فهرست مطالب

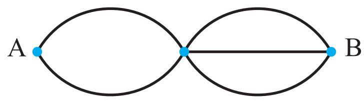
۱

اصول اولیه شمارش

یکی از مباحث مهم ترکیبیات مبحث شمارش است. این مبحث به شمردن حالت‌های وقوع مسائل مختلف می‌پردازد. در این فصل قصد داریم با ارائه مثال‌های متنوع اصول مهم و اولیه شمارش را معرفی کنیم و نحوه کاربرد آنها را در سوال‌های مختلف شرح دهیم.

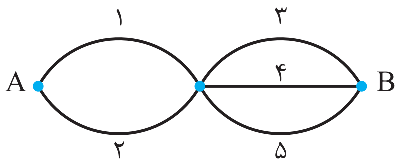
مثال ۱ — ۱

شخصی در شهر A قرار دارد. این شخص قصد دارد به شهر B برود. نقشه‌ی راه شهرها مطابق شکل زیر است. او به چند طریق می‌تواند این کار را انجام دهد بطوریکه از هر نقطه فقط یک بار گذر کند؟



راه حل: این سوال ابتدایی‌ترین سؤال مبحث شمارش است. برای حل مسائل شمارش ابتدا باید بررسی کنیم مسئله شمردن حالت‌های وقوع چه رویدادی را می‌خواهد. (مشخص کردن پیشامد).

رویداد این مسئله رفتن از شهر A به شهر B است. یک راه برای شمردن حالت‌های مختلف این مسئله تعیین کردن تک تک حالت‌های ممکن و شمردن آن است که در این مسئله با توجه به ابعاد کوچک مسئله و عدم پیچیدگی آن راه‌حل معقولی است. اما با افزایش ابعاد مسئله تعیین همهٔ حالات غیرمعقول و ناکارآمد می‌باشد.



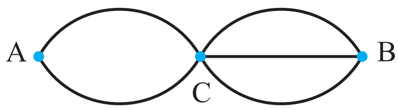
مسیرها: $\begin{matrix} ۲-۳ & ۱-۳ \\ ۲-۴ & ۱-۴ \\ ۲-۵ & ۱-۵ \end{matrix}$ ⇐ ۶ حالت برای رفتن از A به B وجود دارد.

روش دوم استفاده از اصل ضرب است. ♣

تعریف ۱ — ۱

اصل ضرب: هرگاه یک رویداد (اتفاق) کلی، به رویدادهای (اتفاق‌های) جزئی و پشت سر هم دیگر تبدیل شود، تعداد حالت‌های وقوع رویداد کلی برابر حاصل‌ضرب تعداد حالت‌های وقوع تک تک رویدادهای جزئی می‌باشد.

توضیح: بطور مثال در مثال قبل رویداد کلی از رفتن از شهر A به شهر B بود. که برای این کار باید ابتدا از شهر A به C رفت (رویداد جزئی اول)، سپس از C به B رفت (رویداد جزئی دوم)



پس با توجه به اصل ضرب:

تعداد راه‌های رفتن از C به B × تعداد راه‌های رفتن از A به C = تعداد راه‌های رفتن از A به B

$= ۲ \times ۳ = ۶$

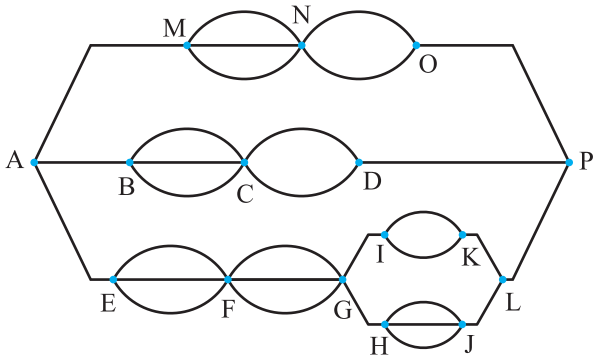
تعریف ۱ — ۲

اصل جمع: اگر بتوان راه‌های وقوع یک رویداد را به چند حالت کلی تقسیم کرد، تعداد راه‌های وقوع رویداد کلی برابر است با حاصل‌جمع راه‌های وقوع هر حالت کلی.

برای فهم بیشتر تعریف بالا به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۱ـ۲

تعداد راه‌های رسیدن از A به P را بطوریکه از هر نقطه فقط یک بار عبور کنیم را بیابید.



راه حل: رویداد کلی این مسئله از A به P رفتن است. همان‌طور که مشخص است راه‌های وقوع این رویداد ۳ حالت کلی دارد که هر راه فقط در یکی از این حالت‌ها قرار می‌گیرد. حالت ۱: حالت بالا (از A به M و … و P)، حالت ۲: حالت وسط (از A به B و … و P)، حالت ۳: حالت پایین (از A به E و … و P)

طبق تعریف اصل جمع:

تعداد راه‌های رفتن از A به P = تعداد راه‌های حالت ۱ + تعداد راه‌های حالت ۲ + تعداد راه‌های حالت ۳

تعداد راه‌های حالت ۱ = ۱ × ۳ × ۲ × ۱ = ۶ (اصل ضرب)

تعداد راه‌های حالت ۲ = ۱ × ۳ × ۲ × ۱ = ۶ (اصل ضرب)

تعداد راه‌های حالت ۳ = تعداد راه‌های از A به E × تعداد راه‌های از E به F × تعداد راه‌های از F به G × تعداد راه‌های از G به L × تعداد راه‌های از L به P

= ۱ × ۳ × ۳ × تعداد راه‌های از G به L × ۱

تعداد راه‌های از G به L = تعداد راه‌های GIKL + تعداد راه‌های GHJL = ۲ + ۳ = ۵ (اصل جمع)

تعداد راه‌های از A به P = ۱ × ۳ × ۲ × ۱ + ۱ × ۳ × ۲ × ۱ + ۱ × ۳ × ۳ × ۵ × ۱ = ۵۷

♣

نکته: رویداد کلی مسئله، رویدادی است که قصد شمردن تعداد راه‌های وقوع آن را داریم (در مثال ۱ـ۲ رویداد اصلی رفتن از A به P است)

نکته: یک حالت کلی شامل تعدادی از راه‌های وقوع رویداد کلی می‌شود یعنی هر یک از راه‌های یک حالت کلی یکی از راه‌های وقوع مسئله اصلی است. در مثال ۱ـ۲، AMNOP یک حالت کلی است چون هر راه آن یک حالت از A به P رسیدن است ولی در مثال ۱ـ۱، AC یک حالت کلی نیست چون راه‌های آن از A به B که رویداد کلی مسئله است نمی‌باشد.

نکته: هرگاه برای شمردن تعداد حالت‌های یک رویداد آن را به چند حالت کلی تقسیم کردیم باید از اصل جمع استفاده کنیم.

نکته: هرگاه برای شمردن تعداد حالت‌های یک رویداد در وسط راه بودیم یعنی هنوز یک راه قابل قبول برای وقوع رویداد را بدست نیاوردیم، باید از اصل ضرب استفاده کنیم و تعداد حالت‌های هر قسمت را ضرب کنیم تا یک راه وقوع قابل قبول برای رویداد بدست آوریم.

یکی از اشتباه‌های متداولی که دانش‌آموزان در مبحث شمارش مرتکب می‌شوند عدم تشخیص صحیح در استفاده از اصل ضرب و جمع است که سعی می‌شود با توجه به نکات یاد شده و حل مسائل متعدد احتمال وقوع این اشتباه کاهش یابد.

مثال ۱ – ۳

چند عدد ۵ رقمی وجود دارد بطوریکه:

الف) هیچ شرطی نداشته باشیم.

ب) ارقام آن متمایز باشد.

ج) فرد باشد.

د) زوج باشد.

هـ) فرد باشد و ارقام متمایز داشته باشد.

و) زوج باشد و ارقام متمایز داشته باشد.

راه حل:

الف) پیشامد کلی اعداد ۵ رقمی است که می‌خواهیم تعداد آن را بشماریم.

۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	۹
یکان	دهگان	صدگان	هزارگان	ده هزارگان

برای مشخص کردن یک عدد ۵ رقمی باید یکان آن را مشخص کنیم (۱۰ حالت دارد) با مشخص کردن یکان یک عدد ۵ رقمی حاصل نمی‌شود پس در وسط راه هستیم. باید دهگان را مشخص کنیم (۱۰ حالت) در وسط راه هستیم ... با مشخص کردن رقم ده هزارگان (۹ حالت، صفر نمی‌تواند باشد) یک عدد ۵ رقمی بدست می‌آوریم. (اصل ضرب)

$$۹ \times ۱۰ \times ۱۰ \times ۱۰ \times ۱۰ = ۹ \times ۱۰^{۴}$$

ب) مانند قسمت قبل ولی با این تفاوت که ابتدا ده هزارگان را مشخص می‌کنیم (۹ حالت)

$$\underline{۹}\ \underline{۹}\ \underline{۸}\ \underline{۷}\ \underline{۶}$$

فرض کنید رقم ۳ را انتخاب کردیم. حال برای هزارگان رقم ۳ را نمی‌توانیم انتخاب کنیم ولی صفر را می‌توانیم انتخاب کنیم پس ۹ حالت داریم. فرض کنید رقم ۴ را انتخاب کردیم. برای صدگان ۳ و ۴

را نمی‌توانیم انتخاب کنیم. پس ۸ حالت داریم و به همین ترتیب و چون در هر قسمت در وسط راه هستیم (یک عدد ۵ رقمی بدست نیاوردیم) از اصل ضرب استفاده می‌کنیم.

$$۹ \times ۹ \times ۸ \times ۷ \times ۶$$

ج) ابتدا یکان را مشخص می‌کنیم (۵ حالت: ۱، ۳، ۵، ۷ و ۹)

$$\underline{۹}\ \underline{۱۰}\ \underline{۱۰}\ \underline{۱۰}\ \underline{۵}$$

و سپس حالت‌های ارقام دیگر را می‌نویسیم

$$۹ \times ۱۰^{۳} \times ۵$$

د) مانند مثال قبل فقط یکان باید زوج باشد (۰، ۲، ۴، ۶ و ۸)

$$۹ \times ۱۰^{۳} \times ۵$$

هـ) مانند قسمت ب ولی ابتدا یکان را مشخص می‌کنیم (۵ حالت)

$$\underline{۸}\ \underline{۸}\ \underline{۷}\ \underline{۶}\ \underline{۵}$$

سپس ده هزارگان که رقم یکان و رقم صفر نمی‌تواند باشد (۸ حالت)، رقم هزارگان، رقم یکان و ده هزارگان نیست و ...

$$۸ \times ۸ \times ۷ \times ۶ \times ۵$$

و) فرض کنید می‌خواهیم مانند قسمت قبل حل کنیم. ابتدا باید رقم یکان را مشخص کنیم. چون زوج است پس یکان یکی از ارقام صفر، ۲، ۴، ۶ و ۸ می‌باشد. اگر یکان را صفر قرار دهیم در آن صورت رقم ده هزارگان هر رقمی بجز صفر می‌تواند باشد پس ۹ حالت خواهد داشت ولی اگر رقم یکان را زوج و غیر صفر بگذاریم (مثلاً ۶) در آن صورت رقم ده هزارگان هر رقمی بجز صفر و رقم یکان می‌تواند باشد پس ۸ حالت خواهد داشت پس حالتی که رقم یکان صفر است با سایر حالات متفاوت است در نتیجه مجبوریم حالت‌بندی کنیم و مسئله را به ۲ حالت کلی تقسیم کنیم.

حالت ۱: یکان صفر است.

حالت ۲: یکان زوج و غیر صفر است.

$\underline{۹} \times \underline{۸} \times \underline{۷} \times \underline{۶} \times \underline{۱} =$ تعداد جواب‌های حالت ۱

$\underline{۸} \times \underline{۸} \times \underline{۷} \times \underline{۶} \times \underline{۴} =$ تعداد جواب‌های حالت ۲

$۹ \times ۸ \times ۷ \times ۶ \times ۱ + ۸ \times ۸ \times ۷ \times ۶ \times ۴ =$ تعداد عددهای زوج با ارقام متمایز $\Rightarrow$

♣

در مثال ۱ – ۳ برای بدست آوردن تعداد اعداد ۵ رقمی زوج (قسمت د) یک راه‌حل می‌تواند این‌گونه باشد که از تعداد کل اعداد ۵ رقمی (قسمت الف) اعداد ۵ رقمی فرد (قسمت ج) کنار بگذاریم. باقی اعداد ۵ رقمی زوج خواهند بود.

$$۹ \times ۱۰^{۴} - ۹ \times ۱۰^{۳} \times ۵ = ۹ \times ۱۰^{۳} \times ۵$$

این ایده‌ی حل یک ایدهٔ مهم در مبحث شمارش محسوب می‌شود که به اصل متمم مشهور است.

تعریف ۱ – ۳

اصل متمم: هرگاه برای شمردن تعداد حالت‌های وقوع یک رویداد، از کل حالت‌های موجود، حالت‌های نامطلوب (حالت‌هایی که آن رویداد در آن محقق نمی‌شود) را کم کنیم، از روش اصل متمم استفاده کرده‌ایم.

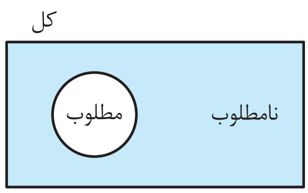
تعداد حالت‌های نامطلوب − کل حالات = تعداد حالت‌های مطلوب

نکته: در استفاده از اصل متمم باید حالت‌های مطلوب، حالت‌های نامطلوب و کل حالات به‌خوبی تعریف شود.

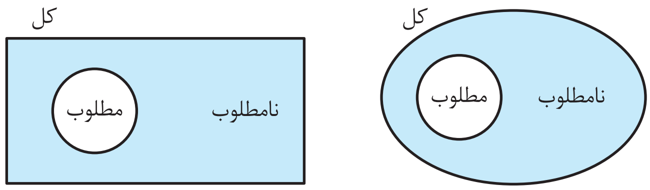
نکته: حالت‌های مطلوب در واقع آن رویدادی است که قصد شمردن تعداد حالت‌های وقوع آن را داریم.

نکته: هر آنچه که جزء کل باشد ولی مطلوب نباشد، نامطلوب است.

نکته: حالت‌های مطلوب و نامطلوب زیرمجموعه کل هستند، اجتماع آنها کل می‌شود و اشتراک‌شان تهی. هر آنچه که کل باشد و مطلوب نباشد، نامطلوب است.



نکته: تعریف نامطلوب وابسته به تعریف کل است (با تغییر کل، فضای نامطلوب نیز تغییر می‌کند.)



همان‌طور که مشاهده می‌شود فضای مطلوب ثابت است ولی با تغییر کل، فضای نامطلوب تغییر می‌کند.

در مثال یاده شده، راه‌حلی که اشاره شد، مطلوب اعداد زوج ۵ رقمی بود و کل، اعداد ۵ رقمی در نتیجه نامطلوب اعداد فرد ۵ رقمی می‌شود.

نکته: استفاده از اصل متمم همواره مناسب نیست. هنگامی استفاده از اصل متمم توصیه می‌شود که بدست آوردن تعداد حالات مطلوب (به روش مستقیم) مشکل‌تر از بدست آوردن کل حالات و حالات نامطلوب باشد، در غیر این صورت توصیه می‌شود از روش مستقیم برای بدست آوردن حالت‌های مطلوب استفاده شود.

مثال ۱ – ۴

به چند طریق یک عدد ۵ رقمی با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ می‌توان نوشت بطوریکه حداقل یک رقم ۳ داشته باشد.

راه حل: اگر بخواهیم این سوال را از روش مستقیم محاسبه کنیم باید روی تعداد ارقام ۳ حالت‌بندی کنیم که روش طولانی برای حل سوال است. برای هر سوال از اصل متمم استفاده می‌کنیم. حالت مطلوب اعدادی با حداقل یک رقم ۳ است. کل حالات، کل اعداد ۵ رقمی با ارقام ۱، ۲، . . . و ۵ است حالات نامطلوب هر آنچه در کل هست ولی مطلوب نیست پس حالات نامطلوب اعداد ۵ رقمی با ارقام ۱، ۲، ... و ۵ است که هیچ رقم ۳ای ندارد.

$$\left.\begin{array}{l}\text{تعداد حالات کل} = ۵^۵\\ \text{تعداد حالات نامطلوب} = ۴^۵\end{array}\right\} \Rightarrow \text{حالات مطلوب} = ۵^۵ - ۴^۵$$

♣

مثال ۱ – ۵

تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی $A = \{a_۱, a_۲, \ldots, a_{۱۰}\}$ را بیابید بطوریکه:

الف) هیچ شرطی نداشته باشیم.

ب) a_1 عضو زیرمجموعه باشد.

ج) a_1 عضو زیرمجموعه باشد ولی a_2 عضو آن نباشد.

د) اگر a_1 عضو زیرمجموعه بود، a_2 نیز عضو زیرمجموعه باشد.

هـ) اگر a_1 عضو زیرمجموعه بود، a_2 عضو زیرمجموعه نباشد.

و) a_1 و a_2 هم‌زمان باشند یا هم‌زمان نباشند.

راه حل:

الف) برای تعیین تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه باید وضعیت هر یک از عضوها را مشخص کنیم. a_1، ۲ حالت دارد یا عضو زیرمجموعه هست یا نیست. با تعیین وضعیت a_1 نمی‌توان زیرمجموعه را مشخص کرد پس در وسط راه هستیم (اصل ضرب) و ...

پس هر عضو ۲ حالت دارد در نتیجه یک مجموعه‌ی ۱۰ عضوی $۲^{۱۰}$ زیرمجموعه دارد.

ب) a_1، یک حالت دارد (عضو زیرمجموعه هست)، سایر اعضا ۲ حالت دارند پس $۲^۹$ زیرمجموعه داریم:

$\underline{۱}\ \underline{۲}\ \underline{۲}\ \underline{۲}\ \underline{۲}\ \underline{۲}\ \underline{۲}\ \underline{۲}\ \underline{۲}\ \underline{۲}$

ج) a_1 یک حالت دارد (عضو زیرمجموعه هست)، a_2 یک حالت دارد (عضو زیرمجموعه نیست)، سایر اعضا ۲ حالت دارند (یا هستند یا نیستند) پس $۲^۸$ زیرمجموعه داریم.

$\underline{۱}\ \underline{۱}\ \underline{۲}\ \underline{۲}\ \underline{۲}\ \underline{۲}\ \underline{۲}\ \underline{۲}\ \underline{۲}\ \underline{۲}$

د) کل حالت‌ها را در نظر بگیرید (کل: تمام زیرمجموعه‌ها) که در ۴ حالت کلی زیر قرار دارد.

	a_1	a_2	
کل	×	✓	حالات مطلوب
	×	×	حالات مطلوب
	✓	✓	حالات مطلوب
	✓	×	حالات نامطلوب ←

همان‌طور که از شکل مشخص است تنها حالت نامطلوب حالتی است که a_1 را دارد و a_2 را ندارد که در این حالت $۲^۸$ زیرمجموعه قرار دارد. در نتیجه:

$$\text{حالت‌های مطلوب} = \text{کل} - \text{نامطلوب} = ۲^{۱۰} - ۲^۸$$

هـ) مانند قسمت قبل:

$a_۱$	$a_۲$	
×	✓	حالات مطلوب
×	×	
✓	×	
✓	✓	حالات نامطلوب ←

کل

$$\text{حالت‌های مطلوب} = ۲^{۱۰} - ۲^{۸}$$

و) ۲ حالت داریم، در حالت اول $a_۱$ و $a_۲$ همزمان هستند و در حالت دوم $a_۱$ و $a_۲$ هیچ‌کدام نیستند که تعداد زیرمجموعه‌های هر حالت $۲^{۸}$ می‌باشد. در نتیجه جواب مسئله:

$$۲^{۸} + ۲^{۸} = ۲^{۹}$$

♣

نکته: هر مجموعهٔ n عضوی، ۲^{n} زیرمجموعه دارد.

مثال ۱ـ۶

چند عدد ۱۳ رقمی از ارقام $\{۱, ۲, ۳, ۴\}$ وجود دارد که مجموع هر ۳ رقم متوالی در آن زوج باشند.

راه حل: برای رقم اول از چپ، ۴ حالت داریم، برای رقم دوم از چپ نیز ۴ حالت داریم، برای رقم سوم با توجه به مجموع ۲ رقم قبل از آن ۲ حالت داریم (اگر مجموع ۲ رقم قبل زوج بود، رقم سوم ۲ یا ۴ هست و اگر فرد بود رقم سوم ۱ یا ۳ هست)، برای باقی ارقام هم مانند رقم سوم با توجه به ۲ رقم قبل از آنها ۲ حالت داریم پس در مجموع $۲^{۱۵}$ حالت داریم.

$$۴ \times ۴ \times ۲ \times ۲ \times \ldots \times ۲ = ۲^{۱۵}$$

♣

مثال ۱ـ۷

تعداد رشته‌های به طول ۱۰ با حروف A، B، C و D که در آنها A و B مجاور نیستند و C و D نیز مجاور نیستند و نیز هیچ ۲ حرف مجاوری یکسان نیست را بیابید.

راه حل: برای جایگاه اول ۴ حالت داریم (هر یک از حروف A، B، C و D) با انتخاب هر یک از حروف برای جایگاه بعدی خود آن حرف و حرف متضاد با آن حرف را نمی‌توانیم بگذاریم پس برای جایگاه بعدی ۲