



چگونه مسئله حل کنیم؟

حل کردن هر مسئله ۴ مرحله دارد و در تمام مسئله‌ها باید این ۴ مرحله را در ذهن خود مرور کنیم و آن‌ها را به کار ببریم تا بتوانیم مسئله را به درستی حل کنیم.

مرحله اول: فهمیدن مسئله

یعنی این که مسئله را درک کنیم و بدانیم که مسئله چه اطلاعاتی به ما داده و چه چیزی از ما خواسته است. بنابراین برای این که مسئله را خوب بفهمیم می‌توانیم:

مسئله را چند بار بخوانیم.

مسئله را خلاصه کنیم.

مسئله را قسمت قسمت مطالعه کنیم (یعنی تا یک قسمت از مسئله را متوجه نشدیم به قسمت بعد نرویم).

داده‌ها و اطلاعات مسئله را مشخص کنیم.

خواسته‌های مسئله را مشخص کنیم.

مسئله را با زبان و کلمه‌های ساده بیان کنیم.

مرحله دوم: انتخاب راهبرد مناسب

بعد از فهمیدن مسئله، یکی از روش‌های حل مسئله (رسم شکل، الگوسازی، حذف حالت‌های نامطلوب، الگویابی، حدس و آزمایش، زیرمسئله، حل مسئله ساده‌تر و روش‌های نمادین) را انتخاب می‌کنیم و به کمک آن به حل مسئله می‌پردازیم.

مرحله سوم: حل کردن مسئله

بعد از فهمیدن مسئله و انتخاب راهبرد مناسب به حل مسئله می‌پردازیم یعنی روش و طرحی را که در ذهن برای حل مسئله داریم، روی کاغذ پیاده می‌کنیم. اگر در این مرحله نتوانستیم مسئله را به درستی حل کنیم باید مراحل قبلی را تکرار کنیم؛ یعنی این که مجدداً مسئله را مطالعه و سعی کنیم آن را خوب بفهمیم و یا اینکه راهبرد دیگری را انتخاب کنیم.

مرحله چهارم: بازگشت به عقب

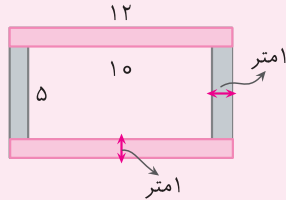
بعد از این که مسئله را حل کردیم، باید دقت کنیم که آیا جوابی که به دست آورده‌ایم همان خواسته مسئله است و آیا این جواب منطقی و متناسب با خواسته مسئله است. هم‌چنین باید محاسبات خود را مجدداً مورد بررسی قرار دهیم و جواب به دست آمده را در مسئله مورد بررسی و آزمایش قرار دهیم.

روش‌های حل مسئله

۱. **روش رسم شکل:** کشیدن یک شکل مناسب می‌تواند به فهمیدن مسئله و حل آن کمک کند و یا این که مسئله را به طور کامل حل کند. منظور از رسم شکل، نقاشی نیست. بعضی مواقع شما می‌توانید شکل را در ذهن خود مجسم کنید و آن را رسم نکنید. در این روش درست رسم کردن شکل، مهم است. شما می‌توانید شکل‌های ساده رسم کنید. مثلاً می‌توان کل پول یک نفر و یا کل دانش‌آموزان یک کلاس را با یک مستطیل نشان داد.

مثال

۱. در حیاط یک آپارتمان، باغچه‌ای مستطیل شکل به طول ۱۰ و عرض ۵ متر وجود دارد. می‌خواهند دور تا دور این باغچه یک پیاده‌رو به عرض ۱ متر از لبه‌های باغچه درست کنند. اگر بخواهند این پیاده‌رو را با موزاییک کف پوش کنند، چند متر مربع موزاییک لازم است؟



پاسخ: شکل باغچه و پیاده‌روی اطراف آن را رسم می‌کنیم. با توجه به شکل، سطح موزاییک شده دو تا مستطیل 12×1 و دو مستطیل 5×1 می‌باشد.

$$\text{متر مربع } 24 = 2 \times (12 \times 1) : \text{مساحت دو مستطیل } 12 \times 1$$

$$\text{متر مربع } 10 = 2 \times (5 \times 1) : \text{مساحت دو مستطیل } 5 \times 1$$

$$\text{متر مربع } 34 = 24 + 10 : \text{موزاییک لازم}$$

۲. $\frac{3}{5}$ دانش‌آموزان یک کلاس فوتبال، $\frac{3}{4}$ باقی‌مانده آن‌ها والیبال و باقی‌مانده کلاس که ۴ نفر هستند؛ تنیس بازی می‌کنند.

الف. چه کسری از دانش‌آموزان این کلاس تنیس بازی می‌کنند؟

ب. کل کلاس چند نفر است؟

پاسخ: الف. کل دانش‌آموزان کلاس را با یک مستطیل نشان می‌دهیم و آن را به ۵ قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم. $\frac{3}{5}$ کلاس که فوتبالیست هستند را مشخص می‌کنیم، سپس باقی‌مانده شکل را به چهار قسمت مساوی تقسیم کرده و $\frac{3}{4}$ آن (والیبال) را مشخص می‌کنیم. قسمت باقی‌مانده هم که ۴ نفر هستند و تنیس بازی می‌کنند. با توجه به شکل، $\frac{1}{10}$ دانش‌آموزان تنیس بازی می‌کنند.

$$\text{ب. نفر } 40 = 10 \times 4$$

تنیس	والیبال
والیبال	والیبال
فوتبال	
فوتبال	
فوتبال	

تمرینات



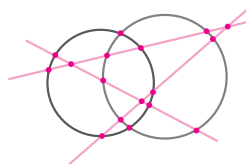
- سه خط راست و دو دایره حداکثر چند نقطه تقاطع دارند؟
- $\frac{2}{3}$ از $\frac{1}{4}$ راهی ۲۰ کیلومتر است. کل راه چند کیلومتر است؟
- کشاورزی $\frac{1}{4}$ از زمین خود را گندم، $\frac{1}{3}$ را جو و باقی‌مانده زمین را نخود می‌کارد. او چه کسری از زمین خود را نخود می‌کارد؟
- کرمی برای بالا رفتن از یک دیوار ۱۱ متری هر ساعت ۳ متر بالا می‌رود و ۱ متر به پایین سر می‌خورد. چند ساعت طول می‌کشد تا کرم به بالای دیوار برسد؟

پاسخ تمرینات



۱

باید شکل دو دایره و سه خط راست را رسم کنید به طوری که دو تا دایره همدیگر را قطع کرده باشند و سه خط راست هم دایره‌ها و هم یکدیگر را قطع کرده باشند.
پس ۱۷ نقطه تقاطع دارند.



۲



ابتدا کل مسیر را با یک پاره‌خط نشان می‌دهیم سپس آن را به ۴ قسمت مساوی تقسیم کرده و هر یک از این قسمت‌ها را نیز به سه قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم. با توجه به شکل، ۶ قسمت ۲۰ کیلومتری داریم.
کیلومتر $۶ \times ۲۰ = ۱۲۰$ = کل مسیر

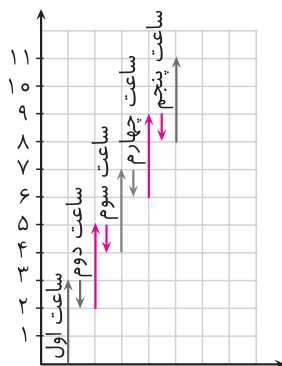
۳

$\frac{1}{2}$ زمین یعنی $\frac{3}{6}$ گندم و $\frac{1}{3}$ زمین یعنی $\frac{2}{6}$ جو. با توجه به شکل $\frac{1}{6}$ زمین را نخود کاشته است.

گندم	
جو	نخود

۴

با توجه به شکل ۵ ساعت طول می‌کشد تا کرم به بالای دیوار برسد.



جواب بعضی از مسئله‌ها دارای حالت‌های مختلفی است و برای حل آن‌ها باید همه آن حالت‌ها را بنویسیم. بنابراین برای این که هیچ حالتی فراموش نشود، بهتر است که همه حالت‌ها را با نظم، الگو و ترتیبی مشخص بنویسیم. می‌توانیم برای نوشتن همه حالت‌ها با نظم و ترتیب از یک جدول استفاده کنیم. با توجه به نظم و ترتیبی که برای حل این مسئله‌ها می‌سازیم به این راهبرد، تفکر نظام‌دار نیز می‌گویند.

مثال

۱. پوریا ۱۵ سکه ۱۰۰ تومانی دارد. او می‌خواهد سکه‌هایش را در سه دسته قرار دهد، به طوری که در هر دسته تعداد سکه‌ها فرد باشد. پوریا به چند حالت مختلف می‌تواند این کار را انجام دهد؟

پاسخ: با توجه به اطلاعات مسئله متوجه می‌شویم که سکه‌ها باید به سه دسته تقسیم شوند به طوری که عدد هر دسته فرد باشد؛ یعنی سه عدد فرد که مجموع آن‌ها ۱۵ شود. پوریا به ۷ حالت مختلف می‌تواند این کار را انجام دهد.

دسته سوم	دسته دوم	دسته اول
۱۳	۱	۱
۱۱	۳	۱
۹	۵	۱
۷	۷	۱
۹	۳	۳
۷	۵	۳
۵	۵	۵

۲. چند مستطیل وجود دارد که محیط آن‌ها ۲۲ سانتی‌متر و طول و عرض آن‌ها عدد طبیعی باشند؟

پاسخ: با توجه به این که محیط مستطیل ۲۲ است پس مجموع طول و عرض آن برابر با ۱۱ است. پس باید همه حالت‌هایی را پیدا کنیم که مجموع دو عدد طبیعی ۱۱ شود. عدد کوچک‌تر عرض و عدد بزرگ‌تر طول خواهد بود. ابتدا از کوچک‌ترین عدد طبیعی شروع می‌کنیم یعنی عرض را ۱ می‌گیریم. با توجه به جدول ۵ مستطیل با این ویژگی وجود دارد.

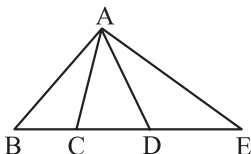
عرض	طول	محیط
۱	۱۰	$(1+10) \times 2 = 22$
۲	۹	$(2+9) \times 2 = 22$
۳	۸	$(3+8) \times 2 = 22$
۴	۷	$(4+7) \times 2 = 22$
۵	۶	$(5+6) \times 2 = 22$

تمرینات



۱. دو عدد طبیعی بنویسید که حاصل ضرب آن‌ها ۳۶ و حاصل جمع آن‌ها کم‌ترین مقدار ممکن باشد.

۲. همه پاره‌خط‌های شکل زیر را نام ببرید.



۳. با رقم‌های ۴، ۵ و ۷ چند عدد سه‌رقمی می‌توان نوشت که از ۵۴۷ بزرگ‌تر باشند؟ (رقم‌ها می‌توانند تکراری باشند).

۴. ساین ۵۰۰ تومان دارد. او می‌خواهد با همه پول خود شکلات ۵۰ تومانی یا آدامس ۱۰۰ تومانی بخرد. به چند حالت

می‌تواند این کار را انجام دهد؟

پاسخ تمرینات



۱

در جدول الگوسازی با کوچک‌ترین عدد طبیعی یعنی ۱ شروع می‌کنیم و عددهایی را پیدا می‌کنیم که حاصل ضرب آن‌ها ۳۶ باشد.

اولین عدد	دومین عدد	حاصل جمع
۱	۳۶	۳۷
۲	۱۸	۲۰
۳	۱۲	۱۵
۴	۹	۱۳
۶	۶	۱۲

آن دو عدد ۶ و ۶ هستند.

۲

ابتدا تمام پاره‌خط‌هایی که با حرف A شروع می‌شوند را می‌نویسیم و سپس پاره‌خط‌هایی که با حرف B و بعد از آن پاره‌خط‌های با حرف C و ... را می‌نویسیم. بنابراین ۱۰ پاره‌خط وجود دارد.

نام پاره‌خط	سر دیگر پاره‌خط	اول پاره‌خط
\overline{AB}	B	A
\overline{AC}	C	A
\overline{AD}	D	A
\overline{AE}	E	A
\overline{BC}	C	B
\overline{BD}	D	B
\overline{BE}	E	B
\overline{CD}	D	C
\overline{CE}	E	C
\overline{DE}	E	D

۳

۱۵ عدد سه رقمی می‌توان نوشت:

یکان	دهگان	صدگان
۴	۵	۵
۵	۵	۵
۷	۵	۵
۴	۷	۵
۵	۷	۵
۷	۷	۵
۴	۴	۷
۵	۴	۷
۷	۴	۷
۴	۵	۷
۵	۵	۷
۷	۵	۷
۴	۷	۷
۵	۷	۷
۷	۷	۷

۴

به ۶ حالت

تعداد شکلات	تعداد آدامس
۰	۵
۲	۴
۴	۳
۶	۲
۸	۱
۱۰	۰



برای حل کردن بعضی از مسئله‌ها حالت‌های نامطلوبی وجود دارد که باید ابتدا آن حالت‌های نامطلوب را کنار بگذاریم تا به حالت‌های مطلوب یا پاسخ مسئله برسیم. در این صورت ابتدا همه حالت‌های ممکن را به کمک راهبرد الگوسازی می‌نویسیم و سپس حالت‌های نامطلوب را کنار می‌گذاریم تا پاسخ مسئله به دست آید.

مثال

۱. مساحت مستطیلی ۴۸ سانتی‌متر مربع و محیط آن ۳۲ سانتی‌متر می‌باشد. طول و عرض این مستطیل را به دست آورید. (طول و عرض، اعدادی طبیعی هستند.)

پاسخ: ابتدا تمام حالت‌هایی که حاصل ضرب طول در عرض برابر با ۴۸ می‌شود را به‌طور منظم می‌نویسیم و سپس در هر حالت محیط مستطیل را نیز محاسبه می‌کنیم. سپس حالت‌های نامطلوب یعنی حالت‌هایی که محیط ۳۲ نمی‌شود را کنار می‌گذاریم. حالت مطلوب حالتی است که محیط ۳۲ باشد. پس طول این مستطیل ۱۲ و عرض آن ۴ سانتی‌متر است.

بررسی	محیط	طول	عرض
×	$(1+48) \times 2 = 98$	۴۸	۱
×	$(2+24) \times 2 = 52$	۲۴	۲
×	$(3+16) \times 2 = 38$	۱۶	۳
✓	$(4+12) \times 2 = 32$	۱۲	۴
×	$(6+8) \times 2 = 28$	۸	۶

۲. کدام یک از اعداد زیر می‌تواند مجموع زاویه‌های داخلی یک چندضلعی باشد؟

88° , 1200° , 226° , 198°

پاسخ: با توجه به این که مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث 180° است، برای به دست آوردن مجموع زاویه‌های داخلی هر چندضلعی، ابتدا آن را به چند مثلث تبدیل می‌کنیم. پس مجموع زاویه‌های داخلی چندضلعی، مضربی از 180° است، یعنی از بین اعداد داده شده هر کدام بر 180 بخش‌پذیر باشد مطلوب و هر کدام بر 180 بخش‌پذیر نباشد نامطلوب است. پس تک‌تک اعداد را بر 180 تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{array}{r} 880 \overline{) 180} \\ \underline{720} \\ 160 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1200 \overline{) 180} \\ \underline{1080} \\ 120 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2260 \overline{) 180} \\ \underline{180} \\ 5460 \\ \underline{360} \\ 100 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1980 \overline{) 180} \\ \underline{180} \\ 180 \\ \underline{180} \\ 000 \end{array}$$

بنابراین 1980 می‌تواند مجموع زاویه‌های داخلی یک چندضلعی باشد.

تمرینات


- مجموع سن ۳ نفر ۱۴ سال و حاصل ضرب سن آن‌ها ۳۶ است. سن این سه نفر را مشخص کنید.
- در یک مسابقه تیراندازی امتیازهای روی صفحه هدف ۴، ۱۰، ۱۲ و ۱۶ می‌باشند. پارسا در این مسابقه ۳ تیر را به هدف زده است. کدام یک از اعداد زیر می‌تواند مجموع امتیازهای پارسا باشد؟
۳۴ ، ۵۰ ، ۴۴ ، ۲۶ ، ۴۲ ، ۳۸
- اگر دو ضلع از مثلثی ۵ و ۹ باشند، اندازه ضلع سوم کدام یک از اعداد ۳، ۴، ۸، ۱۳ و ۱۵ می‌تواند باشد؟

پاسخ تمرینات

۱

ابتدا همه حالت‌هایی را که ضرب سه عدد طبیعی ۳۶ شود می‌نویسیم و سپس مجموع آن‌ها را نیز به دست می‌آوریم. حالت مطلوب: ۹، ۴ و ۱ سن آن‌ها می‌باشد.

مجموع	نفر سوم	نفر دوم	نفر اول
۳۸	۳۶	۱	۱
۲۱	۱۸	۲	۱
۱۶	۱۲	۳	۱
۱۴	۹	۴	۱
۱۳	۶	۶	۱
۱۳	۹	۲	۲
۱۱	۶	۳	۲
۱۰	۴	۳	۳

۲

۴۲، ۴۴، ۳۸، ۳۴ و ۲۶ می‌توانند امتیاز پارسا باشند. باید جمع سه تا از عددهای هدف را به دست آوریم. البته عدد هدف می‌تواند تکراری باشد.

$$۴ + ۱۰ + ۱۲ = ۲۶$$

$$۱۰ + ۱۲ + ۱۲ = ۳۴$$

۳

ابتدا تمام سه‌تایی‌هایی که با ۵ و ۹ و یکی از اعداد داده شده می‌توان نوشت را می‌نویسیم. می‌دانیم در صورتی مثلث به دست می‌آید که مجموع دو ضلع کوچک‌تر، از ضلع سوم بیشتر باشد.
با (۵، ۹ و ۸) و (۵، ۹ و ۱۳) می‌توان مثلث ساخت در نتیجه ضلع سوم می‌تواند ۸ یا ۱۳ باشد.

بررسی و نتیجه	ضلع سوم	ضلع دوم	ضلع اول
$۳ + ۵ < ۹$	۳	۹	۵
$۴ + ۵ < ۹$	۴	۹	۵
$۵ + ۸ > ۹$ → مطلوب	۸	۹	۵
$۵ + ۹ > ۱۳$ → مطلوب	۱۳	۹	۵
$۵ + ۹ < ۱۵$	۱۵	۹	۵

در ریاضی دو نوع الگوی عددی یا هندسی داریم. هر گاه در بین شکل‌ها یا عددها، الگو و رابطه خاصی وجود داشته باشد با کشف آن الگو، نظم و رابطه می‌توانیم خواسته مسئله را به دست آوریم.

مثال

۱. سه عدد بعدی هر یک از الگوهای عددی زیر را بنویسید.

پاسخ:

$$+4 \quad +4 \quad +4$$

$$1, 5, 9, 13, 17, 21, 25$$

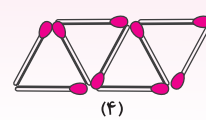
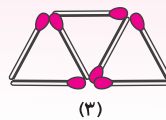
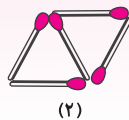
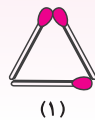
الگو: عددها ۴ تا ۴ اضافه می‌شوند.

$$\times 2 \quad \times 2 \quad \times 2$$

$$3, 6, 12, 24, 48, 96, 192$$

الگو: عددها دو برابر می‌شوند.

۲. با توجه به شکل‌های زیر، شکل دهم از چند چوب کبریت ساخته می‌شود؟



پاسخ: در الگوهای هندسی مانند مثال بالا بهتر است که از یک جدول استفاده کنیم به این صورت که شماره شکل را در یک ردیف و تعداد چوب کبریت‌ها را در ردیف دیگر بنویسیم و الگوی بین شماره شکل و تعداد چوب کبریت‌ها پیدا کنیم.

شماره شکل	(۱)	(۲)	(۳)	(۴)	...	(۱۰)
تعداد چوب کبریت	۳	۵	۷	۹	...	(۲۱)

$$+ 1 = (2 \times \text{شماره شکل}) + 1$$

$$21 = (2 \times 10) + 1 = 21$$

تمرینات

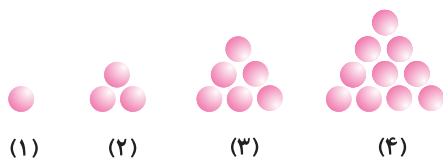


۱. هر یک از الگوهای عددی زیر را با نوشتن دو عدد دیگر ادامه دهید.

الف) $3, 8, 15, 24, \dots, \dots$

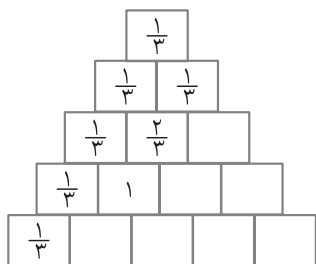
ب) $\frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{3}{10}, \dots, \dots$

۲. با توجه به شکل زیر، شکل هشتم از چند دایره تشکیل می‌شود؟





۳. در شکل زیر جاهای خالی را پر کنید.



۴. با توجه به الگوی بین ضرب‌های زیر حاصل آخرین عبارت را به دست آورید.

$$11 \times 11 = 121$$

$$111 \times 111 = 12321$$

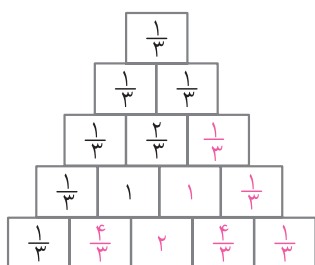
$$1111 \times 1111 = 1234321$$

$$11111 \times 11111 = \dots\dots\dots$$

پاسخ تمرینات



۳



$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

$$\frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$$

۴

$$11111 \times 11111 = 123454321$$

۱

$$\begin{array}{cccccc} & +5 & +7 & +9 & +11 & +13 \\ 3 & , & 8 & , & 15 & , & 24 & , & 35 & , & 48 \end{array}$$

الف.

$$\begin{array}{cccccc} & +1 & +1 & +1 & +1 \\ \frac{1}{4} & , & \frac{2}{7} & , & \frac{3}{10} & , & \frac{4}{13} & , & \frac{5}{16} \\ +3 & & +3 & & +3 & & +3 \end{array}$$

ب.

۲

شماره شکل	(۱)	(۲)	(۳)	(۴)	...	(۸)
تعداد دایره	۱	۳	۶	۱۰	...	۳۶

$\begin{array}{cccc} & +2 & +3 & +4 & +5 \end{array}$



در مسئله‌هایی از راهبرد حدس و آزمایش استفاده می‌کنیم که معمولاً مسئله، راه‌حل و روش مستقیمی برای حل ندارد و یا این‌که رسیدن به جواب مسئله طولانی و دشوار است. می‌توانیم جواب مسئله را حدس بزنیم و سپس حدس خود را براساس شرایط گفته شده در مسئله مورد بررسی قرار دهیم و با توجه به نتیجه به دست آمده حدس بعدی را بزنیم تا کم‌کم به پاسخ مسئله نزدیک شویم. دقت کنیم که حدس‌های ما باید براساس یک روش منطقی و منظم باشند. معمولاً در این راهبرد حدس‌های خود را در یک جدول می‌آوریم تا روش حل دارای نظم باشد.

مثال

۱. هنگامی که مریم به دنیا آمد پدرش ۲۸ ساله بود، اکنون مجموع سن مریم و پدرش ۵۰ سال است. سن هر یک از آن‌ها چه قدر است؟

پاسخ: ابتدا سن مریم را حدس می‌زنیم و براساس آن سن پدر را به دست می‌آوریم. با توجه به این‌که پدر ۲۸ سال بزرگ‌تر از مریم است پس هر عددی که برای سن مریم حدس بزنیم باید آن را با ۲۸ جمع کنیم تا سن پدر به دست آید سپس مجموع سن این دو نفر را جمع می‌کنیم تا ببینیم که از ۵۰ بیشتر است یا کم‌تر و براساس آن حدس بعدی را می‌زنیم. سن مریم ۱۱ سال و پدر ۳۹ سال است.

سن مریم	سن پدر	مجموع	بررسی
۵	$28 + 5 = 33$	$5 + 33 = 38$	کم است
۸	$28 + 8 = 36$	$8 + 36 = 44$	کم است
۱۰	$28 + 10 = 38$	$10 + 38 = 48$	کم است
۱۲	$28 + 12 = 40$	$12 + 40 = 52$	زیاد است
۱۱	$28 + 11 = 39$	$11 + 39 = 50$	✓

۲. دو زاویه مکمل همدیگرند و یکی از آن‌ها از دو برابر دیگری ۱۵ درجه کم‌تر است. اندازه این دو زاویه را به دست آورید؟

پاسخ: با توجه به این‌که دو زاویه مکمل‌اند پس مجموع آن‌ها باید 180° باشد. ابتدا زاویه کوچک‌تر را حدس می‌زنیم و براساس آن زاویه بزرگ‌تر را حساب می‌کنیم و سپس مجموع دو عدد به دست آمده را محاسبه می‌کنیم و با توجه به نتیجه به دست آمده، حدس بعدی را می‌زنیم. آن دو زاویه 65° و 115° می‌باشند.

زاویه کوچکتر	زاویه بزرگتر	مجموع	بررسی
۲۰	$2 \times 20 - 15 = 25$	$20 + 25 = 45$	کم است
۴۰	$2 \times 40 - 15 = 65$	$40 + 65 = 105$	کم است
۶۰	$2 \times 60 - 15 = 105$	$60 + 105 = 165$	کم است
۷۰	$2 \times 70 - 15 = 125$	$70 + 125 = 195$	زیاد است
۶۵	$2 \times 65 - 15 = 115$	$65 + 115 = 180$	✓

تمرینات



۱. رضا ۴۰ اسکناس از نوع ۲۰۰۰ تومانی و ۵۰۰۰ تومانی دارد. اگر مجموع پول‌های رضا ۱۲۲۰۰۰ تومان باشد، او از هر اسکناس چند تا دارد؟
۲. به ثلث عددی ۸ واحد اضافه کردیم، حاصل ۳۷ شده است. آن عدد را به دست آورید.
۳. در یک پارکینگ، ۱۸ دوچرخه و ماشین سواری پارک هستند. اگر تعداد چرخ‌های آن‌ها ۶۴ باشد در این پارکینگ چند دوچرخه و چند ماشین سواری وجود دارد؟
۴. اختلاف دو عدد ۱۵ و مجموع آن‌ها ۱۱۹ است. آن دو عدد را بیابید.

پاسخ تمرینات



۳
تعداد دوچرخه و تعداد ماشین سواری را در حدس اول مساوی در نظر می‌گیریم و مجموع چرخ‌های آن‌ها را در هر حدس حساب می‌کنیم.

دوچرخه	سواری	مجموع چرخ‌ها	بررسی
۹	۹	$18 + 36 = 54$	تعداد سواری کم است
۷	۱۱	$14 + 44 = 58$	تعداد سواری کم است
۵	۱۳	$10 + 52 = 62$	تعداد سواری کم است
۴	۱۴	$8 + 56 = 64$	✓

۴ دوچرخه و ۱۴ سواری در پارکینگ است.

۴
چون اختلاف آن‌ها ۱۵ است پس عدد کوچک‌تر را حدس می‌زنیم و ۱۵ واحد به آن اضافه می‌کنیم تا عدد بزرگ‌تر به دست آید سپس مجموع آن‌ها را حساب می‌کنیم.

عدد کوچک‌تر	عدد بزرگ‌تر	مجموع	بررسی
۲۰	۳۵	$20 + 35 = 55$	کم است
۴۰	۵۵	$40 + 55 = 95$	کم است
۶۰	۷۵	$60 + 75 = 135$	زیاد است
۵۰	۶۵	$50 + 65 = 115$	کم است
۵۲	۶۷	$52 + 67 = 119$	✓

آن دو عدد ۵۲ و ۶۷ هستند.

$$52 + 67 = 119$$

$$67 - 52 = 15$$

۱
ابتدا تعداد هر یک از اسکناس‌ها را ۲۰ تا در نظر می‌گیریم و سپس در حدس‌های بعدی طوری عمل می‌کنیم که به پاسخ نزدیک شویم.

تعداد	تعداد	مجموع	بررسی
۵۰۰۰ تومانی	۲۰۰۰ تومانی		
۲۰	۲۰	$100000 + 40000 = 140000$	تعداد ۵۰۰۰ تومانی زیاد
۱۸	۲۲	$90000 + 44000 = 134000$	تعداد ۵۰۰۰ تومانی زیاد
۱۶	۲۴	$80000 + 48000 = 128000$	تعداد ۵۰۰۰ تومانی زیاد
۱۴	۲۶	$70000 + 52000 = 122000$	✓

او ۱۴ اسکناس ۵۰۰۰ تومانی و ۲۶ اسکناس ۲۰۰۰ تومانی دارد.

۲
باید عدد مورد نظر را طوری حدس بزینیم که بر ۳ بخش پذیر باشد.

آن عدد	مجموع ثلث عدد با ۸	بررسی
۱۵	$5 + 8 = 13$	خیلی کم است
۳۰	$10 + 8 = 18$	کم است
۶۰	$20 + 8 = 28$	کم است
۹۰	$30 + 8 = 38$	زیاد است
۸۷	$29 + 8 = 37$	✓

آن عدد ۸۷ است.

هر گاه مسئله‌ای پیچیده و یا دارای چند مرحله باشد، آن را به چند مسئله ساده‌تر تبدیل می‌کنیم و سپس این مسئله‌های ساده‌تر را پاسخ می‌دهیم تا به خواسته مسئله برسیم. هر یک از این مسئله‌های ساده‌تر را یک زیرمسئله می‌گوییم. دقت کنیم که ترتیب زیرمسئله‌ها مهم است زیرا حل هر زیرمسئله می‌تواند به حل زیرمسئله بعدی کمک کند.

مثال

۱. یک فروشنده لوازم التحریر دو نوع دفتر می‌فروشد. او هر جلد دفتر سیمی را ۴۰۰۰ تومان می‌خرد و ۴۸۰۰ تومان می‌فروشد و دفتر ساده را هر جلد ۲۱۰۰ تومان خریده و ۲۵۰۰ تومان می‌فروشد. اگر او امروز ۳۰ جلد دفتر سیمی و ۴۰ جلد دفتر ساده فروخته باشد، مجموع سود او از این فروش چه قدر بوده است؟

پاسخ: باید مسئله را به چند زیرمسئله تبدیل کنیم:

۱. ابتدا سود حاصل از فروش هر دفتر سیمی را حساب کنیم:

$$\text{تومان } ۸۰۰ = ۴۰۰۰ - ۴۸۰۰ : \text{سود هر دفتر سیمی}$$

۲. مجموع سود حاصل از ۳۰ دفتر سیمی را حساب کنیم:

$$\text{تومان } ۲۴۰۰۰ = ۳۰ \times ۸۰۰ : \text{سود ۳۰ دفتر سیمی}$$

۳. سود حاصل از فروش هر دفتر ساده را حساب کنیم:

$$\text{تومان } ۴۰۰ = ۲۱۰۰ - ۲۵۰۰ : \text{سود هر دفتر ساده}$$

۴. مجموع سود حاصل از ۴۰ دفتر ساده را حساب کنیم:

$$\text{تومان } ۱۶۰۰۰ = ۴۰ \times ۴۰۰ : \text{سود ۴۰ دفتر ساده}$$

۵. مجموع سود دفترهای سیمی و ساده را حساب کنیم:

$$\text{تومان } ۴۰۰۰۰ = ۲۴۰۰۰ + ۱۶۰۰۰ : \text{کل سود}$$

۲. کشاورزی $\frac{1}{3}$ از زمینش را گندم، $\frac{1}{4}$ آن را جو، $\frac{1}{6}$ آن را ذرت و بقیه را نخود کاشته است. او چه کسری از زمین خود را نخود کاشته است؟

پاسخ: ابتدا مجموع سطح زیر کشت گندم، جو و ذرت را حساب می‌کنیم سپس آن را از کل زمین (۱ واحد)

کم می‌کنیم تا سطح زیر کشت نخود به دست آید.

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{4+3+2}{12} = \frac{9}{12}$$

زمینی که گندم، جو و ذرت کاشته شده است.

$$1 - \frac{9}{12} = \frac{12}{12} - \frac{9}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

زمینی که نخود کاشته شده است.

تمرینات



۱. مدیر مدرسه‌ای ۳۰ نفر از دانش‌آموزان مدرسه را به اردو برده است. او برای هر دانش‌آموز ۱۴۰۰۰ تومان ناهار، ۱۵۰۰ تومان بستنی و ۳۰۰۰ تومان ورودی باغ پرندگان هزینه کرده است. مجموع هزینه مدیر مدرسه برای ۳۰ نفر دانش‌آموز چند تومان بوده است؟
۲. طول، عرض و عمق یک استخر به ترتیب ۱۵، ۶ و ۲ متر است. می‌خواهیم دیواره‌ها و کف این استخر را کاشی کنیم. چند متر مربع کاشی لازم است؟
۳. مریم ۲۰۰۰۰ تومان دارد. او می‌خواهد دو تا هدیه ۴۵۰۰ تومانی برای دوستانش و ۳ تا بستنی ۲۰۰۰ تومانی بخرد و با بقیه پولش کلوجه ۸۰۰ تومانی بخرد. او حداکثر چند کلوجه می‌تواند بخرد و چند تومان برایش باقی می‌ماند؟
۴. دانش‌آموزان یک کلاس در چهار رشته ورزشی ثبت نام کرده‌اند. $\frac{1}{3}$ فوتبال، $\frac{1}{5}$ والیبال، $\frac{1}{6}$ بسکتبال و بقیه نیز در رشته تنیس ثبت نام کرده‌اند. چه کسری از دانش‌آموزان این کلاس در رشته تنیس ثبت نام کرده‌اند؟

پاسخ تمرینات



باقی‌مانده پول پس از خرید هدیه و بستنی:

$$20000 - (9000 + 6000) = 5000 \text{ تومان}$$

$$\begin{array}{r} 5000 \quad | \quad 800 \\ \underline{4800} \quad 6 \\ 200 \end{array}$$

او می‌تواند ۶ کلوجه بخرد و ۲۰۰ تومان هم برایش باقی می‌ماند.

دانش‌آموزانی که در فوتبال، والیبال و بسکتبال ثبت نام کرده‌اند:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{10+6+5}{30} = \frac{21}{30}$$

$\frac{3}{10}$ در رشته تنیس ثبت نام کرده‌اند.

$$\frac{30}{30} - \frac{21}{30} = \frac{9}{30} = \frac{3}{10}$$

هزینه هر دانش‌آموز:

$$14000 + 1500 + 3000 = 18500 \text{ تومان}$$

هزینه ۳۰ دانش‌آموز:

$$30 \times 18500 = 555000 \text{ تومان}$$

مجموع مساحت دو تا دیواره طولی:

$$2 \times (15 \times 2) = 60 \text{ متر مربع}$$

مجموع مساحت دو تا دیواره عرضی:

$$2 \times (6 \times 2) = 24 \text{ متر مربع}$$

متر مربع کف: $15 \times 6 = 90$

متر مربع کاشی لازم: $90 + 60 + 24 = 174$

تومان پول هدیه: $2 \times 4500 = 9000$

تومان پول بستنی: $3 \times 2000 = 6000$



برای حل بعضی از مسئله‌ها باید ابتدا مسئله‌ای ساده‌تر را که با مسئله اصلی در ارتباط است حل کنیم و سپس با استفاده از نتیجه و پاسخ مسئله ساده‌تر، جواب مسئله اصلی را به دست آوریم. در این راهبرد معمولاً برای پیدا کردن پاسخ مسئله اصلی از راهبرد الگویابی استفاده می‌کنیم؛ یعنی ابتدا یک الگو را در مسئله ساده کشف می‌کنیم و سپس آن الگو را در مسئله اصلی به کار می‌بریم.

مثال

۱. حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{512} =$$

پاسخ: ابتدا سه مسئله ساده‌تر را حل می‌کنیم به این صورت که ابتدا دو کسر اول سؤال را جمع می‌کنیم و سپس سه تا از کسرها و بعد از آن چهار تا از کسرها را جمع می‌کنیم. با توجه به حاصل جمع‌های به دست آمده به این الگو می‌رسیم که در هر حاصل جمع، مخرج کسر همان آخرین مخرج و صورت کسر یک واحد از مخرج کمتر است.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2+1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{4+2+1}{8} = \frac{7}{8}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{8+4+2+1}{16} = \frac{15}{16}$$

پس در پاسخ سؤال اصلی باید مخرج همان ۵۱۲ و صورت ۵۱۱ باشد.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{512} = \frac{511}{512}$$

۲. کارخانه‌ای در هر روز ۱۵۳ لوله تولید می‌کند. اگر طول هر لوله $2\frac{1}{3}$ متر باشد، این کارخانه در هر روز چند متر لوله تولید می‌کند؟

پاسخ: ابتدا مسئله ساده‌تر را به این صورت می‌سازیم که این کارخانه هر روز ۱۵۰ لوله تولید می‌کند که طول هر لوله ۲ متر است بنابراین تولید آن $300 = 150 \times 2$ است، پس:

$$\text{متر } 357 = 153 \times 2\frac{1}{3} = 153 \times \frac{7}{3} = \frac{51}{1} \times 7$$

تمرینات


$$1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 49 =$$

۱. حاصل عبارت روبه‌رو را به دست آورید.

$$\frac{100}{101} \times \frac{101}{102} \times \frac{102}{103} \times \dots \times \frac{199}{200} =$$

۲. حاصل عبارت روبه‌رو را به دست آورید.

۳. مجموع زاویه‌های داخلی هر ده‌ضلعی چند درجه است؟

 ۴. اگر بدانیم $\frac{1}{5 \times 6} = \frac{1}{5} - \frac{1}{6}$ و $\frac{1}{4 \times 5} = \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$ آن‌گاه حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$\frac{1}{4 \times 5} + \frac{1}{5 \times 6} + \frac{1}{6 \times 7} + \frac{1}{7 \times 8} + \dots + \frac{1}{19 \times 20} =$$

پاسخ تمرینات


۳

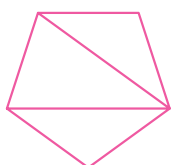
ابتدا مجموع زاویه‌های داخلی سه‌ضلعی، چهارضلعی و پنج‌ضلعی را با تبدیل کردن آن‌ها به مثلث به دست می‌آوریم. الگوی به دست آمده این است که تعداد مثلث‌ها برابر است با تعداد ضلع‌ها منهای ۲.



$$1 \times 180^\circ = 180^\circ$$



$$2 \times 180^\circ = 360^\circ$$



$$3 \times 180^\circ = 540^\circ$$

بنابراین در ده‌ضلعی، هشت مثلث به وجود می‌آید که مجموع زاویه‌های آن برابر است با:

$$(10 - 2) \times 180^\circ = 8 \times 180^\circ = 1440^\circ$$

۱

ابتدا مسئله‌های ساده‌تر زیر را حل می‌کنیم:

$$1 + 3 = 4 = 2 \times 2$$

$$1 + 3 + 5 = 9 = 3 \times 3$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4 \times 4$$

الگوی به دست آمده این است که در هر مسئله ساده، حاصل جمع برابر است با تعداد عددهای فرد ضربدر خودش. بنابراین اگر به مسئله اصلی توجه کنیم، ۲۵ تا عدد فرد با هم جمع شده‌اند پس حاصل برابر است با:

$$1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 49 = 25 \times 25 = 625$$

۲

$$\frac{100}{101} \times \frac{101}{102} = \frac{100}{102}$$

$$\frac{100}{101} \times \frac{101}{102} \times \frac{102}{103} = \frac{100}{103}$$

با توجه به مسئله‌های ساده‌تر که حل کرده‌ایم به این الگو می‌رسیم که بعد از ساده کردن کسرها در هر مرحله، صورت اولین کسر و مخرج آخرین کسر خط نمی‌خورند و حاصل برابر است با صورت کسر اول روی مخرج کسر آخر.

$$\frac{100}{101} \times \frac{101}{102} \times \frac{102}{103} \times \dots \times \frac{199}{200} = \frac{100}{200} = \frac{1}{2}$$



با توجه به مسئله‌های ساده‌تری که حل کردیم به این الگو می‌رسیم که حاصل برابر است با اولین کسر منهای آخرین کسر:

$$\frac{1}{4 \times 5} + \frac{1}{5 \times 6} + \frac{1}{6 \times 7} + \frac{1}{7 \times 8} + \dots + \frac{1}{19 \times 20}$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{20} = \frac{5-1}{20} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

۴

$$\begin{aligned} \frac{1}{4 \times 5} + \frac{1}{5 \times 6} &= \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{3-2}{12} = \frac{1}{12} \\ \frac{1}{4 \times 5} + \frac{1}{5 \times 6} + \frac{1}{6 \times 7} &= \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{7} = \frac{7-4}{28} = \frac{3}{28} \end{aligned}$$

راهبردهای روش‌های فمادین

درستی

بسیاری از مسئله‌ها را می‌توانیم به کمک نمادهای جبری به معادله تبدیل کنیم (در فصل‌های بعدی کتاب درسی با معادله آشنا خواهیم شد) و در بعضی از مسئله‌ها می‌توانیم از مدل‌سازی هندسی استفاده کنیم. بنابراین می‌توانیم از نمادهایی به جای مجهول یا خواسته مسئله استفاده کنیم و مسئله را به صورت ریاضی بنویسیم و با استفاده از حدس و آزمایش، جواب مسئله را پیدا کنیم.

مثال

۱. زهرا ۵۰۰۰ تومان داشت. او ۳ دفتر خرید و ۲۰۰ تومان برایش باقی ماند. قیمت هر دفتر چقدر بوده است؟

$$3 \times \square + 200 = 5000$$

پاسخ: می‌توانیم متن کلامی سؤال را به صورت مقابل بنویسیم:

$$3 \times \square + 200 = 1700$$

یعنی قیمت هر دفتر را \square در نظر بگیریم و سپس به جای \square

$$3 \times \square + 200 = 3800$$

اعدادی را حدس بزنیم تا زمانی که جواب اصلی به دست آید.

$$3 \times \square + 200 = 4700$$

$$3 \times \square + 200 = 5000 \Rightarrow \text{تومان } 1600 = \text{قیمت هر دفتر}$$

۲. مجموع زاویه‌های داخلی یک چندضلعی ۱۲۶۰ درجه است. تعداد اضلاع آن را به دست آورید.

پاسخ: می‌دانیم که مجموع زاویه‌های هر چندضلعی از رابطه مقابل به دست می‌آید: $(n-2) \times 180^\circ$ (تعداد ضلع)

به جای تعداد ضلع از \square استفاده می‌کنیم و با حدس و آزمایش جواب را $(\square - 2) \times 180^\circ = 1260^\circ$

$$(\square - 2) \times 180^\circ = 540^\circ$$

به دست می‌آوریم.

$$(\square - 2) \times 180^\circ = 1080^\circ$$

$$(\square - 2) \times 180^\circ = 1260^\circ \Rightarrow \text{تعداد اضلاع} = 9$$

تمرینات



۱. عددی را پیدا کنید که اگر از سه برابر آن ۸ واحد کم کنیم، حاصل ۳۷ شود.
۲. سه زاویه یک مثلث به نسبت ۲، ۳ و ۵ هستند. اندازه زاویه‌های این مثلث را تعیین کنید.
۳. نرگس ۴ مداد و ۳ خودکار ۸۰۰ تومانی را با ۴۰۰۰ تومان خریده است. قیمت هر مداد چقدر است؟
۴. مجموع سه عدد فرد متوالی ۳۹ شده است. بزرگ‌ترین آن‌ها چند است؟

پاسخ تمرینات



- | | |
|--|---|
| <p>۳</p> <p>قیمت هر مداد را با \square نشان می‌دهیم و با حدس و آزمایش مقدار آن را به دست می‌آوریم.</p> $4 \times \square + 3 \times 800 = 4000$ $4 \times 500 + 3 \times 800 = 4400$ $4 \times 400 + 3 \times 800 = 4000 \Rightarrow \text{قیمت هر مداد} = 400$ | <p>۱</p> <p>آن عدد را با \square نشان داده و مسئله را به صورت ریاضی می‌نویسیم.</p> $3 \times \square - 8 = 37$ $3 \times 15 - 8 = 22$ $3 \times 12 - 8 = 28$ $3 \times 15 - 8 = 37 \Rightarrow \square = 15$ |
| <p>۴</p> <p>کوچک‌ترین عدد را با \square نشان می‌دهیم.</p> $\square + (\square + 2) + (\square + 4) = 39$ $7 + (7 + 2) + (7 + 4) = 27$ $11 + (11 + 2) + (11 + 4) = 39$ $11 + 13 + 15 = 39 \Rightarrow \text{بزرگ‌ترین عدد} = 15$ | <p>۲</p> $2 \times \square + 3 \times \square + 5 \times \square = 180$ $2 \times 20 + 3 \times 20 + 5 \times 20 = 200$ $40 + 60 + 100$ $2 \times 18 + 3 \times 18 + 5 \times 18 = 180$ $36 + 54 + 90$ <p>زاویه‌های آن مثلث 36°، 54° و 90° هستند.</p> |

تمرین‌های مرور فصل اول

۱. علیرضا توپ بسکتبال خود را از بالکن خانه در ارتفاع ۱۸ متری رها می‌کند. توپ پس از هر بار برخورد با زمین، $\frac{2}{3}$ ارتفاع قبلی خود بالا می‌آید. این توپ از لحظه رها شدن تا سومین برخورد با زمین چند متر حرکت کرده است؟
۲. با سکه‌های ۵۰ و ۱۰۰ تومانی به چند حالت می‌توان ۴۵۰ تومان را درست کرد؟
۳. حاصل جمع دو عدد طبیعی ۷ و حاصل ضرب آن‌ها بیش‌ترین مقدار ممکن است. آن دو عدد را بیابید.
۴. نگین می‌گوید تعداد کتاب‌های او بین ۱۱۰ تا ۱۴۰ جلد و عددی زوج است و مجموع ارقام آن ۹ می‌باشد. نگین چند کتاب دارد؟

۵. با رقم‌های ۲، ۰ و ۵ چند عدد سه‌رقمی می‌توان نوشت که هم بر ۲ و هم بر ۵ بخش‌پذیر باشند؟ (عددها می‌توانند رقم‌های تکراری نیز داشته باشند).

۶. سه عدد بعدی الگوهای زیر را بنویسید. رابطه بین عددها را توضیح دهید.

الف) , , , ۳۵ , ۲۵ , ۱۶ , ۸ , ۱ (الف)

ب) , , , ۱۸ , ۲۲ , ۲۶ , ۳۰ (ب)

پ) , , , ۳۲ , ۶۴ , ۱۲۸ , ۲۵۶ (پ)

ت) , , , $\frac{۱}{۳}$, $\frac{۲}{۶}$, $\frac{۳}{۹}$, $\frac{۴}{۱۲}$ (ت)

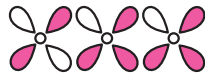
۷. اگر شکل‌ها به همین ترتیب ادامه پیدا کند، چه کسری از شکل هشتم رنگی است؟



(۱)



(۲)



(۳)



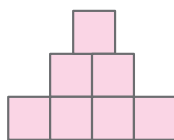
(۴)

۸. در یک سالن تعدادی میز و تعدادی صندلی (با سه پایه) قرار دارند. در کل ۱۹ عدد میز و صندلی با ۶۲ پایه قرار دارد. حساب کنید چند میز و چند صندلی در سالن قرار دارد؟

۹. زمانی که نگین به دنیا آمد، پدرش ۲۷ سال داشت. امسال مجموع سن آنها ۶۵ سال است. سن نگین چقدر است؟

۱۰. محمد با پس‌انداز ۴ ماه خود (هر ماه مقدار مشخصی را پس‌انداز می‌کند)، ۲ هدیه ۱۵۰۰ تومانی برای دوستانش خرید. با بقیه پولش ۳ دفتر ۹۰۰ تومانی و ۲ عدد مداد ۳۵۰ تومانی خرید. اگر ۱۶۰۰ تومان نیز برایش باقی مانده باشد، پس‌انداز یک ماه محمد را حساب کنید.

۱۱. شکل زیر از مربع‌های مساوی تشکیل شده است. اگر محیط کل شکل ۵۶ سانتی‌متر باشد، مساحت کل شکل چند سانتی‌متر مربع است؟



۱۲. حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$\left(1 - \frac{1}{۲}\right) \times \left(1 - \frac{1}{۳}\right) \times \left(1 - \frac{1}{۴}\right) \times \dots \times \left(1 - \frac{1}{۵۰}\right) = ?$$

۱۳. عدد ۶ را ۱۲۰ بار در خودش ضرب می‌کنیم. رقم یکان عدد به دست آمده چند است؟

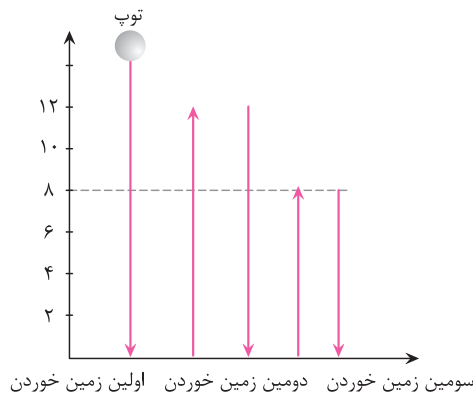
۱۴. تعدادی کبوتر در حال پرواز بودند که یک کلاغ از آنها سؤال کرد «شما چند تا هستید؟». یکی از کبوترها گفت: «ما و ما و نصف‌ای از نصف‌ای از نصف ما، گر تو هم با ما شوی، جملگی صد می‌شویم.» تعداد کبوترها را حساب کنید.

۱۵. به نصف عددی ۷ واحد اضافه نموده‌ایم. عدد ۴۳ به دست آمده است. آن عدد را به دست آورید.

پاسخ تمرینات



۱



توپ پس از اولین زمین خوردن به اندازه $(12 \times \frac{2}{3} = 10)$ ، ۱۰ متر بالا می‌آید و به همان اندازه به زمین برمی‌گردد (دومین زمین خوردن توپ). دوباره توپ پس از دومین زمین خوردن به اندازه $(10 \times \frac{2}{3} = 6\frac{2}{3} \approx 6.67)$ ، ۸ متر بالا می‌آید و به همان اندازه به زمین برمی‌گردد (سومین زمین خوردن توپ). حالا مسافت طی شده توسط توپ را جمع می‌کنیم:

$$12 + 10 + 6\frac{2}{3} + 6\frac{2}{3} + 6\frac{2}{3} + 6\frac{2}{3} = 58 \text{ متر}$$

۲

با کمک راهبرد الگوسازی حل می‌کنیم:
می‌دانیم به ازای هر سکه ۱۰۰ تومانی، باید ۲ تا از سکه‌های ۵۰ تومانی را کم کنیم.

۵۰ تومان	۱۰۰ تومان	بررسی
۹	۰	$9 \times 50 = 450$
۷	۱	$7 \times 50 + 100 = 450$
۵	۲	$5 \times 50 + 2 \times 100 = 450$
۳	۳	$3 \times 50 + 3 \times 100 = 450$
۱	۴	$50 + 4 \times 100 = 450$

۵ حالت می‌شود.

۳

با کمک راهبرد الگوسازی یک جدول می‌کشیم:

بررسی	حاصل ضرب	عدد دوم	عدد اول
×	$1 \times 6 = 6$	۶	۱
×	$2 \times 5 = 10$	۵	۲
✓	$3 \times 4 = 12$	۴	۳

ستون حاصل ضرب را به این جدول اضافه می‌کنیم: چون اعداد طبیعی هستند پس از ۱ شروع می‌کنیم، به طوری که «عدد دوم + عدد اول» مساوی ۷ شوند. تکراری‌ها را نمی‌نویسیم. حالا بیشترین حاصل ضرب را انتخاب می‌کنیم. پاسخ درست ۳ و ۴ می‌باشد.

۴

(با کمک راهبرد حذف حالت‌های نامطلوب)

در مسئله ۲ مورد عنوان شده است: ۱. تعداد کتاب‌ها، عددی زوج است. ۲. مجموع ارقام، ۹ می‌باشد. بهترین حالت، مجموع ارقام می‌باشد پس اعدادی را که بر ۹ بخش پذیرند و بین ۱۱۰ و ۱۴۰ قرار دارند می‌نویسیم: ۱۱۷، ۱۲۶، ۱۳۵
بین این ۳ عدد، ۱۲۶ زوج است.
تعداد کتاب‌های نگین، ۱۲۶ جلد است.

۵

(راهبرد حذف حالت‌های نامطلوب)

عددی هم بر ۲ و هم بر ۵ بخش پذیر است که یکان آن صفر باشد پس حالت‌هایی که یکان آن‌ها صفر نمی‌شود نامطلوب است که آن‌ها را کنار می‌گذاریم و فقط حالت‌هایی را می‌نویسیم که یکان آن‌ها صفر باشد. ارقام یکان ← می‌تواند فقط صفر باشد. ارقام دهگان ← می‌تواند هم صفر، هم ۲ و هم ۵ باشد. ارقام صدگان ← می‌تواند ۲ یا ۵ باشد.

عدد سه رقمی	یکان	دهگان	صدگان
۲۰۰	۰	۰	۲
۲۲۰	۰	۲	۲



میز (۴ پایه)	صندلی (۳ پایه)	آزمایش	بررسی
۹	۱۰	$9 \times 4 + 10 \times 3 = 66$	✗
۸	۱۱	$8 \times 4 + 11 \times 3 = 65$	✗
۶	۱۳	$6 \times 4 + 13 \times 3 = 63$	✗
۵	۱۴	$5 \times 4 + 14 \times 3 = 62$	✓

ابتدا ۹ میز و ۱۰ صندلی حدس می‌زنیم و بررسی می‌کنیم اگر لازم بود حدسمان را تغییر می‌دهیم.
پس ۵ میز و ۱۰ صندلی (۳ پایه) در سالن قرار دارد.

۹

راهبرد حدس و آزمایش

اختلاف سن نگین و پدرش ۲۷ سال است.
مجموع سن نگین و پدرش ۶۵ سال است.
سن نگین را حدس می‌زنیم، همان مقدار را به سن پدر اضافه می‌کنیم و مجموع آن‌ها را بررسی می‌کنیم.
پس نگین ۱۹ سال و پدرش ۴۶ سال دارد.

نگین	پدر نگین	آزمایش	بررسی
۱۰	۳۷	$10 + 37 = 47$	✗
۱۵	۴۲	$15 + 42 = 57$	✗
۲۰	۴۷	$20 + 47 = 67$	✗
۱۹	۴۶	$19 + 46 = 65$	✓

۱۰

راهبرد زیرمسئله

الف. پول هدیه دوستان محمد چقدر است؟
تومان $2 \times 1500 = 3000$

ب. پول ۳ دفتر ۹۰۰ تومانی و ۲ مداد ۳۵۰ تومانی چقدر است؟
تومان $3 \times 900 + 2 \times 350 = 3400$

پ. مجموع پول‌های خرید و باقی‌مانده پول محمد چقدر است؟
تومان $3000 + 3400 + 1600 = 8000$

ت. پس‌انداز یک ماه محمد چقدر است؟
تومان $8000 \div 4 = 2000$

عدد سه‌رقمی	یکان	دهگان	صدگان
۲۵۰	۰	۵	۲
۵۰۰	۰	۰	۵
۵۲۰	۰	۲	۵
۵۵۰	۰	۵	۵

۶ عدد

۶

الف. راهبرد الگویابی

$$+7 \quad +8 \quad +9 \quad +10 \quad +11 \quad +12 \quad +13$$

$$1, 8, 16, 25, 35, 46, 58, 71$$

ب. هر عدد ۴ واحد از عدد قبلی کم‌تر است.

$$-4 \quad -4 \quad -4 \quad -4 \quad -4 \quad -4$$

$$30, 26, 22, 18, 16, 12, 8$$

پ. هر عدد از تقسیم عدد قبلی بر ۲ حاصل می‌شود.

$$\div 2 \quad \div 2 \quad \div 2 \quad \div 2 \quad \div 2 \quad \div 2$$

$$256, 128, 64, 32, 16, 8, 4$$

ت. صورت هر کسر یکی‌یکی اضافه می‌شود و مخرجش از ضرب صورت در عدد ۳ به دست می‌آید.

$$+1 \quad +1 \quad +1 \quad +1 \quad +1 \quad +1$$

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{6}, \frac{3}{9}, \frac{4}{12}, \frac{5}{15}, \frac{6}{18}, \frac{7}{21}$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$1 \times 3 \quad 2 \times 3 \quad 3 \times 3 \quad 4 \times 3 \quad 5 \times 3 \quad 6 \times 3 \quad 7 \times 3$$

۷

راهبرد الگویابی

شماره شکل	۱	۲	۳	۴	۸
کسر رنگی	$\frac{2}{4}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{8}{12}$	$\frac{11}{16}$	$\frac{23}{32}$

با توجه به الگوی بین کسرهای رنگ شده و شماره شکل:

$$-1 - (3 \times \text{شماره شکل}) = \text{صورت کسر}$$

$$\times \text{شماره شکل} = \text{مخرج کسر}$$

۸

راهبرد حدس و آزمایش

با رسم یک جدول و حدس زدن حل می‌کنیم.

۱۱

(راهبرد زیرمسئله)

الف. اندازه هر ضلع مربع‌ها چقدر است؟ ابتدا تمام اضلاع خارجی شکل را می‌شماریم سپس محیط را به تعداد ضلع تقسیم می‌کنیم:

$$\text{سانتی‌متر مربع } 4 = 14 \div 56 : \text{ هر ضلع مربع}$$

ب. مساحت هر مربع چقدر است؟

$$\text{سانتی‌متر مربع } 16 = 4 \times 4 \rightarrow \text{ خودش } \times \text{ یک ضلع} = \text{مساحت مربع}$$

پ. مساحت شکل چقدر است؟

۷ تا مربع داریم پس:

$$7 \times 16 = 112 \text{ سانتی‌متر مربع}$$

۱۲

(راهبرد زیرمسئله)

$$\left. \begin{aligned} 1 - \frac{1}{2} &= \frac{2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ 1 - \frac{1}{3} &= \frac{3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

حالا ۳ جمله اول را در نظر می‌گیریم:

$$1 - \frac{1}{4} = \frac{4}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) \times \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

با توجه به راه‌حل‌ها، جواب این‌گونه است: صورت کسر اول مخرج کسر آخر

پس جواب مسئله $\frac{1}{50}$ می‌باشد.

۱۳

(راهبرد حل مسئله ساده‌تر)

برای پیدا کردن رقم یکان این عدد ابتدا از ضرب 6×6 شروع می‌کنیم (۲ بار) و بعد (۳ بار) و ...

یکان $6 \rightarrow 6$: مرحله اول

یکان $6 \rightarrow 36 = 6 \times 6$: مرحله دوم

یکان $6 \rightarrow 216 = 6 \times 6 \times 6$: مرحله سوم

می‌بینیم که هر چند باری که ۶ را در خودش ضرب می‌کنیم، یکانش همچنان ۶ است.

۱۴

(راهبرد روش‌های نمادین)

کلمه «ما» را یک \square در نظر می‌گیریم. نصف آن را نصف مربع \square و نصف نصف آن را \square در نظر می‌گیریم. با توجه به نصف شدن اعداد باید عدد زوج حدس بزنیم.

(راهبرد حدس و آزمایش)

$$100 = \text{کلاغ} + \text{نصفه‌ای از نصف ما} + \text{نصف ما} + \text{ما} + \text{ما}$$

$$\square + \square + \square + \square + 1 = 100$$

$$40 = \text{حدس اول} \Rightarrow 40 + 40 + 20 + 10 + 1 = 111 \quad \times$$

$$32 = \text{حدس دوم} \Rightarrow 32 + 32 + 16 + 8 + 1 = 89 \quad \times$$

$$36 = \text{حدس سوم} \Rightarrow 36 + 36 + 18 + 9 + 1 = 100 \quad \checkmark$$

تعداد کیبوترها ۳۶ تاست.

۱۵

(راهبرد روش‌های نمادین و حدس و آزمایش)

$$\text{نصف عدد} = \square$$

$$\square + 7 = 43$$

بررسی	آزمایش	نصف عدد	عدد
\times	$50 + 7 = 57$	۵۰	۱۰۰
\times	$40 + 7 = 47$	۴۰	۸۰
\times	$35 + 7 = 42$	۳۵	۷۰
\checkmark	$36 + 7 = 43$	۳۶	۷۲

عدد موردنظر ۷۲ است. پس نصف آن برابر ۳۶ می‌شود.