ ۴) $\frac{x}{۱-x}$

پاسخ روش اول:

صورت و مخرج تقسیم بر x

$$f\left(\frac{x}{x^۲+x+۱}\right)=\frac{x}{x^۲-x+۱} \Rightarrow f\left(\frac{۱}{\left(x+\frac{۱}{x}\right)+۱}\right)=\frac{۱}{\left(x+\frac{۱}{x}\right)-۱} \xrightarrow{x+\frac{۱}{x}=t} f\left(\frac{۱}{t+۱}\right)=\frac{۱}{t-۱}$$

صورت و مخرج تقسیم بر x

اگر $\frac{۱}{t+۱}=k$، پس $t+۱=\frac{۱}{k}$ و در نتیجه $t=\frac{۱}{k}-۱$ یا $t-۱=\frac{۱}{k}-۲=\frac{۱-۲k}{k}$، بنابراین:

$$f(k)=\frac{k}{۱-۲k} \Rightarrow f(x)=\frac{x}{۱-۲x}$$

پس گزینهٔ (۲) صحیح است.

روش دوم: اگر $x=۱$، آن‌گاه $f\left(\frac{۱}{۳}\right)=۱$. حال $x=\frac{۱}{۳}$ را در گزینه‌ها می‌گذاریم، فقط گزینهٔ (۲)، برابر ۱ می‌شود.

۶۵- در تابع $f=\{(۱,m+n),(-۱,۲m-n),(۳,m+۲n)\}$، اگر $(۱,۴)\in f$ و $(-۱,۲)\in f$ باشد، مقدار $f(۳)$ کدام است؟

۱) -۳ ۲) -۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۶۶- چه تعداد از موارد زیر در مورد تابع سهم مشارکت درست است؟ برگرفته از کتاب درسی

الف) اگر در یک پروژه، پانصد نفر سهم مشارکت داشته باشند، سهم هر کدام برابر $\frac{۱}{۵۰۰}$ است.

ب) اگر تعداد افراد شرکت کننده در طرح مشارکت، خیلی زیاد باشد، سهم مشارکت هر داوطلب نیز خیلی زیاد خواهد شد.

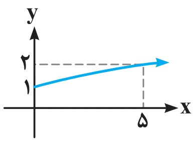
پ) نمودار تابع سهم مشارکت، نمی‌تواند شامل هیچ نقطه‌ای با عرض صفر باشد.

ت) نمودار تابع سهم مشارکت، نمی‌تواند شامل هیچ نقطه‌ای با طول صفر باشد.

ث) نمودار تابع را می‌توان با یک حرکت قلم و بدون برداشتن قلم از روی کاغذ رسم کرد.

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۶۷- اگر نمودار $f(x)=\sqrt{ax+b}$ به صورت مقابل باشد، □$\left(\frac{۴۰}{۳}\right)$ کدام است؟ آزمون‌های گاج



۱) ۳ ۲) ۴
۳) ۲ ۴) ۱

۶۸- اگر $f(x)=\sqrt{-x^۲+۴x+۱۲}$، آن‌گاه $f(۲+\sqrt{۷})-f(۲)$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ۲

۶۹- اگر $f(x)=\frac{۹^x+۱}{۳^x}$ باشد، ضابطهٔ $f(x)-f(-x)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۳^{-x} ۳) ۳^x ۴) صفر

۷۰- اگر $f(x)=۵x$ باشد، آن‌گاه کدام گزینه می‌تواند نادرست باشد؟ $(a,b\in\mathbb{R})$

۱) $f(a-b)=f(a)-f(b)$ ۲) $f(۴a+b)=۴f(a)+f(b)$ ۳) $f(ab)=f(a).f(b)$ ۴) $f(ab)=af(b)$

۷۱- اگر $G=\{-۱,۰,۱,۲,۳\}$ و $f=\{(x,۴-۲x):x\in G\}$، آن‌گاه حاصل $\frac{f(۱)-f(۰)}{f(f(۱))+۱}$ کدام است؟

۱) -۳ ۲) ۲ ۳) -۲ ۴) ۳

۷۲- اگر $f(x)-x^۳+۲x+f(۲)=۰$ باشد، حاصل $f(۳)f(۱)$ کدام است؟

۱) ۲۴ ۲) -۵۷ ۳) -۲۴ ۴) ۵۷

۷۳- □ را تابعی در نظر بگیرید که مساحت مستطیل را به طول آن وابسته می‌کند. اگر محیط مستطیل برابر ۱۲ باشد، حاصل $f(۱)-f(۲)$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) -۶ ۳) ۶ ۴) -۳

۷۴- □ را تابعی در نظر بگیرید که مجموع مکعبات دو عدد را به یکی از آن دو عدد وابسته می‌کند. اگر تفاضل دو عدد، برابر ۲ باشد، حاصل $\frac{f(۲)}{f(۳)}$ کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۷}$ ۲) $\frac{۳}{۷}$ ۳) $\frac{۴}{۷}$ ۴) $\frac{۶}{۷}$

۷۵- اگر $f(\sqrt{x}+۲)=x+۴\sqrt{x}+۶$، آن‌گاه $f(\sqrt{۵})$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۱۱ ۳) ۹ ۴) ۷

۷۶- در تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^۲(۲-x)^۲$، حاصل $f(۱+x)-f(۱-x)$ کدام است؟ تجربی داخل ۸۵

۱) صفر ۲) $۴x$ ۳) $۲x^۲$ ۴) $۴x^۲$

۷۷- اگر $f(-x)+۲xf(x)=۴x^۲-۳$ باشد، مقدار $f(۲)$ کدام است؟

۱) ۶۵ ۲) $\frac{۶۵}{۳۴}$ ۳) $\frac{۱۳۰}{۱۷}$ ۴) $\frac{۶۵}{۱۷}$

۷۸- نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=ax^۲+bx+c$، محور □ ها را در نقطه‌ای به طول ۱ و محور y ها را در نقطه‌ای به عرض ۶- قطع کرده و از نقطهٔ $(-۲,-۶)$ می‌گذرد. $f(-۱)$ کدام است؟ تجربی خارج ۸۹

۱) -۸ ۲) -۷ ۳) -۵ ۴) -۴

۷۹- اگر $f(x-۳)=x^۲-۴x+۵$، آن‌گاه $f(۱-x)$ کدام است؟ تجربی داخل ۹۰

۱) $x^۲+۱$ ۲) $x^۲+۳$ ۳) $x^۲+۴x+۵$ ۴) $x^۲-۴x+۵$

۸۰- اگر $f(x)=\sqrt{x^۲-۴}$، $g(x)=\sqrt{x^۲+۴}$ و $۰<a<۱$ باشد، حاصل $f\left(a+\frac{۱}{a}\right)+g\left(a-\frac{۱}{a}\right)$ کدام است؟

۱) $۲a$ ۲) $\frac{۲}{a}$ ۳) $\frac{a}{۲}$ ۴) $-\frac{۲}{a}$

۸۱- اگر $f(x)+f(x-۴)=۰$ باشد، حاصل $f(x+۸)+f(x-۴)$ کدام است؟

۱) $-۴f(x)$ ۲) صفر ۳) $۴f(x)$ ۴) $۴f(x-۴)$

یکی از چیزایی که توی کتاب درسی ریاضی دهم، بهش توجه شده، بحث رابطه و تابع خطی هستش.

رابطهٔ خطی

منظور از رابطهٔ خطی، رابطه‌ای بین x و y است که بتوان آن را به فرم $\mathbf{ax+by=c}$ (که a و b به‌طور هم‌زمان صفر نیستند) نشان داد.

۱) نمودار یک رابطهٔ خطی به صورت یک خط راست می‌باشد.

۲) رابطهٔ خطی به فرم $y=ax+b$، یک **تابع خطی** است که در آن، **a شیب خط** و **b عرض از مبدأ** خط نامیده می‌شود.

۳) اگر دامنهٔ یک تابع خطی را داشته باشیم، آن‌گاه می‌توانیم با ساختن متغیر y، حدود y را به دست آوریم تا برد تابع مشخص شود. به عنوان مثال اگر در تابع خطی $y=۲x+۵$ داشته باشیم $x\in(۲,۵]$، آن‌گاه:

$$۲<x\leq ۵\xrightarrow{\times ۲}۴<۲x\leq ۱۰\xrightarrow{+۵}۹<۲x+۵\leq ۱۵\Rightarrow ۹<y\leq ۱۵\Rightarrow \text{برد تابع}=(۹,۱۵]$$

هم‌چنین با در دست داشتن محدودهٔ تغییرات y (یعنی برد تابع) محدودهٔ تغییرات x (یعنی دامنهٔ تابع) را نیز می‌توانیم پیدا کنیم. مثلاً تابع خطی $y=۳x-۴$ را با برد $[-۲,۱۰]$ در نظر بگیرید، در این صورت داریم:

$$-۲\leq y\leq ۱۰\Rightarrow -۲\leq ۳x-۴\leq ۱۰\xrightarrow{+۴}۲\leq ۳x\leq ۱۴\xrightarrow{\div ۳}\frac{۲}{۳}\leq x\leq\frac{۱۴}{۳}\Rightarrow \text{دامنهٔ تابع}=\left[\frac{۲}{۳},\frac{۱۴}{۳}\right]$$

مثال اگر□ تابعی خطی، $f(x-۱)=f(x)-۱$ و $f(۲)=۶$ باشد، این تابع محور□ ها را در نقطه‌ای با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) -۶ ۴) -۴

پاسخ نمایش جبری تابع خطی f را به صورت $f(x)=ax+b$ در نظر می‌گیریم، در این صورت داریم:

$$f(x-۱)=f(x)-۱\Rightarrow a(x-۱)+b=ax-a+b\Rightarrow \cancel{ax}-a+\cancel{b}=\cancel{ax}+\cancel{b}-۱\Rightarrow -a=-۱\Rightarrow a=۱$$

بنابراین $f(x)=x+b$ است، از طرفی:

$$f(۲)=۶\Rightarrow ۶=۲+b\Rightarrow b=۴\Rightarrow f(x)=x+۴$$

در نتیجه نمودار تابع f، محور xها را در نقطه‌ای به طول $x=-۴$ قطع می‌کند، زیرا:

$$f(x)=۰: x+۴=۰\Rightarrow x=-۴$$

پس گزینهٔ (۴) صحیح است.

مثال دوچرخه‌سواری در هر دقیقه، ۰/۸ کیلومتر را طی می‌کند. اگر مسافتی که دوچرخه‌سوار در□ دقیقه طی می‌کند را با $f(t)$ (برحسب کیلومتر) نمایش دهیم، کدام عبارت، نمایش جبری این تابع را به دست می‌دهد؟

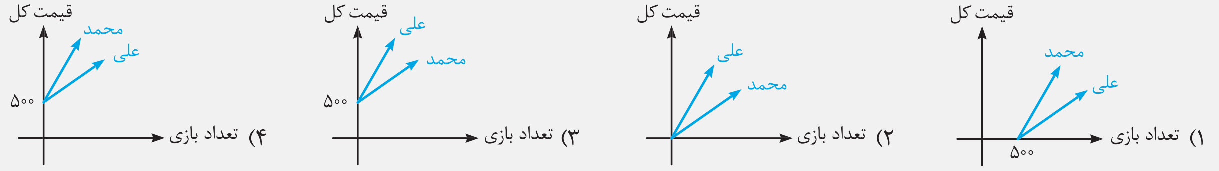
۱) $f(t)=۰/۸+t$ ۲) $f(t)=۰/۸t$ ۳) $f(t)=\frac{t}{۰/۸}$ ۴) $f(t)=۰/۸-t$

پاسخ طبق رابطهٔ «$\text{تندی}=\frac{\text{مسافت طی‌شده}}{\text{زمان}}$» می‌توان نوشت:

$$۰/۸=\frac{f(t)}{t}\Rightarrow f(t)=۰/۸t$$

پس گزینهٔ (۲) صحیح است.

مثال **در یک شهربازی برای ورود هر نفر ۵۰۰ تومان و برای هر بازی ۲۵۰ تومان دریافت می‌شود. علی و محمد به تعداد مساوی بازی یکسان انجام می‌دهند، ولی محمد برای هر بازی خود یک کارت تخفیف ۳۰ درصدی دارد. در کدام گزینه، نمودار تابع پرداخت قیمت برای محمد و علی به درستی رسم شده است؟**



پاسخ ورودی برای هر نفر، ۵۰۰ تومان است، پس اگر شخص هیچ بازی‌ای را انجام ندهد باز هم باید ۵۰۰ تومان پرداخت کند، بنابراین محل برخورد نمودار خطی با محور yها، نقطه‌ای با عرض ۵۰۰ است، یعنی گزینه‌های (۱) و (۲) نادرست‌اند. از طرفی محمد برای هر بازی خود، یک کارت تخفیف ۳۰ درصدی دارد، بنابراین هزینهٔ کم‌تری نسبت به علی خواهد داشت و در نتیجه نمودار هزینهٔ او، پایین‌تر از نمودار هزینهٔ علی قرار می‌گیرد، پس گزینهٔ (۳) درست است.

مثال **اگر دامنهٔ تابع خطی $y=\frac{۲}{۳}x-۱$ را بازهٔ $(-۹,۰]$ در نظر بگیریم، برد تابع کدام است؟ (y تابعی از □ است.)**

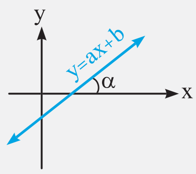
۱) $(-۶,۰]$ ۲) $[-۶,۱)$ ۳) $(-۷,۱]$ ۴) $(-۷,-۱]$

پاسخ دامنهٔ تابع خطی $y=\frac{۲}{۳}x-۱$ برابر $(-۹,۰]$ است، پس برای تعیین برد تابع می‌توان نوشت:

$$-۹<x\le ۰ \xRightarrow{\times\frac{۲}{۳}} -۶<\frac{۲}{۳}x\le ۰ \xRightarrow{-۱} -۷<\underbrace{\frac{۲}{۳}x-۱}_{y}\le -۱ \Rightarrow y\in(-۷,-۱]$$

بنابراین گزینهٔ (۴) صحیح است.

توجه اگر دو نقطهٔ دلخواه به مختصات $A(x_۱,y_۱)$ و $B(x_۲,y_۲)$ روی خط راستی داشته باشیم، آن‌گاه شیب این خط برابر می‌شود با $\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}$ (آن را m می‌نامیم) و معادلهٔ خط به فرم $y-y_۱=m(x-x_۱)$ درمی‌آید.



فراموش نکنید که اگر α زاویه‌ای باشد که خط به معادلهٔ $y=ax+b$ با جهت مثبت محور xها می‌سازد، آن‌گاه تانژانت α، برابر شیب (ضریب زاویه) خط خواهد بود. ببینید:

$$\boxed{\text{شیب خط}: a=\tan\alpha}$$

توجه اگر مقادیر x را به صورت منظم در یک جدول قرار دهیم (مثلاً xها یکی‌یکی یا دوتا دوتا زیاد شوند) و ببینیم که مقادیر y هم به‌گونه‌ای دنبال یک‌دیگر می‌آیند که نسبت تغییرات x به y، مقداری ثابت می‌باشد، می‌گوییم تابع موردنظر یک تابع خطی است. مثلاً:

x	-۱	۰	۱	۲	۳
y	۱	۳	۵	۷	۹

+۲ +۲ +۲ +۲ $\Rightarrow$ تابع خطی است $\Rightarrow y=۲x+۳$

نکته تابع خطی $y=ax+b$ را با دامنهٔ اعداد طبیعی درنظر بگیرید. مقادیر به دست آمده از این تابع، تشکیل یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت a و جملهٔ اول $a+b$ می‌دهند.

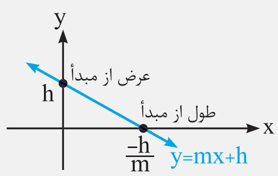
مثال **$y=f(x)$ را تابعی در نظر بگیرید با دامنهٔ مجموعهٔ اعداد طبیعی. اگر مجموعهٔ مقادیر برد آن، «یک دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول ۴- و قدرنسبت $\frac{۱}{۳}$» باشد، ضابطهٔ تابع کدام است؟**

۱) $x-۳y+۱۳=۰$ ۲) $x-۳y-۱۳=۰$ ۳) $x+۳y+۱۳=۰$ ۴) $x+۳y-۱۳=۰$

پاسخ قدرنسبت دنبالهٔ حسابی برابر $\frac{۱}{۳}$ است، پس باید ضابطه‌ای را انتخاب کنیم که در آن، ضریب x (یعنی a) برابر $\frac{۱}{۳}$ باشد. از طرفی جملهٔ اول دنباله برابر ۴- می‌باشد، پس باید $a+b$ از معادلهٔ $y=ax+b$ برابر ۴- شود، بنابراین:

$$a+b \xlongequal{a=\frac{۱}{۳}} \frac{۱}{۳}+b=-۴ \Rightarrow b=-۴-\frac{۱}{۳}=-\frac{۱۳}{۳} \xrightarrow{y=ax+b} y=\frac{۱}{۳}x-\frac{۱۳}{۳} \xRightarrow{\times ۳} ۳y=x-۱۳ \Rightarrow x-۳y-۱۳=۰$$

بنابراین گزینهٔ (۲) صحیح است.



توجه عرض نقطهٔ تلاقی خط با محور yها را **عرض از مبدأ** می‌نامیم، پس برای به دست‌آوردن آن، کافی است به‌جای x، صفر قرار دهیم. همچنین طول نقطهٔ تلاقی خط با محور xها را **طول از مبدأ** می‌نامیم و در نتیجه برای به دست آوردن آن کافی است به‌جای y، صفر قرار دهیم.

این رو هم بدونید: معادلهٔ خطی که از دو نقطهٔ $A(a,۰)$ و $B(۰,b)$ می‌گذرد، به صورت $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=۱$ است.