

کتابخانه
مرشد

کتاب کنکور

ریاضی پایا جامع

(دهم . یازدهم . دوازدهم)

از مجموعه **مرشد**

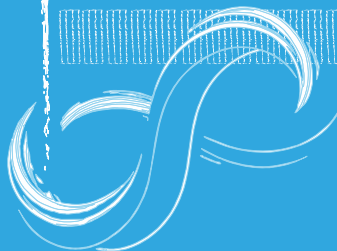
رشته علوم تجربی

حمیدرضا بیات

سعید بیاتی

مرتضی خمایی ابدی

کیان کریمی خراسانی



بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

به نام خداوند جان و فر

کزین برتر اندیشه برنگذرد

دانش آموزان عزیز، داوطلبان کنکور

نظام آموزشی بار دیگر تغییر کرد، به سال پایانی خود یعنی کلاس دوازدهم رسید و نگرانی‌ها آغاز شد! ما هم به سهم خود در انتشارات مبتکران تلاش می‌کنیم نگرانی‌های شما را با تألیف و انتشار کتاب‌های مناسب کاهش دهیم. مخصوصاً نگرانی‌های آن دسته از دانش‌آموزان که اصرار دارند رتبه‌های عالی را در کنکور سراسری به دست آورند و در بهترین رشته‌ها و بهترین دانشگاه‌ها پذیرفته شوند. اگر شما جزو این دسته از افراد هستید که به رتبه پایین راضی نمی‌شوید مطالعه **«کتاب‌های کنکور مرشد»** را از دست ندهید.

تغییرات کتاب‌های ریاضی نظام جدید آن‌چنان فاحش است که عملاً کتاب‌های کنکور گذشته قابل استفاده نیست. برای تألیف کتاب **«ریاضی جامع پایا»** از مجموعه **«مرشد»** مؤلفان محترم، کتاب‌های نظام جدید را با کتاب‌های نظام قدیم خط به خط مطابقت داده‌اند و مفاهیمی را که حذف و اضافه شده‌اند با دقت فراوان استخراج کرده‌اند. این حذف‌ها و اضافه‌ها نشان می‌دهند که نظام جدید از روی چه نکاتی تأکید خود را برداشته و بر چه نکاتی تأکید بیشتری می‌کند و نگرش طراحان سؤالات کنکور آینده چگونه خواهد بود.

در این کتاب تجربه چندین ساله مؤلفان و دقت نظر آنها را در تشخیص تغییر نگرش طراحان نظام آموزشی، در انتخاب تست از کنکورهای قدیمی و تألیف تست‌های جدید مشاهده خواهید کرد.

مؤلفان **«ریاضی جامع مرشد»**، پس از ارائه درس‌نامه، بانک سؤال کاملی را در اختیار شما قرار می‌دهند که شامل پرسش‌های چهارگزینه‌ای کنکور، مسائل معتبر ریاضی و پرسش‌های تألیفی است. این پرسش‌ها به فصل‌ها و بخش‌های مختلف طبقه‌بندی شده‌اند. مطالعه پاسخ‌نامه تشریحی همراه با نکته‌های کلیدی و آموزنده، موفقیت شما را در کنکور تسهیل خواهد کرد.

در پایان وظیفه خود می‌دانیم از مؤلفان محترم این کتاب، آقایان:

حمیدرضا بیات، سعید بیاتی، مرتضی خمامی ابدی و کیان کریمی خراسانی و دبیر محترم مجموعه

مهندس هادی عزیززاده که کتاب زیر نظر ایشان تألیف شده است، سپاسگزاری کنیم.

همچنین از خانم‌ها سپیده خداوردی (حروفچین و صفحه‌آرا)، نسرين صفری، بهاره خدای (گرافیک‌ها) و

مینا هرمزی (طراح جلد) بسیار سپاسگزاریم و برای همه این عزیزان آرزوی موفقیت می‌کنیم.

انتشارات مبتکران

فصل اول

تابع ۷
 پاسخنامه پرسش‌های فصل اول ۵۶۲

فصل دوم

مثلثات ۹۱
 پاسخنامه پرسش‌های فصل دوم ۶۱۲

فصل سوم

حد و پیوستگی ۱۴۹
 پاسخنامه پرسش‌های فصل سوم ۶۵۸

فصل چهارم

مشتق ۱۹۹
 پاسخنامه پرسش‌های فصل چهارم ۷۰۸

فصل پنجم

کاربردهای مشتق ۲۳۵
 پاسخنامه پرسش‌های فصل پنجم ۷۲۲

فصل ششم

هندسه یازدهم ۲۵۹
 پاسخنامه پرسش‌های فصل ششم ۷۴۵

فصل هفتم

هندسه دوازدهم ۲۹۵
 پاسخنامه پرسش‌های فصل هفتم ۷۷۳

فصل هشتم

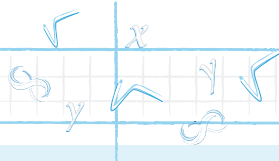
ترکیبیات ۳۲۹
 پاسخنامه پرسش‌های فصل هشتم ۷۹۷

فصل نهم

احتمال ۳۵۱
 پاسخنامه پرسش‌های فصل نهم ۸۱۰

فصل دهم

آمار ۳۹۷
 پاسخنامه پرسش‌های فصل دهم ۸۴۲



فصل یازدهم

۴۱۷ الگو و دنباله
۸۵۰ پاسخنامه پرسش‌های فصل یازدهم

فصل دوازدهم

۴۴۱ محاسبات جبری
۸۶۱ پاسخنامه پرسش‌های فصل دوازدهم

فصل سیزدهم

۴۶۷ معادله درجه ۲ و سهمی
۸۷۶ پاسخنامه پرسش‌های فصل سیزدهم

فصل چهاردهم

۵۰۱ معادلات و نامعادلات
۹۰۳ پاسخنامه پرسش‌های فصل چهاردهم

فصل پانزدهم

۵۲۷ توابع نمائ و لگاریتمی
۹۳۲ پاسخنامه پرسش‌های فصل پانزدهم

کنکور ۹۷

۵۵۵ پرسش‌های کنکور ۹۷
۹۵۰ پاسخنامه پرسش‌های کنکور ۹۷



فصل اول: تشیخ

مقدمات تابع

زوج مرتب

- به دوتایی مانند (a, b) یک زوج مرتب می‌گویند.
- a مؤلفه اول و b مؤلفه دوم است.
- $(a, b) \neq (b, a)$ به عبارتی ترتیب مهم است.
- اگر $(a, b) = (c, d)$ ، آنگاه $a = c$ و $b = d$ است.

تست: اگر زوج مرتب $(2a + 2b, 7a - 4)$ با زوج مرتب $(10, 3)$ برابر باشد، حاصل ab کدام است؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

پاسخ: گزینه ۴

$$(2a + 2b, 7a - 4) = (10, 3) \Rightarrow \begin{cases} 7a - 4 = 3 \\ 2a + 2b = 10 \end{cases} \Rightarrow a = 1, b = 4 \Rightarrow ab = 4$$

رابطه

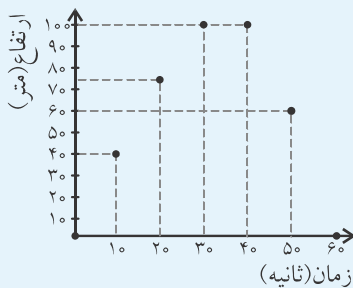
- خیلی از پدیده‌های اطراف ما با یکدیگر ارتباط دارند. برای مثال پدیده رشد با زمان در ارتباط است.
- این رابطه‌ها را می‌توان با مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب، جدول، نمودار ون یا نمودار مختصاتی نمایش داد.

مثال: جدول زیر ارتفاع پرواز یک پرنده از سطح زمین را در طی ۱ دقیقه نشان می‌دهد. این رابطه را با زوج‌های مرتب، نمودار ون و نمودار مختصاتی نشان دهید.

زمان (ثانیه)	۰	۱۰	۲۰	۳۰	۴۰	۵۰	۶۰
ارتفاع (متر)	۰	۴۰	۷۵	۱۰۰	۱۰۰	۶۰	۰

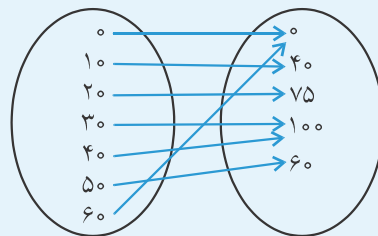
نمودار مختصاتی: $\{(0,0), (10,40), (20,75), (30,100), (40,100), (50,60), (60,0)\}$

نمودار مختصاتی:



پاسخ: زوج مرتب:

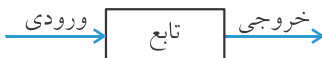
نمودار ون:



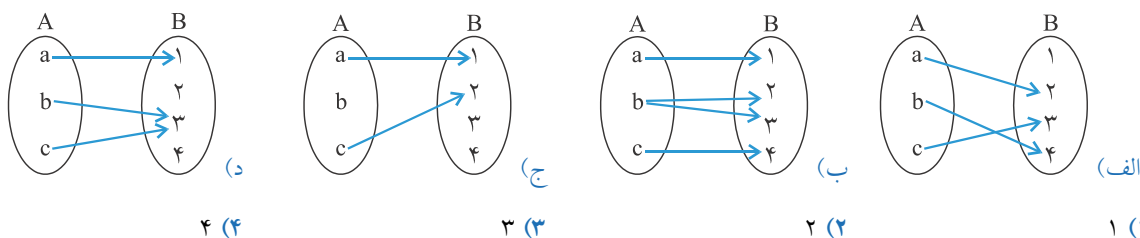
مفهوم تابع

تعریف: یک تابع از مجموعه A به مجموعه B ، رابطه‌ای بین این دو مجموعه است که در آن به هر عضو از A دقیقاً یک عضو از B نظیر می‌شود.

نکته: تابع به عنوان ورودی و خروجی: به عبارتی اگر عضوی که از A انتخاب می‌شود را «ورودی» بنامیم و عضوی که از B انتخاب می‌شود را «خروجی» بنامیم. زمانی یک رابطه، تابع است که به ازای یک ورودی فقط یک خروجی وجود داشته باشد.



تست: چند تا از نمودارهای زیر یک تابع از A به B را مشخص می‌کند؟



پاسخ: گزینه (الف)

نکته: روش تشخیص تابع بودن از روی نمودار: اگر از یک عنصر از مجموعه اولی (دامنه) به مجموعه دوم (بُرد) دو پیکان یا بیش‌تر خارج شود یا پیکانی خارج نشده باشد، آن رابطه تابع نیست.

گزینه (الف) تابع هست چون از هر عضو مجموعه اول دقیقاً یک پیکان خارج شده است.

گزینه (ب) تابع نیست چون از b دو پیکان خارج شده است.

گزینه (ج) تابع نیست چون از b پیکانی خارج نشده است.

گزینه (د) تابع هست چون از هر عضو مجموعه اول دقیقاً یک پیکان خارج شده است.

نکته: تابع به عنوان زوج مرتب: اگر یک رابطه به صورت مجموعه زوج‌های مرتب داده شده باشد، هنگامی این مجموعه تابع است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی در آن دارای مؤلفه اول برابر نباشند.

$$A = \{(1, 2), (3, 4), (5, 4)\}$$

برای مثال رابطه A تابع است و رابطه B تابع نیست.

$$B = \{(1, 2), (3, 4), (5, 4), (1, 3)\} \Rightarrow \text{وجود زوج‌های مرتب } (1, 2) \text{ و } (1, 3) \text{ نشان می‌دهد که } B \text{ تابع نیست}$$

مثال: a را طوری به دست آورید که رابطه $A = \{(1, 2), (3, 2a), (3, a-7)\}$ تابع باشد.

$$\left. \begin{array}{l} (3, 2a) \\ (3, a-7) \end{array} \right\} \Rightarrow 2a = a-7 \Rightarrow a = -7$$

پاسخ:

تست: اگر $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{2, 3, 4\}$ در این صورت چند تا از روابط زیر تابعی از A به B می‌باشد؟

$$f_3 = \{(1, 3), (2, 4), (1, 2)\} \quad \text{(ج)}$$

۳ (۴)

$$f_2 = \{(1, 2), (2, 4), (3, 2)\} \quad \text{(ب)}$$

۲ (۳)

$$f_1 = \{(1, 2), (3, 3)\} \quad \text{(الف)}$$

۱ (۲)

۰ (۱)

پاسخ: گزینه (الف)

نکته: روش تشخیص تابع بودن از روی زوج مرتب: اگر تک تک اعضای دامنه در مؤلفه‌های اول زوج مرتب‌ها وجود نداشته باشند و یا اینکه مؤلفه‌های اول دو زوج مرتب یکسان باشد ولی مؤلفه‌های دوم یکسان نباشد، آن رابطه تابع نیست.

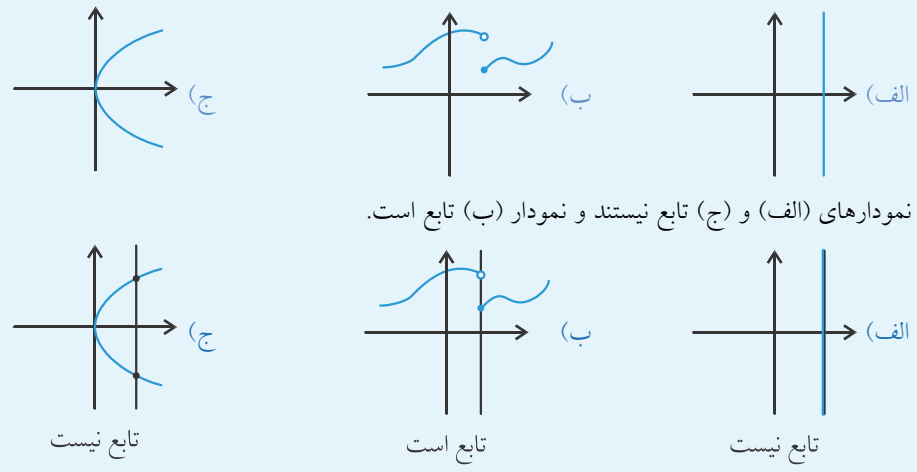
گزینه (الف) تابع نیست. زیرا اعضای دامنه $A = \{1, 2, 3\}$ هستند ولی زوج مرتبی با مؤلفه اول ۲ وجود ندارد و این یعنی رابطه f_1 به عضو ۲ از مجموعه A هیچ عضوی از مجموعه B را نسبت نمی‌دهد.

گزینه (ب) تابع است. چون هر دو شرط تابع بودن را داراست.

گزینه (ج) تابع نیست. زیرا مؤلفه‌های اول دو زوج مرتب $(1, 2)$ و $(1, 3)$ یکسان هستند در صورتی که مؤلفه‌های دوم آنها یکسان نیست.

نکته: تشخیص تابع بودن از روی نمودار مختصاتی: اگر نمودار یک رابطه داده شده باشد، هنگامی این نمودار یک تابع است که هر خط موازی محور عرض‌ها نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

مثال: تابع بودن و یا تابع نبودن هر کدام از نمودارهای زیر را مشخص کنید.



پاسخ: نمودارهای (الف) و (ج) تابع نیستند و نمودار (ب) تابع است.

دامنه و برد توابع از روی جدول، زوج مرتب، نمودار ون و نمودار مختصاتی

زوج مرتب

نکته: دامنه و برد توابع از روی جدول: مجموعه همه مقادیری که در قسمت بالایی جدول قرار گرفته‌اند را دامنه تابع می‌گویند و مجموعه همه مقادیری که در قسمت پائینی جدول قرار گرفته‌اند را برد تابع می‌گویند.

مثال: دامنه و برد تابع زیر را از روی جدول آن بنویسید.

ورودی	۱	۲	۳	۴
خروجی	۳	۲	۳	۲

برد تابع = {۲, ۳} و دامنه تابع = {۱, ۲, ۳, ۴}

پاسخ:

نکته: دامنه و برد توابع از روی زوج مرتب: مجموعه همه مؤلفه‌های اول زوج مرتب تشکیل‌دهنده یک تابع را دامنه و مجموعه همه مؤلفه‌های دوم زوج‌های مرتب تشکیل‌دهنده یک تابع را برد تابع می‌نامند.

مثال: دامنه و برد تابع زیر را از روی زوج مرتب‌های آن بنویسید.

$f = \{(1, 2), (3, 4), (5, 4)\}$

برد تابع $f = R = \{2, 4\}$ و دامنه تابع $f = D = \{1, 3, 5\}$

پاسخ:

تست: مجموع عضوهای مجموعه برد تابع $f = \{(1, 2), (a, 2b+1), (3, 5), (1, a-1)\}$ کدام است؟

- ۴ (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴)

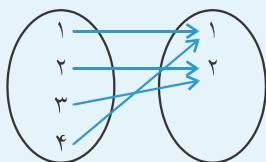
پاسخ: گزینه ۲

f تابع است. بنابراین باید داشته باشیم:

$a-1=2 \Rightarrow a=3$ جایگذاری $\rightarrow f = \{(1, 2), (3, 5)\} \Rightarrow R_f = \{2, 5\} \Rightarrow$ مجموع اعضا $= 2+5=7$
 $2b+1=5 \Rightarrow b=2$

نکته: دامنه و برد توابع از روی نمودار ون: مجموعه همه عضوهای مجموعه اول که پیکان‌ها از آن خارج می‌شوند را دامنه و مجموعه همه عضوهای مجموعه دوم را برد می‌نامند.

مثال: دامنه و برد تابع زیر را از روی نمودار آن بنویسید.

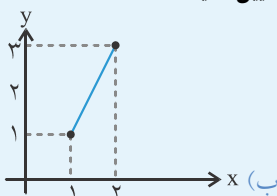


برد تابع = $\{1, 2\}$ و دامنه تابع = $\{1, 2, 3, 4\}$

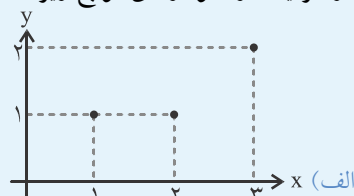
پاسخ:

نکته: دامنه و برد توابع از روی نمودار: تصویر نمودار روی محور x ها را دامنه و تصویر نمودار روی محور y ها را برد می‌نامند.

مثال: در هر یک از نمودارهای توابع زیر دامنه و برد را تعیین کنید.



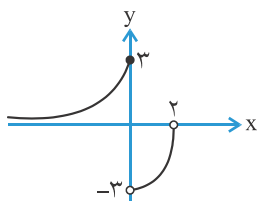
برد = $\{1, 2\}$ و دامنه (الف) = $\{1, 2, 3\}$



برد = $\{x \mid 1 \leq x \leq 3\} = [1, 3]$ و دامنه (ب) = $\{x \mid 1 \leq x \leq 2\} = [1, 2]$

پاسخ:

تست: اگر نمودار تابع f به شکل روبه‌رو باشد، برد تابع f کدام است؟



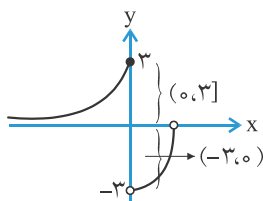
(۱) $(-\infty, 3]$

(۲) $(-3, 3]$

(۳) $\mathbb{R} - (-3, +\infty)$

(۴) $(-3, 0) \cup (0, 3]$

پاسخ: گزینه ۴



$$(-3, 3] - \{0\} = (-3, 0) \cup (0, 3]$$

ضابطه

مثال: با توجه به جدول زیر $f(1), f(2), f(3), f(4)$ و $f(4)$ را به دست آورید.

x	۱	۲	۳	۴
$f(x)$	۲	۴	۶	۸

پاسخ:

$$f(1) = 2, f(2) = 4, f(3) = 6, f(4) = 8$$

توجه کنید تمام خروجی‌های بالا، دو برابر ورودی هستند. این تابع را می‌توان به صورت مقابل هم نمایش داد:

$$\begin{cases} f(x) = 2x \\ x \in \{1, 2, 3, 4\} \end{cases}$$

نکته: گاهی اوقات یک تابع را می‌توان برحسب یک عبارت جبری از یک متغیر نمایش داد. این گونه نمایش تابع را نمایش جبری یا ضابطه تابع می‌نامند.

تست: اگر $f(x) = 3 + \sqrt{2x}$ ، آنگاه $f(8)$ کدام است؟

(سراسری تیرگی ۸۶)

۸ (۴)

۷ (۳)

۳ (۲)

۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

$$f(x) = 3 + \sqrt{2x} \Rightarrow f(8) = 3 + \sqrt{2 \times 8} = 3 + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$$

توابع همانی و ثابت

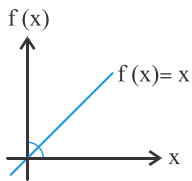
تعریف: تابع همانی: اگر دامنه و برد یک تابع برابر باشند و هر عضو در دامنه دقیقاً به همان عضو در برد نظیر شود، آن تابع را همانی می‌نامند $R_f = D_f$.

مثال: اگر تابع $f\{(3, b-a), (2, b+a), (1, 1)\}$ همانی باشد، a و b را به دست آورید.

پاسخ: چون تابع f همانی است مؤلفه‌های اول و دوم همه زوج‌های مرتب یکی هستند.

$$\begin{cases} (3, b-a) \rightarrow 3 = b-a \\ (2, b+a) \rightarrow 2 = b+a \end{cases} \Rightarrow b = \frac{5}{2}, a = -\frac{1}{2}$$

تذکر: ضابطه تابع همانی را به صورت $f(x) = x$ نشان می‌دهیم.



$$D_f = R_f = \mathbb{R}$$

نکته: نمودار تابع همانی، نیمساز ربع اول یا سوم دستگاه مختصات و یا بخشی از آن است.

نکته: دامنه و برد تابع همانی $f(x) = x$ همه اعداد حقیقی است.

تست: اگر جدول مقابل مربوط به یک تابع همانی باشد، مقدار $\frac{a+b+c}{d}$ کدام است؟

x	a+2	b	3	d ² +2d
f(x)	-9	-6	√c	-1

۴ (۲)

-۴ (۱)

۵ (۴)

-۵ (۳)

پاسخ: گزینه ۲

در یک تابع همانی $f(x) = x$ است.

$$f(a+2) = -9 \Rightarrow a+2 = -9 \Rightarrow a = -11, \quad f(b) = |-6| \Rightarrow b = |-6| = 6 \Rightarrow b = 6$$

$$f(3) = \sqrt{c} \Rightarrow 3 = \sqrt{c} \Rightarrow c = 9$$

$$f(d^2+2d) = -1 \Rightarrow d^2+2d = -1 \Rightarrow d^2+2d+1 = 0 \Rightarrow (d+1)^2 = 0 \Rightarrow d = -1 \Rightarrow \frac{a+b+c}{d} = \frac{-11+6+9}{-1} = \frac{4}{-1} = -4$$

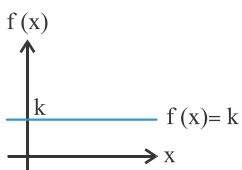
تعریف: تابع ثابت: تابعی است که برد آن تنها شامل یک عضو است.

مثال: اگر تابع $f = \{(-2, 3), (2, a+b), (4, a-b)\}$ ثابت باشد، a و b را به دست آورید.

$$\begin{cases} (4, a-b) \rightarrow a-b = 3 \\ (2, a+b) \rightarrow a+b = 3 \end{cases} \Rightarrow a = 3, b = 0$$

پاسخ: چون تابع f ثابت است. همه مؤلفه‌های دوم برابر با ۳ هستند.

نکته: ضابطه تابع ثابت را به صورت $f(x) = k$ (با فرض $k \in \mathbb{R}$) نشان می‌دهیم.



برای مثال $f(x) = 0$ ، $f(x) = 2$ و $f(x) = -2$ توابعی ثابت هستند.

نکته: نمودار تابع ثابت خطی موازی محور xها و یا بخشی از آن است.

نکته: دامنه تابع ثابت $f(x) = k$ همه اعداد حقیقی است و برد آن عدد ثابت k است. $D_f = \mathbb{R}$ ، $R_f = \{k\}$

توابع خطی

تعریف: هر تابع که بتوان آن را به شکل $f(x) = ax + b$ نمایش داد، یک تابع خطی نامیده می‌شود.

مثال: طول قطر یک مربع را به صورت تابعی از ضلع آن بنویسید. نشان دهید که این تابع، خطی است.

$$\left. \begin{array}{l} \text{طول ضلع مربع} = x \\ \text{قطر مربع} = \sqrt{2}x \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{ضلع مربع} \\ \text{قطر مربع} \end{array} f(x) = \sqrt{2}x$$

پاسخ:

$$f(x) = \sqrt{2}x + 0 \rightarrow \text{یک تابع خطی بر حسب } x \text{ است.}$$

مثال: ضابطه تابعی که از نقاط $(-4, 3)$ و $(0, -3)$ می‌گذرد را به دست آورید. سپس $f(1)$ را محاسبه کنید.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = ax + b \xrightarrow{(-4, 3)} 3 = a(-4) + b \Rightarrow -4a + b = 3 \\ f(x) = ax + b \xrightarrow{(0, -3)} -3 = a(0) + b \Rightarrow b = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow a = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$$

پاسخ:

$$\left. \begin{array}{l} a = -\frac{3}{2} \\ b = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) = -\frac{3}{2}x - 3 \xrightarrow{x=1} f(1) = -\frac{3}{2} - 3 = -\frac{9}{2}$$

نکته: برای به دست آوردن برد یک تابع خطی مانند $f(x) = ax + b$ ، اگر دامنه $[m, n]$ باشد کافی است $f(m)$ و $f(n)$ را به دست بیاوریم. برد برابر با $[f(m), f(n)]$ و یا $[f(n), f(m)]$ است.

تذکر: دامنه f را با D_f و برد f را با R_f نشان می‌دهیم.

مثال: برد توابع خطی زیر را در بازه دامنه $[1, 3]$ به دست آورید.

الف $f(x) = 2x - 1$ **ب** $f(x) = -x + 2$

الف $f(x) = 2x - 1 \xrightarrow{D_f=[1, 3]} f(1) = 1, f(3) = 5 \Rightarrow R_f = [1, 5]$

پاسخ:

ب $f(x) = -x + 2 \xrightarrow{D_f=[1, 3]} f(1) = 1, f(3) = -1 \Rightarrow R_f = [-1, 1]$

نکته: دامنه و برد یک تابع خطی در حالت کلی \mathbb{R} است. $f(x) = ax + b \Rightarrow D_f = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}, R_f = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

تست: اگر f یک تابع خطی باشد به طوری که $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x^3 + 8x^2 + x}{2x^2}$ ، مقدار $f(-6)$ کدام است؟

۱ (۱) ۲ (۳) -۱ (۲) -۲ (۴)

پاسخ: گزینه ۲

تابع خطی به صورت $f(x) = ax + b$ است. پس:

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = a\left(\frac{1}{x}\right) + b \Rightarrow f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = ax + b + a\left(\frac{1}{x}\right) + b \Rightarrow a\left(x + \frac{1}{x}\right) + 2b = \frac{x^3 + 8x^2 + x}{2x^2} = \frac{1}{2}x + 4 + \frac{1}{2x} = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) + 4$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{2}, 2b = 4 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}x + 2 \Rightarrow f(-6) = -1$$

توابع چند جمله‌ای

یک تابع چند جمله‌ای بر حسب متغیر x در حالت کلی است. $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

- دامنه $f(x)$ مجموعه اعداد حقیقی است $D_f = \mathbb{R}$.
- اگر n فرد باشد، برد $f(x)$ برابر با مجموعه اعداد حقیقی است.

مثال: اگر $f(x) = x^3 + x^2 + x + a$ و $f(1) = 4$ باشد؛ $f(-1)$ را به دست آورید.

پاسخ:

$$f(x) = x^3 + x^2 + x + a \xrightarrow{x=1} f(1) = 1 + 1 + 1 + a = 4 \Rightarrow a = 1 \rightarrow f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$$

$$f(x) = x^3 + x^2 + x + 1 \xrightarrow{x=-1} f(-1) = -1 + 1 - 1 + 1 = 0$$

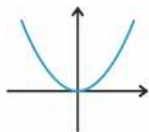
مثال: دامنه و برد تابع $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ را به دست آورید.

پاسخ:

$$D_f = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R} \quad , \quad R_f = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$

تابع درجه دوم

- ضابطه یک تابع درجه دوم در حالت کلی به صورت $f(x) = ax^2 + bx + c$ است، که در آن a, b و c اعداد حقیقی ثابتی هستند و $a \neq 0$ است.
- دامنه این تابع \mathbb{R} (مجموعه اعداد حقیقی) و برد آن زیر مجموعه‌ای از \mathbb{R} می‌باشد.
- به منحنی نمایش این تابع سهمی گفته می‌شود که با توجه به علامت a به یکی از دو حالت مقابل است:



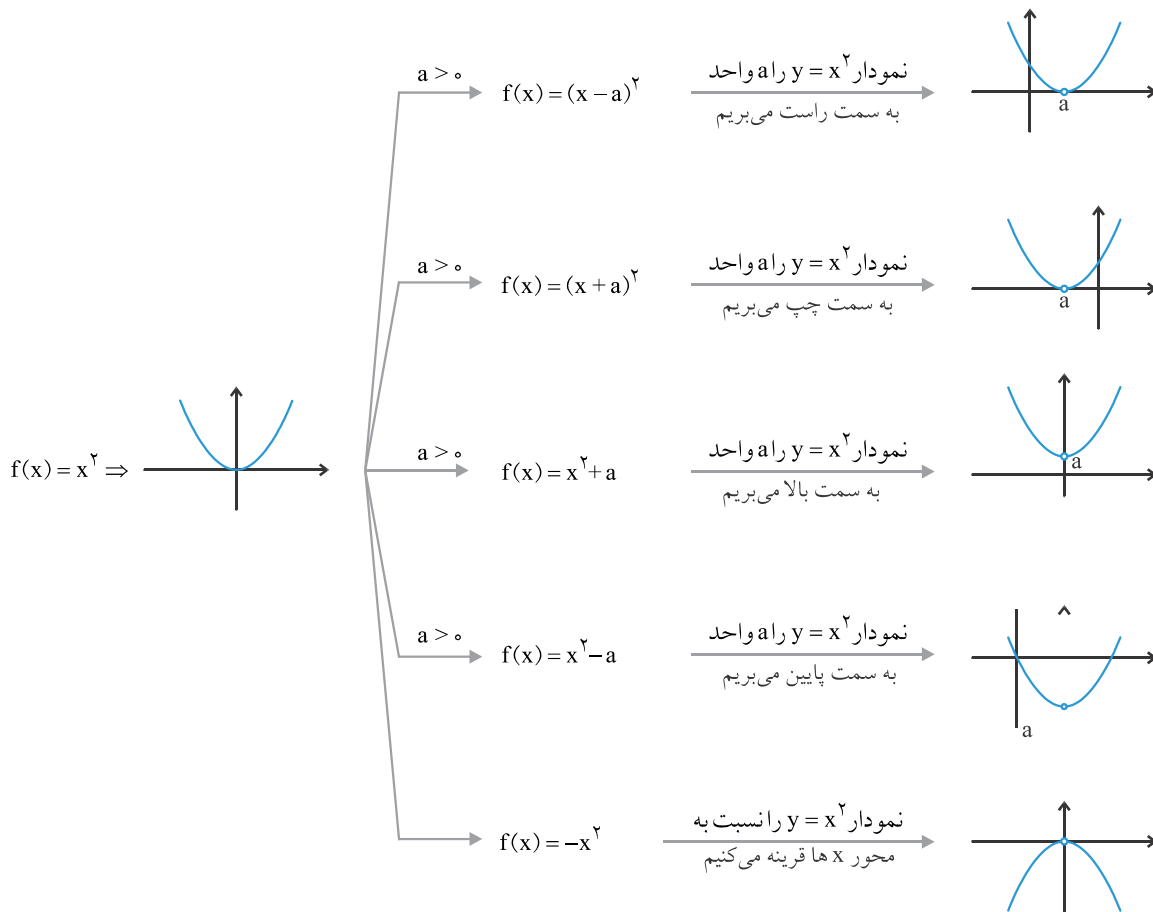
صورت مقابل است:



$$D_f = \mathbb{R} \quad , \quad R_f = [0, +\infty)$$

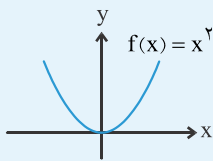
دامنه این تابع \mathbb{R} و برد آن اعداد حقیقی نامنفی است.

رسم منحنی تابع درجه دوم به کمک انتقال تابع $f(x) = x^2$:

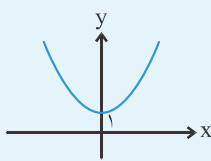


مثال: نمودار توابع زیر را رسم کنید. سپس دامنه و برد هر کدام را به دست آورید.

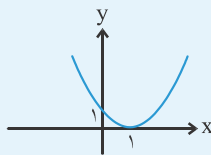
الف $f(x) = x^2 + 1$



ب $f(x) = (x-1)^2$



ج $f(x) = -(x+1)^2 + 1$



پاسخ: الف نمودار $f(x) = x^2$ را یک واحد به بالا انتقال دهید.

$D_f = \mathbb{R}$, $R_f = [1, +\infty)$

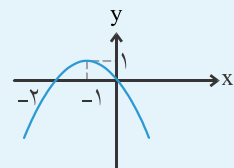
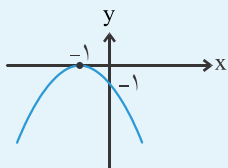
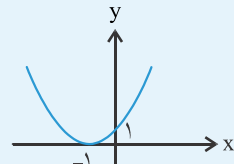
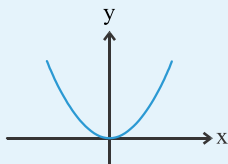
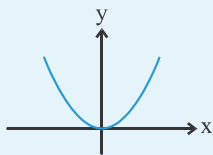
ب نمودار $f(x) = x^2$ را یک واحد به راست انتقال دهید.

$D_f = \mathbb{R}$, $R_f = [0, +\infty)$

ج نمودار $f(x) = x^2$ را یک واحد به چپ انتقال دهید.

سپس نسبت به محور x ها قرینه کنید.

در نهایت یک واحد به بالا انتقال دهید.



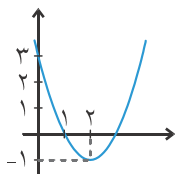
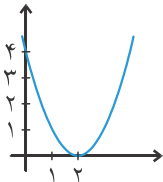
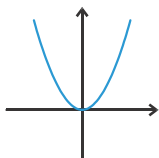
$D_f = \mathbb{R}$, $R_f = (-\infty, 1]$

نکته: ضابطه تابع درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$ را می توان به صورت $y = a(x-x_0)^2 + y_0$ نیز نوشت که با توجه به این معادله به کمک

انتقال می توان نمودار تابع را رسم کرد مثلاً در تابع $f(x) = x^2 - 4x + 3$ داریم:

$f(x) = x^2 - 4x + 4 - 1 = (x-2)^2 - 1$

برای رسم نمودار این تابع باید نمودار تابع $y = x^2$ را دو واحد به سمت راست و یک واحد به سمت پایین بیاوریم:



$y = x^2$

$\rightarrow y = (x-2)^2$

$\rightarrow y = (x-2)^2 - 1$

تست: به ترتیب با کدام انتقال های زیر می توان از نموداری با ضابطه $y = x^2 + 4x + 3$ به نمودار $y = x^2 + 4$ رسید؟

(۲) ۲ واحد به راست و ۵ واحد به بالا

(۱) ۳ واحد به پایین و ۴ واحد به راست

(۴) ۲ واحد به چپ و ۵ واحد به بالا

(۳) ۳ واحد به پایین و ۴ واحد به چپ

پاسخ: گزینه ۲

$y = x^2 + 4x + 3 = x^2 + 4x + 4 - 1 = (x+2)^2 - 1$

$x: x \rightarrow x-2 \Rightarrow y = (x-2+2)^2 - 1 = x^2 - 1$ ۲ واحد به راست

$y: y \rightarrow y-5 \Rightarrow y-5 = x^2 - 1 \Rightarrow y = x^2 + 4$ ۵ واحد به بالا

تابع قدرمطلق

تعریف: تابعی که هر مقدار در دامنه را به قدرمطلق آن در برد نظیر می‌کند، **تابع قدرمطلق** نامیده می‌شود. تابع قدرمطلق را با $f(x) = |x|$ نمایش می‌دهند.

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

تذکره: تابع قدرمطلق را می‌توان به صورت مقابل نشان داد:

مثال: اگر دامنه تابع $f(x) = |x|$ مجموعه $\{-1, 0, 1\}$ باشد برد $f(x)$ را به دست آورید.

پاسخ: $f(x) = |x|$, $f(-1) = |-1| = 1$, $f(0) = |0| = 0$, $f(1) = |1| = 1 \Rightarrow R_f = \{0, 1\}$

آزاد تهرانی (۹۱)

تست: اگر $f(x) = |x| + |x-1|$ ، حاصل $f(\sqrt{3}-1) + f(\sqrt{2}-1)$ کدام است؟

۴ $\sqrt{3} - \sqrt{2}$

۱ (۳)

۲ (۲)

۱ $\sqrt{3} + \sqrt{2}$

پاسخ: گزینه ۲

$$\left. \begin{aligned} f(\sqrt{3}-1) &= |\sqrt{3}-1| + |\sqrt{3}-1-1| = |\sqrt{3}-1| + |\sqrt{3}-2| \xrightarrow{\sqrt{3} \approx 1.7} \sqrt{3}-1+2-\sqrt{3} = 1 \\ f(\sqrt{2}-1) &= |\sqrt{2}-1| + |\sqrt{2}-1-1| = |\sqrt{2}-1| + |\sqrt{2}-2| \xrightarrow{\sqrt{2} \approx 1.4} \sqrt{2}-1+2-\sqrt{2} = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(\sqrt{3}-1) + f(\sqrt{2}-1) = 1+1 = 2$$

مثال: وقتی $1 < x < 3$ ضابطه تابع $f(x) = |x-1| + |x-3|$ را به صورت یک تابع ثابت بنویسید.

پاسخ: $\left. \begin{aligned} 1 < x < 3 \Rightarrow x-1 > 0 \Rightarrow |x-1| = x-1 \\ 1 < x < 3 \Rightarrow x-3 < 0 \Rightarrow |x-3| = 3-x \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(x) = |x-1| + |x-3| = x-1+3-x = 2 \xrightarrow{1 < x < 3} f(x) = 2$

$$f(x) = |x-a| = \begin{cases} x-a & x \geq a \\ a-x & x < a \end{cases}$$

نکته: صورت چندضابطه‌ای تابع $f(x) = |x-a|$ به صورت مقابل است:

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & x \geq 1 \\ 1-x & x < 1 \end{cases}$$

مثال: تابع $f(x) = |x-1|$ را به صورت چندضابطه‌ای بنویسید.

پاسخ:

نکته: اگر بخواهیم تابعی مانند $f(x) = |2x-1|$ را به یک تابع چندضابطه‌ای تبدیل کنیم:

$$2x-1=0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

ریشه‌های عبارت داخل قدرمطلق را به دست می‌آوریم:

ضابطه تابع را به ازای ریشه قدرمطلق $x \geq$ و ریشه قدرمطلق $x <$ به دست می‌آوریم:

$$\left. \begin{aligned} x \geq \frac{1}{2} \Rightarrow |2x-1| = 2x-1 \\ x < \frac{1}{2} \Rightarrow |2x-1| = -2x+1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 2x-1 & x \geq \frac{1}{2} \\ -2x+1 & x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

مثال: تابع‌های زیر را به صورت چندضابطه‌ای بنویسید.

الف $f(x) = -|2x+1| + 2$

ب $f(x) = x + |x|$

الف $2x+1=0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$

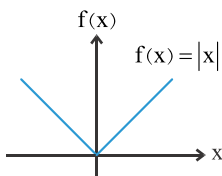
پاسخ:

$$\left. \begin{aligned} x \geq -\frac{1}{2} \Rightarrow |2x+1| = 2x+1 \Rightarrow f(x) = -|2x+1| + 2 = -(2x+1) + 2 \Rightarrow f(x) = -2x+1 \\ x < -\frac{1}{2} \Rightarrow |2x+1| = -2x-1 \Rightarrow f(x) = -|2x+1| + 2 = -(-2x-1) + 2 \Rightarrow f(x) = 2x+3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} -2x+1 & x \geq -\frac{1}{2} \\ 2x+3 & x < -\frac{1}{2} \end{cases}$$

ب

$x = 0$

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0 \Rightarrow |x| = x \Rightarrow f(x) = x + |x| = x + x \Rightarrow f(x) = 2x \\ x < 0 \Rightarrow |x| = -x \Rightarrow f(x) = x + |x| = x - x \Rightarrow f(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 2x & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$



نکته: نمودار تابع $f(x) = |x|$ به صورت روبه‌رو است. هر کدام از نیم‌خط‌ها نیم‌سازهای ناحیه‌ها هستند.

نکته: دامنه $f(x) = |x|$ اعداد حقیقی است و برد آن، اعداد حقیقی نامنفی است.

$D_f = \mathbb{R}, \quad R_f = [0, +\infty)$

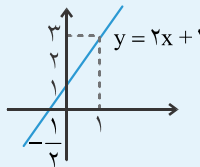
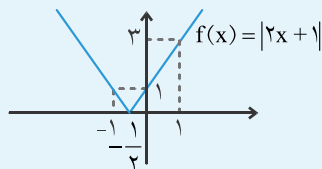
رسم نمودار $f(x) = |ax+b|$

- خط $ax+b$ را رسم می‌کنیم.
- قسمت‌های بالای محور x ها را نگه می‌داریم.
- قسمت‌های پایین محور x ها را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم.

مثال: نمودار $f(x) = |2x+1|$ را رسم کنید.

با استفاده از نمودار $y = 2x+1$ ، نمودار $f(x) = |2x+1|$ را رسم می‌کنیم.

پاسخ: ابتدا نمودار $y = 2x+1$ را رسم می‌کنیم. نمودار $y = 2x+1$ از نقاط $(0,1)$ و $(1,3)$ عبور می‌کند.



انتقال نمودار $|x|$ ($a > 0$)

- برای رسم نمودار $|x-a|$ کافی است نمودار $|x|$ را به اندازه a واحد به سمت راست انتقال دهیم.
- برای رسم نمودار $|x+a|$ کافی است نمودار $|x|$ را به اندازه a واحد به سمت چپ انتقال دهیم.
- برای رسم نمودار $|x|+a$ کافی است نمودار $|x|$ را به اندازه a واحد به بالا انتقال دهیم.
- برای رسم نمودار $|x|-a$ کافی است نمودار $|x|$ را به اندازه a واحد به سمت پایین انتقال دهیم. قوانین بالا برای هر تابع مانند $f(x)$ هم برقرار است.

مثال: نمودارهای تابع‌های زیر را رسم کنید:

الف $f(x) = |x-1|$

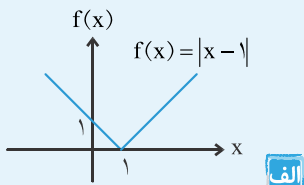
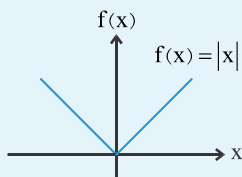
ب $f(x) = |x+2|$

ج $f(x) = |x|+2$

د $f(x) = |x|-1$

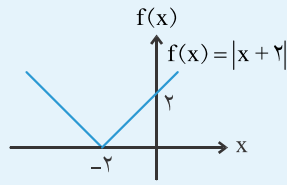
ه $f(x) = |x-1|+2$

پاسخ: ابتدا نمودار $f(x) = |x|$ را رسم می‌کنیم. سپس این نمودار را انتقال می‌دهیم.



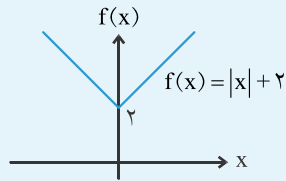
الف

↑ (نمودار $f(x) = |x|$ را یک واحد به راست انتقال می‌دهیم)

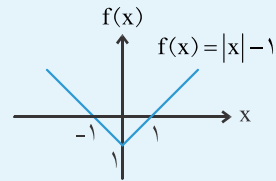


ب

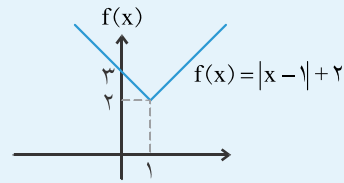
↑ (نمودار $f(x) = |x|$ را دو واحد به چپ انتقال می‌دهیم)



ج (نمودار $f(x) = |x| + 2$ را دو واحد به بالا انتقال می‌دهیم)



د (نمودار $f(x) = |x| - 1$ را یک واحد به پایین انتقال می‌دهیم)

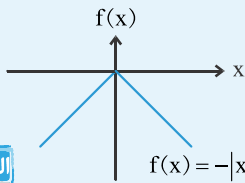


ه (نمودار $f(x) = |x| - 1$ را یک واحد به راست و سپس دو واحد به بالا انتقال می‌دهیم)

- برای رسم نمودار $-|x|$ ، کافی است نمودار $|x|$ را نسبت به محور x ها قرینه کنیم.
- برای رسم نمودار $-f(x)$ ، کافی است نمودار $f(x)$ را نسبت به محور x ها قرینه کنیم.

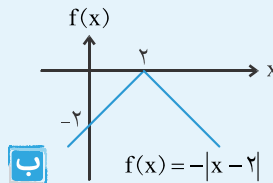
مثال: نمودارهای زیر را رسم کنید:

الف $f(x) = -|x|$



(نمودار $f(x) = |x|$ را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم)

ب $f(x) = -|x - 2|$



پاسخ: ابتدا نمودار $f(x) = |x|$ را دو واحد به راست انتقال می‌دهیم و سپس نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم.

(آزاد تیربی ۱۹)

تست: نمودار تابع $y = |x - 4| - 1$ محورهای مختصات را در چند نقطه قطع می‌کند؟

۳ (۴)

صفر (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

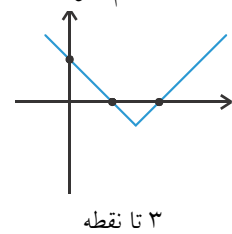
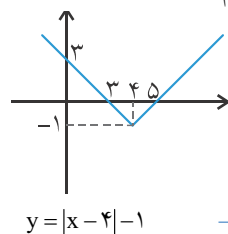
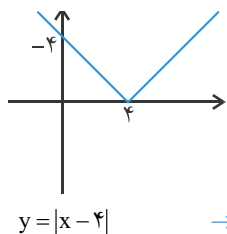
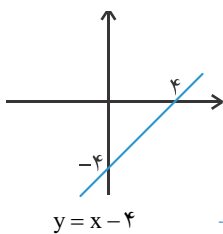
راجل ۱: مختصات نقطه‌های برخورد با محورها را پیدا می‌کنیم:

محل برخورد با محور x ها: $y = 0 \Rightarrow |x - 4| - 1 = 0 \Rightarrow |x - 4| = 1 \Rightarrow x - 4 = 1$ یا $x - 4 = -1 \Rightarrow x = 5$ یا $x = 3 \Rightarrow \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$

محل برخورد با محور y ها: $x = 0 \Rightarrow y = |0 - 4| - 1 \Rightarrow y = 4 - 1 = 3 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

پس در کل، در سه نقطه محورها را قطع می‌کند.

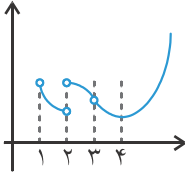
راجل ۲: از رسم نمودار کمک می‌گیریم:



۳ تا نقطه

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

(کتاب درسی)



۷۴۳. در شکل روبه‌رو نمودار تابع f رسم شده است. عبارت کدام گزینه درست نیست؟

(۱) تابع در $x=1$ حد راست دارد.

(۲) تابع در $x=2$ حد ندارد.

(۳) تابع در $x=3$ حد ندارد.

(۴) مقدار تابع در $x=4$ برابر با حد تابع در $x=4$ است.

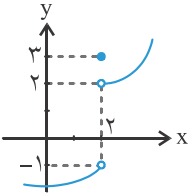
۷۴۴. شکل مقابل نمودار تابع f است. حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) + 2 \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) - f(2)$ کدام است؟

(۱) -۲

(۲) ۰

(۳) -۳

(۴) ۴



۷۴۵. در تابع $f(x) = \sqrt{4-x}$ کدام گزینه درست نیست؟

(۴) $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 1$

(۳) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 0$

(۲) $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 0$

(۱) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$

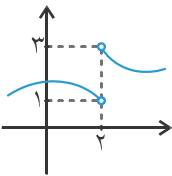
۷۴۶. نمودار تابع f به صورت مقابل است. حاصل $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x+1)$ کدام است؟

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) وجود ندارد



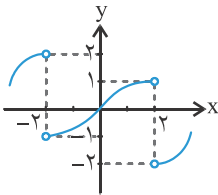
۷۴۷. نمودار تابع f به صورت مقابل است. حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(-x)$ کدام است؟

(۲) ۲

(۱) ۱

(۴) -۲

(۳) -۱



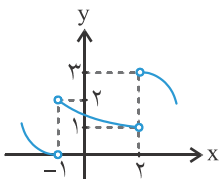
۷۴۸. نمودار تابع f به صورت مقابل است. حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(1-x)$ کدام است؟

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) ۰



۷۴۹. در شکل روبه‌رو نمودار توابع f و g رسم شده‌اند. به ازای کدام مقدار a تابع

$$h(x) = \begin{cases} f(x) + a & x < 2 \\ g(x) - a & x > 2 \end{cases}$$

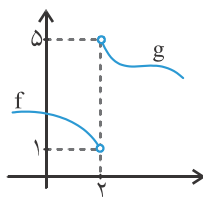
در $x=2$ حد دارد؟

(۲) ۰

(۱) -۲

(۴) ۴

(۳) ۲



۷۵۰. اگر $f(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ -1 & x > 0 \end{cases}$ ، $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ، $f(x)$ کدام است؟

(۲) ۱

(۱) ۲

(۳) ۰

(۴) -۱

۷۵۱. در تابع $f(x) = 2 + \frac{|x-1|}{x-1}$ ، حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ کدام است؟

(۲) ۲

(۱) ۱

(۳) ۳

(۴) موجود نیست

(کتاب درسی)

۷۵۲. تابع با ضابطه $f(x) = x + \frac{|x|}{x}$ را در نظر می‌گیریم، حد راست این تابع چقدر از حد چپ این تابع در $x=0$ بیش‌تر است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴)

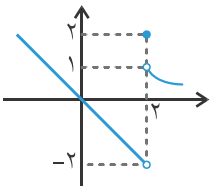
۷۵۳. حد تابع $f(x) = \begin{cases} 2x-4 & x > 3 \\ x^2-3x+2 & x < 3 \end{cases}$ وقتی که $x \rightarrow 3$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) -۱ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) وجود ندارد.

۷۵۴. در تابع $f(x) = \left[\frac{x}{2} \right]$ حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ کدام است؟

- ۱ (۱) -۱ (۲) ۰ (۳) ۲ (۴)

۷۵۵. در شکل مقابل نمودار تابع f رسم شده است. حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) + f(2)$ کدام است؟

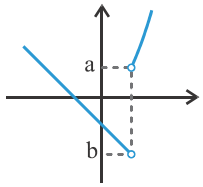


- ۱ (۱) -۱ (۲) ۲ (۳) -۲ (۴)

۷۵۶. در تابع $f(x) = \begin{cases} x^2-4x+5 & x > 2 \\ 1-x & x \leq 2 \end{cases}$ حاصل $\frac{\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)}{\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)}$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴)

۷۵۷. نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & x > 1 \\ -x-1 & x < 1 \end{cases}$ به شکل مقابل است. مقدار $\frac{b}{a}$ کدام است؟



- ۱ (۱) $-\frac{3}{2}$ ۲ (۲) -۲ ۳ (۳) $-\frac{5}{2}$ ۴ (۴) -۳

۷۵۸. تابع $f(x) = \begin{cases} 3-x & x > 1 \\ a & x < 1 \end{cases}$ را داریم. به ازای کدام مقدار a ، حد تابع در $x=1$ موجود است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۵ (۳) ۷ (۴)

۷۵۹. حاصل $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$ در تابع $f(x) = \begin{cases} 2 & x \in \mathbb{Z} \\ x & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z} \end{cases}$ کدام است؟

- ۱ (۱) -۲ (۲) ۲ (۲) -۴ (۳) ۴ (۴)

(کتاب درسی)

۷۶۰. حاصل حد چپ تابع $f(x) = \frac{x}{\lfloor x^2 \rfloor - 1}$ در نقطه $x = \sqrt{2}$ کدام است؟

- ۱ (۱) $\sqrt{2}$ ۲ (۲) -۲ ۳ (۳) $-\sqrt{2}$ ۴ (۴) وجود ندارد

۷۶۱. حاصل $\lim_{x \rightarrow 1^+} [x - x^2]$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۰ (۲) -۱ (۳) -۲ (۴)

۷۶۲. حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} x + \frac{|x|}{x}$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۰ (۲) -۱ (۳) ۴ (۴) وجود ندارد

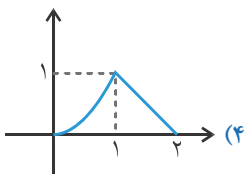
۷۶۳. حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2-4}{x-2} + \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x-1|}{x-1}$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۳ (۲) ۵ (۳) ۷ (۴)

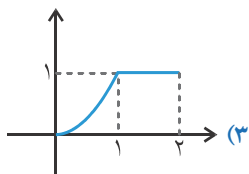
۷۶۴. می‌دانیم a عددی صحیح است. با فرض $f(x) = x - [x]$ حاصل $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) -۱ (۳) -۲ (۴)

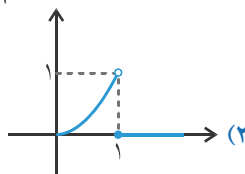
۷۶۵. نمودار تابع $f(x) = x^2(1-[x])$ در همسایگی ۱ شبیه کدام گزینه است؟



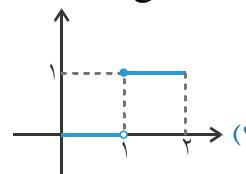
(۴) وجود ندارد



(۳) ۰



(۲) ۲



(۱) ۱

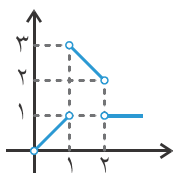
۷۶۶. حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} x[x]$ کدام است؟

۷۶۷. حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} [x] \cdot [x+1]$ کدام است؟

(۱) ۱
(۲) -۱
(۳) ۰
(۴) وجود ندارد

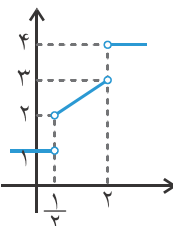
۷۶۸. نمودار تابع f به شکل مقابل است. حاصل $\frac{\lim_{x \rightarrow 1^+} f(1+x)}{\lim_{x \rightarrow 1^-} f(1+x)}$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2}$
(۲) ۱
(۳) ۲
(۴) $\frac{3}{2}$



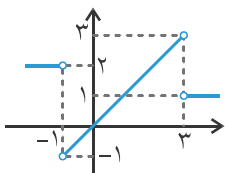
۷۶۹. نمودار تابع f به شکل مقابل است. حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f\left(\frac{1}{x}\right)$ کدام است؟

(۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) ۴



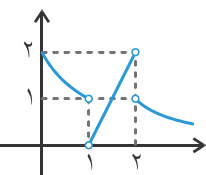
۷۷۰. نمودار تابع f به شکل مقابل است. حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x-1)$ و $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(2x+1)$ به ترتیب کدام است؟

(۱) ۲ و ۳
(۲) -۱ و ۳
(۳) ۱ و ۲
(۴) -۱ و ۱



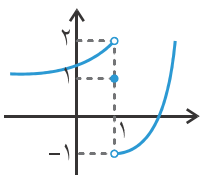
۷۷۱. اگر نمودار تابع f به شکل مقابل باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(f(x))$ کدام است؟

(۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۰
(۴) وجود ندارد



۷۷۲. نمودار تابع f به شکل مقابل است. حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} f(|x|+1)$ کدام است؟

(۱) ۱
(۲) ۲
(۳) -۱
(۴) وجود ندارد



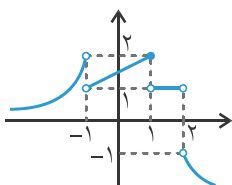
۷۷۳. در شکل مقابل نمودار تابع f رسم شده است. کدام گزینه درست نیست؟

(۱) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x-1) = f(1)$

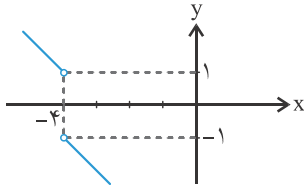
(۲) $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$

(۳) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

(۴) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} |f(x)|$



۷۸۲. اگر نمودار تابع $y=f(x)$ مطابق شکل زیر باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x^2 - 3x - 2)$ کدام است؟



(۱) -۴

(۲) -۱

(۳) ۱

(۴) وجود ندارد

۷۸۳. اگر $f(x) = \frac{|x-2|}{x-2}$ باشد، آنگاه $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(f(x))$ کدام است؟

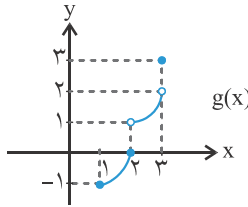
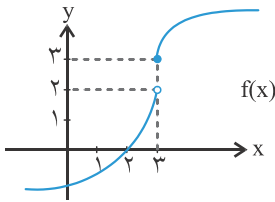
(۴) وجود ندارد

(۳) -۱

(۲) ۱

(۱) صفر

۷۸۴. اگر نمودارهای $y=f(x)$ و $y=g(x)$ مطابق شکل‌های زیر باشند، مقدار $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 3^-} g(f(x))$ کدام است؟



(۱) ۲

(۲) ۳

(۳) ۴

(۴) ۵

۷۸۵. اگر $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = a$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = b$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(4-x^2) + \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x^2 - 2x)$ کدام است؟

(۴) صفر

(۳) a + b

(۲) ۲b

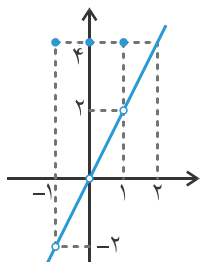
(۱) ۲a

گزینه ۷۴۰

$$x^2 = |x| \Rightarrow x = -1, 0, 1$$

پس نمودار $y = f(x)$ به شکل مقابل می‌شود. با توجه به نمودار داریم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow -1} f(x) &= -2 \\ \lim_{x \rightarrow 2} f(x) &= 4 \end{aligned}$$

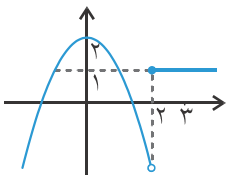


گزینه ۷۴۱

با توجه به نمودار تابع، $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 1$ است.

در شکل حد $2 - x^2$ در $x = a$ باید برابر با ۱ باشد، پس حاصل $2 - x^2 = 1$ باید برابر با ۱ باشد:

$$2 - x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$



گزینه ۷۴۲

هر گزینه را بررسی می‌کنیم:

در گزینه ۱: در $x = 1$ تعریف نشده ولی حد دارد.

در گزینه ۲: در $x = 1$ تعریف شده ولی حد ندارد.

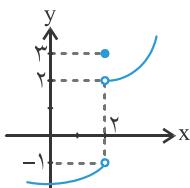
در گزینه ۳: در $x = 1$ تعریف نشده و حد ندارد.

در گزینه ۴: در $x = 1$ تعریف شده و حد دارد.

گزینه ۷۴۳

تابع در $x = 3$ حد دارد ولی در نقطه $x = 3$ تعریف نشده است.

گزینه ۷۴۴

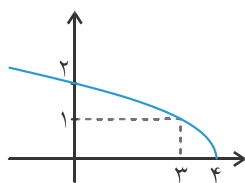


$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= 2 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= -1 \\ f(2) &= 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) + 2 \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) - f(2) = 2 + 2(-1) - 3 = -3 \end{aligned}$$

گزینه ۷۴۵

دامنه تابع به صورت $(-\infty, 4]$ است، پس $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ وجود ندارد، پس $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ وجود ندارد، بقیه

گزینه‌ها درست هستند.



گزینه ۷۴۶

$$\begin{aligned} x \rightarrow 1^+ &\Rightarrow 1 + x \rightarrow 2^+ \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(1+x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 3 \end{aligned}$$

پس:

به کمک نمودار، حاصل حد راست تابع در $x = 2$ به دست آمده است.

گزینه ۷۴۷

$$x \rightarrow 2^- \Rightarrow x < 2 \Rightarrow -x > -2 \Rightarrow -x \rightarrow -2^+$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(-x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -1$$

پس:

به کمک نمودار، حاصل حد راست تابع در $x = -2$ به دست آمده است.

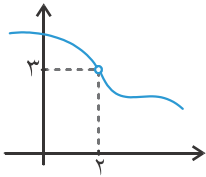
گزینه ۷۴۸

$$x \rightarrow 2^+ \Rightarrow -x \rightarrow -2^- \Rightarrow 1 - x \rightarrow -1^-$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(1-x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 0$$

پس:

به کمک نمودار، حاصل حد چپ تابع در $x = -1$ به دست آمده است.



گزینه ۷۴۹

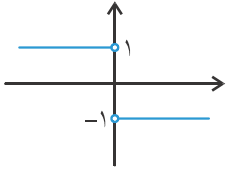
اگر نمودار f را ۲ واحد به بالا و نمودار g را ۲ واحد به پایین انتقال دهیم، شکل مقابل به دست

$$h(x) = \begin{cases} f(x) + 2 & x < 2 \\ g(x) - 2 & x > 2 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (f(x) + 2) = 3$$

می‌آید. به ازای a=۲ داریم:

گزینه ۷۵۰

با توجه به نمودار تابع، داریم:



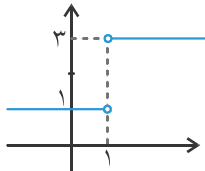
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -1$$

گزینه ۷۵۱

$$x > 1 \Rightarrow \frac{|x-1|}{x-1} = \frac{x-1}{x-1} = 1, \quad x < 1 \Rightarrow \frac{|x-1|}{x-1} = \frac{-(x-1)}{x-1} = -1$$

$$f(x) = 2 + \frac{|x-1|}{x-1} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 3 & x > 1 \\ 1 & x < 1 \end{cases}$$

نمودار تابع به شکل مقابل می‌شود.



$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$$

چون حد چپ و راست در x=1 برابر نیستند، پس در x=1 حد وجود ندارد.

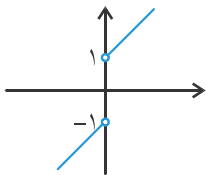
گزینه ۷۵۲

$$x > 0 \Rightarrow \frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = 1, \quad x < 0 \Rightarrow \frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = -1$$

$$f(x) = x + \frac{|x|}{x} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x+1 & x > 0 \\ x-1 & x < 0 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 2$$

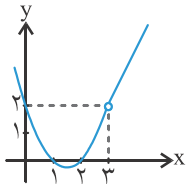
نمودار تابع به شکل مقابل است. پس:



گزینه ۷۵۳

نمودار تابع به شکل روبه‌رو است. با توجه به شکل داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2$$



گزینه ۷۵۴

نمودار تابع $f(x) = \left[\frac{x}{2} \right]$ به شکل مقابل است.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 0$$

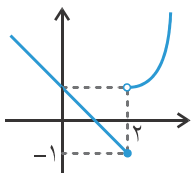
پس پاسخ مسئله ۱ است.

گزینه ۷۵۵

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= -2 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= 1 \\ f(2) &= 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) + f(2) = 1$$

گزینه ۷۵۶

نمودار تابع f به شکل مقابل است:



$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)}{\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)} = -1$$

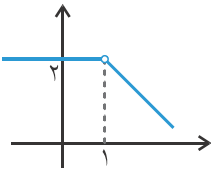
گزینه ۷۵۷

حاصل عبارت‌های $\lim_{x \rightarrow 1^-} (-x-1)$ و $\lim_{x \rightarrow 1^+} x^2$ به کمک رسم نمودار به دست می‌آیند.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= a \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a = 1$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= b \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} (-x-1) &= -2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow b = -2$$

$$\Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{-2}{1} = -2$$



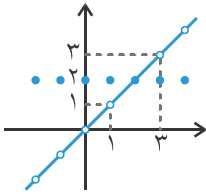
گزینه ۷۵۸

باید نمودار تابع به شکل مقابل باشد تا تساوی $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ برقرار باشد. بنابراین

$a = 2$ پاسخ مسئله است.

گزینه ۷۵۹

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) &= 3 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 4$$



گزینه ۷۶۰

دامنه تابع را به دست می‌آوریم. مقادیر x را که مخرج ۰ می‌شود را پیدا می‌کنیم:

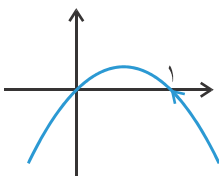
$$[x^2] - 1 = 0 \Rightarrow [x^2] = 1 \Rightarrow 1 \leq x^2 < 2 \Rightarrow 1 \leq x < \sqrt{2} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - [1, \sqrt{2})$$

با توجه به دامنه، حد چپ تابع در $x = \sqrt{2}$ وجود ندارد، زیرا x در آن فاصله در دامنه وجود ندارد.

گزینه ۷۶۱

نمودار $y = x - x^2$ را رسم می‌کنیم. با توجه به نمودار، هنگامی که x از راست به ۱ میل می‌کند، حاصل $x - x^2$ به ۰ میل می‌کند ولی مقدار آن از ۰ کمتر است.

$$x \rightarrow 1^+ \Rightarrow -1 < x - x^2 < 0 \Rightarrow [x - x^2] = -1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} [x - x^2] = -1$$



گزینه ۷۶۲

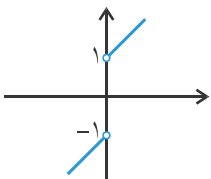
ضابطه تابع $f(x) = x + \frac{|x|}{x}$ و نمودارش را در همسایگی ۰ بررسی می‌کنیم. این همسایگی را $(-1, 1)$ در نظر می‌گیریم:

$$\left. \begin{aligned} 0 < x < 1 \Rightarrow |x| = x \Rightarrow x + \frac{|x|}{x} = x + 1 \\ -1 < x < 0 \Rightarrow |x| = -x \Rightarrow x + \frac{|x|}{x} = x - 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x + 1 & 0 < x < 1 \\ x - 1 & -1 < x < 0 \end{cases}$$

پس نمودار تابع به شکل مقابل می‌شود. برای حدهای چپ و راست داریم:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$$

پس در $x = 0$ حد ندارد.



گزینه ۷۶۳

فرض می‌کنیم $f(x) = \frac{|x-1|}{x-1}$ و $g(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$. تابع f را می‌توان به صورت زیر نوشت:

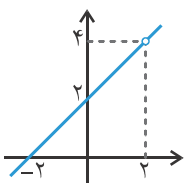
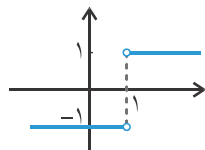
$$f(x) = \begin{cases} 1 & x > 1 \\ -1 & x < 1 \end{cases}$$

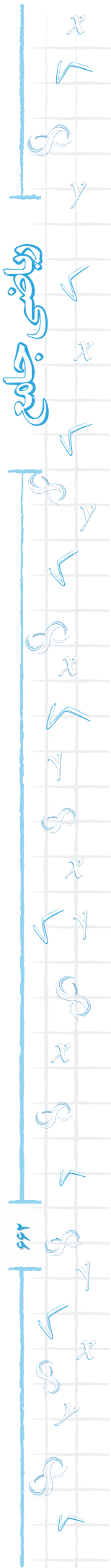
نمودارش به شکل مقابل می‌شود، پس $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1$

$$g(x) = \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x+2 \quad (x \neq 2)$$

تابع g را می‌توان به صورت مقابل نوشت:

نمودارش به شکل مقابل می‌شود، پس $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = 4$



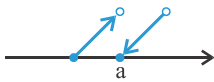
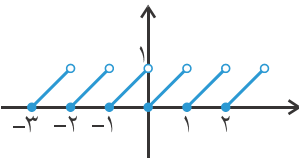


$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x-1|}{x-1} + \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2-4}{x-2} = -1 + 4 = 3$$

پاسخ مسئله برابر است با:

گزینه ۲. ۷۶۴

نمودار تابع $f(x) = x - [x]$ به شکل مقابل است.



اگر a عددی صحیح باشد، نمودار تابع f در همسایگی a به شکل مقابل می‌شود. بنابراین:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -1$$

گزینه ۲. ۷۶۵

$$f(x) = \begin{cases} x^2(1-0) & 0 < x < 1 \\ x^2(1-1) & 1 \leq x < 2 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 < x < 1 \\ 0 & 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

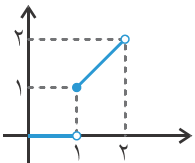
در همسایگی $x=1$ ، تابع f را به صورت چندضابطه‌ای می‌نویسیم:

گزینه ۲. ۷۶۶

ضابطه تابع $f(x) = x[x]$ و نمودارش را در همسایگی ۱ بررسی می‌کنیم. این همسایگی $(0, 2)$ فرض می‌کنیم:

$$\left. \begin{array}{l} 0 < x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow x[x] = 0 \\ 1 \leq x < 2 \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow x[x] = x \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < 1 \\ x & 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

پس نمودار تابع به شکل زیر می‌شود. برای حدهای چپ و راست داریم:



$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$$

پس در $x=1$ حد ندارد.

گزینه ۲. ۷۶۷

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow [x] \cdot [x+1] = 0$$

تابع $f(x) = [x] \cdot [x+1]$ را در همسایگی ۰ یعنی $(-1, 1)$ بررسی می‌کنیم.

$$-1 < x < 0 \Rightarrow [x+1] = 0 \Rightarrow [x] \cdot [x+1] = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

پس در بازه $(-1, 1)$ داریم $f(x) = 0$. پس:

گزینه ۲. ۷۶۸

$$\left. \begin{array}{l} x \rightarrow 1^+ \Rightarrow x > 1 \Rightarrow 1+x > 2 \Rightarrow 1+x \rightarrow 2^+ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x+1) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1 \\ x \rightarrow 1^- \Rightarrow x < 1 \Rightarrow 1+x < 2 \Rightarrow 1+x \rightarrow 2^- \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x+1) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x+1) \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x+1) = 2 \end{array}$$

توجه کنید که حاصل‌ها به کمک نمودار به دست آمده‌اند.

گزینه ۲. ۷۶۹

$$x \rightarrow \frac{1}{4}^+ \Rightarrow x > \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{x} < 4 \Rightarrow \frac{1}{x} \rightarrow 4^- , \quad \lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}^+} f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = 3$$

توجه کنید که حاصل به کمک نمودار به دست آمده است.

گزینه ۲. ۷۷۰

$$x \rightarrow 0^- \Rightarrow x < 0 \Rightarrow x-1 < -1 \Rightarrow x-1 \rightarrow -1^- \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x-1) = \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 2$$

$$x \rightarrow 1^+ \Rightarrow x > 1 \Rightarrow 2x+1 > 3 \Rightarrow 2x+1 \rightarrow 3^+ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(2x+1) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 1$$

گزینه ۲. ۷۷۱

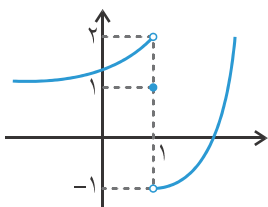
وقتی x با مقادیر کمتر از ۱ (یعنی از سمت چپ) به ۱ میل می‌کند، عرض شاخه سمت چپ نهایتاً به ۱ می‌رسد، ولی با مقداری بیشتر از ۱،

$$x \rightarrow 1^- \Rightarrow f(x) = 1^+ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(f(x)) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0$$

که حاصل را به صورت 1^+ می‌کند:

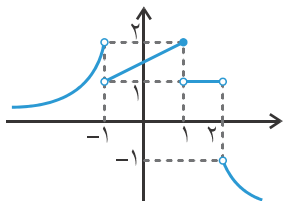
حاصل نهایی به کمک نمودار به دست آمده است.

گزینه ۲. ۷۷۲



$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(|x|+1) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x+1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(|x|+1) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x+1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1 \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(|x|+1) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} f(|x|+1) = -1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(|x|+1) = -1 \end{aligned}$$

گزینه ۱. ۷۷۳



$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x-1) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 2 = f(1)$$

گزینه ۱ درست است زیرا:

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 1$$

گزینه ۲ درست است زیرا:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= -1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} |f(x)| = 1 \end{aligned}$$

گزینه ۴ درست است زیرا:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= 2 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} f(x) \text{ موجود نیست}$$

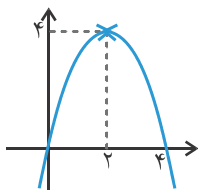
اما گزینه ۳ نادرست است زیرا $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ موجود نیست.

گزینه ۳. ۷۷۴

نکته: حاصل یک حد یا وجود ندارد یا یک عدد می‌شود، ولی هیچ‌گاه حاصل به صورت حدی نیست. مثلاً:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} 2x = 4 \rightarrow \text{درست} , \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} 2x = 4^+ \rightarrow \text{نادرست}$$

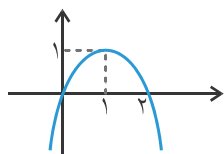
با توجه به نمودار تابع داریم:



$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4 \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) &= 4 \\ \Rightarrow \left[\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \right] &= [4] = 4 \end{aligned}$$

گزینه ۲. ۷۷۵

تابع $f(x)$ را در همسایگی ۱ بررسی می‌کنیم. بازه همسایگی $(0, 2)$ در نظر می‌گیریم:



$$\begin{aligned} 0 < x < 1 &\Rightarrow 0 < f(x) < 1 \Rightarrow [f(x)] = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} [f(x)] = 0 \\ 1 < x < 2 &\Rightarrow 0 < f(x) < 1 \Rightarrow [f(x)] = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} [f(x)] = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow 1^+} [f(x)] = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} [f(x)] = 0 \end{aligned}$$

گزینه ۲. ۷۷۶

$$x \rightarrow -2^- \xrightarrow{x < -2} |x| \rightarrow 2^+ \Rightarrow |x| - 3 \rightarrow -1^+ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2^-} f(|x| - 3) = -2$$

گزینه ۲. ۷۷۷

باید حد چپ و راست جداگانه محاسبه شود و ببینیم اگر حد وجود دارد، مقدار آن چقدر است.

$$x \rightarrow -1^+ \Rightarrow x > -1 \Rightarrow x^2 < 1 \Rightarrow 2x^2 < 2 \Rightarrow 2x^2 - 1 < 1 \Rightarrow 2x^2 - 1 \rightarrow 1^- \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1^+} f(2x^2 - 1) = 1$$

$$x \rightarrow -1^+ \Rightarrow x > -1 \Rightarrow x^2 < 1 \Rightarrow -2x^2 < -2 \Rightarrow 3 - 2x^2 > 1 \Rightarrow 3 - 2x^2 \rightarrow 1^+ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1^+} f(3 - 2x^2) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} (f(2x^2 - 1) + f(3 - 2x^2)) = 1 + 2 = 3$$

$$x \rightarrow -1^- \Rightarrow x < -1 \Rightarrow x^2 > 1 \Rightarrow 2x^2 - 1 > 1 \Rightarrow 2x^2 - 1 \rightarrow 1^+ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1^-} f(2x^2 - 1) = 2$$

$$x \rightarrow -1^- \Rightarrow x < -1 \Rightarrow x^2 > 1 \Rightarrow -2x^2 < -2 \Rightarrow 3 - 2x^2 < 1 \Rightarrow 3 - 2x^2 \rightarrow 1^- \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1^-} f(3 - 2x^2) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} (f(2x^2 - 1) + f(3 - 2x^2)) = 2 + 1 = 3$$

حد چپ و راست این تابع در نقطه $x = -1$ با هم برابرند و مساوی ۳ هستند. پس در $x = -1$ حد وجود داشته و برابر ۳ است.

ریاضی جامع

گزینه ۷۷۸

$$x \rightarrow -1^- \Rightarrow x^2 < -1 \Rightarrow x^2 > 1 \Rightarrow -x^2 < -1 \Rightarrow -x^2 + 2 < 1 \Rightarrow f(-x^2 + 2) \rightarrow -2^+ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1^-} [f(-x^2 + 2)] = -2$$

گزینه ۷۷۹

$$x \rightarrow -2^+ \Rightarrow x^2 > -2 \Rightarrow [x^2] = 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2^+} f([x^2] - 2) = f(1) = -1$$

$$x \rightarrow -2^+ \Rightarrow x^2 \rightarrow 4^- \Rightarrow x^2 - 2 \rightarrow 2^- \Rightarrow |x^2 - 2| \rightarrow 2^- \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2^+} f(|x^2 - 2|) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f([x^2] - 2) + \lim_{x \rightarrow -2^+} f(|x^2 - 2|) = -1 - 1 = -2$$

گزینه ۷۸۰

$$x \rightarrow -1^+ \Rightarrow 2x \rightarrow -2^+ \Rightarrow -2x \rightarrow 2^- \Rightarrow [-2x] = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1^+} f(|x+1| + [-2x]) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(|x+1| + 1)$$

$$x \rightarrow -1^+ \Rightarrow x+1 \rightarrow 0^+ \Rightarrow |x+1| \rightarrow 0^+ \Rightarrow |x+1| + 1 \rightarrow 1^+ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1^+} f(|x+1| + 1) = 1$$

$$x \rightarrow -1^- \Rightarrow 2x \rightarrow -2^- \Rightarrow -2x \rightarrow 2^+ \Rightarrow [-2x] = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1^-} f(|x+1| + [-2x]) = \lim_{x \rightarrow -1^-} f(|x+1| + 2)$$

$$x \rightarrow -1^- \Rightarrow x+1 \rightarrow 0^- \Rightarrow |x+1| \rightarrow 0^+ \Rightarrow |x+1| + 2 \rightarrow 2^+ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1^-} f(|x+1| + 2) = 2 \Rightarrow |1-2| = 1$$

دقت کنید $[-2x]$ در فرآیند حدی مثل عدد ثابت عمل می کند.

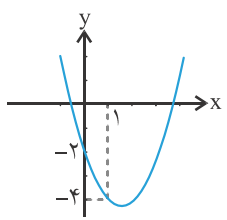
گزینه ۷۸۱

$$x \rightarrow 1^+ \Rightarrow f(x) \rightarrow -1^- \Rightarrow |f(x)| \rightarrow 1^+ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} [|f(x)|] = 1, \quad x \rightarrow 1^+ \Rightarrow f(x) \rightarrow -1^- \Rightarrow [f(x)] = -2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} |[f(x)]| = 2$$

$$x \rightarrow 1^- \Rightarrow f(x) \rightarrow 1^- \Rightarrow |f(x)| \rightarrow 1^- \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} [|f(x)|] = 0, \quad x \rightarrow 1^- \Rightarrow f(x) \rightarrow 1^- \Rightarrow [f(x)] = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} |[f(x)]| = 0$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow 1^+} [|f(x)|] + \lim_{x \rightarrow 1^+} |[f(x)]| \right) - \left(\lim_{x \rightarrow 1^-} [|f(x)|] + \lim_{x \rightarrow 1^-} |[f(x)]| \right) = 1 + 2 - 0 = 3$$

گزینه ۷۸۲

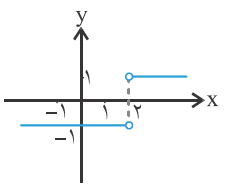


همان طور که می دانیم وقتی $x \rightarrow 1$ ، آنگاه $x^2 - 3x - 2 \rightarrow -4$ ، اما باید متوجه شویم زمانی که $x \rightarrow 1^+$ ، آنگاه این عبارت از چه سمتی به -4 میل می کند. برای این کار نمودار $y = x^2 - 3x - 2$ را رسم می کنیم.

همان طور که می دانید این نمودار از نوع سهمی است و در نقطه ای به طول $x = \frac{-b}{2a} = \frac{3}{2}$ مینیمم مقدار خود را اختیار می کند. همان طور که در شکل پیداست زمانی که $x \rightarrow 1^+$ ، $x^2 - 3x - 2$ از مقادیر کمتر از -4 یعنی -4^- به سمت آن میل می کند. بنابراین:

$$x \rightarrow 1^+ \Rightarrow x^2 - 3x - 2 \rightarrow -4^- \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x^2 - 3x - 2) = 1$$

گزینه ۷۸۳



$$\begin{cases} x > 2 \Rightarrow |x-2| = x-2 \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 1 & ; x > 2 \\ -1 & ; x < 2 \end{cases} \\ x < 2 \Rightarrow |x-2| = -x+2 \end{cases}$$

$$x \rightarrow 2^- \Rightarrow f(x) \rightarrow -1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f(f(x)) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -1$$

نمودار $f(x)$ را رسم می کنیم:

در واقع زمانی که $x \rightarrow 2^-$ ، $f(x)$ دقیقاً برابر -1 است و حد آن در تمامی لحظات برابر -1 است.

گزینه ۷۸۴

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 2, \quad x \rightarrow 3^- \Rightarrow f(x) \rightarrow 2^- \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^-} g(f(x)) = \lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 3^-} g(f(x)) = 2 + 0 = 2$$

گزینه ۷۸۵

$$\left. \begin{array}{l} x \rightarrow 2^+ \xrightarrow{\text{جدول تعیین علامت}} 4 - x^2 \rightarrow 0^- \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} f(4 - x^2) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = b \\ x \rightarrow 2^- \xrightarrow{\text{جدول تعیین علامت}} x^2 - 2x \rightarrow 0^- \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x^2 - 2x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = b \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} f(4 - x^2) + \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x^2 - 2x) = 2b$$