

روزی نشست بر پاره‌سنگی  
با انگشتانی گره کرده در زیر چانه‌اش  
و خیره نگاهی تا بی‌انتها



آرام آرام شرارِ وسوسه‌ای در رگ‌هایش دوید  
و هُرم قدرتی سترگ، ساق‌های بی‌قرارش را در هم نوردید

ناگاه به پا خاست  
و گام در راهی نهاد  
بی‌انتها

– انسان را می‌گویم –

او ناچار رفتن بود و یافتن

شاید به این امید که روزی، بر فراز قلّه‌ی دریافتن، پاتابه وا کند و یله بر چارطاقِ نیلی چرخ دهد.

تقدیم به شما و همه‌ی آن بانی که

برای «یافتن»

راهی جز «دریافتن» نمی‌شناسند.

عنوان و نام پدیدآور: همایش ریاضی تجربی، مسعود غزالی‌بینا

مشخصات نشر: تهران: دریافت، ۱۳۹۹

مشخصات ظاهری: ۲۶۴ ص؛ ۲۱×۲۸/۵ س.م.

شابک: ۹ - ۰۸ - ۶۷۷۳ - ۶۲۲ - ۹۷۸

وضعیت فهرست‌نویسی: فپیا

یادداشت: فهرست‌نویسی کامل این اثر در نشانی: <http://opac.nlai.ir> قابل دسترسی است.

عنوان کتاب: همایش ریاضی تجربی

نویسنده: مسعود غزالی‌بینا

ویراستاران علمی: زهرا خطیبی، زهرا محمد بیگی

طراح جلد: ایمان خاکسار

حروف‌چین: افسانه بابایی، فرناز صفی

رسم تصاویر: شاهرخ آریا، زهرا امین‌صادقیه

صفحه‌آرا: مینا طاهرشمس

ناظر چاپ: سعید حیدری

نوبت چاپ: اول - ۱۳۹۹

شمارگان: ۱۰۰۰

بها: ۵۹۰۰۰ تومان

ناشر: نشر دریافت

تلفن: ۰۲۱ - ۸۸۳۹۱۳۷۴

نشانی اینترنتی: [www.Daryaftpub.com](http://www.Daryaftpub.com)

پست الکترونیک: [daryaftpub@gmail.com](mailto:daryaftpub@gmail.com)

صندوق پستی: تهران ۸۸۴۴-۱۴۱۵۵

حق چاپ و نشر این کتاب متعلق به ناشر بوده و هرگونه کپی یا نقل مطالب بدون اجازه ناشر پیگرد قانونی دارد.



تقدیم به

پدر

و

مادر

دلسوز و فداکارم



### بسمه تعالی

سلام و عرض ادب و احترام خدمت یکایک دانش‌آموزان محترم که هم‌اکنون مشغول مطالعه این کتاب هستند. امیدوارم تا به امروز در مسیر درستی قرار گرفته باشید و بهترین‌ها در انتظارتان باشد. رقابت دوستان نظام قدیم به اتمام رسیده و اکنون نوبت شماست که در این ماراتن بجنگید تا به اهداف و آرزوهایتان برسید. درس ریاضی از تأثیرگذارترین دروس رشته تجربی است که با یک برنامه‌ریزی و مطالعه اصولی می‌توانید به سرعت شاهد افزایش درصد خود باشید؛ پس توصیه می‌کنم به این درس با دقت و توجه بیشتری پردازید.

من تمام تجارب خود را در طی چند سال گذشته کنار هم گذاشتم تا یک کتاب کامل و در عین حال خلاصه را تقدیم شما عزیزان کنم و در این کتاب هیچ مطلبی خارج از کتاب درسی گفته نشده و تمام تلاشم بر این بوده که کتاب با رویکرد جدید مؤلفین کتاب درسی منطبق باشد؛ بنابراین از تمام تمرین‌ها، کاردکلاس‌ها، فعالیت‌ها و ... که قابلیت طراحی تست داشته‌اند، استفاده کرده‌ام.

تست‌های کنکور سنوات گذشته در کتاب آورده شده تا شما با حل این تست‌ها و تست‌های تألیفی برگرفته از کتاب درسی به اوج آمادگی برسید. در نهایت از خداوند می‌خواهم که هر آنچه به صلاحتان است، برایتان اتفاق بیفتد.

## تشکر و قدردانی

از مدیر محترم انتشارات دریافت، آقای دکتر هامون سبطی استاد گرانقدر و عزیزم که طی این سال‌ها همواره پشتیبان من بودند و حمایتشان را از من دریغ نکردند، تشکر می‌کنم؛ بی‌شک علاقه من به تدریس و تألیف، نتیجه تدریس بی‌نظیر ایشان در گذشته بوده است.

از مدیر تألیف محترم نشر دریافت؛ آقای علی امین صادقیه و همین‌طور مدیر فنی، جناب آقای حسین نوری بابت پیگیری و نظارت بر آماده‌سازی کتاب بسیار سپاسگزارم.

از استاد گرانقدر آقای مهندس سروش مویینی که منت بر من گذاشته و در جهت بهبود کتاب، نظرات سازنده‌ای ارائه دادند، تشکر می‌کنم. از اساتید محترم آقایان احسان لعل، آریین تفضلی‌زاده، امید شیرینی‌نژاد، و محمدسجاد نقیه بابت بازخوانی علمی برخی فصول نهایت تشکر را دارم. از استاد محمدحسین انوشه دبیر برجسته شیمی کنکور که همانند پدری مهربان همواره مشوق من در حوزه آموزش بوده‌اند، تشکر می‌کنم. از استاد علی پناهی شایق، دبیر برجسته زیست کنکور بابت دلگرمی و تشویق ایشان سپاسگزارم.

از خانم‌ها زهرا محمدیگی و زهرا خطیبی بابت ویرایش علمی کتاب تشکر می‌کنم. از تیم تایپ، خانم‌ها فرناز صفی و افسانه بابایی؛ صفحه‌آرایی، خانم مینا طاهرشمس؛ رسم تصاویر و اشکال، خانم زهرا امین صادقیه و آقای شاهرخ آریا و سرکار خانم طاهره السادات فاطمی که زحمات بسیاری در چاپ کتاب متحمل شدند، بسیار سپاسگزارم.

در نهایت از تمامی دانش‌آموزان و دبیران محترم در سراسر کشور خواهشمندم نظرات خود را از یکی از راه‌های زیر با بنده در میان بگذارند.

✉ [masoud.ghazali1994@gmail.com](mailto:masoud.ghazali1994@gmail.com)

📷 [masoud.ghazali\\_riyazi](https://www.instagram.com/masoud.ghazali_riyazi)

📍 [@riyazi\\_20](https://www.instagram.com/riyazi_20)

موفق و سربلند باشید

مسعود غزالی بینا

# فهرست

فصل ۱: مجموعه ..... ۷

فصل ۲: الگو و دنباله ..... ۱۷

فصل ۳: هندسه تحلیلی ..... ۲۹

فصل ۴: معادله و تابع درجه دو ..... ۳۹

فصل ۵: توان‌های گویا و عبارت‌های جبری ..... ۵۳

فصل ۶: معادلات و نامعادلات ..... ۶۱

فصل ۷: تابع ..... ۷۳

فصل ۸: توابع نمایی و لگاریتمی ..... ۱۱۹

فصل ۹: مثلثات ..... ۱۳۱

فصل ۱۰: حد و پیوستگی ..... ۱۵۳

فصل ۱۱: مشتق ..... ۱۷۵

فصل ۱۲: کاربرد مشتق ..... ۱۸۹

فصل ۱۳: شمارش بدون شمردن ..... ۲۰۱

فصل ۱۴: احتمال ..... ۲۱۱

فصل ۱۵: آمار ..... ۲۲۵

فصل ۱۶: هندسه ..... ۲۳۵

پیوست ..... ۲۵۹



# حد و پیوستگی

مطالب این فصل عمدتاً ساده و تست‌های آن قابل حل هستند. اهمیت این فصل بسیار زیاد است و با توجه به حجم آن توصیه می‌کنم این فصل را با دقت مطالعه کنید و امتیازش را از دست ندهید. در این فصل دربارهٔ بخش‌پذیری، همسایگی، فرآیندهای حدی و محاسبهٔ حد توابع، رفع ابهام، حد بی‌نهایت، حد در بی‌نهایت، پیوستگی و ... صحبت می‌کنیم.

تعداد تست در کنکور ۹۸: ۴

تعداد تست در کنکور ۹۸ خارج: ۴



بخش پذیری ۱-۱۰

می‌خواهیم چندجمله‌ای دلخواه  $f(x)$  را بر دوجمله‌ای درجه اول  $(x-a)$  تقسیم کنیم. فرض کنیم خارج قسمت این تقسیم، چندجمله‌ای  $Q(x)$  و باقی‌مانده آن عدد ثابت  $R$  باشد:

$$\begin{array}{r} f(x) \overline{) x-a} \\ \vdots \\ R \end{array}$$

$$f(x) = \underbrace{(x-a)}_{\text{مقسوم علیه}} \underbrace{Q(x)}_{\text{خارج قسمت}} + \underbrace{R}_{\text{باقی مانده}}$$

آن‌گاه رابطه تقسیم به صورت روبه‌رو است:

این رابطه به ازای تمام مقادیر  $x$  درست است. از این مطالب یک قضیه و یک نتیجه استخراج می‌شود.

**قضیه:** در تقسیم چندجمله‌ای  $f(x)$  بر دوجمله‌ای درجه اول  $(x-a)$ ، باقی‌مانده تقسیم برابر  $f(a)$  است.

**نتیجه:** اگر  $f(a) = 0$  آن‌گاه  $f(x)$  بر  $(x-a)$  بخش پذیر است.

تست ۱: به ازای مقداری از  $a$  چندجمله‌ای  $f(x) = x^4 + ax^3 - 8x$  بر  $x+2$  بخش پذیر است. مجموع کوچک‌ترین ریشه و بزرگ‌ترین ریشه معادله  $f(x) = 0$  کدام است؟

- (۱) صفر (۲)  $-3 + \sqrt{5}$  (۳)  $-2$  (۴)  $-1 - \sqrt{5}$

پاسخ:

چون چندجمله‌ای  $x^4 + ax^3 - 8x$  بر دوجمله‌ای درجه اول  $x+2$  بخش پذیر است، پس:

$$x+2=0 \Rightarrow x=-2 \Rightarrow f(-2)=0$$

$$(-2)^4 + a(-2)^3 - 8(-2) = 0 \Rightarrow 16 - 4a + 16 = 0 \Rightarrow 32 - 4a = 0 \Rightarrow a = 8$$

حال مقدار  $a$  را می‌یابیم:

مجدداً  $f(x)$  را می‌نویسیم و بر  $x+2$  تقسیم می‌کنیم تا ریشه‌های دیگر را بیابیم:

$$\begin{array}{r} x^4 + 4x^3 - 8x \quad \overline{) x+2} \\ -x^4 - 2x^3 \quad \quad \quad x^3 + 2x^2 - 4x \\ \hline 2x^3 - 8x \\ -2x^3 - 4x^2 \quad \quad \quad -4x^2 - 8x \\ \hline -4x^2 - 8x \\ 4x^2 + 8x \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow x^4 + 4x^3 - 8x = (x+2)(x^3 + 2x^2 - 4x) = (x+2)(x)(x^2 + 2x - 4)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{عبارات به دست آمده را برابر صفر} \\ \text{گذاشته و ریشه‌یابی می‌کنیم} \end{array} \right\} \begin{cases} x+2=0 \Rightarrow x=-2 \\ x=0 \\ x^2+2x-4=0 \Rightarrow \Delta=4-4(1)(-4)=20 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{20}}{2} \Rightarrow x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{5} \end{cases}$$

در نتیجه کوچک‌ترین ریشه،  $-1 - \sqrt{5}$  و بزرگ‌ترین ریشه،  $-1 + \sqrt{5}$  است که مجموعه این دو عدد برابر است با:

$$-1 - \sqrt{5} - 1 + \sqrt{5} = -2$$

همسایگی ۲-۱۰

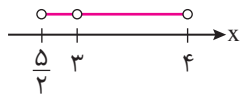
هر بازه باز شامل عدد حقیقی  $x$  را یک همسایگی  $x$  می‌نامیم. به عبارت دیگر اگر  $x \in (a, b)$  آن‌گاه بازه  $(a, b)$  یک همسایگی  $x$  می‌باشد.



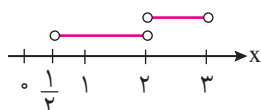


مثال: بازه (۲, ۶) یک همسایگی برای عدد ۵ است.

**همسایگی محذوف:** اگر بازه (a, b) یک همسایگی عدد حقیقی  $x_0$  باشد، آن گاه مجموعه  $\{x_0\} - (a, b)$  یا  $(a, x_0) \cup (x_0, b)$  یک همسایگی محذوف  $x_0$  نامیده می‌شود. مثال: مجموعه  $\{3\} - (\frac{5}{2}, 4)$  یک همسایگی محذوف ۳ است.



**همسایگی چپ و راست:** اگر  $r$  عددی مثبت باشد آن گاه  $(x_0, x_0 + r)$  یک همسایگی راست  $x_0$  نامیده می‌شود. همچنین،  $(x_0 - r, x_0)$  را یک همسایگی چپ  $x_0$  می‌نامیم.



مثال: بازه (۲, ۳) یک همسایگی راست ۲ و بازه (۱/۲, ۲) یک همسایگی چپ ۲ است.

تست ۲: اگر  $(a - 2b, 5) \cup (c, 2a + b)$  یک همسایگی محذوف عدد ۳ باشد، آن گاه بازه (b, a) یک همسایگی برای کدام یک از اعداد زیر است؟

- (۱)  $-\frac{2}{3}$
- (۲)  $\frac{7}{6}$
- (۳)  $-\frac{7}{5}$
- (۴)  $\frac{1}{3}$

پاسخ: با توجه به تساوی  $(a - 2b, 5) \cup (c, 2a + b) = (c, 2a + b) \cup (a - 2b, 5)$  داریم:

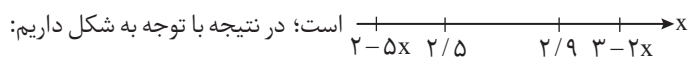
$$\begin{cases} 2a + b = 3 \\ a - 2b = 3 \end{cases} \Rightarrow 2a + b = a - 2b \Rightarrow a = -3b \xrightarrow{2a+b=3} 2(-3b) + b = 3 \Rightarrow -5b = 3 \Rightarrow b = -\frac{3}{5}, a = -3b = \frac{9}{5}$$

بازه (b, a) برابر است با:  $(-\frac{3}{5}, \frac{9}{5})$  که با توجه به گزینه‌ها، یک همسایگی برای  $\frac{7}{6}$  است.

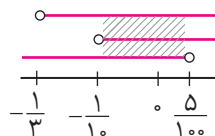
تست ۳: اگر بازه  $(2 - 5x, 3 - 2x)$  یک همسایگی برای  $\frac{2}{5}$  و  $\frac{2}{9}$  باشد، محدوده  $x$  کدام است؟

- (۱)  $(-\frac{1}{5}, 0)$
- (۲)  $(-\frac{1}{3}, 0)$
- (۳)  $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{5})$
- (۴)  $(-\frac{1}{5}, 0)$

پاسخ: بازه  $(2 - 5x, 3 - 2x)$  قرار است یک همسایگی برای  $\frac{2}{5}$  و  $\frac{2}{9}$  باشد، پس شکل آن به صورت



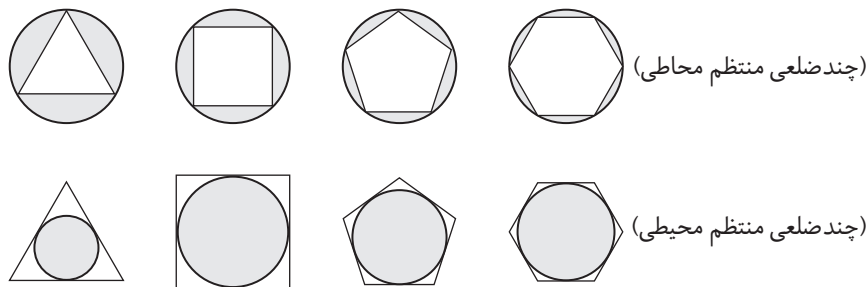
$$\begin{cases} 2 - 5x < 2/5 \Rightarrow 5x > -1/5 \Rightarrow x > -1/5 \\ 3 - 2x > 2/9 \Rightarrow 2x < 11/9 \Rightarrow x < 11/18 \end{cases} \Rightarrow \text{اشتراک می‌گیریم: } (-1/5, 11/18)$$



### ۳-۱۰ فرایندهای حدی و محاسبه حد توابع

### ۱-۳-۱۰ چندضلعی‌های منتظم محیطی و محاطی

به دو دسته از اشکال زیر دقت کنید:



در هر دو دسته، با افزایش تعداد اضلاع، مساحت چندضلعی‌ها به مساحت دایره  $(\pi r^2)$  نزدیک می‌شود.

مفهوم حد

۲-۳-۱+

فرض کنیم تابع  $f$  در بازه‌ای مانند  $(a, x_0)$  تعریف شده باشد. حد چپ  $f$  در  $x_0$  برابر عدد  $L$  است؛ هرگاه مقادیر تابع  $f$  را به هر اندازه دلخواه بتوان به  $L$  نزدیک کرد، به شرط آن که  $x$  از سمت چپ به قدر کافی به  $x_0$  نزدیک شود، در این صورت می‌نویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$$

به طریق مشابه فرض کنیم  $f$  در بازه‌ای مانند  $(x_0, b)$  تعریف شده باشد، حد راست  $f$  در  $x_0$  برابر عدد  $L$  است؛ هرگاه مقادیر تابع  $f$  را به هر اندازه دلخواه بتوان به  $L$  نزدیک کرد؛ به شرط آن که  $x$  از سمت راست به قدر کافی به  $x_0$  نزدیک شود، در این صورت می‌نویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$$

فرض کنیم تابع  $f$  در بازه‌ای مانند  $(a, b)$  شامل نقطه  $x_0$  (به جز احتمالاً در خود  $x_0$ ) تعریف شده باشد. حد تابع  $f$  در  $x_0$  برابر عدد  $L$  است؛ هرگاه مقدار تابع  $f$  را به هر اندازه دلخواه بتوان به  $L$  نزدیک کرد؛ به شرط آن که  $x$  (از دو طرف راست و چپ) به قدر کافی به  $x_0$  نزدیک شود. در این صورت می‌نویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

**نتیجه:**  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$  اگر و تنها اگر  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$  و  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$

به‌طور کلی اگر درباره‌ی تابعی مانند  $f$  داشته باشیم  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ ، آنگاه درباره‌ی  $f(a)$  یکی از حالت‌های زیر برقرار است:

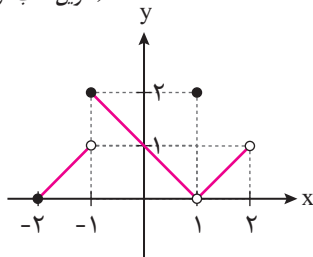
الف)  $f(a)$  موجود نیست.

ب)  $f(a)$  موجود است؛ ولی  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$

پ)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

**نتیجه:** حد تابع در یک نقطه ارتباطی به مقدار تابع در آن نقطه ندارد؛ یعنی وجود یا عدم وجود مقدار تابع در نقطه  $a$ ، تأثیری در وجود حد تابع در نقطه  $a$  ندارد.

(تمرین کتاب درسی)



پ)  $f(2) = 1$

ج)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$

۴ (۲)

۶ (۴)

تست ۴: با توجه به نمودار تابع  $f$ ، چه تعداد از موارد زیر صحیح است؟

ب)  $f(1) = 2$

ث)  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 2$

۳ (۱)

۵ (۳)

الف)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$

ت)  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 0$

ج)  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  وجود ندارد

پاسخ:

الف)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0$ ،  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$  (غ)

ب)  $f(1) = 2$  (ص)

پ)  $f(2)$  وجود ندارد (غ)

ت)  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$  وجود ندارد (غ)

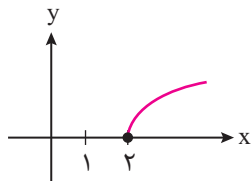
ث)  $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = 2$ ،  $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} f(x)$  وجود ندارد (غ)

ج)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$ ،  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$  (ص)

چ)  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$  وجود ندارد  $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  وجود ندارد (ص)



(تمرین کتاب درسی)

تست ۵: حد تابع با ضابطه  $f(x) = \sqrt{x-2}$  به ازای  $x=2$  کدام است؟

۱ (۲)

صفر (۱)

۴) نمی توان اظهار نظر کرد.

۳) وجود ندارد.

پاسخ: با توجه به شکل  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$  وجود ندارد، پس تابع  $f(x) = \sqrt{x-2}$  در نقطه  $x=2$ 

حد ندارد.

## ۲-۱۰ محاسبه حد توابع

به محاسبه انواع حدهای زیر دقت کنید: (تمام قوانینی که در این بخش درباره حد مطرح می شود، برای حد راست و چپ تابع نیز برقرار است.)

$$\lim_{x \rightarrow a} c = c$$

۱. حد تابع ثابت: به طور کلی اگر  $a$  و  $c$  دو عدد حقیقی باشند:

$$(a \in \mathbb{R}) \lim_{x \rightarrow a} f(x) = a \quad \text{اگر } f(x) = x \text{ ، آن گاه}$$

۲. حد تابع همانی: اگر  $f(x) = x$  ، آن گاه  $(a \in \mathbb{R}) \lim_{x \rightarrow a} f(x) = a$ 

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L + m$$

۳. حد مجموع: اگر  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  و  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = m$  آن گاه:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L - m$$

۴. حد تفاضل: اگر  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  و  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = m$  آن گاه:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = Lm$$

۵. حد حاصل ضرب: اگر  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  و  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = m$  آن گاه:

$$\lim_{x \rightarrow a} (cf(x)) = c \lim_{x \rightarrow a} f(x) = cL \quad (a \in \mathbb{R})$$

اگر  $c$  یک عدد ثابت و  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  آن گاه:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^n = \left( \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right)^n = L^n$$

در حالت کلی اگر  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  و  $n \in \mathbb{N}$  آن گاه:

$$\lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right) = \left( \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} \right) = \frac{L}{m} \quad (m \neq 0)$$

۶. حد تقسیم: اگر  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  و  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = m$  و  $m \neq 0$  آن گاه:

۷. حد تابع چندجمله‌ای: به طور کلی حد یک تابع چندجمله‌ای در یک نقطه با مقدار تابع در آن نقطه برابر است.

۸. حد تابع گویا: به طور کلی اگر  $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$  یک تابع گویا باشد که  $P(x)$  و  $Q(x)$  چندجمله‌ای هستند، برای محاسبه حد  $f(x)$ در نقطه‌ای مانند  $a$ ، کافی است که حد  $P(x)$  را بر حد  $Q(x)$  در آن نقطه تقسیم کنیم: به شرط آن که  $\lim_{x \rightarrow a} Q(x) \neq 0$ .

$$\lim_{x \rightarrow c} \sqrt{ax+b} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow c} ax+b} = \sqrt{L}$$

۹. حد ریشه: اگر  $\lim_{x \rightarrow c} (ax+b) = L > 0$  آن گاه:

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \cos x = \cos \alpha, \quad \lim_{x \rightarrow \alpha} \sin x = \sin \alpha$$

۱۰. حد مثلثاتی: به طور کلی داریم:

۱۱. حد توابع چندضابطه‌ای: تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} g(x) & x > a \\ h(x) & x < a \end{cases}$ ، در صورتی در  $x = a$  حد دارد که حد چپ و راست تابع  $f$  در

$$\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} h(x)$$

نقطه مرزی  $(a)$  وجود داشته و با یکدیگر برابر باشند:۱۲. حد توابع جزء صحیح: برای تعیین حد تابع  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]$  ابتدا حد عبارت داخل جزء صحیح  $(f(x))$  را در  $a$  به دست آورید. اگرعدد غیر صحیح شد، جزء صحیح آن را حساب کنید اما اگر عدد صحیح شد، آن گاه حد چپ و راست تابع را در نقطه  $x = a$  تعیین کنید.۱۳. حد توابع قدرمطلق: برای محاسبه حد تابع  $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)|$ ، باید  $f(x)$  را تعیین علامت کنیم تا ببینیم در مجاورت  $x = a$  علامت $f(x)$  چگونه است.

اگر تنها یکی از دو تابع  $f$  و  $g$  در نقطه  $x = a$  حد نداشته باشد، آن گاه  $f + g$  و  $f - g$  در  $x = a$  حد ندارند؛ ولی در مورد  $f, g$  نمی توان به طور قطعی نظر داد و می بایست تابع را تشکیل دهیم. توجه کنید عکس این قضیه همواره برقرار نیست، یعنی ممکن است مجموع، تفاضل، ضرب و ... دو تابع در یک نقطه حد داشته باشند ولی خود توابع در آن نقطه حد نداشته باشند.

تست ۶: اگر تابع  $f$  در نقطه  $x = 1$  حد داشته و  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2f(x)-1}{f(x)+1} = 5$  باشد، آن گاه  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  کدام است؟

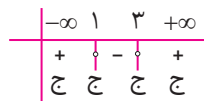
- ۱) -۳      ۲) -۲      ۳) ۲      ۴) ۳

پاسخ:  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2f(x)-1}{f(x)+1} = 5 \Rightarrow \frac{2f(1)-1}{f(1)+1} = 5 \Rightarrow 2f(1)-1 = 5f(1)+5 \Rightarrow 3f(1) = -6 \Rightarrow f(1) = -2$

تست ۷: در رابطه با تابع  $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$  کدام گزینه صحیح است؟

- ۱) در  $x = 1$  حد دارد؛ اما در  $x = 3$  حد ندارد.  
 ۲) در  $x = 1$  و  $x = 3$  حد دارد.  
 ۳) در  $x = 1$  حد ندارد، اما در  $x = 3$  حد دارد.  
 ۴) در  $x = 1$  و  $x = 3$  حد ندارد.

پاسخ: عبارت زیر رادیکال نامنفی است، پس تعیین علامت می کنیم:

$x^2 - 4x + 3 \geq 0 \xrightarrow{a+b+c=0} x_1 = 1, x_2 = 3$    $\rightarrow$  مجموعه جواب:  $(-\infty, 1] \cup [3, +\infty)$

چون تابع در  $x = 1$  حد راست و در  $x = 3$  حد چپ ندارد، پس در هیچ یک از این نقاط حد وجود ندارد.

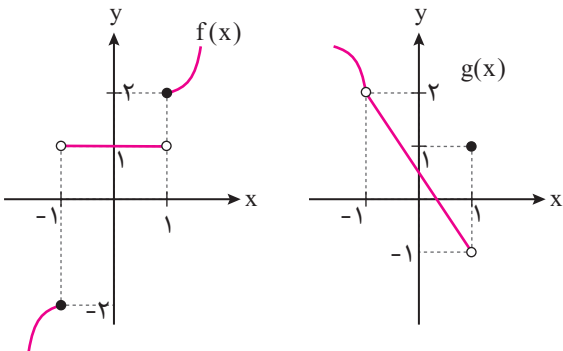
تست ۸: به ازای کدام مجموعه مقادیر  $a$ ، تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} (x+a)^2, & x \geq -1 \\ 2x+1, & x < -1 \end{cases}$  در نقطه  $x = -1$  حد دارد؟

- ۱)  $\{0\}$       ۲)  $\{2\}$       ۳)  $\emptyset$       ۴)  $\mathbb{R}$

پاسخ:  $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} (x+a)^2 = (-1+a)^2$ ,  $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} (2x+1) = -1$

در نقطه  $x = -1$  حد نداریم  $\Rightarrow$  (غ ق ق)  $= -1 \Rightarrow (-1+a)^2 = -1$  شرط وجود حد همواره نامنفی

تست ۹: نمودار دو تابع  $f$  و  $g$  در زیر رسم شده اند. حاصل  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \left( 4f(-x) + \frac{g(x)}{2} \right)$  کدام است؟



- ۱) ۳  
 ۲) ۳/۵  
 ۳) ۴  
 ۴) ۴/۵

پاسخ:

$\lim_{x \rightarrow 1^-} 4f(-x) = 4 \lim_{x \rightarrow 1^-} f(-x) = 4 \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = 4(1) = 4$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{g(x)}{2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \frac{1}{2}(-1) = -\frac{1}{2} \Rightarrow 4 - \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$



تست ۱۰: اگر  $f(x) = \begin{cases} x+4 & , x \geq 0 \\ 2x+3 & , x < 0 \end{cases}$  و  $g(x) = \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ x+1 & , x < 0 \end{cases}$  باشند، کدام گزینه درست است؟

۱)  $f, g$  و  $f+g$  در  $x=0$  حد دارند.

۲)  $f$  و  $g$  در  $x=0$  حد ندارند اما  $f-g$  در  $x=0$  حد دارد.

۳)  $f$  و  $g$  در  $x=0$  حد ندارند، اما  $f+g$  در  $x=0$  حد دارد.

۴)  $f, g$  و  $f-g$  در  $x=0$  حد دارند.

وجود ندارد  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2(0) + 3 = 3$  ،  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 + 4 = 4$  ،  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 2(0) + 3 = 3$  پاسخ:

وجود ندارد  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0 + 1 = 1$  ،  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0 + 1 = 1$  ،  $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = 0 + 1 = 1$

$(f+g)(x) = \begin{cases} 2x+4 & , x \geq 0 \\ 3x+4 & , x < 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} (f+g)(x) = 2(0) + 4 = 4$  ،  $\lim_{x \rightarrow 0^-} (f+g)(x) = 3(0) + 4 = 4$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} (f+g)(x) = 4$

وجود ندارد  $\lim_{x \rightarrow 0} (f-g)(x) = 0 + 2 = 2$  ،  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (f-g)(x) = 4 - 4 = 0$  ،  $\lim_{x \rightarrow 0^-} (f-g)(x) = 3 - 3 = 0$

تست ۱۱: در تابع باضابطه  $f(x) = (x+a)[x]$ ، اگر  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 3$ ، آن‌گاه عدد حقیقی  $a$  کدام است؟

- ۱) ۱      ۲) ۲      ۳) -۱      ۴) ۴ صفر

پاسخ:

$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = (2+a)[2^+] = (a+2)(2) = 2a+4$  ،  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = (2+a)[2^-] = (a+2)(1) = a+2 \Rightarrow 2a+4 - a - 2 = 3 \Rightarrow a = 1$

تست ۱۲: حاصل  $\lim_{x \rightarrow 2} \left[ \frac{9}{1+x} \right]$  کدام است؟ ( [ ] نماد جزء صحیح است. )

- ۱) ۱      ۲) ۲      ۳) ۳      ۴) وجود ندارد.

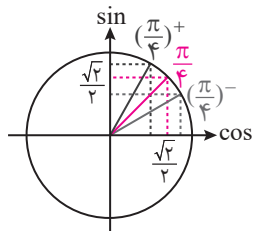
پاسخ:  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \left[ \frac{9}{1+x} \right] = [3^-] = 2$    
 حد راست:  $x \rightarrow 2^+ \Rightarrow x > 2 \Rightarrow 1+x > 3 \Rightarrow \frac{1}{1+x} < \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{9}{1+x} < 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} \left[ \frac{9}{1+x} \right] = [3^-] = 2$

وجود ندارد  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \left[ \frac{9}{1+x} \right] = [3^+] = 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \left[ \frac{9}{1+x} \right] = 3$    
 حد چپ:  $x \rightarrow 2^- \Rightarrow x < 2 \Rightarrow 1+x < 3 \Rightarrow \frac{1}{1+x} > \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{9}{1+x} > 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} \left[ \frac{9}{1+x} \right] = [3^+] = 3$

تست ۱۳: مجموع مربعات حد چپ و راست تابع  $y = [\cos x - \sin x]$  در نقطه  $x = \frac{\pi}{4}$  کدام است؟ ( [ ] نماد جزء صحیح است. )

- ۱) صفر      ۲) -۱      ۳) ۲      ۴) ۱

پاسخ: اگر  $x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^-$  باشد، حاصل  $\cos x$  بزرگتر از  $\sin x$  و اگر  $x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^+$  باشد، حاصل  $\sin x$  بزرگتر از  $\cos x$  خواهد بود، پس:



(تمرین کتاب درسی)

حد چپ:  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} [\cos x - \sin x] \xrightarrow{\cos x > \sin x} [0^+] = 0$    
 مجموع مربعات  $\rightarrow (0)^2 + (-1)^2 = 0 + 1 = 1$

حد راست:  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} [\cos x - \sin x] \xrightarrow{\sin x > \cos x} [0^-] = -1$

تست ۱۴: تابع  $f(x) = [x]$  در چه نقاطی حد دارد؟

- ۱)  $\mathbb{Z}$       ۲)  $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$

- ۳) به‌طور کلی حد ندارد.      ۴)  $\mathbb{R}$

پاسخ: به‌طور کلی حد تابع  $f(x) = [x]$  در نقاط صحیح وجود ندارد، ولی حد این تابع در تمام نقاط غیر صحیح وجود دارد.

## ۵-۱۰ رفع ابهام

اگر در محاسبه  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)}$  که  $P(x)$  و  $Q(x)$  دو چندجمله‌ای‌اند، داشته باشیم:  $P(a) = Q(a) = 0$ ، دیگر با قوانین گفته‌شده نمی‌توان حد را محاسبه کرد. در این حالت به روش زیر عمل می‌کنیم:

چون  $P(a) = Q(a) = 0$ : بنابراین  $P(x)$  و  $Q(x)$  بر  $x - a$  بخش‌پذیرند. ابتدا عبارت  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  را با تقسیم  $P(x)$  و  $Q(x)$  بر  $x - a$  ساده می‌کنیم و سپس امکان استفاده از قانون تقسیم حدها را بررسی می‌کنیم.

**نتیجه:** زمانی که در حد  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)}$  با  $\frac{0}{0}$  مواجه شدیم می‌بایست عامل صفرشونده  $(x - a)$  را با کمک اتحادها، تجزیه، تقسیم، گویا کردن و در توابع مثلثاتی با کمک روابط گفته‌شده به دست آورده و آن را حذف کنیم.

در حالت  $\frac{0}{0}$  از یک روش کارآمد دیگر به نام **قاعده هوییتال** نیز می‌توان استفاده کرد: به این ترتیب که هرگاه با ابهام  $\frac{0}{0}$  مواجه شدیم، می‌توانیم از رابطه روبه‌رو استفاده کنیم:  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ ؛ اگر باز هم حاصل حد  $\frac{0}{0}$  شد می‌توانیم مجدداً هوییتال گرفته و این عمل را آنقدر ادامه دهیم تا از حالت ابهام خارج شود (اگر فرمول‌های مشتق را به‌خاطر ندارید، به فصل بعد رجوع کرده و آن‌ها را مرور کنید).

هوییتال گرفتن از یک کسر، معادل مشتق گرفتن از آن کسر نیست:  $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}$ ،  $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{\text{HOP}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

تست ۱۵: حاصل  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 - x^2}{2x^3 - 13x + 10}$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{5}{22}$  (۲)  $\frac{4}{11}$  (۳)  $-\frac{5}{22}$  (۴)  $-\frac{4}{11}$

پاسخ: روش اول:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 - x^2}{2x^3 - 13x + 10} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{تقسیم بر } x-2} \frac{4x^2 - 13x}{-4x^2 + 8x - 5x + 10} = \frac{4x^2 - 13x}{-4x^2 + 3x + 10}$$

$$\frac{4x^2 - 13x}{-4x^2 + 3x + 10} \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} \frac{(2-x)(2+x)}{(x-2)(2x^2 + 4x - 5)}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 - x^2}{2x^3 - 13x + 10} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2-x)(2+x)}{(x-2)(2x^2 + 4x - 5)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(x-2)(x+2)}{(x-2)(2x^2 + 4x - 5)} = \frac{-(2+2)}{2(2)^2 + 4(2) - 5} = \frac{-4}{11}$$

روش دوم: قاعده هوییتال:  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 - x^2}{2x^3 - 13x + 10} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2x}{6x^2 - 13} = \frac{-2(2)}{6(2)^2 - 13} = \frac{-4}{11}$

تست ۱۶: اگر  $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$  باشد، حاصل حد تابع  $\frac{3f(x) + x}{2f^2(x)}$  در  $x = 2$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{5}{16}$  (۲)  $\frac{7}{16}$  (۳)  $\frac{9}{16}$  (۴)  $\frac{11}{16}$

پاسخ: روش اول:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)} = 2 + 2 = 4 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3f(x) + x}{2f^2(x)} = \frac{3(4) + 2}{2(4)^2} = \frac{14}{32} = \frac{7}{16}$$

روش دوم: قاعده هوییتال:  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x}{1} = 2(2) = 4 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3f(x) + x}{2f^2(x)} = \frac{7}{16}$





تست ۱۷: حد چپ تابع  $y = \frac{x-|x|}{[x+1]-x}$  وقتی  $x \rightarrow 0$  کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است).

- (۱) صفر (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) -۲

پاسخ:  $x \rightarrow 0^- \Rightarrow -1 < x < 0 \Rightarrow 0 < x+1 < 1 \Rightarrow [x+1] = 0, |x| = -x \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-|x|}{[x+1]-x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-(-x)}{0-x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x}{-x} = -2$$

تست ۱۸: حد چپ تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{(3-[x])\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}$  در نقطه  $x=3$ ، کدام است؟

- (۱) صفر (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) وجود ندارد.

پاسخ:  $x \rightarrow 3^- \Rightarrow 2 < x < 3 \Rightarrow [x] = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{(3-[x])\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{(3-2)\sqrt{(x-3)^2}}{x-3} = \frac{0}{0}$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{\sqrt{(x-3)^2}}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{|x-3|}{x-3} \xrightarrow[\text{منفی است}]{\text{صورت به ازای } 2 < x < 3} \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-(x-3)}{(x-3)} = -1$$

تست ۱۹: حاصل  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x + \sqrt{3-x}}{x^2 + x}$  کدام است؟

- (۱)  $-\frac{7}{4}$  (۲)  $-\frac{1}{4}$  (۳)  $\frac{3}{4}$  (۴)  $\frac{5}{4}$

پاسخ: روش اول:  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x + \sqrt{3-x}}{x^2 + x} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x + \sqrt{3-x}}{x^2 + x} \times \frac{2x - \sqrt{3-x}}{2x - \sqrt{3-x}} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{4x^2 + x - 3}{x^2 + x(2x - \sqrt{3-x})}$

$$\frac{4x^2 + x - 3}{x^2 + x(2x - \sqrt{3-x})} \xrightarrow[\text{صورت تقسیم بر } x+1]{\frac{x+1}{4x-3}} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(-4x^2 - 4x) - (-3x - 3)}{x(x+1)(2x - \sqrt{3-x})} = \frac{4(-1) - 3}{-1(-2-2)} = \frac{-7}{4}$$

روش دوم: قاعده هوییتال:  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x + \sqrt{3-x}}{x^2 + x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2 + \frac{-1}{2\sqrt{3-x}}}{2x+1} = \frac{2 - \frac{1}{4}}{-2+1} = -\left(2 - \frac{1}{4}\right) = -\frac{7}{4}$

تست ۲۰: حد عبارت  $\frac{|x^2 - x - 2|}{2x - \sqrt{x^2 + 12}}$  وقتی  $x \rightarrow 2^-$  کدام است؟

- (۱) -۳ (۲) -۲ (۳) ۲ (۴) ۳

پاسخ: روش اول: برای رهایی از قدرمطلق تعیین علامت می‌کنیم:

$$x^2 - x - 2 = 0 \xrightarrow{a+c=b} x_1 = -1, x_2 = 2 \quad \begin{array}{c|ccc} -\infty & -1 & 2 & +\infty \\ \hline + & \ominus & - & \oplus \\ & \oplus & \ominus & + \\ \hline & 2^- & \leftarrow 2^+ & \end{array}$$

$$\Rightarrow |x^2 - x - 2| \xrightarrow{x \rightarrow 2^-} -(x^2 - x - 2) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x^2 - x - 2|}{2x - \sqrt{x^2 + 12}} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x^2 - x - 2)}{2x - \sqrt{x^2 + 12}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x-2)(x+1)}{2x - \sqrt{x^2 + 12}} \times \frac{2x + \sqrt{x^2 + 12}}{2x + \sqrt{x^2 + 12}} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x-2)(x+1)(2x + \sqrt{x^2 + 12})}{4x^2 - x^2 - 12} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x-2)(3)(4+4)}{3(x-2)(x+2)} = \frac{(-3)(8)}{(3)(4)} = -2$$

روش دوم: قاعده هوییتال:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x^2 - x - 2)}{2x - \sqrt{x^2 + 12}} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-x^2 + x + 2}{2x - \sqrt{x^2 + 12}} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-2x+1}{2 - \frac{2x}{2\sqrt{x^2+12}}} = \frac{-2(2)+1}{2 - \frac{4}{8}} = \frac{-3}{\frac{3}{2}} = -2$$

تست ۲۱: حاصل  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\sqrt{x}}{2-\sqrt{5-x}}$  کدام است؟

- ۴ (۴)
- ۲ (۳)
- ۲ (۲)
- ۴ (۱)

پاسخ: روش اول:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\sqrt{x}}{2-\sqrt{5-x}} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\sqrt{x}}{2-\sqrt{5-x}} \times \frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \times \frac{2+\sqrt{5-x}}{2+\sqrt{5-x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x)(2+\sqrt{5-x})}{(4-5+x)(1+\sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\cancel{(x-1)}(2+\sqrt{5-x})}{(x-1)(1+\sqrt{x})}$$

$$= \frac{-(2+2)}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

روش دوم: قاعده هوییتال:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\sqrt{x}}{2-\sqrt{5-x}} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{-\frac{1}{2\sqrt{5-x}}} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = -\frac{4}{2} = -2$$

تست ۲۲: اگر  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{ax+b}-2}{x^2-1} = \frac{3}{2}$  باشد،  $a-b$  کدام است؟

- ۲۲ (۴)
- ۲۰ (۳)
- ۱۲ (۲)
- ۴ (۱)

پاسخ: حد مخرج به ازای  $x \rightarrow 1$  برابر صفر است. چون حد تابع برابر  $\frac{3}{2}$  است، پس حد صورت به ازای  $x \rightarrow 1$  نیز برابر صفر بوده تا حالت  $\frac{0}{0}$  تشکیل شود و با رفع حالت ابهام به  $\frac{3}{2}$  برسیم.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{ax+b}-2=0 \Rightarrow \sqrt{a+b}-2=0 \Rightarrow \sqrt{a+b}=2 \Rightarrow a+b=4$$

روش اول:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{ax+b}-2}{x^2-1} \times \frac{\sqrt{ax+b}+2}{\sqrt{ax+b}+2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax+b-4}{(x-1)(x+1)(\sqrt{ax+b}+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a(x-1)}{\cancel{(x-1)}(x+1)(4)} = \frac{a}{8} = \frac{3}{2} \Rightarrow a=12$$

$$\Rightarrow a+b=4 \xrightarrow{a=12} b=4-12=-8 \Rightarrow a-b=12-(-8)=20$$

روش دوم: قاعده هوییتال:  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{ax+b}-2}{x^2-1} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{a}{2\sqrt{ax+b}}}{2x} = \frac{a}{2(2 \times \sqrt{4})} = \frac{a}{8} = \frac{3}{2} \Rightarrow a=12 \Rightarrow a-b=20$

تست ۲۳: حاصل  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2-10x-8}{\sqrt{3-\sqrt{x}}-1}$  کدام است؟

- ۷۲ (۴)
- ۸۴ (۳)
- ۹۶ (۲)
- ۱۱۲ (۱)

پاسخ: روش اول:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2-10x-8}{\sqrt{3-\sqrt{x}}-1} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{صورت تقسیم بر } x-4} \frac{3x^2-10x-8}{x-4} \Big|_{x=4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(3x+2)(x-4)}{\sqrt{3-\sqrt{x}}-1} \times \frac{\sqrt{3-\sqrt{x}}+1}{\sqrt{3-\sqrt{x}}+1} = \frac{14 \times 2}{\sqrt{3-\sqrt{4}}+1} = \frac{28}{\sqrt{3-2}+1} = \frac{28}{1+1} = 14$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(14)(2)}{3-\sqrt{x}-1} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(28)}{2-\sqrt{x}} \times \frac{2+\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(28)(2)}{4-x} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\cancel{(x-4)}(112)}{\cancel{-(x-4)}} = -112$$

روش دوم: قاعده هوییتال:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2-10x-8}{\sqrt{3-\sqrt{x}}-1} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{6x-10}{-\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(6x-10)(2\sqrt{3-\sqrt{x}})}{-\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \frac{(14)(2)}{-\frac{1}{4}} = -28 \times 4 = -112$$



تست ۲۴: حد عبارت  $\frac{x^2 + 10x + 16}{12 + 6\sqrt{x}}$  وقتی  $x \rightarrow -8$ ، کدام است؟ (تجربی ۹۸)

(۱) -۲۴ (۲) -۱۸ (۳) -۱۲ (۴) -۶

پاسخ: روش اول:

$$\lim_{x \rightarrow -8} \frac{x^2 + 10x + 16}{12 + 6\sqrt{x}} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -8} \frac{(x+2)(x+8)}{6(\sqrt{x+2})} \times \frac{4-2\sqrt{x+2}+\sqrt{x+2}^2}{4-2\sqrt{x+2}+\sqrt{x+2}^2} = \lim_{x \rightarrow -8} \frac{(x+8)(-6)(4+4+4)}{6(\sqrt{x+2})} = \frac{(-6)(12)}{6} = -12$$

روش دوم: قاعده هوییتال:  $\lim_{x \rightarrow -8} \frac{x^2 + 10x + 16}{12 + 6\sqrt{x}} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x \rightarrow -8} \frac{2x + 10}{6 \times \frac{1}{2\sqrt{x}}} = \frac{2(-8) + 10}{6} = \frac{-6}{6} = -1$

تست ۲۵: حد عبارت  $\frac{2 - \sqrt{3x+2}}{5x^2 - 18x + 16}$  وقتی  $x \rightarrow 2$ ، کدام است؟ (تجربی خارج ۹۸)

(۱)  $-\frac{1}{3}$  (۲)  $-\frac{1}{4}$  (۳)  $-\frac{1}{6}$  (۴)  $-\frac{1}{8}$

پاسخ: روش اول:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - \sqrt{3x+2}}{5x^2 - 18x + 16} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{تقسیم منخرج بر } x-2} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - \sqrt{3x+2}}{5x^2 - 18x + 16} \Big|_{x-2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - \sqrt{3x+2}}{(\Delta x - 8)(x - 2)} \times \frac{4 + 2\sqrt{3x+2} + \sqrt{(3x+2)^2}}{4 + 2\sqrt{3x+2} + \sqrt{(3x+2)^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - \sqrt{3x+2}}{(\Delta x - 8)(x - 2)(4 + 4 + 4)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-3x + 6}{(x - 2)(2)(12)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-3(x-2)}{(x-2)(24)} = -\frac{3}{24} = -\frac{1}{8}$$

روش دوم: قاعده هوییتال:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - \sqrt{3x+2}}{5x^2 - 18x + 16} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-\frac{3}{2\sqrt{3x+2}}}{10x - 18} = \frac{-\frac{1}{4}}{2} = -\frac{1}{8}$$

تست ۲۶: حاصل  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan^2 x - 1}{2 \cos^2 x - 1}$  کدام است؟

(۱) -۲ (۲)  $\frac{1}{2}$  (۳) ۱ (۴) ۲

پاسخ:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan^2 x - 1}{2 \cos^2 x - 1} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - 1}{\cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\cos^2 x (\cos 2x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{-\cos 2x}{\cos^2 x (\cos 2x)} = \frac{-1}{\frac{1}{2}} = -2$$

تست ۲۷: اگر حاصل  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sin^2 \pi x}{[x] + \cos \pi x} = a$  باشد، حاصل لگاریتم عدد  $a$  بر مبنای ۸ کدام است؟

(۱) ۲ (۲)  $\frac{1}{3}$  (۳) ۴ (۴)  $\frac{1}{4}$

پاسخ:

$$x \rightarrow 1^+ \Rightarrow 1 < x < 2 \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sin^2 \pi x}{[x] + \cos \pi x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 - \cos^2 \pi x}{1 + \cos \pi x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(1 - \cos \pi x)(1 + \cos \pi x)}{(1 + \cos \pi x)} = 1 - \cos \pi$$

$$= 1 - (-1) = 2 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow \log_8 a = \log_8 2 = \log_{8^{\frac{1}{3}}} 2 = \log_{\sqrt[3]{8}} 2 = \frac{1}{3}$$

تست ۲۸: حد عبارت  $\sin \frac{x}{\sqrt{x}} [\cos \frac{x}{\sqrt{x}}] + \cos x [\sin \sqrt{x}]$  وقتی  $x \rightarrow \pi$  کدام است؟

- ۱) -۱      ۲) صفر      ۳) ۱      ۴) وجود ندارد.

پاسخ: اگر  $x \rightarrow \pi^-$ ، آن گاه  $\frac{x}{\sqrt{x}} \rightarrow (\frac{\pi}{\sqrt{x}})^-$  و  $\sqrt{x} \rightarrow (\sqrt{x})^-$ ، بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi^-} (\sin \frac{x}{\sqrt{x}} [\cos \frac{x}{\sqrt{x}}] + \cos x [\sin \sqrt{x}]) &= \lim_{x \rightarrow \pi^-} (-\cos x) = -\cos \pi = -(-1) = 1 \\ \Rightarrow \begin{cases} [\cos \frac{x}{\sqrt{x}}] = [\cos(\frac{\pi}{\sqrt{x}})^-] = [0^+] = 0 \\ [\sin \sqrt{x}] = [\sin(\sqrt{\pi})^-] = [0^-] = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

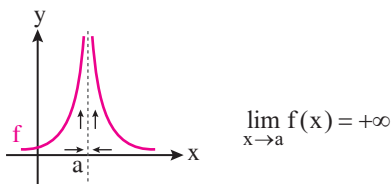
اگر  $x \rightarrow \pi^+$ ، آن گاه  $\frac{x}{\sqrt{x}} \rightarrow (\frac{\pi}{\sqrt{x}})^+$  و  $\sqrt{x} \rightarrow (\sqrt{x})^+$ ، بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi^+} (\sin \frac{x}{\sqrt{x}} [\cos \frac{x}{\sqrt{x}}] + \cos x [\sin \sqrt{x}]) &= \lim_{x \rightarrow \pi^+} (-\sin \frac{x}{\sqrt{x}}) = -\sin \frac{\pi}{\sqrt{x}} = -1 \\ \Rightarrow \begin{cases} [\cos \frac{x}{\sqrt{x}}] = [\cos(\frac{\pi}{\sqrt{x}})^+] = [0^-] = -1 \\ [\sin \sqrt{x}] = [\sin(\sqrt{\pi})^+] = [0^+] = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

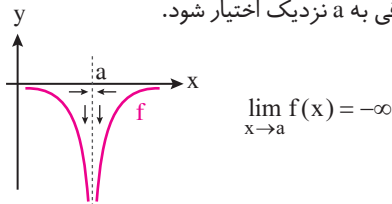
چون حد چپ و راست برابر نشد، پس عبارت مذکور وقتی  $x \rightarrow \pi$  حد ندارد.

### ۶-۱۰) حد بی‌نهایت (حد نامتناهی)

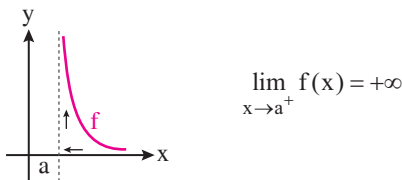
**تعریف ۱:** فرض کنیم تابع  $f$  در یک همسایگی محذوف  $a$  تعریف شده باشد. رابطه  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$  به این معناست که می‌توان مقادیر  $f(x)$  را از هر عدد مثبت دلخواه بزرگ‌تر کرد، مشروط بر آن که  $x$  به قدر کافی به  $a$  نزدیک اختیار شود.



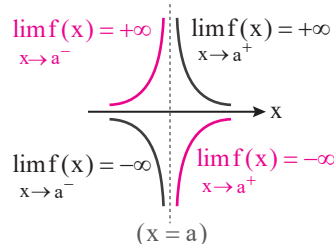
**تعریف ۲:** فرض کنیم تابع  $f$  در یک همسایگی محذوف  $a$  تعریف شده باشد. رابطه  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$  به این معناست که می‌توان مقادیر  $f(x)$  را از هر عدد منفی دلخواه کوچک‌تر کرد، مشروط بر آن که  $x$  به قدر کافی به  $a$  نزدیک اختیار شود.



**تعریف ۳:** فرض کنیم  $f$  در یک همسایگی راست از  $a$  تعریف شده باشد. رابطه  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$  به این معناست که می‌توان مقادیر  $f(x)$  را از هر عدد مثبت دلخواه بزرگ‌تر کرد، مشروط بر آن که  $x$  با مقادیر بزرگ‌تر از  $a$  به قدر کافی به  $a$  نزدیک اختیار شود.



اگر بخواهیم حدهای یک‌طرفه نامتناهی را در یک شکل رسم کنیم، به صورت زیر خواهند بود:





در مورد حدهای نامتناهی قضیه زیر بدون اثبات ارائه می‌شود:

**قضیه:** فرض کنیم  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \neq 0$  و  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$  در این صورت:

الف) اگر  $L > 0$  و تابع  $g(x)$  در همسایگی محذوفی از  $a$  مثبت باشد، آن‌گاه  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

ب) اگر  $L > 0$  و تابع  $g(x)$  در همسایگی محذوفی از  $a$  منفی باشد، آن‌گاه  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$

پ) اگر  $L < 0$  و تابع  $g(x)$  در همسایگی محذوفی از  $a$  مثبت باشد، آن‌گاه  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$

ت) اگر  $L < 0$  و تابع  $g(x)$  در همسایگی محذوفی از  $a$  منفی باشد، آن‌گاه  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

توجه کنید این قضیه برای حالتی که  $x \rightarrow a^+$  یا  $x \rightarrow a^-$  نیز برقرار است.

$$1. \frac{\text{عدد مثبت}}{0^+} = +\infty, \frac{\text{عدد مثبت}}{0^-} = -\infty, \frac{\text{عدد منفی}}{0^+} = -\infty, \frac{\text{عدد منفی}}{0^-} = +\infty$$

۲. عبارت‌های  $1 + \sin x$ ،  $1 - \sin x$ ،  $1 + \cos x$  و  $1 - \cos x$  همواره نامنفی‌اند.

۳. صفر حدی ( $0^+$  یا  $0^-$ ) یعنی یک عدد بسیار نزدیک به صفر اما خود صفر نیست؛ ولی صفر مطلق همان صفر واقعی است؛ در

$$\text{نتیجه: } \frac{\text{صفر مطلق}}{\text{صفر حدی}} = 0, \text{ مبهم}, \frac{\text{صفر حدی}}{\text{صفر حدی}} = \text{تعریف نشده}, \frac{\text{هر عدد حقیقی}}{\text{صفر مطلق}} = \infty, \frac{\text{هر عدد حقیقی غیر صفر}}{\text{صفر حدی}}$$

$$\text{تعریف نشده} = \frac{\text{صفر مطلق}}{\text{صفر مطلق}}, \text{تعریف نشده} = \frac{\text{صفر حدی}}{\text{صفر مطلق}}$$

(تمرین کتاب درسی)

نست ۲۹: چه تعداد از حدهای زیر صحیح است؟

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \text{ (الف)}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{|x|} = -\infty \text{ (ب)}, \lim_{x \rightarrow -6} \frac{9}{(x+6)^2} = +\infty \text{ (پ)}, \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{-3x}{x^2 - 4} = +\infty \text{ (ت)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{1}{\cos x} = -\infty \text{ (ث)}, \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan x = +\infty \text{ (ج)}, \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{|x| - 3}{x - 3} = +\infty \text{ (چ)}, \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{|2x - 1|}{2x - 1} = +\infty \text{ (ح)}$$

۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

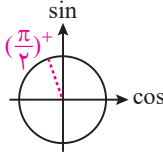
۳ (۱)

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty \text{ (ص)}$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{|x|} = \frac{-1}{0^+} = -\infty \text{ (ص) چه } 0^+ \text{ چه } 0^- \text{ در قدر مطلق مثبت هستند}$$

$$\text{پ) } \lim_{x \rightarrow -6} \frac{9}{(x+6)^2} = \frac{9}{0^+} = +\infty \text{ (ص) مخرج همواره مثبت است}$$

$$\text{ت) } \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{-3x}{x^2 - 4} = \frac{-3(-2)}{(-2)^2 - 4} = \frac{6}{0^+} = +\infty \text{ (ص) در } (-2) \text{ عبارت } x^2 - 4 \text{ صفر مثبت است}$$

$$\text{ث) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{0^-} = -\infty \text{ (ص) مخرج } 0^- \text{ است}$$


$$\text{ج) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan x = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{0^-} = -\infty \text{ (غ)}$$

$$\text{چ) } \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{|x| - 3}{x - 3} = \frac{[3^-] - 3}{0^-} = \frac{2 - 3}{0^-} = \frac{-1}{0^-} = +\infty \text{ (ص)}$$

$$\text{ح) } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{|2x - 1|}{2x - 1} = \frac{[\frac{1}{2}^+] - 3}{0^+} = \frac{0 - 3}{0^+} = \frac{-3}{0^+} = -\infty \text{ (غ) چه } \frac{1}{2}^- \text{ در قدر مطلق مثبت هستند}$$



پاسخ: ۳

تست ۳۰: اگر  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x-5}{x^2+ax+b} = -\infty$  باشد، کدام  $b-a$  است؟

- (۱) -۸      (۲) ۸      (۳) صفر      (۴) -۱

پاسخ: **۱** با میل کردن  $x$  به ۲، صورت کسر برابر ۱- می‌شود، چون حاصل حد،  $-\infty$  شده پس مخرج کسر باید برابر صفر باشد؛ از طرفی مخرج کسر باید یک ریشه مضاعف داشته باشد تا حاصل حد همواره  $-\infty$  شود، پس:

$$x^2 + ax + b = (x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4 \Rightarrow a = -4, b = 4 \Rightarrow b - a = 8$$

تست ۳۱: در مورد تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{x^2-1}{x+|x|}$ ، کدام بیان، درست است؟ (تجربی-۹۸)

- (۱)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$       (۲)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$   
 (۳)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$       (۴)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$

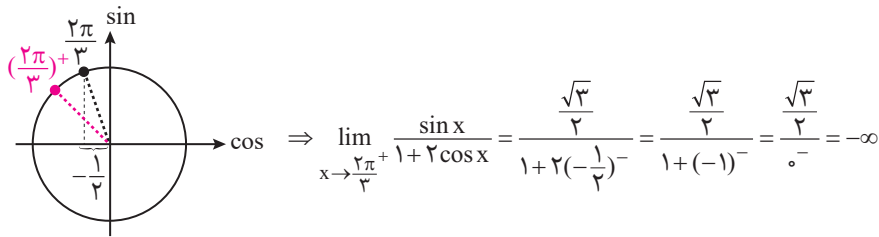
پاسخ: **۱**  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2-1}{x+|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2-1}{x+x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2-1}{2x} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$

تعریف نشده =  $\frac{-1}{0^-} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2-1}{x-|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2-1}{x-x}$

تست ۳۲: در مورد تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{\sin x}{1+2\cos x}$ ، کدام بیان، درست است؟ (تجربی خارج-۹۸)

- (۱)  $\lim_{x \rightarrow \frac{2\pi}{3}^+} f(x) = -\infty$       (۲)  $\lim_{x \rightarrow \frac{2\pi}{3}^+} f(x) = +\infty$   
 (۳)  $\lim_{x \rightarrow \frac{2\pi}{3}^-} f(x) = -\infty$       (۴)  $\lim_{x \rightarrow \frac{4\pi}{3}^-} f(x) = +\infty$

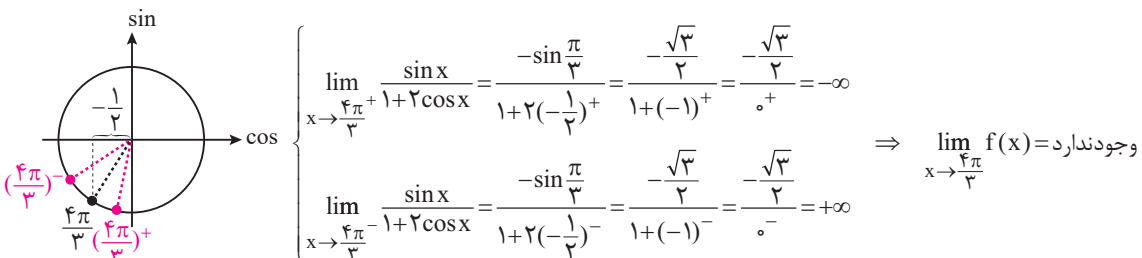
گزینه «۱»: وقتی  $x \rightarrow (\frac{2\pi}{3})^+$ ، صورت کسر برابر  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  و مخرج کسر به صفر میل می‌کند. حال باید دید که مخرج  $0^+$  است یا  $0^-$  پس:



پس گزینه «۱» صحیح و گزینه «۲» نادرست است.

گزینه «۳»:  $\lim_{x \rightarrow \frac{2\pi}{3}^-} \frac{\sin x}{1+2\cos x} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+2(-\frac{1}{2})^+} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+(-1)^+} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{0^+} = +\infty$

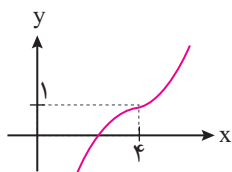
گزینه «۴»: حد چپ و راست را به ازای  $x \rightarrow \frac{4\pi}{3}$  محاسبه می‌کنیم:







تست ۳۳: اگر نمودار تابع  $f$  به صورت روبه‌رو باشد، حاصل  $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x-7}{f(x)-1}$  کدام است؟

(۱)  $-\infty$ 

(۲) صفر

(۳)  $+\infty$ 

(۴) ۱

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x-7}{f(x)-1} = \frac{4-7}{1-1} = \frac{-3}{0^-} = +\infty$$



پاسخ:

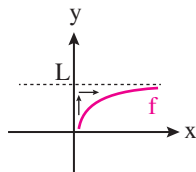
## ۷-۱۰\* حد در بی‌نهایت

این بخش را به دو قسمت تقسیم می‌کنیم:

### ۱-۷-۱۰\* حد در بی‌نهایت

اگر تابع  $f$  در بازه‌ای مثل  $(a, +\infty)$  تعریف شده باشد، رابطه  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$  به این معناست که  $f(x)$  را به هر مقدار دلخواه می‌توان

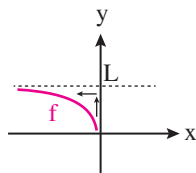
به  $L$  نزدیک کرد، مشروط بر آن که  $x$  به قدر کافی بزرگ اختیار شود.



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$$

و اگر فرض کنیم تابع  $f$  در بازه‌ای مثل  $(-\infty, b)$  تعریف شده باشد؛ رابطه  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$  به این معناست که به هر مقدار دلخواه

می‌توان  $f(x)$  را به  $L$  نزدیک کرد، مشروط بر آن که  $x$  به قدر کافی کوچک و منفی اختیار شود.



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$

در مورد حدهای نامتناهی، دو قضیه زیر مفیدند:

**قضیه ۱:** فرض کنیم  $n$  عددی طبیعی باشد. در این صورت: الف)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$  ب)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

**قضیه ۲:** فرض کنیم  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = m$ . در این صورت:

الف)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = L \pm m$

ب)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \times \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = L \cdot m$

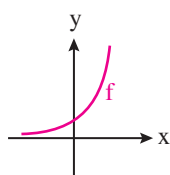
پ)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)} = \frac{L}{m} \quad (m \neq 0)$

این قضیه برای وقتی که  $x \rightarrow -\infty$  نیز برقرار است.

## ۲-۷-۱۰\* حد نامتناهی در بی‌نهایت

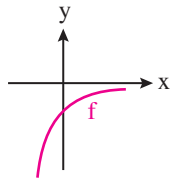
فرض کنیم تابع  $f$  در بازه‌ای مثل  $(a, +\infty)$  تعریف شده باشد. رابطه  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  به این معناست که مقادیر  $f(x)$  را

می‌توان از هر عدد مثبت دلخواهی بزرگ‌تر کرد، مشروط بر آن که  $x$  به قدر کافی بزرگ اختیار شود.



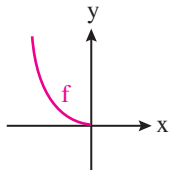
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

و اگر فرض کنیم تابع  $f$  در بازه‌ای مثل  $(-\infty, b)$  تعریف شده باشد؛ رابطه  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  به این معناست که مقادیرهای  $f(x)$  را می‌توان از هر عدد منفی دلخواهی کوچک‌تر کرد، مشروط بر آن که  $x$  به قدر کافی کوچک و منفی اختیار شود.

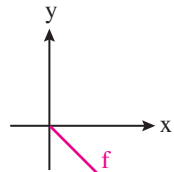


$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

رابطه‌های  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$  نیز به روش مشابه تعریف می‌شوند:



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

از قضیه زیر برای محاسبه حد تابع یک جمله‌ای  $f(x) = ax^n$  در  $+\infty$  و  $-\infty$  استفاده می‌کنیم:

**قضیه:** فرض کنیم  $n$  عددی طبیعی و  $a$  یک عدد حقیقی غیر صفر باشد:

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow +\infty} ax^n = \begin{cases} +\infty (\text{مثبت } a) \\ -\infty (\text{منفی } a) \end{cases} \quad \text{ب) } \lim_{x \rightarrow -\infty} ax^n = \begin{cases} +\infty (\text{زوج } n \text{ و } a \text{ مثبت}) \\ -\infty (\text{زوج } n \text{ و } a \text{ منفی}) \\ -\infty (\text{فرد } n \text{ و } a \text{ مثبت}) \\ +\infty (\text{فرد } n \text{ و } a \text{ منفی}) \end{cases}$$

**قضیه:** فرض کنیم  $f$  یک تابع چندجمله‌ای از درجه  $n$  به صورت  $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots + k$  باشد که در آن  $n$  عددی طبیعی و  $a$

یک عدد حقیقی غیر صفر است. در این صورت:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (ax^n + bx^{n-1} + \dots + k) = \lim_{x \rightarrow +\infty} ax^n, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} ax^n$$

دقت کنید از قضیه می‌توان برای محاسبه حد توابع گویا، زمانی که  $x \rightarrow +\infty$  یا  $x \rightarrow -\infty$  نیز استفاده کرد.

**۱\*** حد تابع  $f(x) = \frac{ax^m + bx^{m-1} + \dots + c}{a'x^n + b'x^{n-1} + \dots + c'}$  وقتی  $x \rightarrow \pm\infty$  (و  $m$  و  $n$  اعداد طبیعی) به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax^m + bx^{m-1} + \dots + c}{a'x^n + b'x^{n-1} + \dots + c'} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax^m}{a'x^n} = \begin{cases} \pm\infty & m > n \\ \frac{a}{a'} & m = n \\ \text{صفر} & m < n \end{cases}$$

$$a + \infty = +\infty, a - \infty = -\infty, a(+\infty) \xrightarrow{a > 0} +\infty, a(-\infty) \xrightarrow{a > 0} -\infty, a(+\infty) \xrightarrow{a < 0} -\infty, a(-\infty) \xrightarrow{a < 0} +\infty \quad \text{۲*}$$

$$+\infty + \infty = +\infty, -\infty - \infty = -\infty, +\infty - \infty = \text{مبهم}, -\infty + \infty = \text{مبهم}, (+\infty)(+\infty) = +\infty, (-\infty)(-\infty) = +\infty$$

$$(+\infty)(-\infty) = -\infty, (-\infty)(+\infty) = -\infty, (+\infty)^n = +\infty, (-\infty)^n = +\infty, (-\infty)^{2n+1} = -\infty, \frac{\text{هر عدد حقیقی}}{\text{بی نهایت}} = \text{صفر}$$

بی نهایت / هر عدد حقیقی غیر از صفر مطلق و بی نهایت

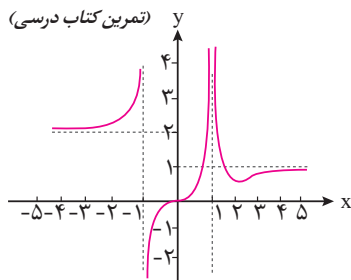
**۳\*** در برخی سؤالات مانند  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{9x^2 - x} - 3x$ ، با انتخاب جمله‌های پر توان داریم  $3x + |3x| = 3x - 3x = 0$  که قابل قبول

نیست و می‌بایست عبارت را گویا کرده و مجدداً حل نماییم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{9x^2 - x} - 3x &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^2 - x} - 3x}{\sqrt{9x^2 - x} + 3x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{9x^2 - 9x^2 + x}{3x - \sqrt{9x^2 - x} - 3x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{3x - |3x|} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{3x - (-3x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{6x} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$



(تمرین کتاب درسی)



نمودار تابع f به شکل زیر است. چه تعداد از حدهای داده شده صحیح است؟ تست ۳۴

- الف)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  (الف)      ب)  $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = -\infty$  (ب)      ج)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$  (ج)
- ت)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$  (ت)      ث)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$  (ث)      د)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$  (د)

- ۱) صفر  
۲) ۳

پاسخ: **۲**

- الف)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$  (غ)      ب)  $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = +\infty$  (غ)      پ)  $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = -\infty$  (پ)
- ت)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$  (ص)      ث)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$  (ص)      ج)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$  (ص)

تست ۳۵: اگر  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|x^2 - 4|}{ax^2 - x + 2} = -1$ ، آن گاه حد چپ این کسر در نقطه  $x = -2$  کدام است؟

- ۱)  $\frac{4}{3}$       ۲)  $\frac{2}{3}$       ۳)  $-\frac{4}{3}$       ۴)  $-\frac{2}{3}$

پاسخ: **۳**

چون حاصل حد عدد غیر صفر شده، پس بزرگترین توان صورت و مخرج یکسان است

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|x^2 - 4|}{ax^2 - x + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4}{ax^2 - x + 2} \approx \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{ax^2} = \frac{1}{a} = -1 \Rightarrow a = -1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{|x^2 - 4|}{-x^2 - x + 2} = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{x^2 - 4}{-x^2 - x + 2} = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{(x-2)(x+2)}{-(x-1)(x+2)} = \frac{-2-2}{-(-2-1)} = \frac{-4}{3}$$

تست ۳۶: نمودار تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{ax+1+\sqrt{4x^2+9}}{3x-2}$  از نقطه  $(2,1)$  می گذرد،  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  کدام است؟ (تجربی-۹۱)

- ۱)  $-\frac{1}{3}$       ۲)  $\frac{1}{3}$       ۳)  $\frac{2}{3}$       ۴) ۱

پاسخ: **۲** چون نمودار تابع f از نقطه  $(2,1)$  می گذرد پس  $f(2) = 1$ :

$$f(2) = 1 \Rightarrow \frac{2a+1+\sqrt{16+9}}{3(2)-2} = 1 \Rightarrow \frac{2a+1+5}{4} = 1 \Rightarrow 2a+6=4 \Rightarrow 2a=-2 \Rightarrow a=-1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x+1+\sqrt{4x^2+9}}{3x-2} \approx \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x+\sqrt{4x^2}}{3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x+2x}{3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{3x} = \frac{1}{3}$$

تست ۳۷: در تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{ax^n+15}{3x-\sqrt{4x^2+15x}}$  اگر  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$  باشد، آن گاه  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  کدام است؟ (تجربی-۹۴)

- ۱) -۶      ۲) -۴      ۳) ۳      ۴) ۵

پاسخ: **۳** چون  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  برابر عددی غیر صفر شده، پس بزرگترین توان صورت با بزرگترین توان مخرج برابر بوده و مقدار آن برابر

است با:  $n=1$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax+15}{3x-\sqrt{4x^2+15x}} \approx \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax}{3x-\sqrt{4x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax}{3x-|2x|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax}{3x+2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax}{5x} = \frac{a}{5} = -1 \Rightarrow a = -5$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-5x+15}{3x-\sqrt{4x^2+15x}} = \frac{0}{0}$$

به دو روش ادامه سؤال حل می شود:

روش اول:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-5x+15}{3x-\sqrt{4x^2+15x}} \times \frac{3x+\sqrt{4x^2+15x}}{3x+\sqrt{4x^2+15x}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-5(x-3)(18)}{\underbrace{9x^2-4x^2-15x}_{5x^2-15x}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-5(x-3)(18)}{5x(x-3)} = \frac{-5 \times 18}{5 \times 2} = -6$$

روش دوم: قاعده هوییتال:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-5x+15}{3x-\sqrt{4x^2+15x}} \stackrel{HOP}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-5}{3-\frac{8x+15}{2\sqrt{4x^2+15x}}} = \frac{-5}{3-\frac{39}{18}} = \frac{-5}{3-\frac{13}{6}} = \frac{-5}{\frac{5}{6}} = -6$$



تست ۳۸: اگر  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax+9}{1-x+\sqrt{x+1}} = 3$  باشد، آن گاه حد این کسر، وقتی  $x \rightarrow 3$  کدام است؟ (تجربی-۹۲)

- ۱ (۱)      ۲ (۲)      ۴ (۳)      ۵ (۴)

پاسخ: چون حد عبارت وقتی  $x \rightarrow +\infty$  برابر عدد غیر صفر شده، پس بزرگترین توان صورت با بزرگترین توان مخرج برابر بوده و

مقدار آن برابر است با: ۱

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax+9}{1-x+\sqrt{x+1}} \approx \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax}{-x} = -a = 3 \Rightarrow a = -3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-3x+9}{1-x+\sqrt{x+1}} = \frac{0}{0}$$

به دوروش ادامه سؤال را حل می‌کنیم:

روش اول:  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{-3(x-3)}{1-x+\sqrt{x+1}} \times \frac{1-x-\sqrt{x+1}}{1-x-\sqrt{x+1}} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-3(x-3)(-4)}{(1-x)^2 - (x+1)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{12(x-3)}{x^2 - 3x} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{12(x-3)}{x(x-3)} = \frac{12}{3} = 4$

روش دوم: قاعده هوییتال:  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{-3x+9}{1-x+\sqrt{x+1}} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-3}{-1 + \frac{1}{2\sqrt{x+1}}} = \frac{-3}{-1 + \frac{1}{4}} = \frac{-3}{-\frac{3}{4}} = 4$

تست ۳۹: اگر  $f(x) = 2x + \sqrt{4x^2 + x}$  باشد، حاصل  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ، کدام است؟ (تجربی-۹۸)

- ۱ (۱)      ۲ (۲)      ۳ (۳)      ۴ (۴)      صفر

پاسخ: طبق نکته ۳ داریم:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x + \sqrt{4x^2 + x} \times \frac{2x - \sqrt{4x^2 + x}}{2x - \sqrt{4x^2 + x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 - (4x^2 + x)}{2x - \sqrt{4x^2 + x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{2x - \sqrt{4x^2 + x}} \approx \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{2x - \sqrt{4x^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{2x - |2x|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{2x - (-2x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{4x} = -\frac{1}{4}$$

تست ۴۰: اگر  $f(x) = x - \sqrt{4x^2 + x}$  باشد، حاصل  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$  کدام است؟ (تجربی خارج-۹۸)

- ۱ (۱)      ۲ (۲)      ۳ (۳)      ۴ (۴)

پاسخ:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \sqrt{4x^2 + x}}{x} \approx \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \sqrt{4x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - |2x|}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - (-2x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{x} = 3$

## ۸-۱۰ پیوستگی

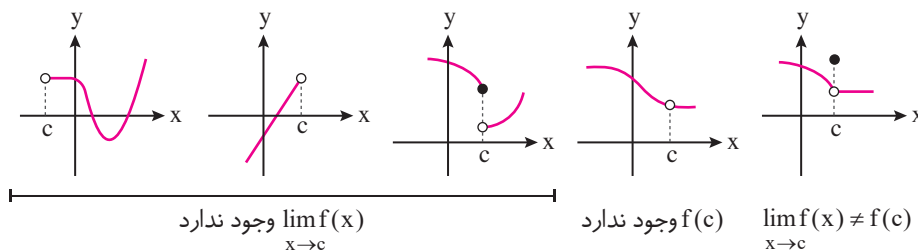
دو نوع پیوستگی را بررسی می‌کنیم:

### ۱-۸-۱۰ پیوستگی در نقطه

تابع  $f$  در نقطه  $x = c$  را پیوسته نامیم؛ هرگاه:  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c) (c \in \mathbb{R})$

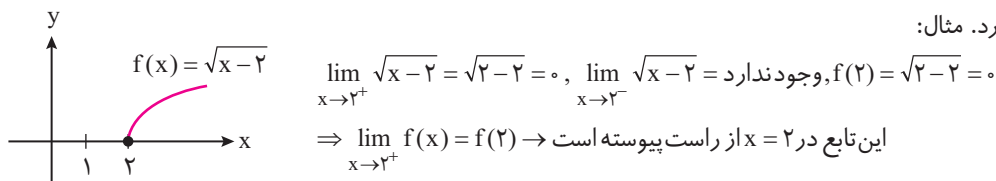
به عبارت دیگر برای آن که تابع  $f$  در  $c$  پیوسته باشد، باید  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$  و  $f(c)$  هر دو موجود و با هم برابر باشند. در غیر این صورت تابع

را در  $c$  ناپیوسته می‌نامیم. نمودارهای زیر همه در نقطه  $c$  ناپیوسته هستند.

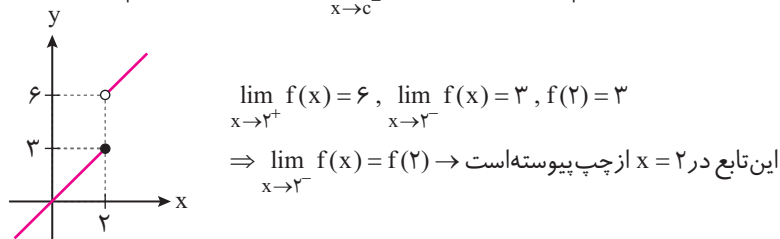




**پیوستگی راست:** تابع  $f$  را در  $x = c$  از طرف راست پیوسته می‌نامیم؛ هرگاه  $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = f(c)$ . در این صورت می‌گوییم  $f$  در  $x = c$  پیوستگی راست دارد. مثال:



**پیوستگی چپ:** تابع  $f$  را در  $x = c$  از طرف چپ پیوسته می‌نامیم؛ هرگاه  $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = f(c)$ . در این صورت می‌گوییم  $f$  در  $x = c$  پیوستگی چپ دارد. مثال:



**نتیجه:** تابع  $f$  در  $x = c$  پیوسته است، هرگاه  $f$  در  $c$ ، هم پیوستگی راست و هم پیوستگی چپ داشته باشد:

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = f(c)$$

فرض کنید تابع  $f$  در یک همسایگی  $x = a$  پیوسته باشد، در این صورت:

الف) اگر  $f(a)$  عددی غیر صحیح باشد، تابع  $y = [f(x)]$  در  $x = a$  پیوسته است.

ب) اگر  $f(a)$  عددی صحیح باشد و در یک همسایگی  $a$ ، تابع  $f$ ، اکیداً صعودی باشد، آنگاه تابع  $y = [f(x)]$  در  $x = a$  فقط از راست پیوسته است.

پ) اگر  $f(a)$  عددی صحیح باشد و در یک همسایگی  $a$ ، تابع  $f$ ، اکیداً نزولی باشد، آنگاه تابع  $y = [f(x)]$  در  $x = a$  فقط از چپ پیوسته است.

تست ۴۱: تابع  $f(x) = [x]$  در نقاط ..... پیوسته و در نقاط ..... ناپیوسته است. (تمرین کتاب درسی)

- (۱)  $\emptyset, \mathbb{R}$       (۲)  $\mathbb{R} - \mathbb{Z}, \mathbb{Z}$       (۳)  $\mathbb{Z}, \mathbb{R} - \mathbb{Z}$       (۴)  $\mathbb{R}, \emptyset$



تست ۴۲: تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x+1} & ; |x| > 1 \\ 2x & ; |x| \leq 1 \end{cases}$ ، از نظر پیوستگی در دو نقطه به طول‌های ۱ و -۱ چگونه است؟

- (۱) در -۱ ناپیوسته، در ۱ ناپیوسته      (۲) در -۱ ناپیوسته، در ۱ پیوسته  
 (۳) در -۱ پیوسته، در ۱ پیوسته      (۴) در -۱ پیوسته، در ۱ ناپیوسته

پاسخ:  $f(x) = \begin{cases} x-1 & ; x > 1 \text{ یا } x < -1 \\ 2x & ; -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$

در  $x = 1$  ناپیوسته است  $\rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) = 1-1 = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x) = 2(1) = 2, \quad f(1) = 2$   
 در  $x = -1$  پیوسته است  $\rightarrow \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} (2x) = 2(-1) = -2, \quad \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} (x-1) = -1-1 = -2, \quad f(-1) = -2$

تست ۴۳: به ازای کدام مقدار  $a$ ، تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} \frac{\cos x - \sqrt{\cos x}}{\sin^2 x} & ; x \neq 0 \\ a & ; x = 0 \end{cases}$  در نقطه  $x = 0$  پیوسته است؟ (تجربی-۹۵)

- (۱)  $-\frac{1}{4}$  (۲)  $-\frac{1}{3}$  (۳)  $\frac{1}{3}$  (۴) هیچ مقدار  $a$

پاسخ:  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sqrt{\cos x}}{\sin^2 x} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sqrt{\cos x}}{\sin^2 x} \times \frac{\cos x + \sqrt{\cos x}}{\cos x + \sqrt{\cos x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - \cos x}{(1 - \cos^2 x)(2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x(\cos x - 1)}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)(2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x(1 - \cos x)}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)(2)} = \frac{-1}{4}$

تست ۴۴: اگر تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{ax+3} & ; x < 1 \\ x^2 + ax & ; x \geq 1 \end{cases}$  در نقطه  $x = 1$  پیوسته باشد،  $f(-\frac{3}{4})$  کدام است؟ (تجربی خارج-۹۷)

- (۱)  $0/5$  (۲)  $1/25$  (۳)  $1/5$  (۴)  $2/5$

پاسخ:  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + ax) = 1 + a$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (\sqrt{ax+3}) = \sqrt{a+3}$  شرط وجود حد در  $x=1$   $\Rightarrow \sqrt{a+3} = 1+a \Rightarrow a+3 = (a+1)^2 \Rightarrow a^2 - 2a - 2 = 0$  حاصل رادیکال (\*) را منفی می کند  $\rightarrow a = -2$  چون  $a = -2$  غقی است چون  $a+b+c=0 \rightarrow a_1 = 1, a_2 = -2$   $\Rightarrow a^2 + 2a + 1 = a + 3 \Rightarrow a^2 + a - 2 = 0$

$\Rightarrow f(-\frac{3}{4}) = \sqrt{-\frac{3}{4} + 3} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2} = 1/5$

تست ۴۵: تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} ax + 2^{x-3} & ; x < 3 \\ a \log_7(1+x) & ; x \geq 3 \end{cases}$  در نقطه  $x = 3$  پیوسته است.  $f(2)$  کدام است؟ (تجربی-۹۷)

- (۱)  $-2$  (۲)  $-1/5$  (۳)  $1$  (۴) صفر

پاسخ:  $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (a \log_7(1+x)) = a \log_7 4 = a \log_7 2^2 = 2a$ ,  $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (ax + 2^{x-3}) = 3a + 2^0 = 3a + 1$  شرط وجود حد در  $x=3$   $\rightarrow 3a + 1 = 2a \Rightarrow a = -1 \Rightarrow f(2) = -2 + 2^{2-3} = -2 + 2^{-1} = -2 + \frac{1}{2} = -1/5$

تست ۴۶: به ازای کدام مقدار  $a$ ، تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} \frac{a+x^3}{|x+2|} & ; x \neq -2 \\ a & ; x = -2 \end{cases}$  در نقطه  $x = -2$  فقط از چپ پیوسته است؟ (تجربی-۹۸)

- (۱)  $-12$  (۲)  $-6$  (۳)  $6$  (۴)  $12$

پاسخ:  $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = f(-2) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{a+x^3}{|x+2|} = \frac{0}{0}$  داخل قدر مطلق به ازای  $x \rightarrow (-2)^-$  منفی می شود

چاق ولاغر  $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{(x+3)(x^2 - 2x + 4)}{-(x+2)} = -12 \Rightarrow a = -12$

تست ۴۷: تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{2|x-2|} & ; x \neq 2 \\ 2 & ; x = 2 \end{cases}$  از نظر پیوستگی در  $x = 2$  چگونه است؟ (تجربی خارج-۹۸)

- (۱) از چپ پیوسته (۲) پیوسته (۳) از چپ ناپیوسته و از راست ناپیوسته (۴) از راست پیوسته

پاسخ:  $f(2) = 2$

تابع در  $x = 2$  از راست پیوسته است.  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{2|x-2|} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x+2)}{2(x-2)} = \frac{4}{2} = 2 = f(2)$

تابع در  $x = 2$  از چپ ناپیوسته  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 4}{2|x-2|} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-2)(x+2)}{-2(x-2)} = \frac{4}{-2} = -2 \neq f(2)$  است.





## ۱۰-۸-۲ پیوستگی در بازه

پیوستگی در بازه  $(a, b)$ : تابع  $f$  روی بازه  $(a, b)$  پیوسته است؛ هرگاه در هر نقطه این بازه پیوسته باشد.



پیوستگی در بازه  $[a, b]$ : تابع  $f$  روی بازه  $[a, b]$  پیوسته است؛ هرگاه در بازه  $(a, b)$  پیوسته و در نقطه  $a$  پیوسته راست و در نقطه  $b$  پیوسته چپ باشد.



پیوستگی در بازه  $(a, b)$ : تابع  $f$  روی بازه  $(a, b)$  پیوسته است؛ هرگاه در بازه  $(a, b)$  پیوسته و در نقطه  $a$  پیوسته راست باشد.



پیوستگی در بازه  $[a, b)$ : تابع  $f$  روی بازه  $[a, b)$  پیوسته است؛ هرگاه در بازه  $(a, b)$  پیوسته و در نقطه  $b$  پیوسته چپ باشد.



۱. به طور کلی اگر نمودار تابع  $f$  در هیچ نقطه‌ای از دامنه تعریفش، بریدگی نداشته باشد، تابع  $f$  را پیوسته می‌نامند.

۲. به طور کلی توابع چند جمله‌ای، رادیکالی، کسری و چندضابطه‌ای، در دامنه خودشان پیوسته‌اند. دقت کنید در توابع چندضابطه‌ای در نقاط مرزی دامنه‌ها خطر ناپیوستگی وجود دارد.

۳. اگر  $D_f = \mathbb{R}$  و  $f$  در هر نقطه از دامنه‌اش پیوسته باشد، می‌گوییم  $f$  روی بازه  $(-\infty, +\infty)$  پیوسته است.



تست ۴۸: اگر تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} ax+b & ; x > 2 \\ x^2+bx-1 & ; x < 2 \end{cases}$  باشد شرط  $f(2) = 5$  بر روی مجموعه اعداد حقیقی پیوسته باشد،  $a$  کدام است؟

(تجربی خارج - ۹۱)

$$-1 \quad (1) \quad 1 \quad (2) \quad 2 \quad (3) \quad 3 \quad (4)$$

پاسخ: تابع  $f$  در همه جا پیوسته است و فقط می‌بایست نقطه مرزی یعنی  $x = 2$  را بررسی کنیم تا در آن نقطه نیز پیوسته باشد:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2a + b, \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2^2 + 2b - 1 = 3 + 2b, f(2) = 5$$

$$\Rightarrow 3 + 2b = 5 \Rightarrow 2b = 2 \Rightarrow b = 1, 2a + b = 5 \xrightarrow{b=1} 2a = 5 - 1 = 4 \Rightarrow a = 2$$

تست ۴۹: به ازای مقادیری از  $a$  و  $b$ ، تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} x[x] & ; |x| < 1 \\ ax+b & ; |x| \geq 1 \end{cases}$  بر روی  $\mathbb{R}$  پیوسته است.  $a \times b$  کدام است؟

$$-\frac{1}{4} \quad (4) \quad -\frac{1}{3} \quad (3) \quad \frac{1}{4} \quad (2) \quad \frac{1}{3} \quad (1)$$

پاسخ: تابع بر روی  $\mathbb{R}$  پیوسته است، پس در نقاط مرزی  $x = 1$  و  $x = -1$  نیز پیوسته است:

$$f(x) = \begin{cases} x[x] & ; -1 < x < 1 \\ ax+b & ; x \geq 1 \text{ یا } x \leq -1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} x[x] = (-1)[(-1)^+] = (-1)(-1) = 1, \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} ax+b = a(-1)+b = -a+b = f(-1)$$

$$\Rightarrow -a + b = 1 \Rightarrow a = b - 1 \quad (I)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} ax+b = a+b = f(1), \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x[x] = 1[1^-] = 1(0) = 0 \Rightarrow a+b = 0 \quad (II)$$

$$\Rightarrow a+b = 0 \xrightarrow{\text{طبق (I) داریم}} \xrightarrow{a=b-1} b-1+b=0 \Rightarrow 2b=1 \Rightarrow b=\frac{1}{2}, a=b-1=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2} \Rightarrow a \times b = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$$



نست ۵۰: به ازای کدام مقدار  $a$ ، تابع باضابطه  $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{\pi}{x} & ; 1 \leq x \leq 6 \\ a + \cos^2 \frac{\pi x}{36} & ; x > 6 \end{cases}$ ، بر روی مجموعه اعداد حقیقی بزرگتر از ۱، پیوسته است؟  
(تجربی-۹۴)

- (۱)  $-\frac{1}{2}$       (۲)  $-\frac{1}{4}$       (۳)  $\frac{1}{4}$       (۴)  $\frac{1}{2}$

پاسخ: حد چپ و راست و مقدار تابع باید در نقطه مرزی  $x=6$  برابر باشند، پس:

$$\lim_{x \rightarrow 6^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 6^+} a + \cos^2 \frac{\pi x}{36} = a + \cos^2 \frac{6\pi}{36} = a + \cos^2 \frac{\pi}{6} = a + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = a + \frac{3}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 6^-} \sin \frac{\pi}{x} = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$f(6) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow a + \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{2} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{4} \Rightarrow a = -\frac{1}{4}$$

# پیوست

در این چند صفحه، می‌توان نکات مهم پایه‌ای و مطالبی را که حس کردم ممکن است، شما عزیزان بلد نباشید، آورده‌ام. این نکات در روند حل تست‌ها بسیار به شما کمک می‌کند و توصیه می‌کنم آن‌ها را خوب فراگیرید.



۱. برخی توان‌های عدد ۲ را حفظ باشید:

$$2^3 = 8, \quad 2^4 = 16, \quad 2^5 = 32, \quad 2^6 = 64, \quad 2^7 = 128, \quad 2^8 = 256, \quad 2^9 = 512, \quad 2^{10} = 1024$$

۲. برخی توان‌های عدد ۳ را حفظ باشید:

$$3^3 = 27, \quad 3^4 = 81, \quad 3^5 = 243, \quad 3^6 = 729$$

۳. برخی توان‌های عدد ۵ را حفظ باشید:

$$5^3 = 125, \quad 5^4 = 625, \quad 5^5 = 3125$$

۴. برخی توان‌های عدد ۶ را حفظ باشید:

$$6^3 = 216, \quad 6^4 = 1296$$

۵. برخی توان‌های عدد ۷ را حفظ باشید:

$$7^3 = 343, \quad 7^4 = 2401$$

۶. تفاوت جذر با مجذور: جذر یعنی رادیکال با فرجه دو و مجذور یعنی توان دوم یک عدد. مثال:

$$4^2 = 16 \leftarrow \text{مجذور} \quad \sqrt{4} = 2 \rightarrow \text{جذر}$$

۷. مجذور اعداد زیر را حفظ باشید:

$$10^2 = 100, \quad 11^2 = 121, \quad 12^2 = 144, \quad 13^2 = 169, \quad 14^2 = 196, \quad 15^2 = 225, \quad 16^2 = 256$$

$$17^2 = 289, \quad 18^2 = 324, \quad 19^2 = 361, \quad 20^2 = 400, \quad 21^2 = 441, \quad 22^2 = 484, \quad 23^2 = 529, \quad 24^2 = 576$$

۸. برای ضرب اعداد دو رقمی یکسان با یکان ۵ کافی است عدد ۲۵ را در سمت راست عدد حاصل نوشته و سمت چپ ۲۵ را از ضرب (+ صدگان) (صدگان) به دست آورید، پس:

$$\begin{array}{r} 2 \\ \times 15 \\ \hline 225 \end{array} \quad \begin{array}{r} 3 \\ \times 25 \\ \hline 625 \end{array} \quad \begin{array}{r} 4 \\ \times 35 \\ \hline 1225 \end{array} \quad \begin{array}{r} 5 \\ \times 45 \\ \hline 2025 \end{array} \quad \begin{array}{r} 6 \\ \times 55 \\ \hline 3025 \end{array}, \dots$$

۹. حاصل کسرهای زیر را حفظ باشید:

$$\frac{1}{4} = 0/25, \quad \frac{1}{5} = 0/2, \quad \frac{1}{8} = 0/125, \quad \frac{3}{8} = 0/375, \quad \frac{3}{4} = 0/75, \quad \frac{5}{4} = 1/25, \quad \frac{7}{4} = 1/75, \quad \frac{9}{4} = 2/25$$

۱۰. حاصل جذرهای روبه‌رو را حفظ باشید:

$$\sqrt{2} = 1/4, \quad \sqrt{3} = 1/7, \quad \sqrt{5} = 2/2$$

۱۱. بهتر است بدانید:

$$\log 2 = 1 - \log 5, \quad \log 5 = 1 - \log 2$$

۱۲. حاصل فاکتوریل‌های روبه‌رو را حفظ باشید:

$$2! = 2, \quad 3! = 6, \quad 4! = 24, \quad 5! = 120, \quad 6! = 720$$

۱۳. حاصل ترکیب‌های روبه‌رو را حفظ باشید:

$$\binom{5}{2} = \binom{5}{3} = 10, \quad \binom{6}{3} = 20, \quad \binom{8}{3} = \binom{8}{5} = 56$$

۱۴. اعداد بخش‌پذیر بر ۲: اعدادی که زوج هستند؛ مثل:

$$4, \quad 6, \quad 112, \quad 1258, \quad \dots$$

۱۵. اعداد بخش‌پذیر بر ۳: اعدادی که مجموع ارقامشان بر ۳ بخش‌پذیر است؛ مثل:

$$12, \quad 126, \quad 1008, \quad \dots$$



۱۶. اعداد بخش‌پذیر بر ۵: اعدادی که یکانشان صفر یا پنج باشد؛ مثل:

۱۰ ، ۱۰۰۵ ، ۳۲۳۵ ، ...

۱۷. اعداد بخش‌پذیر بر ۶: اعدادی که زوج هستند و بر ۳ بخش‌پذیرند؛ مثل:

۱۲ ، ۱۳۳۲ ، ...

۱۸. اعداد اول: اعدادی هستند که فقط بر یک و خودش بخش‌پذیر هستند؛ مثل:

۲ ، ۳ ، ۵ ، ۷ ، ۱۳ ، ۲۳ ، ...

ضمناً عدد ۱، اول نیست.

۱۹. طریقه تبدیل عدد مخلوط به کسر متعارف:

$$a \frac{b}{c} = \frac{(a \times c) + b}{c}$$

۲۰. تفاضل  $a$  از  $b$  یعنی:  $b - a$

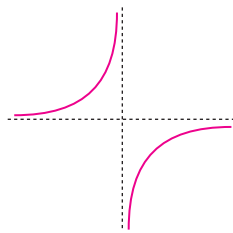
۲۱. اولویت اعمال ریاضی: اول پرانتز، دوم توان، سوم ضرب و تقسیم و چهارم جمع و تفریق

۲۲.  $f^2(x)$  با  $f(x^2)$  متفاوت است. در اولی  $f(x)$  را به توان ۲ می‌رسانیم اما در دومی  $x^2$  را به جای  $x$  ها در  $f(x)$  قرار می‌دهیم.

۲۳. تفکیک کسرها: دقت کنید کسر  $\frac{a}{b+c}$  را نمی‌توان تفکیک کرد، اما کسر  $\frac{a+b}{c}$  را می‌توان تفکیک کرد:

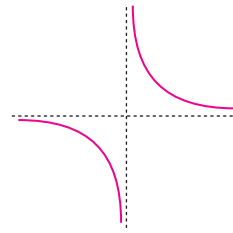
$$\frac{a}{b+c} \neq \frac{a}{b} + \frac{a}{c}, \quad \frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$$

۲۴. در تابع هموگرافیک به صورت  $y = \frac{ax+b}{cx+d}$  دو حالت زیر صادق است:



$$ad - bc > 0$$

(در محدوده تعریف، صعودی است.)



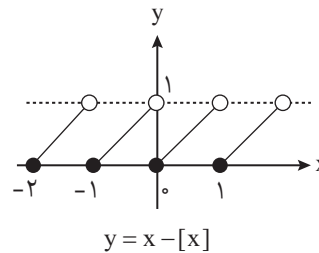
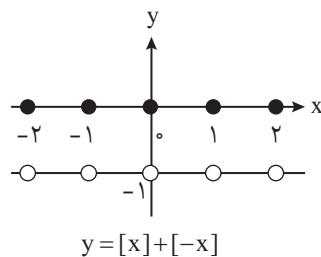
$$ad - bc < 0$$

(در محدوده تعریف، نزولی است.)

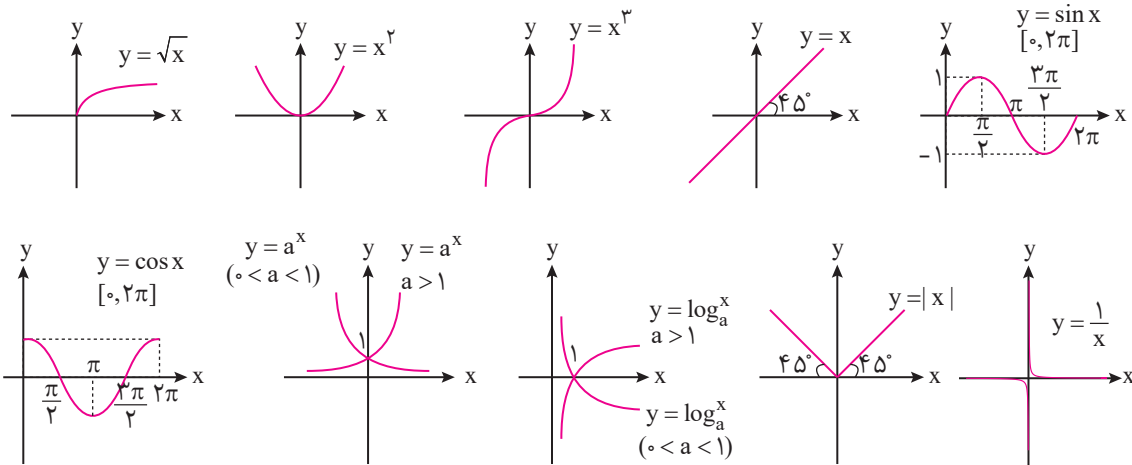
۲۵. دقت کنید که منفی در پشت پرانتز در همه عوامل داخل پرانتز ضرب می‌شود، پس:

$$\frac{1}{x} - \frac{x-1}{3} = \frac{3 - x(x-1)}{3x} = \frac{3 - x^2 + x}{3x}$$

۲۶. دو نمودار رایج در جزء صحیح:



۲۷. نمودارهای زیر را به خاطر مبحث انتقال به خاطر بسپارید:



۲۸. تقسیم چندجمله‌ای بر چندجمله‌ای: برای تقسیم، حتماً در ابتدا جملات مقسوم و مقسوم‌علیه را از بزرگ‌ترین توان به کوچک‌ترین توان بنویسید، یعنی به صورت نزولی مرتب کنید. سپس اولین جمله مقسوم را بر اولین جمله مقسوم‌علیه تقسیم نموده و جواب را در محل خارج قسمت بنویسید و سپس جواب را در مقسوم‌علیه ضرب کرده و علامت آن را عوض کنید و زیر مقسوم بنویسید و با مقسوم جمع کنید و این عمل را آن قدر ادامه دهید تا درجه باقی‌مانده از مقسوم‌علیه کم‌تر شود.

$$\begin{array}{r}
 \text{مقسوم} \\
 \hline
 4x^4 - x^3 + 5 \\
 -4x^4 - 4x^3 \\
 \hline
 -5x^3 + 5 \\
 5x^3 + 5x^2 \\
 \hline
 5x^2 + 5 \\
 -5x^2 - 5x \\
 \hline
 -5x + 5 \rightarrow \text{باقی مانده}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \text{مقسوم‌علیه} \\
 x^2 + x \\
 \hline
 4x^2 - 5x + 5 \rightarrow \text{خارج از قسمت}
 \end{array}$$

$$\Rightarrow (4x^2 - 5x + 5)(x^2 + x) + (-5x + 5) = 4x^4 - x^3 + 5$$

۲۹. به سه‌تایی‌های فیثاغورسی زیر دقت کنید:

$$(3k, 4k, 5k), (\delta k, 12k, 13k), (7k, 24k, 25k), (8k, 15k, 17k) \rightarrow k \in \mathbb{N}$$

۳۰. برای محاسبه تعداد اعداد صحیح بین دو عدد صحیح a و b داریم:

$$\boxed{1} \ a \leq x \leq b \Rightarrow n(x) = b - a + 1 \quad \boxed{2} \ a < x < b \Rightarrow n(x) = b - a - 1 \quad \boxed{3} \ \begin{cases} a \leq x < b \\ a < x \leq b \end{cases} \Rightarrow n(x) = b - a$$

۳۱. برای پیدا کردن ب.م.م و ک.م.م A و B ابتدا A و B را به عوامل اول تجزیه می‌کنیم؛ سپس داریم:

ب.م.م  $\Leftarrow$  حاصل ضرب عوامل مشترک با کم‌ترین توان.

ک.م.م  $\Leftarrow$  حاصل ضرب عوامل مشترک با بیش‌ترین توان در عوامل غیرمشترک.

$$x^2 - 2x - 8 = (x - 4)(x + 2), \quad x^2 + 6x + 8 = (x + 2)(x + 4) \Rightarrow \text{م.م.ب} = (x + 2), \quad \text{م.م.ک} = (x + 2)(x + 4)(x - 4)$$

$$420 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7, \quad 198 = 2 \times 3^2 \times 11 \Rightarrow \text{م.م.ب} = 2 \times 3 = 6 \quad \text{و} \quad \text{م.م.ک} = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 11 = 13860$$

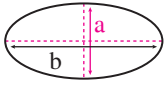
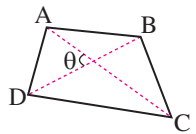
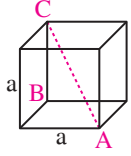
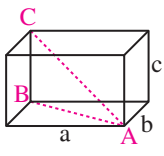
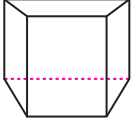
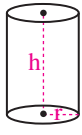
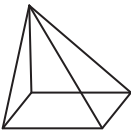
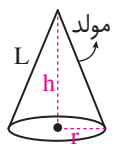
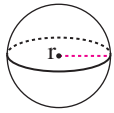
توجه کنید اگر دو عدد، عامل اول مشترک نداشته باشند، ب.م.م برابر ۱ است. ضمناً برای هر دو عدد طبیعی a و b داریم:

$$\text{ب.م.م.ک} = \frac{ab}{\text{ب.م.م.ب}}$$



۳۲. اگر مساحت را با  $S$  و محیط را با  $P$  و حجم را با  $V$  نمایش دهیم، داریم:

$P = 4a$ $S = a^2$ $(\text{قطر}) d = a\sqrt{2}$		مربع	۱
$P = 2(a + b)$ $S = ab$		مستطیل	۲
$P = a + b + c$ $S = \frac{1}{2}a(h_a)$ $S = \frac{1}{2}ab(\sin \theta)$		مثلث	۳
$P = a + 2b$ $S = \frac{1}{2}a(h_a)$		مثلث متساوی الساقین	۴
$P = 3a$ $S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ $(\text{ارتفاع}) h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$		مثلث متساوی الضلاع	۵
$P = 6a$ $S = 6\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)a^2$		شش ضلعی منتظم	۶
$P = a + b + c$ $S = \frac{1}{2}(ab)$		مثلث قائم الزاویه	۷
$P = 2(a + b)$ $S = ah$ $S = ab \sin \theta$		متوازی الاضلاع	۸
$P = 2\pi r$ $S = \pi r^2$		دایره	۹
$P = 4c$ $S = \frac{1}{2}(ab)$ $S = c^2 \sin \theta$		لوزی	۱۰
$P = \text{جمع اضلاع}$ $S = \frac{1}{2} \times (a + b) \times h$		ذوزنقه	۱۱

$S = \pi ab$		بیضی	۱۲
$S = \frac{1}{2} \times AC \times BD \times \sin \theta$		هر چهارضلعی دلخواه	۱۳
<p>(قطر وجه) <math>AB = a\sqrt{2}</math></p> <p>(قطر مکعب) <math>AC = a\sqrt{3}</math></p> <p>جانبی <math>S = 4a^2</math></p> <p>کل <math>S = 6a^2</math></p> <p><math>V = a^3</math></p>		مکعب	۱۴
<p>(قطر وجه) <math>AB = \sqrt{a^2 + b^2}</math></p> <p>(قطر مکعب مستطیل) <math>AC = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}</math></p> <p>کل <math>S = 2(ab + ac + bc)</math></p> <p><math>V = abc</math></p>		مکعب مستطیل	۱۵
<p>ارتفاع <math>\times</math> مساحت قاعده = <math>V</math></p> <p>ارتفاع <math>\times</math> محیط قاعده = <math>S</math> جانبی</p> <p><math>S</math> جانبی + دو برابر قاعده = <math>S</math> کل</p>		منشور	۱۶
<p><math>V = \pi r^2 h</math></p> <p>جانبی <math>S = 2\pi r h</math></p> <p>کل <math>S = 2\pi r^2 + 2\pi r h</math></p>		استوانه	۱۷
<p><math>V = \frac{1}{3} (S \text{ قاعده}) \times h</math></p>		هرم	۱۸
<p><math>V = \frac{1}{3} \pi r^2 h</math></p> <p>جانبی <math>S = \pi r L</math></p>		مخروط	۱۹
<p><math>V = \frac{4}{3} \pi r^3</math></p> <p>کل <math>S = 4\pi r^2</math></p>		کره	۲۰