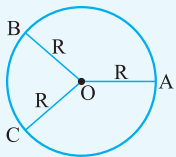


درس اول ترسیم‌های هندسی

دایره

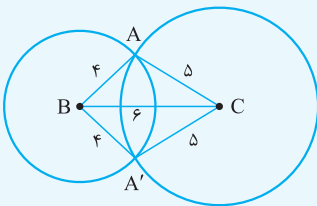
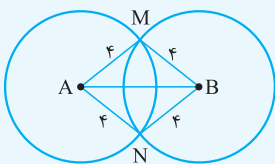
مجموعه‌ی همه‌ی نقاطی که از نقطه‌ی ثابت O به فاصله‌ی معلوم R هستند، دایره‌ای به مرکز O و شعاع R نامیده می‌شود.



مطابق شکل نقاط A، B و C از بی‌شمار نقاطی هستند، که از نقطه‌ی O به فاصله‌ی R قرار دارند.

پاره خط AB به طول ۶ سانتی‌متر مفروض است. نقطه‌ی را تعیین کنید که از دو نقطه‌ی A و B به فاصله‌ی ۴ سانتی‌متر باشند.

دو دایره به مرکزهای A و B و شعاع ۴ سانتی‌متر رسم می‌کنیم. محل تلاقی این دو دایره نقاطی هستند که از دو نقطه‌ی A و B به فاصله‌ی ۴ سانتی‌متر می‌باشند (یعنی نقاط M و N).



رسم مثلثی که سه ضلع آن معلوم است

فرض کنید می‌خواهیم مثلثی به اضلاع ۵، ۴ و ۶ رسم کنیم.

یکی از سه پاره خط مثلاً بزرگ‌ترین آن‌ها را رسم می‌کنیم $BC = 6$.

به مرکز B و شعاع ۴ دایره‌ای رسم می‌کنیم.

به مرکز C و شعاع ۵ دایره‌ای رسم می‌کنیم.

محل تلاقی این دو دایره جای رأس سوم مثلث یعنی نقطه‌ی A است.

همان‌طور که در شکل ملاحظه می‌کنید، مسئله دو جواب دارد. مثلث‌های ABC و $A'BC$ که همنهشت می‌باشند.

$$\begin{cases} a < b + c \\ b < a + c \\ c < a + b \end{cases}$$

با سه عدد حقیقی مثبت a, b, c یک مثلث می‌توان ساخت هرگاه داشته باشیم:

آیا می‌توان مثلثی رسم کرد که اندازه‌ی اضلاع آن ۳، ۴ و ۸ باشد؟

وقتی پاره خط $BC = 8$ و دایره‌های به مراکز B و C و شعاع‌های ۳ و ۴ را رسم کنیم، این دایره‌ها یکدیگر را قطع نمی‌کنند زیرا $3 + 4 = 7$ از عدد ۸ کوچک‌تر است؛ پس مثلثی نمی‌توان ساخت که سه ضلعش ۳، ۴ و ۸ باشد.

اگر ۵، ۷ و x اندازه‌های اضلاع مثلثی باشند، حدود x را بیابید.

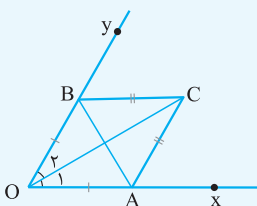
$$\begin{cases} x < 7 + 5 \\ 5 < 7 + x \\ 7 < x + 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 12 \\ -2 < x \\ 2 < x \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} 2 < x < 12$$

باید داشته باشیم:

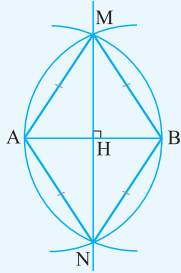
رسم نیمساز زاویه

نقطه‌ی A را روی نیم خط Ox در نظر می‌گیریم. کماتی به مرکز O و شعاع OA رسم می‌کنیم تا

نیم خط Oy را در نقطه‌ی B قطع کند. داریم $OA = OB$.



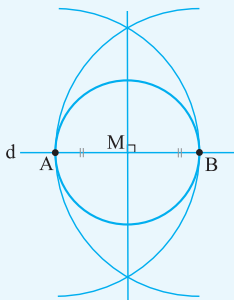
- ب) به مرکز A و شعاع AB و به مرکز B و شعاع AB دو کمان رسم می‌کنیم. نقطه‌ی تلاقی این دو کمان را C می‌نامیم.
- پ) OC نیمساز زاویه‌ی xOy است زیرا دو مثلث OBC و OAC به حالت (ضضض) هم‌نهشت‌اند، پس $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$.



رسم عمود منصف یک پاره خط

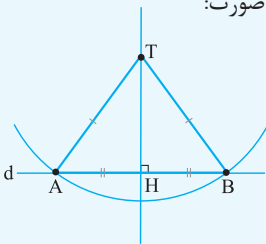
- الف) کمانی به مرکز A و شعاع AB رسم می‌کنیم.
- ب) کمانی به مرکز B و شعاع AB رسم می‌کنیم.
- پ) نقاط تلاقی این دو کمان را M و N می‌نامیم.
- ت) خط MN عمود منصف پاره خط AB است زیرا M و N از دو سر پاره خط AB به یک فاصله‌اند.

رسم خط عمود بر یک خط داده شده از یک نقطه روی آن خط



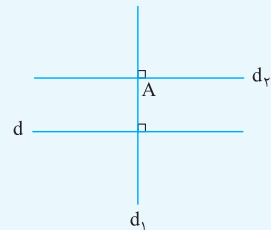
- الف) نقطه‌ی A متمایز از M را روی خط d در نظر می‌گیریم.
- ب) به مرکز M و شعاع MA دایره‌ای رسم می‌کنیم. محل تلاقی دیگر آن با خط d را B می‌نامیم.
- پ) عمود منصف پاره خط AB را رسم می‌کنیم.
- ت) این عمود منصف خطی است که از نقطه‌ی M می‌گذرد و بر خط d عمود است.

رسم خط عمود بر یک خط داده شده از یک نقطه خارج آن خط



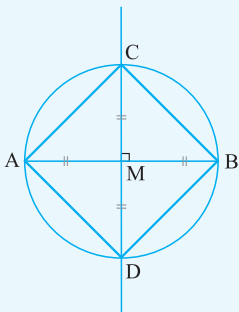
- الف) نقطه‌ی A را روی خط d در نظر می‌گیریم. اگر TA بر خط d عمود باشد، خط TA جواب است. در غیر این صورت:
- ب) به مرکز T و شعاع TA کمانی رسم می‌کنیم؛ نقطه‌ی تلاقی دیگر آن با خط d را B می‌نامیم.
- پ) عمود منصف پاره خط AB را رسم می‌کنیم. این عمود منصف خطی است که از نقطه‌ی T می‌گذرد (زیرا $TA = TB$ است) و بر خط d عمود است.

رسم خط موازی با یک خط داده شده از نقطه‌ی خارج آن



- الف) از نقطه‌ی A خط d_1 را عمود بر خط d رسم می‌کنیم.
- ب) از نقطه‌ی A خط d_2 را عمود بر خط d_1 رسم می‌کنیم.
- ت) دو خط عمود بر یک خط موازی‌اند لذا خط d_2 از نقطه‌ی A گذشته و موازی خط d است.

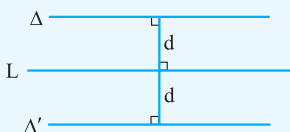
رسم مربعی که قطر آن داده شده است



- الف) ابتدا عمود منصف AB را رسم می‌کنیم و نقطه‌ی برخورد آن با پاره خط AB را M می‌نامیم.
- ب) به مرکز M و به شعاع AM دایره‌ای رسم می‌کنیم تا عمود منصف AB را در نقاط C و D قطع کند.
- پ) چهارضلعی ACBD مربع است زیرا قطرهای آن عمود منصف یکدیگرند و طولشان برابر است.

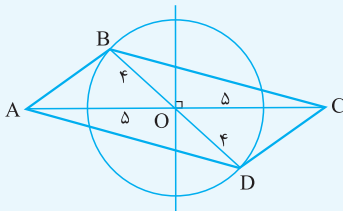
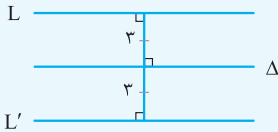
مجموعه نقاطی که از یک خط معلوم به فاصله‌ی مشخص قرار دارند

همه‌ی نقاطی که از خط معلوم L به فاصله‌ی معلوم d قرار دارند دو خط، موازی L و به فاصله‌ی d از خط L می‌باشند.



همه‌ی نقاطی را تعیین کنید که از دو خط موازی L و L' که به فاصله‌ی ۶ سانتی‌متر از یکدیگر قرار دارند به یک فاصله باشند.

همه‌ی نقاطی که روی خطی موازی L و L' و به فاصله‌ی ۳ سانتی‌متر از آن‌ها قرار دارند (خط Δ) جواب است.



متوازی‌الاضلاعی رسم کنید که طول قطرهای آن ۸ و ۱۰ باشد. مسئله چند جواب دارد؟

ابتدا پاره‌خط $AC = 10$ را رسم می‌کنیم، سپس عمود منصف AC را رسم کرده محل

تلاقی آن با AC را O می‌نامیم. داریم $OA = OC = 5$. به مرکز O و شعاع ۴ دایره‌ای رسم

می‌کنیم. یک قطر دلخواه از دایره که بر AC منطبق نیست مانند BD را رسم می‌کنیم.

چهار ضلعی $ABCD$ متوازی‌الاضلاع است زیرا قطرهای آن یکدیگر را نصف کرده‌اند و مسئله بی‌شمار جواب دارد.

سوالات

پرسش‌های دوگزینه‌ای

۱ دو نقطه‌ی A و B به فاصله‌ی ۵ سانتی‌متر مفروض‌اند. چند نقطه وجود دارد که از A به فاصله‌ی $1/4$ سانتی‌متر و از B به فاصله‌ی $3/6$ سانتی‌متر است؟

یک دو

۲ نقطه‌ی A به فاصله‌ی ۵ از خط d قرار دارد. چند نقطه روی خط d وجود دارد که از نقطه‌ی A به فاصله‌ی ۴ هستند؟

دو هیچ

۳ اگر اندازه‌ی اضلاع مثلثی ۸، ۳ و x باشد، کم‌ترین مقدار صحیح x کدام است؟

۶ ۵

۴ از یک نقطه خارج یک خط، چند خط به موازات آن می‌توان رسم کرد؟

۱ ۲

۵ چند متوازی‌الاضلاع می‌توان رسم کرد که طول قطرهایش ۴ و ۷ باشد؟

۱ بی‌شمار

۶ چند متوازی‌الاضلاع می‌توان رسم کرد که طول ضلع‌هایش ۳ و ۵ و طول یک قطرش ۶ باشد؟

۱ هیچ

۷ چند لوزی را می‌توان رسم کرد که طول قطرهایش ۳ و ۵ باشد؟

۱ بی‌شمار

۸ چند نقطه می‌توان یافت که از یک پاره‌خط ۴ سانتی‌متری به فاصله‌ی ۱ سانتی‌متر و از وسط این پاره‌خط به فاصله‌ی ۲ سانتی‌متر باشد؟

۲ ۴

درست و نادرست

- ۱ مجموعه‌ی تمام نقاطی که از خط d به فاصله‌ی ۲ سانتی‌متر است، دو خط موازی d و به فاصله‌ی ۲ سانتی‌متر از آن می‌باشند.
- ۲ هر نقطه روی نیمساز هر زاویه از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است.
- ۳ هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است.
- ۴ از یک نقطه خارج یک خط بی‌شمار خط عمود می‌توان بر آن رسم کرد.
- ۵ با معلوم‌بودن دو قطر یک متوازی‌الاضلاع و یک ضلع از آن دقیقاً یک متوازی‌الاضلاع می‌توان رسم کرد.
- ۶ با اعداد ۳، ۴ و ۷ یک مثلث می‌توان ساخت.
- ۷ اگر وتر یک ضلع مثلث قائم‌الزاویه‌ای معلوم باشد، دقیقاً یک مثلث با آن ساخته می‌شود.
- ۸ نقطه‌ای داخل یک متوازی‌الاضلاع وجود دارد که از سه ضلع آن به یک فاصله باشد.

کامل کنید

- ۱ اگر نقطه‌ای از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله باشد، روی _____ آن قرار دارد.
- ۲ اگر نقطه‌ای از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد، روی _____ آن قرار دارد.
- ۳ اگر ۵، ۱۲ و x اندازه‌ی اضلاع مثلثی باشند، آن‌گاه x در بازه‌ی _____ قرار دارد.
- ۴ خط d و خط شامل پاره‌خط AB موازی نیستند. نقطه روی d وجود دارد که از دو سر پاره‌خط AB به یک فاصله‌اند.
- ۵ دایره‌ای به مرکز O و شعاع ۴ مفروض است. مجموعه‌ی تمام نقاطی که وسط شعاع‌های این دایره است یک _____ می‌باشد.
- ۶ مجموعه‌ی تمام نقاط A که در مثلث ABC با طول قاعده $BC = ۶$ و مساحت ۱۲ است، _____ می‌باشد.
- ۷ مرکز همه‌ی دایره‌هایی که از دو نقطه‌ی A و B می‌گذرند روی _____ قرار دارد.

پرسش‌های تشریحی

- ۱ مستطیلی رسم کنید که طول قطر آن ۸ باشد. مسئله چند جواب دارد؟
- ۲ مستطیلی رسم کنید که طول ضلع‌های آن ۳ و ۴ باشد.
- ۳ مستطیلی رسم کنید که طول قطر آن ۱۳ و طول یک ضلع آن ۵ باشد. مسئله چند جواب دارد؟
- ۴ متوازی‌الاضلاعی رسم کنید که قطرهای آن ۶ و ۸ و زاویه‌ی بین دو قطر آن ۴۵° باشد.
- ۵ متوازی‌الاضلاعی رسم کنید که قطرهای آن ۱۲ و ۱۶ باشد و طول یک ضلع آن ۱۳ باشد.

۶ متوازی‌الاضلاعی رسم کنید که طول ضلع‌هایش ۶ و ۷ و طول یک قطر آن ۱۰ باشد. تعداد جواب‌های مسئله را تعیین کنید.

۷ لوزی رسم کنید که طول قطرهای آن ۶ و ۸ باشد.

۸ لوزی به قطر ۴۸ و ضلع ۲۵ رسم کنید.

۹ نقطه‌ی A به فاصله‌ی ۴ سانتی‌متر از خط d قرار دارد. نقاطی را تعیین کنید که از نقطه‌ی A به فاصله‌ی ۳ سانتی‌متر و از خط d به فاصله‌ی ۲ سانتی‌متر باشند.

۱۰ یک زاویه به اندازه‌ی 135° را به سه قسمت مساوی تقسیم کنید.

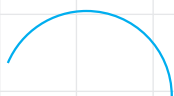
۱۱ مرکز همه‌ی دایره‌هایی را تعیین کنید که بر دو خط متقاطع مماس‌اند.

۱۲ مجموعه‌ی تمام نقاطی را بیابید که از دو خط متقاطع به یک فاصله و از نقطه‌ی تقاطع دو خط به فاصله‌ی ۲ سانتی‌متر باشد.

۱۳ ثابت کنید که نیمسازهای دو زاویه‌ی مجاور یک متوازی‌الاضلاع یکدیگر را در نقطه‌ای قطع می‌کنند که از اضلاع روبه‌رو به یک فاصله است.

۱۴ سه نقطه روی یک دایره قرار دارند. مرکز دایره را تعیین کنید.

۱۵ شکل مقابل کمانی از یک دایره می‌باشد. مرکز این دایره را بیابید.



۱۶ در مثلث ABC ، نقاطی را تعیین کنید که از سه رأس مثلث به یک فاصله باشند.

۱۷ در یک مثلث قائم‌الزاویه، نقطه‌ای را تعیین کنید که از سه رأس به یک فاصله باشد.

۱۸ دو نقطه‌ی A و B مفروض‌اند. مرکز همه‌ی دایره‌هایی را که از A و B می‌گذرند، بیابید.

۱۹ اندازه‌ی دو ضلع مثلثی ۶ و ۸ و زاویه‌ی بین این دو ضلع ۵۰° است. مثلث را رسم کنید.

۲۰ اندازه‌ی دو زاویه‌ی مثلثی ۵۰° و ۶۰° و اندازه‌ی ضلع روبه‌رو به زاویه‌ی سوم ۶ است. مثلث را رسم کنید.

۲۱ اندازه‌ی دو ضلع مثلثی ۴ و $۲/۵$ و اندازه‌ی زاویه‌ی روبه‌رو به ضلع کوچک‌تر ۳۰° است. مثلث را رسم کنید.

۲۲ اندازه‌ی دو ضلع مثلثی ۴ و $۲/۵$ و اندازه‌ی زاویه‌ی روبه‌رو به ضلع بزرگ‌تر ۳۰° است. مثلث را رسم کنید.

۲۳ اندازه‌ی دو ضلع مثلثی ۱۶ و ۱۳ و اندازه‌ی ارتفاع وارد بر ضلع سوم ۱۲ است. مثلث را رسم کنید.

۲۴ ☆ اندازه‌ی دو ضلع مثلثی ۱۰ و ۶ و اندازه‌ی میانه‌ی وارد بر ضلع سوم آن ۴ است. مثلث را رسم کنید. (راهنمایی: میانه‌ی داده‌شده را به اندازه‌ی

خودش امتداد دهید.)

۲۵) اندازه‌ی دو ضلع مثلثی 10° و 6° و اندازه‌ی میانه‌ی وارد بر ضلع به طول 10° برابر 9 است. مثلث را رسم کنید.

۲۶) مثلث متساوی‌الساقینی رسم کنید که قاعده و ارتفاع وارد بر ساق آن معلوم باشد.

۲۷) اندازه‌ی اضلاع دوزنقه‌ای 2 و 7 (قاعده‌ها) و 3 و 4 (ساق‌ها) می‌باشند. دوزنقه را رسم کنید.

۲۸) ☆ نقطه‌ی A داخل زاویه‌ی xOy داده شده است. پاره خطی رسم کنید که دو انتهای آن روی ضلع زاویه و نقطه‌ی A وسط آن باشد. (راهنمایی:

از نقطه‌ی A بر ضلع Ox عمود کنید و پاره خط حاصل را از سمت A به اندازه‌ی خودش امتداد دهید.)

۲۹) مثلث متساوی‌الساقینی رسم کنید که زاویه‌ی مجاور به قاعده و ارتفاع وارد بر قاعده‌اش معلوم باشد.

۳۰) ☆ مجموع طول یک ضلع و قطر مربعی معلوم است. مربع را رسم کنید. (راهنمایی: مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقینی بسازید که طول وتر آن

برابر مجموع طول ضلع مربع و قطر آن باشد، سپس نیمساز زاویه‌ی 45° را رسم کنید.)