فصل اول : ماتریس و کاربردها

درس اول : ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها

تعریف : هر جدول مستطیلی از اعداد حقیقی، شامل تعدادی سطر و ستون یک ماتریس نامیده می‌شود. مانند ماتریس : $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۵ \\ ۷ & ۹ & ۱ \end{bmatrix}$

درایه ماتریس : هر عدد حقیقی واقع در هر ماتریس را درایه آن ماتریس می‌نامیم.

مثال : در ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۴ & ۲ & ۷ \\ ۳ & ۱ & ۵ \end{bmatrix}$ درایه سطر دوم ، ستون سوم یعنی $a_{۲۳}=۵$

معرفی چند ماتریس خاص

۱- ماتریس مربعی : ماتریس A را مربعی گویند، هرگاه تعداد سطرها و ستون‌های آن با هم برابر باشند. مانند $A=\begin{bmatrix} ۴ & ۵ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$ که ماتریسی ۲×۲ می‌باشد.

۲- ماتریس سطری : ماتریس A را سطری گویند، هرگاه فقط از یک سطر تشکیل شده باشد. مانند : $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۴ & ۵ \end{bmatrix}_{۱\times۴}$

۳- تعریف قطر اصلی : تمام درایه‌های a_{ij} را قطر اصلی نامند به شرطی که : $i=j$. مانند : $\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{bmatrix}$

۴- ماتریس ستونی : ماتریس A را ستونی گویند، هرگاه فقط از یک ستون تشکیل شده باشد. مانند : $A=\begin{bmatrix} ۳ \\ ۷ \\ ۱ \end{bmatrix}_{۳\times۱}$

۵- ماتریس قطری : یک ماتریس مربعی است که تمام درایه‌های غیر واقع بر قطر اصلی آن صفر باشد.

مانند : $A=\begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ ۰ & ۴ \end{bmatrix}_{۲\times۲}$ و یا $B=\begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}_{۳\times۳}$

۶- ماتریس اسکالر : یک ماتریس قطری است که تمام درایه‌های روی قطر اصلی آن با هم برابر باشند.

مانند : $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}$ و یا $B=\begin{bmatrix} ۴ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۴ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۴ \end{bmatrix}$

۷- ماتریس صفر : ماتریسی است که تمام درایه‌های آن صفر باشند. ماتریس صفر را با $\overline{O}$ نشان می‌دهند. مانند : $\overline{O}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}_{۲\times۲}$

۸- ماتریس واحد یا همانی : ماتریسی اسکالر است که تمام درایه‌های روی قطر اصلی آن عدد یک می‌باشند. ماتریس واحد را با I نشان می‌دهند. مانند : $I=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}_{۳\times۳}$

۱- اگر $A=\begin{bmatrix}1&2&-1\\3&2&1\\-1&-2&4\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}2&3\\-1&2\\4&5\end{bmatrix}$ ، ماتریس $A\times B$ را محاسبه کنید. آیا ضرب $B\times A$ امکان‌پذیر است.	۱/۵
۲- اگر $A=\left[a_{ij}\right]_{3\times4}$ و $a_{ij}=\begin{cases}i+j & i>j\\7 & i=j\\i^2 & i<j\end{cases}$ ، ماتریس A را با درایه‌هایش مشخص کنید .	۱
۳- اگر $\begin{bmatrix}2&x&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\x&1\\-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=14$ باشد ، مقدار x چقدر است ؟	۱/۵
۴- دستگاه $\begin{cases}2x+y=4\\7x+4y=15\end{cases}$ را به روش ماتریس وارون حل کنید.	۱/۵
۵- دترمینان ماتریس $A=\begin{bmatrix}2&3&4\\-3&2&1\\3&2&5\end{bmatrix}$ را یکبار به روش « ساروس» و بار دیگر به روش بسط نسبت به یک سطر یا ستون دلخواه بیابید.	۲
۶- اگر $\begin{vmatrix}2&3&x\\1&2&4\\3&1&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x&1\\-1&5\end{vmatrix}$ باشد. مقدار x را بیابید.	۱/۵
۷- به ازای چه مقادیری از k دستگاه $\begin{cases}kx+3y=4\\x-2y=3\end{cases}$ یک دسته جواب منحصر به فرد دارد ؟	۱
۸- اگر A ماتریس 3×3 باشد و $\lvert A\rvert=5$ در این صورت حاصل $\big\lvert\, \lvert A\rvert . A\big\rvert$ را بیابید.	۱
۹- نقاط A ، B و C در صفحه مفروضند. نقطه‌ای بیابید که از نقاط A و B به یک فاصله و از نقطه C به فاصله ۳ سانتی‌متر باشد.	۱/۵
۱۰- معادله دایره‌ای را بنویسید که $O\ (0,1)$ مرکز آن بوده و روی خط به معادله $x+y=2$ وتری به طول $2\sqrt{2}$ جدا کند.	۱/۵
۱۱- وضعیت دوایر $x^2+y^2-2x+2y=0$ و $x^2+y^2+2x-2y=0$ چگونه است ؟	۲
۱۲- معادله دایره‌ای را بنویسید که خطوط $x+y=1$ و $x-y=3$ شامل قطرهایی از آن بوده و خط $4x+3y=6$ بر آن مماس باشد.	۲
۱۳- جاهای خالی را با عبارتی مناسب پر کنید : الف) .... ، مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو سر پاره خط AB به یک فاصله است. ب) .... ، مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو ضلع زاویه به یک فاصله است.	۱
۱۴- وضعیت خط $x+y=1$ را نسبت به دایره $x^2+y^2-2x-2y=2$ مشخص کنید.	۱
جمع	۲۰

-۱

$$A\times B=\begin{bmatrix}1&2&-1\\3&2&1\\-1&-2&4\end{bmatrix}_{3\times3}\begin{bmatrix}2&3\\-1&2\\4&5\end{bmatrix}_{3\times2}=\begin{bmatrix}(1\times2)+2(-1)+4(-1) & (1\times3)+(2\times2)+5(-1)\\(3\times2)+2(-1)+1(4) & (3\times3)+(2\times2)+1(5)\\(-1\times2)+(-2\times-1)+4(4) & (-1\times3)+(-2\times2)+(4\times5)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-4&2\\8&18\\16&13\end{bmatrix}_{3\times2}$$

$B\times A$ امکان‌پذیر نیست زیرا : $\underset{3\times2}{B}\times\underset{3\times3}{A}$ ، $2\neq3$

-۲

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\end{bmatrix}_{3\times4}=\begin{bmatrix}7&1&1&1\\3&7&4&4\\4&5&7&9\end{bmatrix}_{3\times4}$$

-۳

$$\begin{bmatrix}2&x&-1\end{bmatrix}_{1\times3}\begin{bmatrix}1&2\\x&1\\-1&2\end{bmatrix}_{3\times2}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2(1)+x^2+1 & 4+x-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x^2+3 & x+2\end{bmatrix}_{1\times2}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}_{2\times1}=14$$

$$x^2+3+2x+4=14 \Rightarrow x^2+2x-7=0 \Rightarrow \Delta=b^2-4ac=4-4(1)(-7)=4+28=32$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2\pm4\sqrt{2}}{2}=-1\pm2\sqrt{2}$$

-۴

$$\begin{cases}2x+y=4\\7x+4y=15\end{cases}\Rightarrow\begin{bmatrix}2&1\\7&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\15\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1\\7&4\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}4\\15\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\frac{1}{2\times4-1\times7}\begin{bmatrix}4&-1\\-7&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\15\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&-1\\-7&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\15\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\times4-1\times15\\-7\times4+2\times15\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$$

-۵ روش ساروس :

$$A=\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&k\end{bmatrix}\Rightarrow|A|=\left|\begin{matrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&k\end{matrix}\right|\begin{matrix}a&b\\d&e\\g&h\end{matrix}\Rightarrow|A|=(aek+bfg+cdh)-(ceg+afh+bdk)$$

$$A=\begin{bmatrix}2&3&4\\-3&2&1\\3&2&5\end{bmatrix}\Rightarrow|A|=\left|\begin{matrix}2&3&4\\-3&2&1\\3&2&5\end{matrix}\right|\begin{matrix}2&3\\-3&2\\3&2\end{matrix}\Rightarrow|A|=(20+9-24)-(24+4-45)=5-(-17)=22$$

$$A=\begin{bmatrix}2&3&4\\-3&2&1\\3&2&5\end{bmatrix}\Rightarrow|A|=(-1)^{1+1}\times2\begin{vmatrix}2&1\\2&5\end{vmatrix}+(-1)^{1+2}\times3\begin{vmatrix}-3&1\\3&5\end{vmatrix}+(-1)^{1+3}\times4\begin{vmatrix}-3&2\\3&2\end{vmatrix}$$

$$=2(10-2)-3(-15-3)+4(-6-6)=16+54-48=22$$

ادامه دارد ...