به نام خداوند مهربان

کتاب فضایی
یازدهم

ویرایش جدید

آمار و احتمال

کهکشانی‌ترین کتاب آموزش دنیا

جواد ترکمن
روح‌الله مصطفی‌زاده

مهروماه

مقدمه

از آن‌جایی که درس آمار و احتمال، در نظام جدید آموزشی، با رویکرد تازه و تغییراتی اساسی، در پایهٔ یازدهم رشتهٔ ریاضی، مطرح گردیده است، مؤلفان بر آن شده‌اند تا کتابی در مورد این درس به رشتهٔ تحریر درآورند.
کتابی با نگاه متفاوت و رویکرد مفهومی، که مطالب موجود در کتاب درسی را به طور کامل و کافی تشریح نموده و با ارائهٔ درسنامه‌های متعدد، با حفظ توالی‌مندی منطقی مباحث، همراه با مثال‌های متعدد و هدف‌دار، دانش‌آموز را در تمام مراحل یادگیری، تمرین و کسب مهارت‌های حل مسئله همراهی می‌کند.
مؤلفان بر این عقیده‌اند که دانش‌آموزان پایهٔ یازدهم، در این سطح یادگیری، به کتاب‌هایی از قبیل تست و آموزش یا هر نوع کتاب خالی از محتوایی از این دست، نیازی ندارند و جای خالی کتابی به شدت احساس می‌شود که به تشریح کامل مطالب و تفهیم آنچه که در کتاب درسی آمده است، بپردازد. لذا با تکیه بر تجربه‌های سال‌های تدریس و با رجوع به منابع معتبر داخلی و خارجی و گردآوری نمونه‌سوال‌های متنوع و تست‌های مختلف کنکور و تألیفی، کتاب پیش رو ارائه می‌شود.

ساختار و ویژگی‌های کتاب

- در این کتاب مفاهیم هر درس، به درسنامه‌های مختلف تقسیم‌بندی شده است و در هر درسنامه سعی کرده‌ایم مطالب به طور کامل بسط و ارائه شود.
- به جهت یادگیری و تسلط بیشتر بر کتاب درسی، در فصل‌های اول و دوم، اثبات‌های مورد نیاز، در چارچوب کتاب درسی، ارائه شده است و از بیان اثبات‌های خارج از برنامهٔ درسی، اجتناب گردیده است.
- مطابق با آنچه که در کتاب درسی آمده است، تلاش کرده‌ایم تمام مثال‌ها، کار در کلاس‌ها، فعالیت‌ها و تمرین‌ها به طور جامع، در جای مناسب خودشان، تشریح گردد.
- برای عمق بخشیدن به مطالب هر قسمت، تعدادی مثال و تست، برای دستیابی به مهارت‌های حل مسئله آورده‌ایم که متناسب با مفاهیم هر مبحث، با رعایت استانداردهای لازم، ارائه شده است.
- مواردی که از اهمیت بالاتری برخوردارند، به صورت «نکته» یا «توجه» ذکر شده‌اند که مطالعهٔ آن‌ها به دانش‌آموزان عزیز توصیه می‌شود.
- در پایان هر درسنامه، تست‌های موضوعی، که فقط به مطالب همان درسنامه می‌پردازد، قرار گرفته است. هدف از این تست‌ها، تثبیت مطالب ارائه شده، به همراه دستیابی به فنون و مهارت‌های حل تست‌های مربوط به مفاهیم گفته‌شده در درسنامه می‌باشد.
- در پایان هر فصل نمونه سوالات امتحانی آمده است. این سؤالات صرفاً پیشنهاد مؤلفان به عنوان مسائل تشریحی امتحانی می‌باشد. هرچند حل آن‌ها به جهت تقویت مطالب تشریحی و جمع‌بندی کل مطالب فصل به دانش‌آموزان توصیه می‌شود.
- در پایان هر فصل تعدای سؤال چهارگزینه‌ای ترکیبی، متناسب با مطالب ارائه شده در کل فصل، قرار گرفته است. هدف از ارائهٔ این سؤال‌ها، جمع‌بندی مطالب کل فصل و تسلط بر حل مسائلی متشکل از چند مفهوم یا مهارت می‌باشد.
- در تمام سؤال‌های موجود در این کتاب (اعم از مثال‌ها، تست‌های موضوعی و ترکیبی، نمونه سؤالات امتحانی و...)، سعی شده است پاسخ‌ها و راه‌حل‌های ارائه‌شده، با مطالب کتاب درسی و با در نظر گرفتن اطلاعات یک دانش‌آموز پایهٔ یازدهم، متناسب باشد. در این راستا تلاش کرده‌ایم در حد امکان، از تصویرسازی‌های مناسب، جهت کمک به درک بهتر، استفاده کنیم.

تشکر و قدردانی

هر کتاب حاصل یک کار جمعی است. مؤلف یا مؤلفان تنها وظیفهٔ گردآوری، تنظیم و تضمین صحت علمی مطالب کتاب را بر عهده دارند. بر خود لازم می‌دانیم از افرادی که به طور مستقیم و غیرمستقیم در به ثمر رسیدن این کتاب تلاش کرده‌اند، تشکر و قدردانی نماییم.

- در وهلهٔ اول، از تمامی استادانمان، از آغاز تا کنون، در هر تاریخ و جغرافیا، سپاس‌گزاریم، که دانش ناچیزمان را مدیون زحمات آن‌ها می‌دانیم.
- از مدیریت انتشارات مهروماه، جناب آقای احمد اختیاری که در تمامی مراحل، همواره پشتیبان ما بوده‌اند و از هیچ نوع کمک و مساعدتی دریغ نکرده‌اند، صمیمانه تشکر و قدردانی می‌نماییم.
- از جناب آقای مهندس عباس اشرفی، که زحمت نظارت بر ویراستاری و پیگیری امور مربوطه را تقبل کردند و ما را در به ثمر رسیدن هر چه بهتر این کتاب، صمیمانه و دوستانه یاری نمودند، تشکر و قدردانی می‌نماییم.
- مسئول محترم ویراستاری سرکار خانم دنیا سلیمی و ویراستار علمی سرکار خانم زهرا انیشه که با صبر و حوصله‌ای مثال‌زدنی، متن‌ها را مورد مطالعه و نمونه‌خوانی قرار دادند، متشکریم و موفقیت همگی را از خداوند منان خواستاریم.
- گروه تولید، با مدیریت توانمند سرکار خانم سمیرا سیاوشی، مدیر فنی آقای میلاد صفایی و صفحه‌آرای محترم، سرکار خانم الهام پیلوایه، حروف‌چین‌های عزیز خانم مهشید برزنونی و آقای محسن کامران‌پور، رسام‌های محترم و با سلیقه خانم فرشته شاه‌بیک و غزاله فروزان‌گهر، همگی نهایت تلاش خود را برای تولید این کتاب به کار بستند. مؤلفان بهترین سپاس‌های خود را تقدیم این عزیزان می‌نمایند و توفیق و سلامتی همگی را از درگاه ایزد یکتا خواستارند.
- گروه هنری، با مدیریت خلاقانه و هنرمندانهٔ جناب آقای محسن فرهادی و گروه حرفه‌ای ایشان خانم سمیرا مختاری، خانم الهام منصف‌زاده و... که زحمت تمام زیبایی‌های بصری کتاب را عهده‌دار شدند. تشکری صمیمانه تقدیم آن‌ها می‌نماییم.

در آخر

کتاب را به دانش‌آموزان پایهٔ یازدهم رشتهٔ ریاضی و نیز دبیران محترم درس آمار و احتمال تقدیم می‌کنیم و امیدواریم مطالب آن مفید فایده باشد. از همگی عزیزان انتظار داریم، هرنوع اشکال چاپی یا محتوایی را به مؤلفان گوشزد نمایند تا در ویرایش‌های بعدی مورد توجه و اصلاح قرار گیرد.

جواد ترکمن - روح‌الله مصطفی‌زاده

زمستان ۹۸

فهرست

درس ۱

آشنایی با منطق ریاضی

گزاره

گزاره جمله‌ای خبری است؛ به طوری که بتوان دقیق و بدون ابهام ارزش درستی یا نادرستی آن را مشخص کرد، هرچند ممکن است در حال حاضر نتوان ارزش آن را تعیین کرد.

- گزاره را با نماد p ، q ، r و... نشان می‌دهیم.
- در صورتی که ارزش یک گزاره درست باشد، آن را با "د"، "t" یا "۱" و در صورتی که ارزش یک گزاره نادرست باشد، آن را با "ن"، "f" یا "۰" نشان می‌دهیم.
- یک گزاره نمی‌تواند هم درست باشد و هم نادرست باشد؛ یعنی گزاره فقط دارای یک ارزش است.
- منطق مورد مطالعه در این درس، منطق دو ارزشی است (درست یا نادرست) و عباراتی از قبیل «تا اندازه‌ای درست» یا «تقریباً درست» و... در مورد گزاره‌ها بی‌معنی است.
- جملاتی که کامل نیستند، هم‌چنین جملات سؤالی، تعجبی، امری، عاطفی (احساسی) گزاره محسوب **نمی‌شوند**.

تست کدام جمله یک گزاره محسوب می‌شود؟

۱) لطفاً درب کلاس را ببندید.
۲) دانش‌آموزان رشتهٔ ریاضی در کدام کلاس حضور دارند؟
۳) چه هوای خوبی!
۴) نهصدهزارمین رقم بعد از ممیز عدد π برابر ۵است.

پاسخ: **گزینهٔ «۴»** گزینه‌های «۱»، «۲» و «۳» به ترتیب جملات امری، سؤالی و احساسی (عاطفی) هستند و گزاره محسوب نمی‌شوند. اما گزینهٔ «۴» یک جملهٔ خبری است و گزاره محسوب می‌شود. هرچند ارزش این گزاره در حال حاضر بر ما معلوم نیست.

تست کدام جمله یک گزاره محسوب نمی‌شود؟

۱) در پرتاب یک تاس سالم احتمال آن‌که عدد ظاهرشده مضرب ۳ باشد، برابر $\frac{1}{2}$ است.

۲) ای کاش می‌توانستم در یک هوای پاک زندگی کنم.

۳) هر معادلهٔ درجهٔ دوم دارای دو ریشهٔ حقیقی متمایز است.

۴) هر عدد زوج بزرگ‌تر از ۲ را می‌توان به صورت حاصل جمع دو عدد اول نوشت.

پاسخ: **گزینهٔ «۲»** در مورد گزینهٔ «۱»، واضح است که یک جملهٔ خبری است و ارزش آن، مطابق آنچه که در احتمال خوانده‌ایم، درست است. گزینهٔ «۲» یک جملهٔ عاطفی محسوب می‌شود، بنابراین گزاره نیست. گزینهٔ «۳» یک جملهٔ خبری است، پس گزاره محسوب می‌شود؛ اما ارزش این گزاره نادرست است، زیرا هر معادلهٔ درجهٔ دوم ممکن است دو ریشهٔ حقیقی متمایز نداشته باشد. اما در مورد گزینهٔ «۴»، واضح است که این جمله یک گزاره است (زیرا جمله‌ای خبری است)، اما ارزش این گزاره در حال حاضر بر ما معلوم نیست. این گزاره حدس **مشهور گلدباخ** است.

حدس (انگاره)

گزاره‌ای است که ارزش درستی یا نادرستی آن در حال حاضر معلوم نیست و تاکنون کسی نه گزاره را ثابت کرده و نه رد کرده است (به عبارت دیگر مثال نقضی برای آن پیدا نشده است).

ترکیب شرطی دو گزاره

برای دو گزارهٔ دلخواه p و q، گزارهٔ مرکب «**اگر** p **آنگاه** q» را ترکیب شرطی دو گزاره می‌گوییم و با نماد «$p \Rightarrow q$» نشان می‌دهیم.
در این ترکیب شرطی، p را **مقدم** (فرض) و q را **تالی** (حکم) می‌نامیم.

- ارزش ترکیب شرطی دو گزاره فقط و فقط زمانی نادرست است که مقدم درست و تالی نادرست باشد. به عبارت دیگر هرگاه از یک مطلب درست، مطلب نادرست را نتیجه بگیریم، دچار خطا شده‌ایم و نادرست است. بنابراین جدول ارزش $p \Rightarrow q$ به صورت زیر می‌باشد.

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

- اگر تالی یک ترکیب شرطی درست باشد، ارزش آن ترکیب شرطی درست است. پس $\boxed{\square \Rightarrow \text{د}}$ همواره درست است.
- اگر مقدم یک ترکیب شرطی نادرست باشد، ارزش آن ترکیب شرطی درست است. در این حالت می‌گوییم ارزش $p \Rightarrow q$، به **انتفای مقدم** درست است. پس $\boxed{\text{ن} \Rightarrow \square}$ همواره درست است.

مثال **ارزش گزاره‌های شرطی زیر را مشخص کنید.**

الف) اگر ۲ فرد است، آن‌گاه ۲ > ۵.
ب) اگر $a \in \{b\}$، آن‌گاه $a = b$.
پ) اگر ۲ ≠ ۳، آن‌گاه ۶ فرد است.
ت) اگر ۴ فرد است، آن‌گاه ۷ مضرب ۳ است.

پاسخ: در «الف»، «ب» و «ت» چون مقدم نادرست است، پس ترکیب شرطی به انتفای مقدم درست می‌باشد. اما در «پ»، مقدم درست و تالی نادرست است، پس ترکیب شرطی نادرست است.

توجه: ممکن است برخی دچار این سردرگمی شوند که عبارت شرطی «ت» درست است، در صورتی که ۷ مضرب ۳ نبوده و این تناقض ذهنی به‌وجود می‌آید که یک عبارت شرطی درست، نتیجهٔ نادرست در پی داشته است، اما توجه کنید که:

> درستی گزارهٔ شرطی $p \Rightarrow q$، درستی گزارهٔ q را تضمین نمی‌کند.

به عبارت دیگر در گزارهٔ شرطی «ت»، ادعا نمی‌کنیم که گزارهٔ «۷ مضرب ۳ است»، گزارهٔ درستی است و فقط درست بودن گزارهٔ شرطی را مطرح می‌کنیم.

مثال **ثابت کنید ترکیب شرطی هر گزارهٔ دلخواه با خودش، همیشه درست است. به عبارت دیگر:** $\boxed{p \Rightarrow p \equiv T}$

پاسخ: با توجه به جدول داریم:

p	p	$p \Rightarrow p$
د	د	د
ن	ن	د

$$\downarrow$$
$$T$$

تبدیل گزارهٔ شرطی به ترکیب فصلی

برای دو گزارهٔ دلخواه p و q هم‌ارزی زیر برقرار است:

$$p \Rightarrow q \equiv \underbrace{\sim p}_{\text{نقیض اولی}} \; \underset{\text{فاصل}}{\vee} \; \underset{\text{دومی}}{q}$$

« هم‌ارزی نـــافـــد »
نقیض اولی فاصل دومی

اثبات: به کمک جدول

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim p$	$\sim p \vee q$
د	د	د	ن	د
د	ن	ن	ن	ن
ن	د	د	د	د
ن	ن	د	د	د

واضح است که ارزش دو گزارهٔ $p \Rightarrow q$ و $\sim p \vee q$ یکسان است. یعنی: $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$

گزاره‌های سوری دوگانه

یک گام فراتر

اگر یک گزاره‌نمای دو متغیری داشته باشیم، دراین صورت باید برای هر دو متغیر آن، گزارهٔ سوری (به صورت یکسان یا جداگانه) مطرح شود.
به عنوان مثال $\forall x \in \mathbb{R} ; x + y > 1$ یک گزارهٔ سوری نیست، زیرا گزاره‌نمای دو متغیری $x + y > 1$ داریم، اما متغیر y وابسته به سور نیست.
اما $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} ; x + y > 1$ یک گزارهٔ سوری است. زیرا هر دو متغیر x و y مقید به سور هستند.
به‌طور کلی چهار حالت زیر مطرح می‌شود:

حالت ۱: $\forall x\, \forall y ; p(x , y) \equiv \forall x ; (\forall y ; p(x , y))$

این گزارهٔ سوری دوگانه زمانی درست است که به‌ازای **همهٔ** xهای متعلق به دامنهٔ متغیر و **همهٔ** yهای متعلق به دامنهٔ متغیر، گزاره‌نمای $p(x , y)$ درست باشد.

حالت ۲: $\exists x\, \exists y ; p(x , y) \equiv \exists x ; (\exists y ; p(x , y))$

این گزارهٔ سوری دوگانه زمانی درست است که به‌ازای **دست‌کم** یک مقدار x از دامنهٔ متغیر و **دست‌کم** یک مقدار y از دامنهٔ متغیر، گزاره‌نمای $p(x , y)$ درست باشد.

حالت ۳: $\forall x\, \exists y ; p(x , y) \equiv \forall x ; (\exists y ; p(x , y))$

این گزارهٔ سوری دوگانه زمانی درست است که به‌ازای **همهٔ** xهای متعلق به دامنهٔ متغیر و **دست‌کم** یک مقدار y از دامنهٔ متغیر، گزاره‌نمای $p(x , y)$ درست باشد.

حالت ۴: $\exists x\, \forall y ; p(x , y) \equiv \exists x ; (\forall y ; p(x , y))$

این گزارهٔ سوری دوگانه زمانی درست است که به‌ازای **دست‌کم** یک مقدار x از دامنهٔ متغیر و **همهٔ** yهای متعلق به دامنهٔ متغیر، گزاره‌نمای $p(x , y)$ درست باشد.

مثال **درستی یا نادرستی هریک از گزاره‌های سوری دوگانه زیر را با توجه به دامنهٔ متغیر مشخص شده، تعیین کنید.**

الف) $\forall x \in A\ \forall y \in A \ ; \ x + y \le 13 \ , \ A = \{1, 2\}$

ب) $\exists x \in A\ \exists y \in A \ ; \ x^2 + y^2 = 1 \ , \ A = \{1, 2\}$

پ) $\forall x \in A\ \exists y \in A \ ; \ x + y = 0 \ , \ A = \{-1, 0, 1\}$

ت) $\exists x \in A\ \forall y \in A \ ; \ x + y \le 4 \ , \ A = \{1, 2, 3\}$

پاسخ:

الف) درست است. ابتدا قرار می‌دهیم $x = 1$ و نشان می‌دهیم گزاره با سور عمومی $\forall y ; 1 + y \le 13$ روی مجموعهٔ A درست است. داریم:

$p(1, 1) : 1 + 1 \le 13$ ✓

$p(1, 2) : 1 + 2 \le 13$ ✓

سپس قرار می‌دهیم $x = 2$ و نشان می‌دهیم گزاره با سور عمومی $\forall y ; 2 + y \le 13$ روی مجموعهٔ A درست است. داریم:

$p(2, 1) : 2 + 1 \le 13$ ✓

$p(2, 2) : 2 + 2 \le 13$ ✓

ب) نادرست است. ابتدا قرار می‌دهیم $x = 1$ و نشان می‌دهیم گزاره با سور وجودی $\exists y ; 1^2 + y^2 = 1$ روی مجموعهٔ A نادرست است. واضح است که از این تساوی، $y = 0$ به‌دست می‌آید که در دامنهٔ متغیر وجود ندارد.

سپس قرار می‌دهیم $x = 2$ و نشان می‌دهیم گزاره با سور وجودی $\exists y ; 2^2 + y^2 = 1$ روی مجموعهٔ A نادرست است. واضح است که از این تساوی، $y^2 = -3$ به دست می‌آید که فاقد جواب است. پس $S = \varnothing$.

پ) درست است. نشان می‌دهیم برای هر x متعلق به مجموعهٔ A، گزاره با سور وجودی $\exists y ; x + y = 0$ درست است. به عبارت دیگر باید نشان دهیم هریک از گزاره‌های $(\exists y ; -1 + y = 0)$، $(\exists y ; 0 + y = 0)$ و $(\exists y ; 1 + y = 0)$ درست می‌باشند. واضح است که به ترتیب $(y = 1)$، $(y = 0)$ و $(y = -1)$ هر سه گزارهٔ فوق را به گزاره‌هایی درست تبدیل می‌کنند. پس دست‌کم یک y از دامنهٔ متغیر وجود دارد که گزاره‌نمای $x + y = 0$ به‌ازای همه xهای متعلق به A درست باشد.

ت) درست است. زیرا دست‌کم یک x از مجموعهٔ A وجود دارد که به‌ازای آن، گزاره با سور عمومی $\forall y ; x + y \le 4$ درست باشد. کافی است $x = 1$ را در نظر بگیریم. در این صورت به ازای همهٔ yهای متعلق به A، گزاره‌نمای $1 + y \le 4$ درست می‌باشد. داریم:

$1 + 1 \le 4$ ✓

$1 + 2 \le 4$ ✓

$1 + 3 \le 4$ ✓

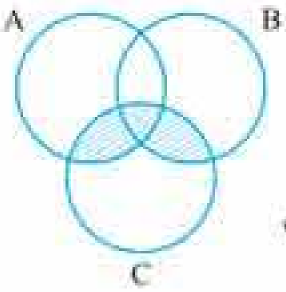
تست **گزاره‌نمای $[x + y] = [x] + [y]$ به‌ازای کدام دو سور برقرار است؟ $(x , y \in \mathbb{R})$**

۱) $\forall x\, \forall y$ ۲) $\forall x\, \exists y$ ۳) $\exists x\, \forall y$ ۴) $\exists x\, \exists y$

۱۷۴. مجموعهٔ A دارای ۵۱۲ زیرمجموعه است، مجموعهٔ $A\cap B$ دارای ۳ عضو است. تعداد زیرمجموعه‌های $(B\cup A')'$، کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۸)

۱) ۱۶ ۲) ۳۲ ۳) ۴۸ ۴) ۶۴

۱۷۵. قسمت سایه‌زده در نمودار ون مقابل کدام مجموعه را نشان می‌دهد؟



۱) $A\cap(B\cup C)$ ۲) $(A\cap B)\cup C$
۳) $A\cup(B\cap C)$ ۴) $(A\cup B)\cap C$

۱۷۶. اگر $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ و $B=\{۲,۳,۴,۵\}$، چند مجموعه مانند X در رابطهٔ $(A\cap B)\subseteq X\subseteq(A\cup B)$ صدق می‌کند؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۷۷. اجتماع دو مجموعهٔ A و B، ۲۵ عضو دارد. به مجموعهٔ A، ده عضو جدید اضافه کرده‌ایم. تعداد اعضای اشتراک آن‌ها ۹ عضو بیشتر شده است. اجتماع مجموعهٔ B و مجموعهٔ جدید حاصل از A چند عضو دارد؟

۱) ۲۵ ۲) ۲۶ ۳) ۳۴ ۴) ۳۵

۱۷۸. اگر مجموعهٔ اعداد طبیعی را به عنوان مجموعهٔ مرجع فرض کنیم، در صورتی که $k>n$ باشد، چند مجموعه می‌توان به جای مجموعهٔ X در تساوی $\{۱,۲,\dots,k\}\cup X=\{۱,۲,\dots,n\}$ قرار داد؟

۱) n ۲) k ۳) $n+k$ ۴) صفر

۱۷۹. اگر $A_n=[n-۱,n+۱]$ و $n\in\mathbb{N}$، آن‌گاه مجموعهٔ $\bigcup_{n=۱}^{۴}A_n-\bigcap_{n=۱}^{۳}A_n$ با کدام مجموعه برابر است؟

۱) $\{x\mid ۱\le x\le ۵\}$ ۲) $\{x\mid ۰\le x\le ۵\}$ ۳) $\{x\mid(۰\le x\le ۵)\wedge(x\neq ۲)\}$ ۴) $\{x\mid(x\neq ۲)\wedge(۱\le x\le ۵)\}$

۱۸۰. اگر $i\in\mathbb{N}$ و $A_i=\{m\in\mathbb{Z}\mid -i\le m\le ۸-i\}$، آن‌گاه مجموعهٔ $\bigcup_{i=۱}^{۸}A_i-\bigcap_{i=۱}^{۸}A_i$ چند عضو دارد؟

۱) ۱۳ ۲) ۱۴ ۳) ۱۵ ۴) ۱۶

۱۸۱. اگر A مجموعهٔ اعداد بخش‌پذیر بر ۳ و B مجموعهٔ اعداد بخش‌پذیر بر ۵ باشد، آن‌گاه $x\in(A'\cup B')$ بیان‌گر کدام است؟

۱) x بر ۳ و ۵ بخش‌پذیر است.
۲) x بر ۵ بخش‌پذیر است و بر ۳ بخش‌پذیر نیست.
۳) x بر ۳ و ۵ هر دو توأماً بخش‌پذیر نیست.
۴) x بر ۳ یا ۵ بخش‌پذیر نیست.

۱۸۲. اگر A و B دو مجموعهٔ جدا از هم باشند، آن‌گاه کدام گزینه درست است؟

۱) $B\subseteq[(A\cap B)\cup B']$ ۲) $A\subseteq[(A\cap B)\cup A']$ ۳) $A\subseteq[(A\cup B)\cap B']$ ۴) $A\subseteq[(A\cup B)\cap A']$

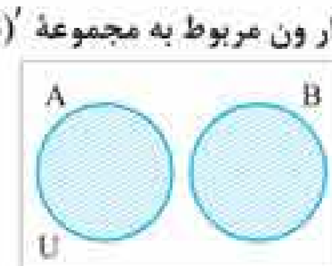
۱۸۳. اگر $A\cup B'=U$، آن‌گاه کدام نتیجه‌گیری نادرست است؟

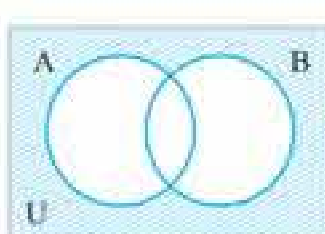
۱) $A'\subseteq B'$ ۲) $B\subseteq A$ ۳) $A\cap B'=\varnothing$ ۴) $A'\cap B=\varnothing$

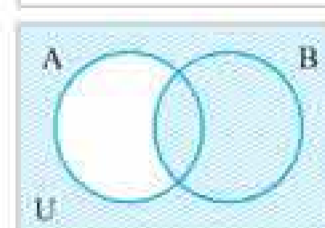
۱۸۴. کدام یک افرازی برای مجموعهٔ $A=\{۱,۳,\{۳\}\}$ است؟

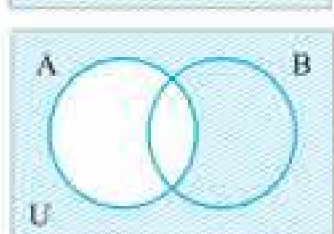
۱) $\{\{۱,۳\},\{۳\}\}$ ۲) $\{\{۱\},\{۳\}\}$ ۳) $\{\{۱,۳\},\{\{۳\}\}\}$ ۴) $\{\{۱,\{۳\}\},\{۳,\{۳\}\}\}$

۱۸۵. نمودار ون مربوط به مجموعهٔ $(A-B)'$ کدام است؟

۱)


۲)


۳)


۴)


۱۸۶. اگر $A\cup X=B$ و $A\cap X=\varnothing$، آن‌گاه مجموعهٔ X برابر کدام است؟

۱) $A-B$ ۲) $B-A'$ ۳) $B-A$ ۴) $A-B'$

۱۸۷. سادهشدهٔ عبارت $[(A\cap B)-A]-[(A\cup B)-(A\cap B)]$ کدام است؟

۱) $A-B$ ۲) $A\cap B$ ۳) $\varnothing$ ۴) $A\cup B$

۱۸۸. اگر A و B دو مجموعه از مرجع U باشند، مجموعهٔ $(A-B)'\cap(A\cup B)\cap A'$ برابر کدام است؟

۱) $B-A$ ۲) B ۳) A' ۴) $\varnothing$

فصل دوم

احتمال

واژهٔ احتمال در بین مردم عامی رایج است، مثلاً «فردا به احتمال زیاد باران می‌بارد»، «به احتمال ۹۹ درصد هفته بعد به دیدنت می‌آیم» و... این نوع احتمال را احتمال کیفی می‌گویند. علم احتمال با ارائهٔ یک عدد حقیقی، که بیانگر میزان اطمینان از وقوع یک پیشامد است، احتمال کیفی را به احتمال کمّی تبدیل می‌کند.

تست‌های موضوعی

۲۰۲. یک راننده تاکسی خطی در ایستگاه منتظر می‌ایستد تا حداکثر چهار مسافر سوار کند. البته ممکن است با کمتر از چهار مسافر نیز حرکت کند (اما خالی حرکت نمی‌کند). در مسیر برگشت نیز همین اتفاق می‌افتد. فضای نمونه در توصیف این پدیدهٔ تصادفی، برای یک بار رفت و برگشت چند برآمد دارد؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) ۱۶ ۲) ۲۵ ۳) ۲۰ ۴) ۸

۲۰۳. در آزمایش پرتاب دو تاس با هم، دو پیشامد زیر را در نظر می‌گیریم.

A : مجموع دو عدد ظاهر شده فرد است.
B : مجموع دو عدد ظاهر شده اول است.

در این‌صورت پیشامد « A اتفاق بیافتد و B اتفاق نیافتد» چند عضو دارد؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۱۴

۲۰۴. درون جعبه‌ای ۹ گوی یکسان به شماره‌های ۱ تا ۹ قرار دارند. به‌طور تصادفی دو گوی از جعبه بیرون می‌آوریم. احتمال آن‌که شماره‌های روی هر دو گوی زوج باشند کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۳}{۸}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

۲۰۵. در ظرفی ۴ مهرهٔ سفید و ۵ مهرهٔ سیاه موجود است. به تصادف ۳ مهره از ظرف خارج می‌کنیم. با کدام احتمال مهره‌های خارج شده هم‌رنگ‌اند؟

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۳}{۱۴}$ ۳) $\frac{۲}{۹}$ ۴) $\frac{۵}{۱۴}$

۲۰۶. دو تاس سالم را با هم پرتاب می‌کنیم. احتمال این‌که مجموع دو عدد ظاهر شده زوج بوده و حداقل در یک تاس عدد ۶ آمده باشد کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۲۷}$ ۲) $\frac{۵}{۲۷}$ ۳) $\frac{۵}{۳۶}$ ۴) $\frac{۹}{۳۱}$

۲۰۷. در جعبه‌ای ۷ مهرهٔ سفید، ۵ مهرهٔ سیاه و ۲ مهرهٔ قرمز موجود است. به تصادف ۴ مهره از آن بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال یک مهرهٔ قرمز و حداقل ۲ مهرهٔ سفید خارج شده است؟ (ریاضی خارج ۹۴)

۱) $\frac{۳۰}{۹۱}$ ۲) $\frac{۲۵}{۷۷}$ ۳) $\frac{۴۰}{۱۴۳}$ ۴) $\frac{۵۰}{۱۴۳}$

۲۰۸. اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند و $P(A-B)=\frac{1}{4}$ و $P(A\cap B)=\frac{1}{3}$، آن‌گاه $P(A')$ کدام است؟

۱) $\frac{۷}{۱۲}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۵}{۱۲}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۲۰۹. از مجموعهٔ $\{۱,۲,۳,...,۵۰۰\}$ عددی به‌طور تصادفی انتخاب می‌شود. با کدام احتمال عدد انتخابی بر ۴ بخش‌پذیر است و مضرب ۶ نیست؟ (ریاضی ۸۷)

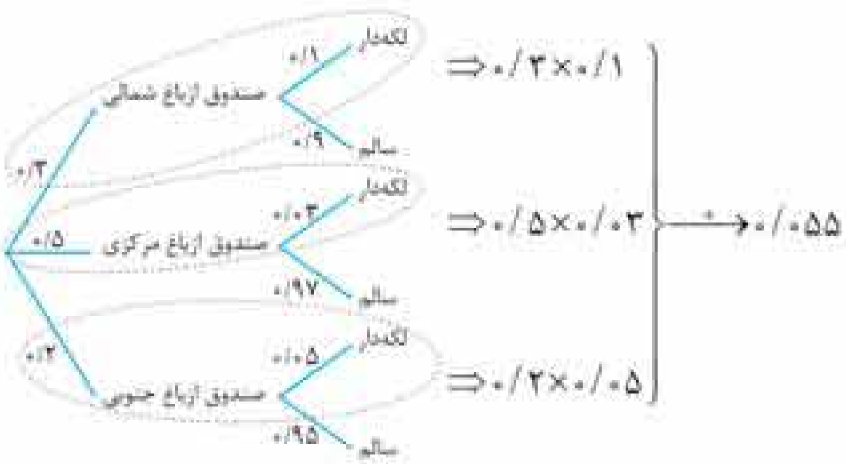
۱) ۰/۱۶۲ ۲) ۰/۱۶۸ ۳) ۰/۱۷۲ ۴) ۰/۱۷۸

۲۱۰. از مجموعهٔ $\{۱۰۰,۱۰۱,...,۵۰۰\}$ عددی به تصادف انتخاب می‌شود. احتمال این‌که مضرب ۴ یا مضرب ۷ باشد کدام است؟

۱) $\frac{۱۴۱}{۴۰۱}$ ۲) $\frac{۱۴۲}{۴۰۱}$ ۳) $\frac{۱۴۳}{۴۰۱}$ ۴) $\frac{۱۴۴}{۴۰۱}$

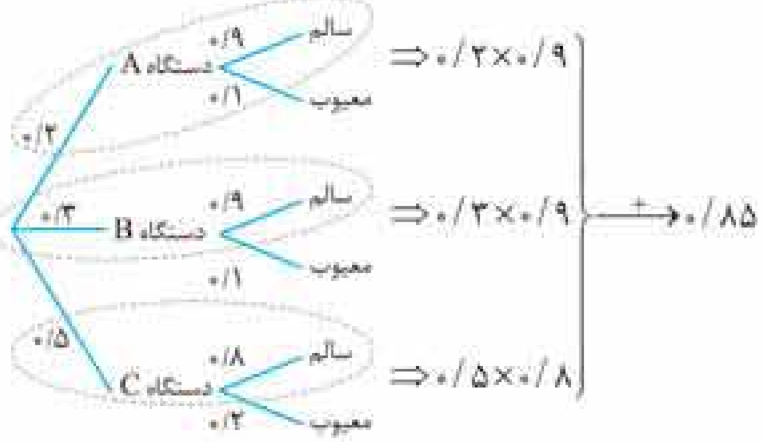
۲۱۱. برای دو پیشامد A و B از فضای نمونه‌ای S، حاصل $P(A-B)-P(A\cup B)$ کدام است؟

۱) $P(B)$ ۲) $P(B')$ ۳) $-P(B)$ ۴) $-P(B')$



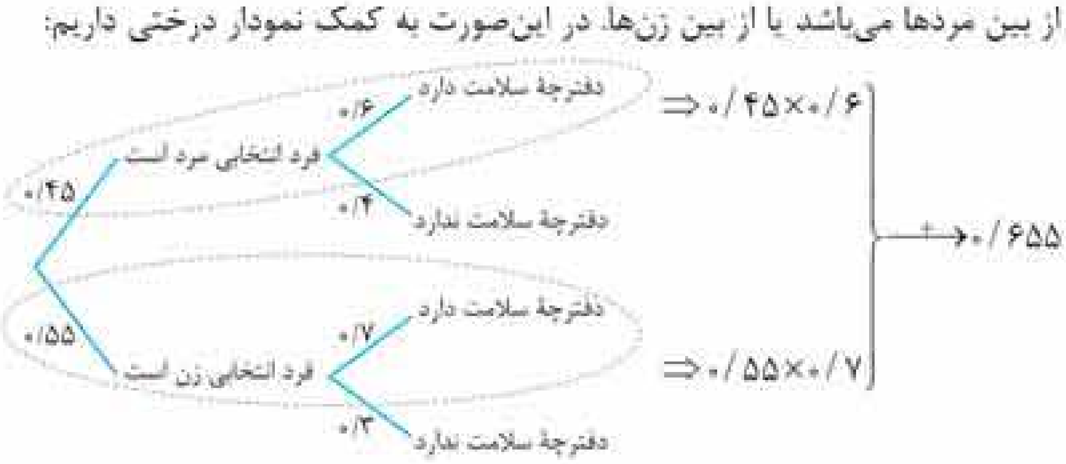
مثال در کارخانه‌ای سه دستگاه A و B و C به‌ترتیب ۲۰، ۳۰ و ۵۰ درصد محصولات را تولید می‌کنند و می‌دانیم محصولات این سه دستگاه به‌ترتیب ۱۰، ۱۰ و ۲۰ درصد معیوب‌اند. احتمال این‌که محصولی که از این کارخانه انتخاب می‌شود، سالم باشد چقدر است؟

پاسخ: ابتدا باید ببینیم محصولی که به تصادف از این کارخانه انتخاب می‌شود، مربوط به کدام دستگاه است. به کمک نمودار درختی داریم:



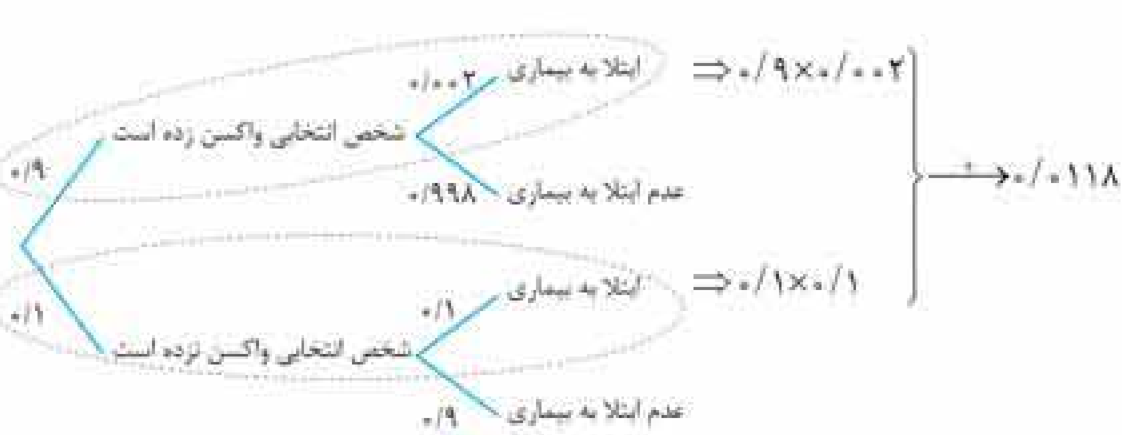
مثال جمعیت یک روستا، ۵۵ درصد زن و ۴۵ درصد مرد است. می‌دانیم ۷۰ درصد زنان و ۶۰ درصد مردان در این روستا دفترچهٔ سلامت دارند. اگر فردی به تصادف از ساکنان این روستا انتخاب شود، با کدام احتمال دفترچهٔ سلامت دارد؟ (برگرفته از کتاب درسی)

پاسخ: باید ابتدا بررسی شود که فرد انتخابی از این روستا، از بین مردها می‌باشد یا از بین زن‌ها. در این‌صورت به کمک نمودار درختی داریم:



مثال در شهری ۹۰ درصد افراد واکسن زده‌اند. احتمال ابتلا به بیماری برای افرادی که واکسن زده‌اند، ۰/۰۰۲ و برای افرادی که واکسن نزده‌اند ۰/۱ است. اگر شخصی به تصادف از این شهر انتخاب شود، با کدام احتمال به بیماری مبتلا می‌شود؟

پاسخ:



مثال دسته‌ای کارت یکسان شامل ۴ کارت دو رو سفید و ۶ کارت یک رو سفید و یک رو آبی است. کارتی را به تصادف بر می‌داریم و یک روی آن را می‌بینیم. احتمال آن‌که روی سفید مشاهده شود چقدر است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

پاسخ: به کمک نمودار درختی داریم:

درس ۴

پیشامدهای مستقل و وابسته

پیشامدهای مستقل و وابسته

دو پیشامد را مستقل می‌گوییم هرگاه رخ دادن یکی تأثیری در رخ دادن دیگری نداشته باشد. به عبارت دیگر نتیجهٔ این دو پیشامد ربطی به هم ندارند.

به مثال زیر توجه کنید.

مثال **در پرتاب دو تاس سالم قرمز و آبی با هم:**

الف) اگر بدانیم تاس قرمز زوج آمده است، با کدام احتمال در تاس آبی عدد ۶ ظاهر شده است؟

ب) اگر بدانیم تاس آبی ۶ آمده است، با کدام احتمال در تاس قرمز عددی زوج ظاهر شده است؟

پاسخ: واضح است که نتیجه تاس قرمز و نتیجه تاس آبی ربطی به هم ندارند و به عبارت دیگر مستقل‌اند. بنابراین آگاهی ما در مورد تاس قرمز، احتمال ۶ آمدن در تاس آبی (که این احتمال $\frac{۱}{۶}$ است) و آگاهی ما در مورد تاس آبی، احتمال زوج بودن عدد تاس قرمز (که برابر $\frac{۱}{۲}$ است) را تغییر نمی‌دهد. در ادامه نشان می‌دهیم که این موضوع، به کمک فرمول احتمال شرطی نیز درست است:

پیشامد «زوج بودن تاس قرمز» را A و پیشامد «تاس آبی عدد ۶ آمده» را B فرض می‌کنیم و داریم:

$A=\{(۲,۱),(۲,۲),(۲,۳),(۲,۴),(۲,۵),(۲,۶),(۴,۱),(۴,۲),(۴,۳),(۴,۴),(۴,۵),(۴,۶),(۶,۱),(۶,۲),(۶,۳),(۶,۴),(۶,۵),(۶,۶)\}$

$B=\{(۱,۶),(۲,۶),(۳,۶),(۴,۶),(۵,۶),(۶,۶)\}$

می‌دانیم در پرتاب دو تاس سالم با هم، فضای نمونه‌ای دارای $۳۶=۶^۲$ برآمد است. پس $P(A)=\frac{۱۸}{۳۶}=\frac{۱}{۲}$ و $P(B)=\frac{۶}{۳۶}=\frac{۱}{۶}$. از طرفی واضح است که $A\cap B=\{(۲,۶),(۴,۶),(۶,۶)\}$ و در نتیجه $P(A\cap B)=\frac{۳}{۳۶}=\frac{۱}{۱۲}$. اکنون داریم:

الف) $$P(\text{تاس آبی ۶} \mid \text{تاس قرمز زوج})=P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{۱}{۱۲}}{\frac{۱}{۲}}=\frac{۱}{۶}$$

ب) $$P(\text{تاس قرمز زوج} \mid \text{تاس آبی ۶})=P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{۱}{۱۲}}{\frac{۱}{۶}}=\frac{۱}{۲}$$

بنابراین:

$$\begin{cases} P(\text{تاس آبی ۶} \mid \text{تاس قرمز زوج})=P(\text{تاس آبی ۶})=\frac{۱}{۶} \\ P(\text{تاس قرمز زوج} \mid \text{تاس آبی ۶})=P(\text{تاس قرمز زوج})=\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

پس نشان دادیم نتیجهٔ این دو پیشامد تأثیری در یکدیگر ندارند و دو پیشامد مستقل‌اند. به‌طور کلی داریم:

نتیجه دو پیشامد A و B با احتمال‌های غیرصفر از فضای نمونه‌ای S مستقل‌اند اگر و تنها اگر:

$$P(A|B)=P(A) \quad \text{و} \quad P(B|A)=P(B)$$

مثال **در آزمایش پرتاب یک سکهٔ سالم و یک تاس سالم با هم.**

الف) اگر سکه «رو» ظاهر شود، با کدام احتمال تاس عدد ۶ می‌آید؟

ب) اگر تاس عدد ۶ ظاهر شود، با کدام احتمال سکه «رو» می‌آید؟

۲۹۱. در پرتاب دو تاس اگر مجموع دو تاس بزرگ‌تر از ۵ ظاهر شود، چقدر احتمال دارد هر دو تاس مساوی باشند؟

۱) $\frac{۴}{۲۶}$ ۲) $\frac{۴}{۲۸}$ ۳) $\frac{۴}{۳۶}$ ۴) $\frac{۴}{۳۰}$

۲۹۲. پنج مهره سفید با شماره‌های ۱ تا ۵ و همچنین پنج مهره سیاه با شماره‌های ۱ تا ۵ و یکسان را در ظرفی قرار می‌دهیم. به تصادف دو مهره از بین آن‌ها بیرون می‌آوریم، اگر مجموع شماره‌های هر دو مهره ۶ باشد، با کدام احتمال، هر دو مهره هم‌رنگ هستند؟ (ریاضی ۹۷)

۱) $\frac{۲}{۵}$ ۲) $\frac{۴}{۹}$ ۳) $\frac{۵}{۹}$ ۴) $\frac{۳}{۵}$

۲۹۳. اگر $P(A)=\frac{۱}{۴}$ و $P(A'\cap B)=\frac{۱}{۳}$ باشد، مقدار $P(B\,|\,A')$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۱۲}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۴}{۹}$ ۴) $\frac{۷}{۱۲}$

۲۹۴. اگر $P(E)=\frac{۱}{۴}$ ، $P(F\,|\,E)=\frac{۱}{۲}$ و $P(E\,|\,F)=\frac{۱}{۳}$ ، در این صورت $P(F)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۸}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۸}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

۲۹۵. احتمال موفقیت فردی، در آزمون اول ۰/۷ و در آزمون دوم ۰/۶ است. اگر این فرد در آزمون اول موفق شود، احتمال موفقیت وی در آزمون دوم ۰/۸ است. با کدام احتمال، لاقل در یکی از دو آزمون، موفق می‌شود؟ (تجربی ۹۸)

۱) ۰/۷۴ ۲) ۰/۷۶ ۳) ۰/۸۲ ۴) ۰/۸۴

۲۹۶. امیر و بهروز هر کدام به‌ترتیب با احتمال ۰/۶ و ۰/۳ در یک مسابقهٔ علمی شرکت می‌کنند. احتمال شرکت امیر به شرط شرکت بهروز برابر ۰/۵ است. احتمال شرکت امیر به شرط شرکت نکردن بهروز، کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۸)

۱) $\frac{۹}{۱۴}$ ۲) $\frac{۵}{۷}$ ۳) $\frac{۱۱}{۱۴}$ ۴) $\frac{۶}{۷}$

۲۹۷. در پرتاب یک تاس اگر عددی زوج بیاید، مجاز به پرتاب تاس دیگر هستیم. احتمال این‌که مجموع دو عدد ظاهر شده برابر ۷ باشد چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۱۲}$ ۳) $\frac{۱}{۹}$ ۴) $\frac{۱}{۱۸}$

۲۹۸. احتمال انتقال بیماری مسری به افرادی که واکسن زده‌اند ۰/۰۲۵ و احتمال انتقال به افراد دیگر ۰/۲ است. $\frac{۲}{۵}$ کارگران یک کارگاه واکسن زده‌اند. اگر فرد حامل بیماری به تصادف با یکی از کارگران ملاقات کند، با کدام احتمال این بیماری منتقل می‌شود؟

۱) ۰/۱۳ ۲) ۰/۱۴ ۳) ۰/۱۵ ۴) ۰/۱۶

۲۹۹. دو ظرف داریم، ظرف اول شامل ۵ مهرهٔ سفید و ۸ مهرهٔ سیاه است و ظرف دوم شامل ۴ مهرهٔ سفید و ۶ مهرهٔ سیاه است. یک مهره از ظرف دوم به تصادف به ظرف اول منتقل می‌کنیم و سپس یک مهره از ظرف اول بیرون می‌کشیم. احتمال آن‌که مهرهٔ انتقال یافته و مهرهٔ خارج شده، هر دو سفید باشند، کدام است؟

۱) $\frac{۶}{۳۵}$ ۲) $\frac{۲}{۳۵}$ ۳) $\frac{۱}{۳۵}$ ۴) $\frac{۸}{۳۵}$

۳۰۰. در دو جعبه به ترتیب ۲۴ و ۱۵ عدد لامپ یکسان موجود است. در جعبهٔ اول ۴ عدد و در جعبهٔ دوم ۳ عدد لامپ معیوب‌اند. از اولی ۸ و از دومی ۶ لامپ به تصادف برداشته در جعبهٔ جدید قرار می‌دهیم. با کدام احتمال یک لامپ انتخابی از جعبهٔ جدید معیوب است؟ (ریاضی ۸۹)

۱) $\frac{۱۷}{۱۰۵}$ ۲) $\frac{۸}{۳۵}$ ۳) $\frac{۶}{۳۵}$ ۴) $\frac{۱۹}{۱۰۵}$

۳۰۱. احتمال ارسال صفر و یک در یک دستگاه مخابره کننده به ترتیب ۰/۷ و ۰/۳ است. چون خطا وجود دارد، احتمال ارسال صفر و دریافت صفر برابر ۰/۹ و احتمال ارسال صفر و دریافت یک برابر ۰/۱ می‌باشد. هم‌چنین احتمال ارسال یک و دریافت یک برابر ۰/۸ و احتمال ارسال یک و دریافت صفر برابر ۰/۲ است. احتمال این‌که در گیرنده صفر دریافت گردد، کدام است؟

۱) ۰/۶۳ ۲) ۰/۶۹ ۳) ۰/۹ ۴) ۰/۱۸

۳۰۲. بهروز جهت مشارکت در یک مسابقه، از بین پرسش‌های ۵ بستهٔ ریاضی، ۷ بستهٔ تجربی و ۶ بسته علوم‌انسانی، به تصادف یک بسته اختیار کرده است. احتمال برنده شدن در هر بسته این دروس به‌ترتیب ۰/۷ ، ۰/۸ و ۰/۹ است. با کدام احتمال، بهروز برنده می‌شود؟ (تجربی خارج ۹۸)

۱) $\frac{۲۵}{۳۶}$ ۲) $\frac{۲۹}{۳۶}$ ۳) $\frac{۳۰}{۳۶}$ ۴) $\frac{۳۱}{۳۶}$

۳۰۳. در دو جعبه به ترتیب ۲۰ و ۶ لامپ موجود است. در جعبهٔ اول ۴ لامپ و در جعبهٔ دوم ۳ لامپ معیوب است. از جعبهٔ اول ۵ لامپ و از جعبهٔ دوم ۱۰ لامپ، به تصادف برداشته و در جعبهٔ جدید قرار می‌دهیم. با کدام احتمال، یک لامپ انتخابی از جعبهٔ جدید، معیوب است؟ (ریاضی ۹۸)

۱) $\frac{۵}{۲۴}$ ۲) $\frac{۱۱}{۴۸}$ ۳) $\frac{۱۳}{۴۸}$ ۴) $\frac{۷}{۲۴}$

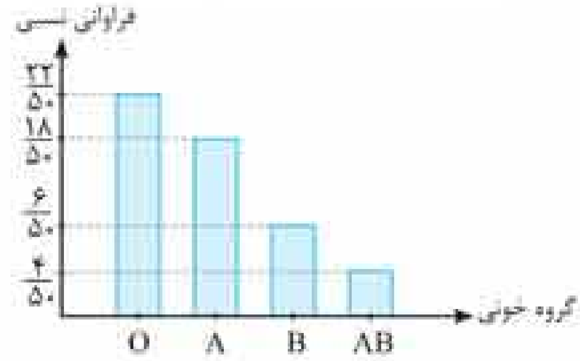
۳۰۴. در جعبه‌ای ۶ مهرهٔ سفید، ۴ مهرهٔ سیاه است. دو مهره به‌صورت پی‌درپی و بدون جایگذاری از آن خارج می‌کنیم. با کدام احتمال، مهرهٔ دوم، سفید است؟ (ریاضی خارج ۹۸)

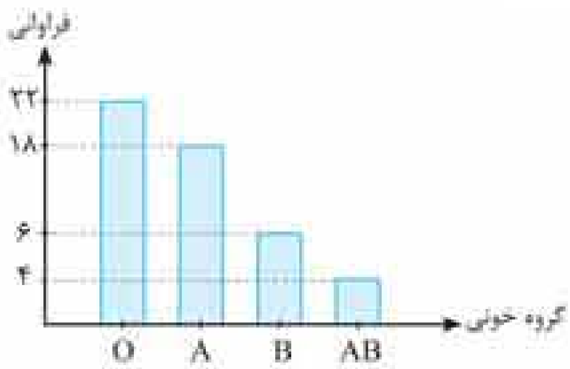
۱) ۰/۵ ۲) ۰/۶ ۳) ۰/۶۴ ۴) ۰/۷۲

پاسخ: الف

گروه خونی	فراوانی	فراوانی نسبی
O	۲۲	$\frac{۲۲}{۵۰}$
A	۱۸	$\frac{۱۸}{۵۰}$
B	۶	$\frac{۶}{۵۰}$
AB	۴	$\frac{۴}{۵۰}$
مجموع	۵۰	۱

ب



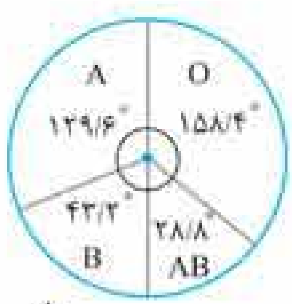


برای نمودار دایره‌ای به زاویهٔ هر کدام روی دایره نیاز داریم:

$$\alpha_O = \frac{۲۲}{۵۰} \times ۳۶۰^\circ = ۱۵۸/۴^\circ \quad , \quad \alpha_A = \frac{۱۸}{۵۰} \times ۳۶۰^\circ = ۱۲۹/۶^\circ$$

$$\alpha_B = \frac{۶}{۵۰} \times ۳۶۰^\circ = ۴۳/۲^\circ \quad , \quad \alpha_{AB} = \frac{۴}{۵۰} \times ۳۶۰^\circ = ۲۸/۸^\circ$$

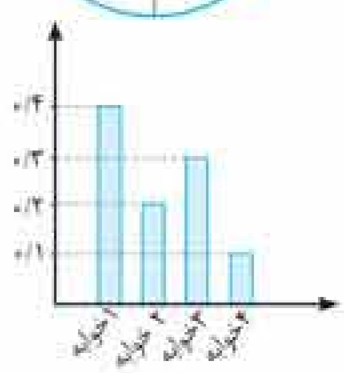
پس نمودار دایره‌ای جدول، به صورت مقابل است:



پ

$$\text{درصد فراوانی نسبی} = \frac{\text{فراوانی}}{\text{تعداد کل داده‌ها}} \times ۱۰۰ = \frac{۲۲}{۵۰} \times ۱۰۰ = \%۴۴$$

مثال **نمودار روبه‌رو مربوط به مشخصات واحدهای مسکونی یک مجتمع می‌باشد.**



الف برچسب عمودی این نمودار چیست؟

ب اگر تعداد واحدهای این مجتمع ۵۰۰ واحد باشد، جدول فراوانی داده‌های این نمودار (شامل فراوانی مطلق، فراوانی نسبی) را تشکیل دهید.

پ اگر اعداد روی محور عمودی نمودار حذف شوند، آیا نمودار اطلاعات دقیقی به ما ارائه می‌دهد؟

پاسخ: الف برچسب عمودی نمودار میله‌ای داده شده با توجه به اعدادی که بین صفر و یک هستند، فراوانی نسبی می‌باشند. (توجه کنید که مجموع آن‌ها برابر یک است)

ب برای جدول فراوانی، فراوانی مطلق هر یک از داده‌ها را تعیین می‌کنیم:

فراوانی مطلق ۱خوابه $= ۰/۴ \times ۵۰۰ = ۲۰۰$ فراوانی مطلق ۳خوابه $= ۰/۳ \times ۵۰۰ = ۱۵۰$

فراوانی مطلق ۲خوابه $= ۰/۲ \times ۵۰۰ = ۱۰۰$ فراوانی مطلق ۴خوابه $= ۰/۱ \times ۵۰۰ = ۵۰$

بنابراین داریم:

داده	فراوانی	فراوانی نسبی
۱ خوابه	۲۰۰	$\frac{۲۰۰}{۵۰۰} = ۰/۴$
۲ خوابه	۱۰۰	$\frac{۱۰۰}{۵۰۰} = ۰/۲$
۳ خوابه	۱۵۰	$\frac{۱۵۰}{۵۰۰} = ۰/۳$
۴ خوابه	۵۰	$\frac{۵۰}{۵۰۰} = ۰/۱$
مجموع	۵۰۰	۱

پ خیر. زیرا اگر اعداد روی محور عمودی معلوم نباشند، فقط با عناوین داده‌ها روبه‌رو هستیم و اطلاعاتی دربارهٔ تعداد آن‌ها نخواهیم داشت.

درس ۳

معیارهای پراکندگی

معیارهای پراکندگی

در درس قبل، در مورد معیارهای گرایش به مرکز، میانگین، میانه و مُد بحث کردیم. دو مجموعه داده با وجود میانگین، میانه و مُد یکسان باز هم با هم تفاوت‌هایی دارند. به طور مثال، به قدِ پنج بازیکن دو تیم بسکتبال در زیر توجه کنید:

هر دو تیم دارای میانگین قد ۷۵ واحد، میانهٔ ۷۶ واحد و مُد ۷۶ واحد می‌باشند. با این وجود دو تیم به طور آشکارا با هم فرق دارند. به طور خاص، قد بازیکنان تیم ۲ بلندتر از قد بازیکنان تیم ۱ است. برای توصیف این اختلافات کمّی، از معیارهای توصیفی دیگری استفاده می‌کنیم که میزان پراکندگی یا گسترش تغییرات را در مجموعهٔ داده‌ها نشان می‌دهند. این معیارهای توصیفی را به عنوان **معیارهای پراکندگی** می‌شناسیم.

انحراف از میانگین

برای یافتن انحراف از میانگین، باید فاصلهٔ هر داده از میانگین را بیابیم. به عبارت دیگر $x_i - \overline{x}$ برای هر داده محاسبه می‌شود.

مثال در مثال تیم‌های بسکتبال، انحراف از میانگین‌های هر دو تیم را بیابید.

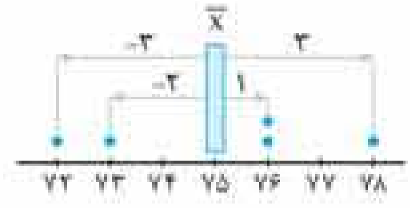
پاسخ: میانگین قد بازیکنان تیم ۱ عبارت است از:

$$\overline{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{۷۲+۷۳+۷۶+۷۶+۷۸}{۵} = \frac{۳۷۵}{۵} = ۷۵$$

برای پیداکردن انحراف از میانگین هر دادهٔ x_i، میانگین را از آن داده کم می‌کنیم. یعنی حاصل $x_i - \overline{x}$ را پیدا می‌کنیم. برای مثال، انحراف از میانگین برای قد ۷۲ واحد عبارت است از: $x_i - \overline{x} = ۷۲ - ۷۵ = -۳$

انحراف از میانگین همهٔ داده‌های تیم ۱ به صورت زیر هستند.

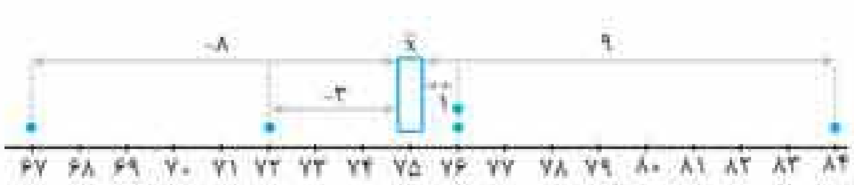
قد x	انحراف از میانگین $x - \overline{x}$
۷۲	-۳
۷۳	-۲
۷۶	۱
۷۶	۱
۷۸	۳



اکنون به همین ترتیب برای تیم ۲ داریم:

$$\overline{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{۶۷+۷۲+۷۶+۷۶+۸۴}{۵} = ۷۵$$

قد x	انحراف از میانگین $x - \overline{x}$
۶۷	-۸
۷۲	-۳
۷۶	۱
۷۶	۱
۸۴	۹



تست‌های موضوعی

۳۵۴. در نمودار جعبه‌ای داده‌های آماری ۱۸، ۲۰، ۲۳، ۱۶، ۱۴، ۱۷، ۱۱، ۹، ۱۲، ۱۰، ۵، ۱۹، ۲۱، ۷ و ۸ دامنهٔ تغییرات داده‌های داخل جعبه کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

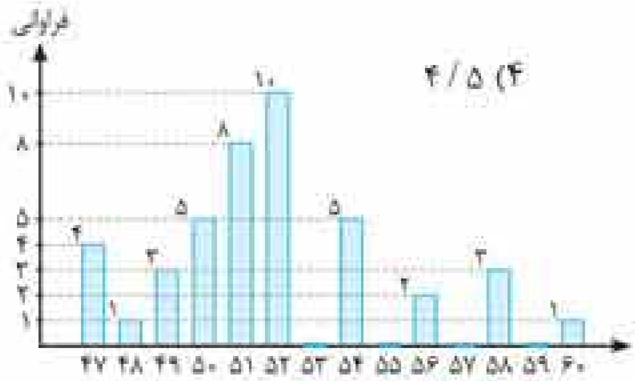
۳۵۵. در نمودار جعبه‌ای ۲۳ دادهٔ آماری، میانگین دنباله‌های سمت چپ و سمت راست به ترتیب ۲۱/۶ و ۳۳ و میانگین داده‌های داخل و روی جعبه ۲۵ می‌باشد. میانگین کل این داده‌ها کدام است؟ (تمرین خارج ۹۵)

۱) ۲۷/۸ ۲) ۲۶ ۳) ۲۶/۱ ۴) ۲۶/۲

۳۵۶. در نمودار جعبه‌ای مجموعه‌ای از داده‌ها چارک‌های اول و سوم برابر ۴ هستند. اگر داده‌های سمت چپ نمودار برابر ۳ باشند، میانگین داده‌های داخل جعبه کدام است؟

۱) ۳/۵ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۴/۵

۳۵۷. میانگین داده‌های داخل جعبهٔ نمودار میله‌ای مقابل کدام است؟



۱) ۵۳ ۲) ۵۱/۴ ۳) ۵۲/۵ ۴) ۵۴/۳

۳۵۸. مجموعه‌ای از داده‌ها را داخل نمودار جعبه‌ای قرار می‌دهیم. اگر چارک اول، دوم و سوم در بین داده‌ها موجود و تعداد داده‌های داخل جعبه برابر ۱۳ باشد، تعداد کل داده‌ها کدام است؟

۱) ۲۵ ۲) ۲۸ ۳) ۲۷ ۴) ۲۶

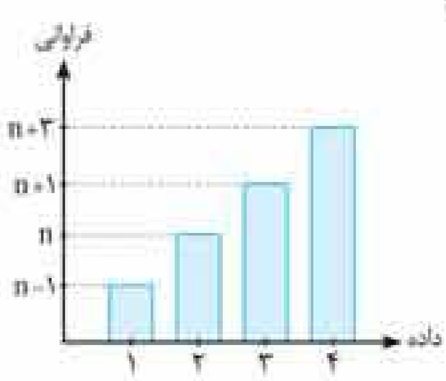
۳۵۹. داده‌های آماری در ۹ طبقه با طول دستهٔ ۴، دسته‌بندی شده‌اند. اگر ۸ داده بین چارک اول و سوم به آن‌ها اضافه شود و یک واحد از طول دسته کم کنیم، در دسته‌بندی جدید، تعداد دسته‌ها کدام است؟ (فرض کنید کران بالای دستهٔ آخر با بزرگ‌ترین داده برابر باشد.)

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

۳۶۰. در نمودار جعبه‌ای ۳۶ دادهٔ آماری، میانگین داده‌های دو طرف جعبه، جداگانه به ترتیب ۲۲ و ۳۰ می‌باشد. اگر میانگین تمام داده‌ها ۲۷/۵ باشد، آن‌گاه میانگین داده‌های داخل جعبه کدام است؟

۱) ۲۹/۵ ۲) ۲۸/۵ ۳) ۲۹ ۴) ۲۸

۳۶۱. مجموعه‌ای از داده‌ها در نمودار میله‌ای مقابل نمایش داده شده‌اند. آن‌ها را در نمودار جعبه‌ای قرار می‌دهیم. اگر اختلاف میانگین داده‌های سمت راست و چپ بیرون جعبه برابر $\frac{۶۲}{۲۱}$ باشند، تعداد کل داده‌ها کدام است؟



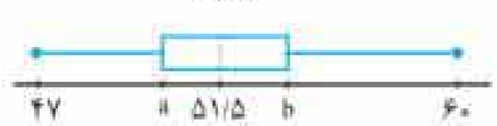
۱) ۲۱ ۲) ۵ ۳) ۶۲ ۴) ۶۳

۳۶۲. داده‌های مرتب b، ۸، b، ۴، ۴، a، ۳، ۲، ۲، ۱ و ۱ را داخل نمودار جعبه‌ای قرار می‌دهیم. اگر میانگین کل داده‌ها برابر ۴ باشند، در آن صورت اختلاف میانگین داده‌های سمت راست و چپ بیرون جعبه کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۷ ۳) ۴ ۴) ۲

۳۶۳. جدول فراوانی و نمودار جعبه‌ای تعدادی داده به صورت زیر می‌باشد. حاصل $a + b + c$ کدام است؟

۱) ۱۰۰ ۲) ۱۰۸ ۳) ۱۰۷ ۴) ۵۴



x_i	۴۷	۴۸	۴۹	۵۰	۵۱	۵۲	۵۳	۵۴	۵۶	۵۷	۶۰
f_i	c	۱	۳	۵	۸	۱۰	۰	۵	۲	۳	۱

تست‌های ترکیبی

۳۶۴. رسم نمودار دایره‌ای که ترتیب کنار هم قرار دادن نواحی آن اهمیت نداشته باشد، برای کدام‌یک از متغیرها، مناسب است؟

۱) قد افراد ۲) وزن افراد ۳) تعداد تصادفات ۴) گروه خونی افراد

۳۶۵. در یک نمودار دایره‌ای، تعداد هر یک از داده‌ها را ۱۰ برابر می‌کنیم. چه تغییری در نمودار به وجود می‌آید؟

۱) هر قسمت از نمودار، ده برابر می‌شود. ۲) هر قسمت از نمودار $\frac{۱}{۱۰}$ برابر می‌شود.

۳) هر قسمت از نمودار ۳۶ برابر می‌شود. ۴) تغییری نمی‌کند.

۳۶۶. نمودارهای زیر، نشان‌دهندهٔ وضعیت تولید محصول در یک کارخانه است. چند درصد از کل تولید کارخانه از نوع درجهٔ یک است؟

۱) ۱۲٪
۲) ۳۲٪
۳) ۳۶٪
۴) ۴۰٪

۳۶۷. پیام و هادی به جشن تولد «امیرمحمد» دعوت شده‌اند. این سه نفر قرار گذاشته‌اند که کیک تولد را به نسبت سن‌شان، بین خود تقسیم کنند. اگر پیام ۱۳ سال و ۲ ماه و هادی ۸ سال و ۴ ماه داشته باشد و کیک به شکل زیر تقسیم شده باشد، «امیرمحمد» چند ساله شده است؟

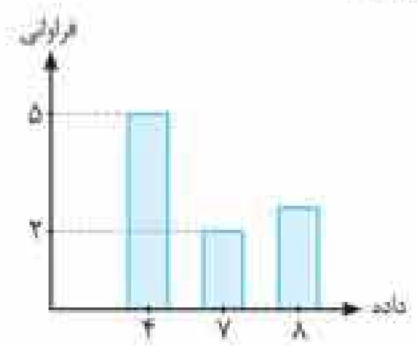
۱) ۱۰ ۲) ۱۲
۳) ۱۴ ۴) ۱۶

۳۶۸. تولد نوزادان معمولاً به طور مساوی در بین روزهای هفته تقسیم نمی‌شود. در جدول زیر، میانگین تعدادی از تولدها در هر روز از هفته در سال گذشته آمده است. کدام نمودار برای نشان دادن این داده‌ها مناسب‌تر است؟

روز	شنبه	یکشنبه	دوشنبه	سه‌شنبه	چهارشنبه	پنجشنبه	جمعه
تولدها		۱۲۶۶۴	۱۳۰۱۳	۱۳۰۳۸	۱۳۱۶۹	۱۱۷۰۴	۷۳۷۴

۱) نمودار میله‌ای ۲) نمودار دایره‌ای ۳) گزینه‌های «۱» و «۲» ۴) بافت‌نگاشت

۳۶۹. در نمودار میله‌ای روبه‌رو، اگر میانگین داده‌ها برابر ۶ باشد، در آن صورت میانه کدام است؟



۱) ۱۱
۲) ۷
۳) ۴
۴) نمی‌توان گفت

۳۷۰. اگر میانگین داده‌ها در جدول زیر، برابر ۴ باشد، درصد فراوانی نسبی دستهٔ آخر کدام است؟

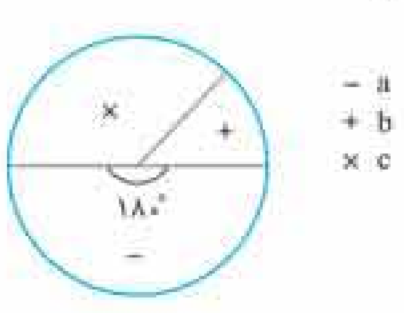
حدود دسته	۰-۲	۲-۴	۴-۶	۶-۸
فراوانی	۵	۷	۴	x

۱) ۲۴/۳ ۲) ۲۷/۲۷ ۳) ۲۸/۳۲ ۴) ۲۹/۰۵

۳۷۱. در مجموعه‌ای از داده‌ها (که میانه در بین داده‌ها نیست) با اضافه‌کردن میانه، میانگین تغییر نمی‌کند. اگر در داده‌های جدید، همهٔ داده‌ها را به‌جز میانه و اعداد قبل و بعد از آن، بقیه را حذف کنیم، میانگین جدید کدام است؟

۱) $2\overline{X}$ ۲) $\overline{X}$ ۳) $\frac{\overline{X}}{2}$ ۴) نمی‌توان گفت.

۳۷۲. نمودار دایره‌ای مقابل مفروض است. اگر روی دایره، زاویهٔ b برابر n درجه باشد، به ازای چند عدد طبیعی n، مُد این داده‌ها برابر b است؟



۱) یک ۲) بی‌شمار
۳) دو ۴) هیچ

نمونه‌گیری سیستماتیک یا سامان‌مند

نمونه‌گیری سیستماتیک در جوامعی کاربرد دارد که چارچوب یا لیست جامعه در دسترس باشد. مثلاً در یک کلاس که لیست افراد را داریم، می‌توان نمونه‌گیری سیستماتیک انجام داد. به این صورت که مثلاً نفر پنجم، دهم، پانزدهم و ... انتخاب شوند. انتخاب افراد از روی لیست و براساس نظم خاصی صورت می‌گیرد.

برای انجام نمونه‌گیری سیستماتیک به روش زیر عمل می‌کنیم:

۱ ابتدا حجم جامعه (N) را بر حجم نمونه (n) تقسیم می‌کنیم، جزء صحیح این مقدار را k می‌نامیم: $k=[\frac{N}{n}]$

۲ یک عدد به تصادف بین ۱ تا k انتخاب می‌کنیم، آن را r می‌نامیم.

۳ k تا، k تا، جلو می‌رویم و اعضای بعدی را نیز مشخص می‌کنیم.

مثلاً اگر $N=۲۰$ و $n=۵$ باشد، داریم: $k=[\frac{۲۰}{۵}]=۴$

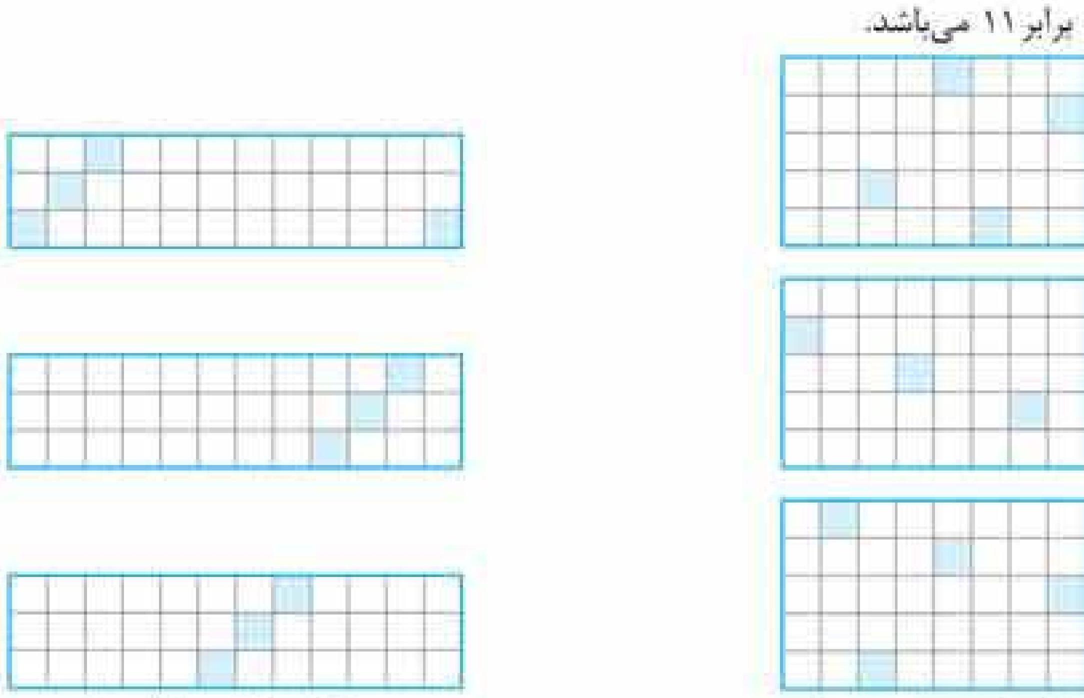
بین ۱ تا ۴ یک عدد به تصادف انتخاب می‌کنیم، مثلاً عدد ۳. پس اعضای انتخابی عبارت‌اند از: ۳، ۷، ۱۱، ۱۵، ۱۹

مثال **در مثال خوابگاه‌های دبیرستان، فرض کنید هر اتاق شامل ۸ نفر باشد. به روش سیستماتیک، ۱۶۸ نفر را انتخاب کنید.**

پاسخ: چون $۱۶۸=۲۱\times۸$، پس ۲۱ اتاق لازم داریم به طور مثال از اتاق سوم شروع می‌کنیم. بعد از اتاق سوم، اتاق چهاردهم و بعد از آن اتاق ۲۵ام و ... به همین ترتیب ادامه می‌دهیم. اما چرا ۱۱تا، ۱۱تا نمونه‌گیری سیستماتیک را انجام می‌دهیم؟

در این‌جا مهم است که نقطهٔ شروع و پایان چگونه است. تا حد امکان باید بتوانیم از ابتدا تا انتهای جامعه را پوشش دهیم. در این خوابگاه ما $(۸\times۵)\times۳+(۳\times۱۲)\times۳$ اتاق داریم. این تعداد را بر تعداد اتاق‌هایی که لازم داریم، تقسیم می‌کنیم: $\frac{۳\times(۱۲\times۳)+۳\times(۵\times۸)}{۲۱}=۱۰/۸$

که نزدیک‌ترین عدد صحیح به آن برابر ۱۱ می‌باشد.



بلوک‌های دور دومی‌ها　　　بلوک‌های دور اولی‌ها

توجه کنید می‌توانیم مثلاً از اتاق دوم یا سوم یا چهارم شروع کنیم. اما اگر از اتاق اول شروع می‌کردیم هیچ اتاقی از طبقه آخر نداشتیم.

تست **در چند مورد از موارد زیر نمونه‌گیری سیستماتیک صورت گرفته است؟**

الف برای نظرسنجی دربارهٔ فیلمی، در انتهای فیلم یک نظرسنجی به صورت زیر صورت گرفته است: از نفرات اول و چهارم و پنجم و هشتم و نهم و دوازدهم ... سؤال می‌شود.

ب برای بررسی کیفیت آموزشی یک دانشگاه، به طور تصادفی ۸۲ دانشجوی کارشناسی ارشد ارتباطات، ۱۴۶ دانشجوی کارشناسی ارشد مدیریت و ۷۶ دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی انتخاب کرده‌ایم.

پ شرکتی برای کنترل قطعات تولید خود، هر ۱۰۰۰اُمین قطعهٔ تولیدی خود را بررسی می‌کند.

۱) صفر　　۲) یک　　۳) ۲　　۴) ۳

پاسخ: **گزینهٔ «۲»** فقط مورد «پ» نمونه‌گیری سیستماتیک دارد. در قسمت «الف» توجه داشته باشید که انتخاب‌ها باید به صورت منظم اتفاق بیافتد. مثلاً وقتی نفر اول و چهارم مورد نظرسنجی قرار گرفته‌اند، نفر بعدی باید نفر هفتم باشد. در مورد قسمت «ب» هم نمونه‌گیری تصادفی ساده اتفاق افتاده است.

درس ۲

برآورد

در درس قبل یاد گرفتیم که می‌توانیم با استفاده از نمونه‌گیری به جای سرشماری، دربارهٔ جامعه به اطلاعاتی دست پیدا کنیم. به طور کلی، نمونه‌گیری هم کم‌هزینه‌تر است و هم می‌تواند سریع‌تر از سرشماری انجام بگیرد.

با استفاده از نمونه‌ها می‌توانیم در مورد جامعه نظر دهیم. علاوه بر نمونه در درس قبل با پارامتر و آماره نیز آشنا شده‌ایم. در این‌جا یاد می‌گیریم که چگونه با استفاده از آماره‌ها می‌توانیم پارامترهای جامعه را برآورد کنیم.

برآورد نقطه‌ای

برآورد نقطه‌ای پارامتر جامعه عبارت است از مقدار عددی، که از نمونه‌هایی که به صورت تصادفی انتخاب شده‌اند (آمارهٔ نظیر آن پارامتر)، به‌دست می‌آید. در حقیقت بهترین حدس دربارهٔ مقدار متناظر نامعلوم پارامتر است. پس برآورد نقطه‌ای همان مقدار عددی آماره است.

مثال **در هر یک از موارد زیر برآورد نقطه‌ای پارامتر جامعه را تعیین کنید.**

الف **گروه کنترل کیفیت یک کارخانهٔ باطری‌سازی می‌خواهد میانگین عمر مفید باطری‌های تولیدی در یک ساعت کارخانه را برآورد کند. نمونه‌ای به اندازهٔ ۳۰ باطری به طور تصادفی انتخاب می‌کند و طی فرآیندی عمر مفید آن‌ها را مشخص و ثبت می‌کند. میانگین ارقام ثبتی برابر ۱۱۶/۷ می‌باشد.**

ب **یک شرکت تولیدکنندهٔ لوازم‌التحریر می‌خواهد بداند چه نسبتی از دانش‌آموزان شهری، از دفترهای تولیدی این شرکت استفاده می‌کند. برای این کار ۱۴۰۴۰ دانش‌آموز را به صورت تصادفی انتخاب می‌کند و بعد از سؤال از آن‌ها درمی‌یابد که ۲۸۰۸ نفر از آن‌ها طی ماه گذشته حداقل یک بار دفتر تولیدی این شرکت را خریداری کرده‌اند.**

پاسخ: الف در قسمت اول با استفاده از آمارهٔ نمونهٔ انتخابی می‌توان پارامتر میانگین طول عمر باطری‌های شرکت را برآورد کرد. پس برآورد نقطه‌ای پارامتر در این‌جا برابر با ۱۱۶/۷ است.

ب از نسبت دانش‌آموزان نمونه به‌عنوان آماره‌ای برای برآورد نسبت پارامتر دانش‌آموزان شهر استفاده می‌کنیم. یعنی در این‌جا برآورد نقطه‌ای پارامتر جامعه برابر است با $\frac{۲۸۰۸}{۱۴۰۴۰}=۰/۲$.

یافتن میانگین آماره و پارامتر

همان‌طور که تا به حال دیدیم بهترین برآورد نقطه‌ای پارامتر میانگین، آمارهٔ میانگین نمونه است. اما این میانگین نمونه، ممکن است با میانگین جامعه فاصله داشته باشد. در ادامه یاد می‌گیریم با یک نمونه‌گیری چگونه می‌توانیم برآورد دقیق‌تری از پارامتر جامعه ارائه دهیم.

در مثال زیر با ارائهٔ میانگین نمونه به صورت یک جدول آشنا می‌شویم.

مثال **فرض کنید که جامعه‌ای از پنج بازیکن بسکتبال به نام‌های A، B، C، D و E با قدهایی به صورت جدول زیر داریم.**

بازیکن	A	B	C	D	E
قد	۷۶	۷۸	۷۹	۸۱	۸۶

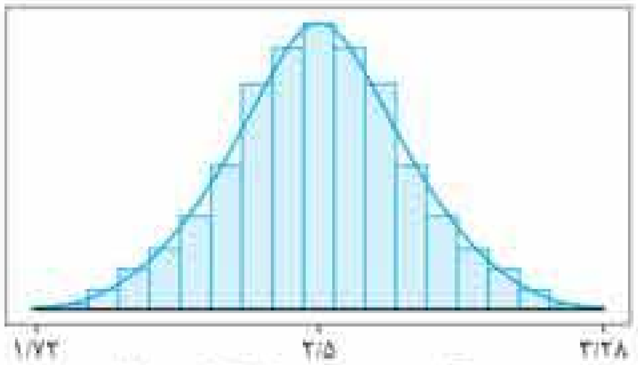
الف **جدولی حاصل از نمونه‌گیری با اندازهٔ ۲ از این بازیکنان تشکیل دهید که میانگین هر نمونهٔ متناظر را نشان دهد.**

ب **دربارهٔ خطاهای نمونه‌گیری‌ها توضیح دهد.**

پ **احتمال این‌که برای این نمونه‌گیری، خطای نمونه‌گیری با میانگین جامعه به اندازهٔ ۱ یا کم‌تر از ۱ واحد طول باشد را پیدا کنید. (یعنی احتمال این‌که میانگین نمونه در فاصلهٔ ۱ واحد طول از میانگین جامعه باشد را پیدا کنید.)**

پاسخ: الف از آن‌جایی‌که جامعهٔ ما کوچک است، می‌توانیم همهٔ نمونه‌های دوتایی و میانگین آن‌ها را به صورت جدول صفحهٔ بعد نشان دهیم. تعداد نمونه‌های ۲ تایی از جامعهٔ ۵ تایی برابر با $\binom{۵}{۲}=۱۰$ است. پس احتمال هر نمونه $\frac{۱}{۱۰}$ است.

پاسخ: از جدول بالا میانگین جامعه برابر می‌شود با $\mu = 2/5$ و انحراف معیار برابر است با $\sigma = 1/4$. همان‌طور که مشخص است نمودار بافت نگاشت، نرمال نیست. پس با استفاده از تئوری حد مرکزی می‌خواهیم نمونه‌گیری‌هایی با اندازهٔ ۳۰ انجام می‌دهیم و سپس با تعداد زیادی از این نمونه‌ها، به منحنی نرمال برسیم. اگر فرض کنیم همهٔ نمونه‌های ۳۰ تایی را در نظر گرفته باشیم، میانگین همهٔ این نمونه‌ها با میانگین جامعه برابر می‌شود: $\mu_{\bar{x}} = \mu = 2/5$.

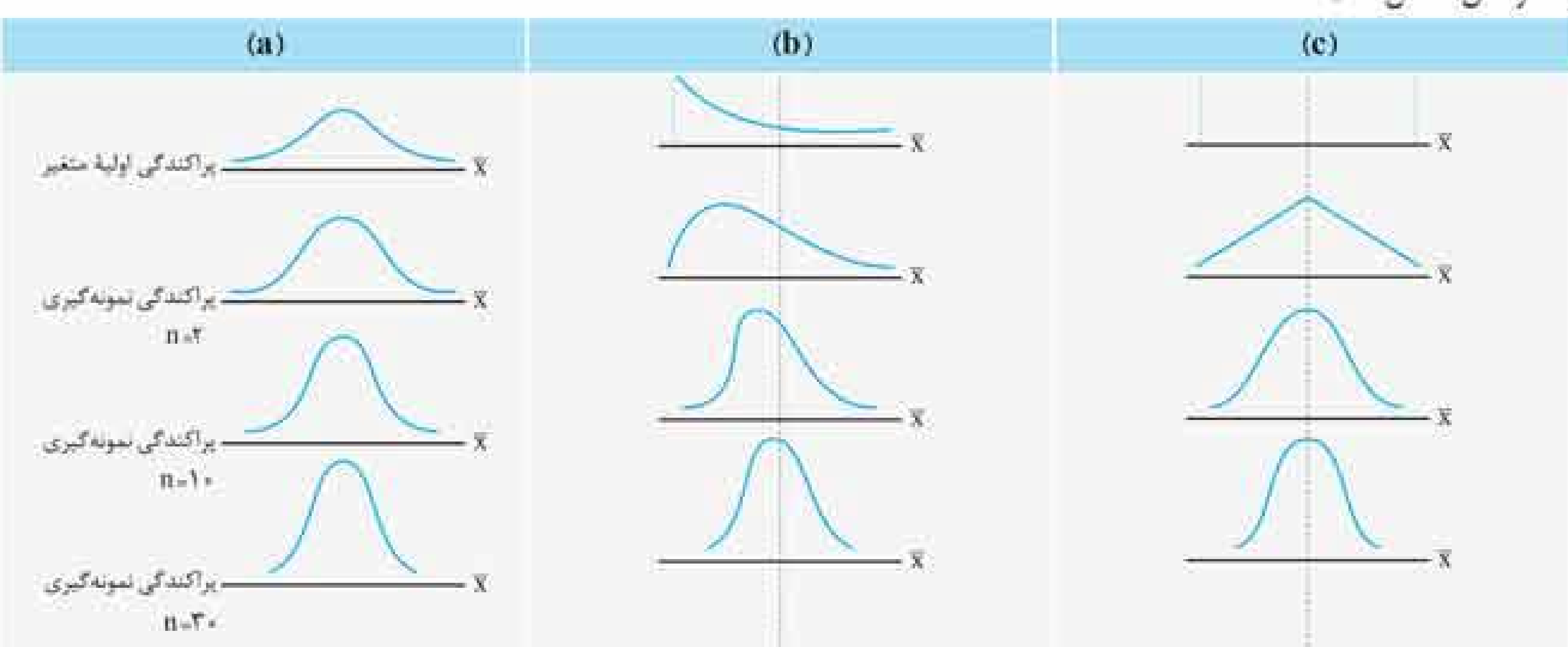


برای انحراف معیار میانگین نمونه‌های ۳۰ تایی داریم: $\sigma_{\bar{x}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \dfrac{1/4}{\sqrt{30}} \simeq 0/26$

حالا برای متغیر میانگین نمونه‌های ۳۰ تایی، که دارای میانگین کل ۲/۵ و انحراف معیار ۰/۲۶ می‌باشند، می‌خواهیم نمودار را رسم کنیم. با استفاده از هزار نمونه از این نمونه‌های ۳۰ تایی به نموداری مانند نمودار روبرو می‌رسیم.

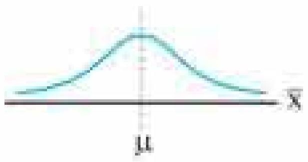
از نتایج صفحهٔ قبل می‌دانیم که اگر متغیر تحت بررسی، پراکندگی نرمال داشته باشد، در آن‌صورت متغیر $\bar{x}$، بدون در نظر گرفتن اندازهٔ نمونه، نرمال است (شکل (a)). هم‌چنین می‌دانیم که اگر اندازهٔ نمونه بزرگ باشد، متغیر $\bar{x}$ بدون در نظر گرفتن پراکندگی متغیر تحت بررسی تقریباً پراکندگی نرمال دارد، (شکل‌های b و c که پراکندگی نامتقارن و پراکندگی ثابت دارند.) در هر یک از این دو مورد، برای نمونه‌های به اندازهٔ ۲، متغیر $\bar{x}$ از پراکندگی نرمال بسیار دور است. برای نمونه به اندازهٔ ۱۰، در این‌جا **تا حدی** پراکندگی نرمال شده است و برای نمونه به اندازهٔ ۳۰ خیلی به پراکندگی نرمال نزدیک شده است.

در این شکل‌ها مشخص است که میانگین هر یک از پراکندگی‌های نمونه‌گیری، برابر است با میانگین جامعه و انحراف معیار میانگین نمونه با افزایش اندازهٔ نمونه، در حال کاهش است.



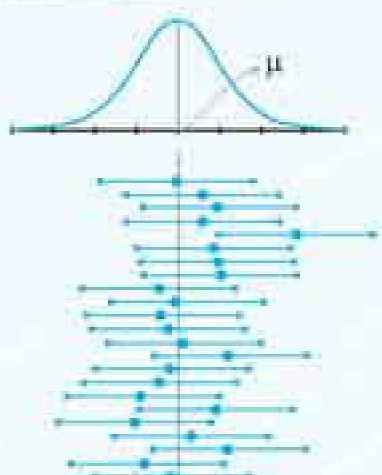
حالا فرض کنید از یک جامعه به اندازهٔ ۱۰۰، نمونه‌ای به اندازهٔ ۱۰ در نظر می‌گیریم اگر تعداد زیادی از نمونه‌های به اندازهٔ ۱۰ را در جدول میانگین نمونه قرار دهیم، با میانگین نمونه‌های خیلی زیادی مواجه هستیم.

فرض کنید همین میانگین نمونه‌های خیلی زیاد، به‌عنوان داده‌ها تلقی شوند و می‌خواهیم برای آن‌ها نمودار بافت نگاشت داشته باشیم. طبق تئوری حد مرکزی این نمودار حتماً نرمال است، زیرا n به اندازهٔ کافی بزرگ است. اگر به یاد داشته باشید در قسمت میانگین نمونه گفتیم که **میانگینِ میانگین نمونه‌ها** برابر **میانگین جامعه** است. پس نمودار بافت نگاشت میانگین نمونه‌ها به صورت مقابل است:



یک گام فراتر

نکاتی در مورد ضریب اطمینان



حالا که با تئوری حد مرکزی و نمودار نرمال میانگین نمونه‌ها آشنا شدیم، می‌توانیم به صورت واضح در مورد ضریب اطمینان صحبت کنیم.

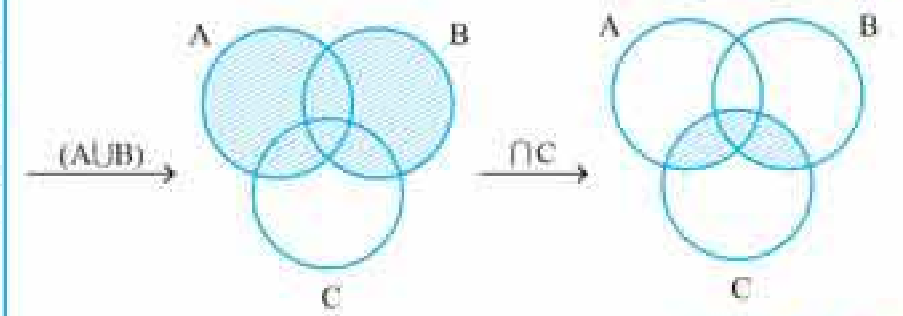
در شکل زیر بازهٔ اطمینان به شکل متفاوتی نشان داده شده است.

در قسمت پایینی بازهٔ اطمینان میانگین‌های نمونه رسم شده است. هر بازه‌ای که میانگین جامعه را پوشش نمی‌دهد، خطای میانگین نمونه است.

در شکل روبرو ۲۴ بازه از ۲۵ بازهٔ نمایش داده شده، یعنی ۹۶٪ از آن‌ها، شامل میانگین جامعه هستند. ضریب اطمینان ۹۵٪ به این معناست که اگر برای همهٔ میانگین‌های نمونهٔ گرفته شده، بازه‌های اطمینان رسم کنیم، ۹۵٪ از آن‌ها شامل میانگین جامعه هستند.

پاسخ‌نامهٔ
تشـریحی

.۱۷۵



.۱۷۶

واضح است کـه $A\cap B=\{۲,۳,۴\}$ و $A\cup B=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$. پـس مجموعهٔ X به طور حتم عضوهای ۲، ۳ و ۴ را دارا می‌باشد. اما عضوهای ۱ و ۵ را می‌تواند داشته باشد یا نداشته باشد. یعنی این دو عضو هر کدام دو حالت دارند و لذا $۲\times۲=۴$ جواب برای X ممکن است.

$X=\{۲,۳,۴\}$ یا $\{۲,۳,۴,۵\}$ یا $\{۱,۲,۳,۴\}$ یا $\{۱,۲,۳,۴,۵\}$

.۱۷۷

چون ۹ عضو به اشتراک اضافه شده است، پس این ۹ عضو در B وجود داشته‌اند و فقط یک عضو از ۱۰ عضو اضافه شده در B نبوده است و جدید است. پس به $(A\cup B)$ یک عضو اضافه می‌شود و ۲۶ عضو خواهد داشت.

توجه کنید با توجه به رابطهٔ زیر:

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

که در سال دهم با آن آشنا شده‌اید، اگر مطابق فرض داده شده زیر را جایگزین کنیم:

$$(n(A)+۱۰)+n(B)-(n(A\cap B)+۹)$$

در این صورت فقط یک عضو به $n(A\cup B)$ اضافه می‌شود.

.۱۷۸

وقتی $k>n$، پس $\{۱,۲,\dots,n\}\subseteq\{۱,۲,\dots,k\}$، پس اجتماع این دو مجموعه همواره برابر $\{۱,۲,\dots,k\}$ است و به ازای هیچ مقدار X تساوی داده شده در صورت سؤال برقرار نمی‌شود.

.۱۷۹

ابتدا به ازای $n=۱,۲,۳,۴$ داریم:

$$\begin{cases}A_۱=[۰,۲]\\A_۲=[۱,۳]\\A_۳=[۲,۴]\\A_۴=[۳,۵]\end{cases}$$

واضح است که $\bigcap_{n=۱}^{۳}A_n=[۲,۲]=\{۲\}$ و $\bigcup_{n=۱}^{۴}A_n=[۰,۵]$، پس جواب عبارت است از:

$$\bigcup_{n=۱}^{۴}A_n-\bigcap_{n=۱}^{۳}A_n=[۰,۵]-\{۲\}=\{x\mid(۰\le x\le۵)\wedge(x\ne۲)\}$$

.۱۸۰

$$A_۱=\{m\in\mathbb{Z}\mid-۱\le m\le۷\}=\{-۱,۰,۱,۲,\dots,۷\}$$
$$A_۲=\{m\in\mathbb{Z}\mid-۲\le m\le۶\}=\{-۲,-۱,۰,۱,\dots,۶\}$$
$$A_۳=\{m\in\mathbb{Z}\mid-۳\le m\le۵\}=\{-۳,-۲,-۱,۰,۱,\dots,۵\}$$
$$\vdots$$
$$A_۸=\{m\in\mathbb{Z}\mid-۸\le m\le۰\}=\{-۸,-۷,\dots,۰\}$$

بنابراین $\bigcup_{i=۱}^{۸}A_i=\{-۸,-۷,\dots,۷\}$ و $\bigcap_{i=۱}^{۸}A_i=\{-۱,۰\}$ پس:

$$\bigcup_{i=۱}^{۸}A_i-\bigcap_{i=۱}^{۸}A_i=\{-۸,-۷,\dots,-۲,\cancel{-۱},\cancel{۰},۱,\dots,۷\}\Rightarrow$$ ۱۴ عضو

.۱۸۱

طبق قانون دمورگان $x\in(A\cap B)'$ است. پس x بر ۳ و بر ۵ بخش‌پذیر نیست.

.۱۸۲

توجه کنید که چون $A\cap B=\varnothing$، پس $A\subseteq B'$ و $B\subseteq A'$. از طرفی می‌دانیم $A\subseteq(A\cup B)$. پس:

$$\begin{cases}A\subseteq(A\cup B)\\A\subseteq B'\end{cases}\Rightarrow A\subseteq[(A\cup B)\cap B']$$

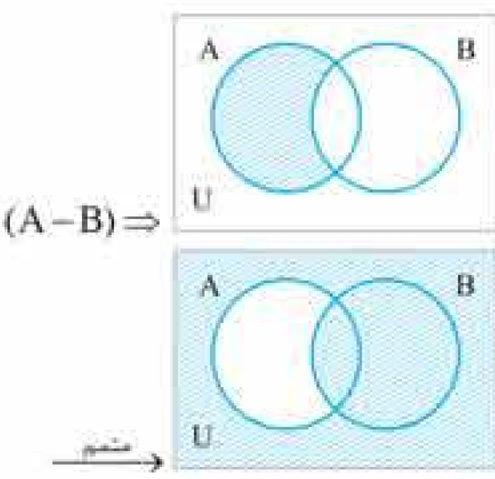
.۱۸۳

$$A\cup B'=U\xrightarrow{\text{متمم}}(A\cup B')'=U'$$
$$\xrightarrow{\text{دمورگان}}A'\cap B=\varnothing\Rightarrow A'\subseteq B'\Rightarrow B\subseteq A$$

.۱۸۴

زیرا با هم اشتراک ندارند و اجتماع آن‌ها برابر A است.

.۱۸۵



.۱۸۶

اگر $X=B-A$، آن‌گاه:

$$\begin{cases}A\cup X=A\cup(B-A)=B\\A\cap X=A\cap(B-A)=\varnothing\end{cases}$$

.۱۸۷

می‌دانیم $(A\cap B)\subseteq A$، پس $(A\cap B)-A=\varnothing$ و لذا:

$$[\underbrace{(A\cap B)-A}_{\varnothing}]-[(A\cup B)-(A\cap B)]=\varnothing-\square=\varnothing$$

.۱۸۸

$$(A-B)'\cap(A\cup B)\cap A'=(A\cap B')'\cap(A\cup B)\cap A'$$
$$\overset{\text{دمورگان}}{=}[(A'\cup B)\cap(A\cup B)]\cap A'$$
$$\overset{\text{فاکتورگیری}}{=}[\underbrace{(A'\cap A)}_{\varnothing}\cup B]\cap A'B\cap A'=B-A$$

.۱۸۹

طبق خاصیت جذب $A\cup(A\cap B)=A$ و قبلاً دیدیم که $(B\cap A)\cup(B-A)=B$. پس عبارت داده شده به صورت $A'\cap B$ می‌باشد که برابر است با $A'-B'$.

.۱۹۰

به کمک ویژگی‌های جبر مجموعه‌ها می‌توان نوشت:

$$(A\cap(A'\cup B))\cup(B\cap(A'\cup B'))$$
$$=((\underbrace{A\cap A'}_{\varnothing})\cup(A\cap B))\cup((B\cap A')\cup(\underbrace{B\cap B'}_{\varnothing}))$$
$$=(A\cap B)\cup(A'\cap B)=(\underbrace{A\cup A'}_{U})\cap B=B$$

سن هادی را برحسب ماه در رابطهٔ فوق قرار می‌دهیم. داریم:

$$\frac{80}{360} = \frac{(8\times12+4)\ \text{ماه}}{\text{مجموع سن‌ها}} \Rightarrow \text{مجموع سن‌ها} = 450\ (\text{ماه})$$

از این رابطه، مجموع سن‌ها می‌شود ۴۵۰ ماه. این یعنی ۳۷ سال و ۶ ماه. مجموع سن پیام و هادی برابر است با ۲۱ سال و ۶ ماه. پس سن امیرمحمد برابر است با ۱۶ سال.

.۳۶۸

نمودار میله‌ای، نمودار دایره‌ای در صورتی در این‌جا می‌توانست استفاده شود که همهٔ روزها برای مجموعهٔ داده‌ها استفاده می‌گردید. (نه میانگین)

.۳۶۹

فراوانی دادهٔ ۸ معلوم نیست پس آن را x می‌گیریم. از میانگین داریم:

$$\bar{x} = 4 = \frac{5\times1+7\times3+4\times5+x\times7}{5+7+4+x}$$

که از این رابطه، x برابر است با ۴. پس در کل ۱۱ داده داریم که میانه، دادهٔ ۶اُم است که دادهٔ ۷ می‌شود.

.۳۷۰

میانگین داده‌ها برابر ۴ شده است. پس با استفاده از نشان هر دسته داریم:

$$\bar{x} = 4 = \frac{5\times1+7\times3+4\times5+x\times7}{5+7+4+x}$$

که از این معادله، x برابر است با ۶. درصد فراوانی نسبی این دسته برابر است با:

$$\frac{6}{5+7+4+6}\times100 = \%27/27$$

.۳۷۱

از آن‌جایی که با اضافه کردن دادهٔ جدید (میانه) میانگین تغییر نمی‌کند، پس دادهٔ جدید (میانه) همان میانگین است. از طرفی در داده‌های اولیه گفته شده، میانه در بین داده‌ها نیست. پس میانه، برابر است با میانگین داده‌های وسطی.

$$\ldots\ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots\ldots$$

$$\text{میانه} = \frac{a_n+a_{n+1}}{2}$$

در ابتدا هم دیدیم که میانه برابر با میانگین داده‌هاست: $\bar{x} = \frac{a_n+a_{n+1}}{2}$

در نهایت سه داده داریم: a_{n+1}، $\bar{x}$ و a_n که میانگین آن‌ها برابر است با:

$$\frac{\bar{x}+a_n+a_{n+1}}{3} = \frac{\bar{x}+2\bar{x}}{3} = \bar{x}$$

.۳۷۲

از آن‌جایی که مُد عبارت است از داده‌ای که بیشترین فراوانی را در بین داده‌ها دارد، باید بیشترین زاویه را روی نمودار دایره‌ای داشته باشد، که در نمودار دایره‌ای داده‌شده، دادهٔ a بزرگ‌ترین زاویه را دارد. پس به ازای هیچ مقدار از x نمی‌تواند مُد این داده‌ها برابر b باشد.

.۳۷۳

میانهٔ داده‌های داده‌شده برابر ۵ است.

۲,۲,۳,۵,۵,۶,۶,۷

$$\text{میانه} = \frac{5+5}{2} = 5$$

هر داده‌ای به این مجموعهٔ داده اضافه کنیم یا از ۵ بیشتر است یا از ۵ کمتر. در هر دو صورت، تعداد داده‌ها برابر می‌شود با ۹ تا، که میانه عبارت است از دادهٔ پنجم که در هر دو صورت (چه دادهٔ اضافه‌شده بزرگ‌تر از ۵ یا کوچک‌تر از ۵ باشد) همان ۵ است.

تذکر مُد و میانگین می‌توانند تغییر کنند یا نکنند.

.۳۷۴

میانگین ۱۰ داده که ۱۳ شامل آن است برابر با $\bar{x} = 20$ داده شده است.

یعنی: $\bar{x}_1 = \frac{a_1+\cdots+a_9+13}{10} = 120$

که از آن‌جا مجموع ۹ دادهٔ سالم مسئله برابر است با ۱۸۷. حالا به جای ۱۳، دادهٔ ۵ را جایگزین می‌کنیم.

$$\bar{x}_2 = \frac{\underbrace{a_1+a_2+\cdots+a_9}+15}{10} = \frac{\underbrace{187}+15}{10} = \frac{202}{10} = 20/2$$

.۳۷۵

اگر از تمام داده‌ها، ۱۴ واحد کم کنیم، داریم:

x−۱۴	−۴	−۲	۰	۱	۳	۴
f	۵	۸	۷	۱۰	۶	۴

$$\bar{x}_{\text{جدید}}\ \text{صورت} = 5\times(-4)+8\times(-2)+7\times(0)+10\times(1)$$
$$+6\times(3)+4(4) = 8$$
$$\bar{x}_{\text{جدید}}\ \text{مخرج} = 5+8+7+10+6+4 = 40$$
$$\Rightarrow \bar{x}_{\text{جدید}} = 0/2 \Rightarrow \bar{x} = 14+0/2 = 14/2$$

.۳۷۶

داده‌ها به طور مرتب‌شده، عبارت است از: $1,1,5,5,5,\overbrace{6,\ldots,6}^{x}$

از آن‌جایی که مُد برابر ۱ است، پس تعداد داده‌های ۶ برابر با ۲ یا ۱ یا صفر است. اگر x برابر ۱ باشد، میانه و مُد برابر ۵ است. اگر x برابر ۵ باشد، باز هم میانه و مُد هر دو برابر ۵ می‌شود. اگر x برابر صفر باشد، باز هم میانه و مُد برابر ۵ است. پس هر سه عدد ۱،۲ و صفر می‌تواند به جای x قرار بگیرد. برای میانگین هر یک داریم:

$$x = 0 \Rightarrow \bar{x} = \frac{1+1+5+5+5}{5} = \frac{17}{5}$$

$$x = 1 \Rightarrow \bar{x} = \frac{1+1+5+5+5+6}{6} = \frac{23}{6}$$

$$x = 2 \Rightarrow \bar{x} = \frac{1+1+5+5+5+6+6}{7} = \frac{29}{7}$$

.۳۷۷

از آن‌جایی که مُد در این داده‌ها ۶ و ۵ هستند پس یا a یا b باید برابر ۵ باشند تا تعداد دادهٔ ۵ با تعداد دادهٔ ۶ برابر باشد. فرض کنیم a=۵، حالا b اعداد ۵ یا ۶ نمی‌تواند باشند (چون مُد یا ۵ یا ۶ می‌شود) دادهٔ b برابر ۴ هم نمی‌تواند باشد، چون مُد ۵،۶ و ۴ می‌شود. پس نهایتاً b برابر ۳ می‌شود. میانگین برابر است با:

$$\bar{x} = \frac{3\times2+4\times2+5\times3+6\times3}{10} = \frac{47}{10} = 4/7$$

.۳۷۸

یاد گرفتیم که اگر عددی ثابت به داده‌ها اضافه شود، انحراف معیار تغییری نمی‌کند. پس انحراف معیار گزینه‌های «۱» و «۳» با هم برابرند. در گزینه‌های «۲» و «۴» به ترتیب داده‌های گزینهٔ «۱»، هر کدام ۲ برابر و ۱۰ برابر داده‌های گزینهٔ «۱» شده‌اند که انحراف معیار به ترتیب ۲ و ۱۰ برابر می‌شود. پس در گزینهٔ «۴»، بزرگ‌ترین انحراف معیار را داریم.

.۳۷۹

اگر از تمام داده‌ها، ۱۴ واحد کم کنیم، آن‌گاه داریم:

x−۱۴	−۴	−۲	۰	۱	۲	۴
f	۶	۹	۱۰	۱۲	۸	۵

$$\Rightarrow \bar{x}_{\text{جدید}} = 0$$