فهرست

فصل اول

ماتریس و کاربردها

آشنایی با ماتریس

ماتریس، جدولی مستطیلی از اعداد حقیقی است. ماتریسی با m سطر و n ستون را از مرتبهٔ $m \times n$ و هر یک از اعداد داخل آن را یک درایه گوییم. درایهٔ واقع در سطر iاُم و ستون jاُم را با نماد a_{ij} و ماتریس A را به‌صورت $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ نشان می‌دهیم. مثلاً در ماتریس $A_{3\times 2}$ زیر، $a_{21} = 2$ و $a_{12} = -1$.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

ماتریس مربعی: ماتریسی است که تعداد سطرها و ستون‌های آن، یکسان باشد.

ماتریس صفر: ماتریسی است که تمام درایه‌های آن، صفر باشند که آن را با نماد $\overline{O}_{m\times n}$ نشان می‌دهیم.

۱ **اگر $A = [i^2 - j^2 + 1]_{3\times 3}$ ، مجموع درایه‌های ماتریس A، کدام است؟**

۱) ۱ −　　۲) ۴　　۳) ۹　　۴) ۱۵

«گزینهٔ ۳»

پاسخ: طبق فرض، داریم:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \xrightarrow{a_{ij}=i^2-j^2+1} A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -7 \\ 4 & 1 & -4 \\ 9 & 6 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 3} \Rightarrow \text{مجموع درایه‌های } A = 9$$

چند ماتریس خاص

۱) **ماتریس سطری:** ماتریسی است که فقط یک سطر دارد.

۲) **ماتریس ستونی:** ماتریسی است که فقط یک ستون دارد.

۳) **ماتریس قطری:** ماتریسی مربعی است که درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی آن، صفر باشند.

تذکر منظور از درایه‌های واقع بر قطر اصلی، درایه‌های a_{11} ، a_{22} ، ... و a_{nn} است.

۴) **ماتریس اسکالر:** ماتریسی قطری است که درایه‌های واقع بر قطر اصلی آن، یکسان‌اند.

۵) **ماتریس همانی (واحد):** ماتریسی اسکالر است که درایه‌های واقع بر قطر اصلی آن، ۱ باشند. ماتریس همانی از مرتبهٔ n را با نماد I_n نشان می‌دهیم.

۶) **ماتریس بالامثلثی:** ماتریسی مربعی است که درایه‌های زیر قطر اصلی آن، صفر باشند.

۷) **ماتریس پایین‌مثلثی:** ماتریسی مربعی است که درایه‌های بالای قطر اصلی آن، صفر باشند.

$$A = [a \quad b \quad c \quad d]_{1\times 4}$$

(سطری)

$$B = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}_{3\times 1}$$

(ستونی)

$$C = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

(قطری)

$$D = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

(اسکالر)

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

(همانی (واحد))

$$E = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

(بالامثلثی)

$$F = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

(پایین‌مثلثی)

۲ گزینهٔ «۳»

اگر ماتریس $A=\begin{bmatrix} -۱ & a^۲+۳a+۲ \\ a^۲+a-۲ & ۲ \end{bmatrix}$ قطری باشد، ماتریس $B=\begin{bmatrix} a+۴ & a^۲+۳a \\ a+۲ & ۲a+۶ \end{bmatrix}$ چگونه است؟

۱) همانی　۲) اسکالر　۳) بالامثلثی　۴) پایین‌مثلثی

پاسخ: چون ماتریس A قطری است، داریم:

$$\left.\begin{array}{l} a^۲+۳a+۲=۰ \Rightarrow a=-۱\,,\,a=-۲ \\ a^۲+a-۲=۰ \Rightarrow a=۱\,,\,a=-۲ \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{اشتراک}} a=-۲ \Rightarrow B=\begin{bmatrix} ۲ & -۲ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix} \Rightarrow$$ ماتریس B بالا مثلثی است.

تساوی دو ماتریس

دو ماتریس را مساوی گوییم هرگاه اولاً هم مرتبه باشند، ثانیاً درایه‌های آن‌ها، نظیر به نظیر با هم برابر باشند.

۳ گزینهٔ «۳»

اگر ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix} x^۲-x & y^۲ \\ ۰ & y \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} y+۷ & ۱ \\ ۳x-x^۲ & x-۴ \end{bmatrix}$ مساوی باشند، حاصل $x-y$ کدام است؟

۱) ۲　۲) -۲　۳) ۴　۴) -۴

پاسخ: چون ماتریس‌ها مساوی‌اند، درایه‌ها را نظیر به نظیر با یک‌دیگر برابر قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} x^۲-x=y+۷ \\ y^۲=۱ \\ ۳x-x^۲=۰ \\ x-۴=y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^۲-x=y+۷ \\ y=\pm ۱ \\ x=۰ \text{ یا } ۳ \\ x-۴=y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=۳ \\ y=-۱ \end{cases} \Rightarrow x-y=۳-(-۱)=۴$$

اعمال جبری روی ماتریس‌ها-۱

جمع دو ماتریس: اگر $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ دو ماتریس هم مرتبه باشند، مجموع آن‌ها ماتریس $C=[a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n}$ از همان مرتبه است.

ضرب عدد در ماتریس: حاصل‌ضرب عدد حقیقی r در ماتریس $A_{m\times n}$، ماتریسی هم‌مرتبه با A است که هر درایه‌اش، r برابر درایهٔ نظیرش در ماتریس A است، یعنی $rA=[ra_{ij}]_{m\times n}$.

ویژگی‌های ضرب عدد در ماتریس: ماتریس‌های هم‌مرتبهٔ A و B و اعداد حقیقی r و s مفروض‌اند. در این‌صورت:

۱) $r(A\pm B)=rA\pm rB$　۲) $(r\pm s)A=rA\pm sA$　۳) $(rs)A=r(sA)=s(rA)$

قرینهٔ یک ماتریس: به‌ازای هر ماتریس A، ماتریس $(-۱)A$ را قرینهٔ A گوییم و با نماد $-A$ نشان می‌دهیم.

تفاضل دو ماتریس: تفاضل دو ماتریس هم‌مرتبهٔ A و B را به‌صورت $A+(-B)$ تعریف کرده و با نماد $A-B$ نشان می‌دهیم. به عبارت دیگر، درایه‌های ماتریس $A-B$ از تفریق درایه‌های نظیرشان در A و B به‌دست می‌آیند.

۴ گزینهٔ «۴»

اگر $A=[i-j]_{۲\times۳}$ و $B=[b_{ij}]_{۲\times۳}$ به‌طوری‌که $b_{ij}=\begin{cases} i+j & ; \quad i>j \\ i^۲-j & ; \quad i=j \\ j^۲+i & ; \quad j>i \end{cases}$، کوچک‌ترین درایهٔ ماتریس $A+B$، کدام است؟

۱) -۲　۲) ۲　۳) -۱　۴) صفر

پاسخ: ماتریس‌های A و B را مشخص می‌کنیم تا ماتریس $A+B$ را بیابیم:

$$A=\begin{bmatrix} ۰ & -۱ & -۲ \\ ۱ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}_{۲\times۳}\,,\quad B=\begin{bmatrix} ۰ & ۵ & ۱۰ \\ ۳ & ۲ & ۱۱ \end{bmatrix}_{۲\times۳} \Rightarrow A+B=\begin{bmatrix} ۰ & ۴ & ۸ \\ ۴ & ۲ & ۱۰ \end{bmatrix}_{۲\times۳} \Rightarrow$$ کوچک‌ترین درایه $=۰$

۵ گزینهٔ «۱»

اگر A و B دو ماتریس باشند به طوری که $۲A+B=\begin{bmatrix} ۵ & ۴ \\ -۳ & ۵ \end{bmatrix}$ و $۲B-۳A=\begin{bmatrix} ۳ & -۶ \\ ۸ & -۱۱ \end{bmatrix}$، مجموع درایه‌های واقع بر قطر اصلی ماتریس $A-B$، کدام است؟

۱) ۲　۲) ۵　۳) -۱　۴) -۴

پاسخ: با توجه به فرض سؤال، یک دستگاه دو معادله - دو مجهول، تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{array}{r} ۲\times \\ (-۱)\times \end{array}\begin{cases} ۲A+B=\begin{bmatrix} ۵ & ۴ \\ -۳ & ۵ \end{bmatrix} \\ ۲B-۳A=\begin{bmatrix} ۳ & -۶ \\ ۸ & -۱۱ \end{bmatrix} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۴A+۲B=\begin{bmatrix} ۱۰ & ۸ \\ -۶ & ۱۰ \end{bmatrix} \\ -۲B+۳A=\begin{bmatrix} -۳ & ۶ \\ -۸ & ۱۱ \end{bmatrix} \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع می‌زنیم}} ۷A=\begin{bmatrix} ۷ & ۱۴ \\ -۱۴ & ۲۱ \end{bmatrix} \Rightarrow A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۲ & ۳ \end{bmatrix}$$

$$\xRightarrow{۲A+B=\begin{bmatrix} ۵ & ۴ \\ -۳ & ۵ \end{bmatrix}} B=\begin{bmatrix} ۵ & ۴ \\ -۳ & ۵ \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} ۲ & ۴ \\ -۴ & ۶ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix} \Rightarrow A-B=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۲ & ۳ \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۲ & ۲ \\ -۳ & ۴ \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ مجموع درایه‌های واقع بر قطر اصلی $=-۲+۴=۲$

اعمال جبری روی ماتریس‌ها - ۲

ضرب دو ماتریس: دو ماتریس $A_{m\times n}$ و $B_{n\times p}$ (که تعداد ستون‌های A برابر با تعداد سطرهای B است)، مفروض‌اند. $A\times B$ ماتریسی چون $C=[c_{ij}]_{m\times p}$ است که درایه‌های آن به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$c_{ij}=[\text{سطر } i\text{ ام } A]\begin{bmatrix}\text{ستون}\\ j\text{ ام}\\ B\end{bmatrix}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\dots+a_{in}b_{nj}$$

تذکر ۱) ضرب ماتریس $A_{m\times n}$ در ماتریس $B_{p\times q}$ (یعنی $A\times B$) در صورتی قابل تعریف است که $n=p$.

۲) اگر ماتریس $A\times B$ قابل تعریف باشد، ماتریس $B\times A$ لزوماً قابل تعریف **نیست**.

نکته اگر I ماتریس همانی و A ماتریسی مربعی هم‌مرتبه با آن باشد، آن‌گاه $AI=IA=A$.

توان‌های یک ماتریس مربعی: توان‌های ماتریس مربعی A، به‌صورت مقابل تعریف می‌شوند: $A^2=A\times A\,,\,A^3=A^2\times A\,,\dots,\,A^n=A^{n-1}\times A$

نتیجه اگر I ماتریس همانی باشد، آن‌گاه به‌ازای هر عدد طبیعی n، $I^n=I$.

نکته اگر A ماتریسی مربعی و k عددی حقیقی باشد، آن‌گاه: $(kA)^n=k^nA^n$.

۶ سه ماتریس $A_{3\times 4}$ ، $B_{4\times 2}$ و $C_{2\times 3}$ مفروض‌اند. کدام‌یک از ضرب‌های زیر، تعریف **نمی‌شود**؟ *(مشابه ریاضی ۹۴ داخل)*

۱) ABC ۲) CAB ۳) ACB ۴) BCA

گزینهٔ «۳»

پاسخ: با توجه به عبارات زیر، نتیجه می‌گیریم ماتریس ACB قابل تعریف نیست.

ماتریس CAB تعریف می‌شود. $\Leftarrow$ $C_{2\times 3}\;A_{3\times 4}\;B_{4\times 2}$:گزینهٔ (۲)
برابر برابر

ماتریس ABC تعریف می‌شود. $\Leftarrow$ $A_{3\times 4}\;B_{4\times 2}\;C_{2\times 3}$:گزینهٔ (۱)
برابر برابر

ماتریس BCA تعریف می‌شود. $\Leftarrow$ $B_{4\times 2}\;C_{2\times 3}\;A_{3\times 4}$:گزینهٔ (۴)
برابر برابر

ماتریس ACB تعریف نمی‌شود. $\Leftarrow$ $A_{3\times 4}\;C_{2\times 3}\;B_{4\times 2}$:گزینهٔ (۳)
نابرابر نابرابر

۷ به ازای کدام مقدار x و y ، ماتریس $\begin{bmatrix}x&-1&4\\2&3&1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2&-2\\1&0\\y&1\end{bmatrix}$ ، یک ماتریس قطری است؟ *(ریاضی ۹۸ خارج)*

۱) $x=1\,,\,y=-7$ ۲) $x=2\,,\,y=-7$ ۳) $x=2\,,\,y=-5$ ۴) $x=1\,,\,y=-5$

گزینهٔ «۲»

پاسخ: ابتدا ماتریس حاصل‌ضرب را یافته، سپس درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$\begin{bmatrix}x&-1&4\\2&3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-2\\1&0\\y&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x-1+4y&-2x+4\\7+y&-3\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{قطری است}}\begin{cases}-2x+4=0\\7+y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2\\y=-7\end{cases}$$

۸ از رابطهٔ ماتریسی $[x\;\;2x\;\;-1]\begin{bmatrix}3&-1&1\\4&0&-2\\1&2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\2x\\-1\end{bmatrix}=0$ ، عدد غیرصفر x ، کدام است؟ *(ریاضی ۹۸ داخل)*

۱) $\frac{2}{9}$ ۲) $\frac{3}{8}$ ۳) $\frac{4}{9}$ ۴) $\frac{3}{5}$

گزینهٔ «۱»

پاسخ: طبق فرض، داریم:

$$[x\;\;2x\;\;-1]_{1\times 3}\begin{bmatrix}3&-1&1\\4&0&-2\\1&2&0\end{bmatrix}_{3\times 3}\begin{bmatrix}x\\2x\\-1\end{bmatrix}_{3\times 1}=0\Rightarrow[11x-1\;\;-x-2\;\;-3x]_{1\times 3}\begin{bmatrix}x\\2x\\-1\end{bmatrix}_{3\times 1}=0\Rightarrow(11x-1)(x)+(-x-2)(2x)+(-3x)(-1)=0$$

$$\Rightarrow 11x^2-x-2x^2-4x+3x=0\Rightarrow 9x^2-2x=0\Rightarrow x(9x-2)=0\xrightarrow{x\neq 0}x=\frac{2}{9}$$

۹ ماتریس $A=[a_{ij}]_{3\times 3}$ به‌صورت $a_{ij}=\begin{cases}1\;;&i=j\\2\;;&i\neq j\end{cases}$ تعریف شده است. مجموع درایه‌های ماتریس A^2-4A ، کدام است؟ *(ریاضی ۹۴ خارج)*

۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۱۸ ۴) ۲۱

گزینهٔ «۲»

پاسخ: ابتدا به کمک فرض سؤال، درایه‌های ماتریس A را یافته، سپس ماتریس A^2-4A را به‌دست می‌آوریم:

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}\Rightarrow A^2-4A=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}-4\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9&8&8\\8&9&8\\8&8&9\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4&8&8\\8&4&8\\8&8&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&0&0\\0&5&0\\0&0&5\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ مجموع درایه‌های ماتریس $(A^2-4A)=15$

فصل دوم

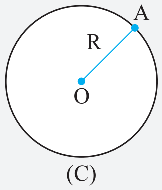
آشنایی با مقاطع مخروطی

مکان‌هندسی - ۱

یک مجموعه از نقاط را «مکان‌هندسی» گوییم هرگاه اولاً همهٔ آن‌ها دارای ویژگی مشترکی باشند، دوماً هر نقطه که آن ویژگی را دارد، عضو آن مجموعه باشد.

دایره: مکان‌هندسی نقاطی از صفحه است که از یک نقطهٔ ثابت، به فاصلهٔ ثابت قرار دارند. دایرهٔ C به مرکز O و شعاع R را با نماد $C(O,R)$ نشان می‌دهیم.

$OA = R \Leftrightarrow$ نقطهٔ A روی دایره است.

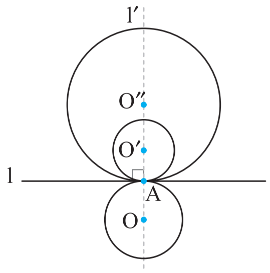


۱ نقطهٔ ثابت A روی خط l در صفحه، مفروض است. مکان‌هندسی مرکز دایره‌هایی که در نقطهٔ A بر خط l مماس‌اند، کدام است؟ *(مشابه تمرین کتاب درسی)*

گزینهٔ «۲»

۱) یک خط　　۲) یک خط به جز یک نقطه از آن

۳) دو خط به موازات l　　۴) کل صفحه



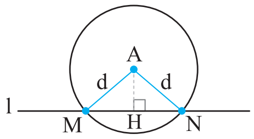
پاسخ: می‌دانیم خط مماس بر دایره، بر شعاع گذرنده از نقطهٔ تماس، عمود است، پس مرکز همهٔ این دایره‌ها روی خطی گذرنده از A و عمود بر l قرار دارند (خط l′). اما خود نقطهٔ A نمی‌تواند مرکز هیچ‌کدام از این دایره‌ها باشد، پس گزینهٔ (۲) صحیح است.

۲ نقطهٔ A و خط l در صفحه، مفروض‌اند. اگر m نقطه روی خط l وجود داشته باشد که از نقطهٔ A به فاصلهٔ d باشد، m چند مقدار صحیح دارد؟ *(مشابه تمرین کتاب درسی)*

گزینهٔ «۳»

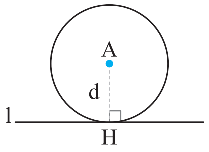
۱) ۱　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) ۴

پاسخ: مکان‌هندسی نقاطی از صفحه که از نقطهٔ A به فاصلهٔ d قرار دارند، دایره‌ای به مرکز A و شعاع d است، پس جواب مسئله، محل برخورد دایره و خط l است که وضعیت‌های زیر را داریم:



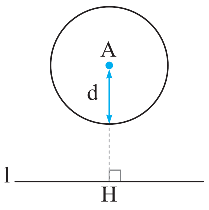
$AH < d$

دو جواب (نقاط M و N)



$AH = d$

یک جواب (نقطهٔ H)



$AH > d$

فاقد جواب

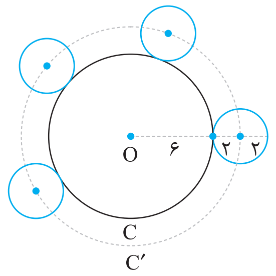
پس مقدار m می‌تواند صفر، یک یا دو باشد. یعنی سه مقدار صحیح برای m وجود دارد.

۳ در صفحه، مکان‌هندسی مرکز دایره‌هایی به شعاع ۲ واحد که بر دایرهٔ $C(O,۶)$ مماس باشند، کدام است؟ *(مشابه تمرین کتاب درسی)*

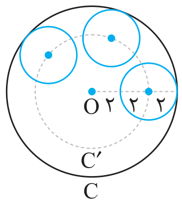
گزینهٔ «۳»

۱) دایره‌ای به شعاع ۸　　۲) دایره‌ای به شعاع ۴　　۳) دو دایره به شعاع‌های ۴ و ۸　　۴) دو دایره به شعاع‌های ۲ و ۶

پاسخ: چون دو دایره می‌توانند مماس داخل یا مماس خارج باشند، دو وضعیت داریم:



دایرهٔ $C'(O,۸)$



دایرهٔ $C'(O,۴)$

بنابراین دو دایره به شعاع‌های ۴ و ۸، جواب مسئله‌اند.

۴ دو نقطهٔ A و B به فاصلهٔ ۷ واحد از یک‌دیگر در صفحه، مفروض‌اند. اگر فقط یک نقطه در صفحه وجود داشته باشد که از A به فاصلهٔ ۲ و از B به فاصلهٔ $۴x-۳$ واحد باشد، مقدار x کدام می‌تواند باشد؟ *(مشابه تمرین کتاب درسی)*

گزینهٔ «۴»

۱) ۲　　۲) ۲/۲۵　　۳) ۳　　۴) ۲ یا ۳

پاسخ:

نکته اگر نقطه‌ای با چند ویژگی خواسته شده باشد، ابتدا مکان‌هندسی مربوط به هر ویژگی را یافته، سپس اشتراک این مکان‌هندسی‌ها را مشخص می‌کنیم تا نقطهٔ مورد نظر، به‌دست آید.

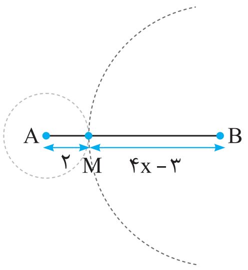
مکان‌هندسی نقاطی از صفحه که از نقطهٔ A به فاصلهٔ ۲ واحد باشند، دایرهٔ $C(A,۲)$ و مکان‌هندسی نقاطی که از B به فاصلهٔ $۴x-۳$ واحد باشند، دایرهٔ $C'(B,۴x-۳)$ است. پس جواب مسئله، محل برخورد این دو دایره است و چون فرض شده که مسئله فقط یک جواب دارد، دو دایره مماس‌اند. در نتیجه دو حالت داریم:

حالت اول: دو دایره، مماس خارج باشند، در این صورت،داریم:

$AB=AM+MB$

$\Rightarrow ۷=۲+۴x-۳$

$\Rightarrow ۴x=۸\Rightarrow x=۲$



حالت دوم: دو دایره، مماس داخل باشند، در این صورت،داریم:

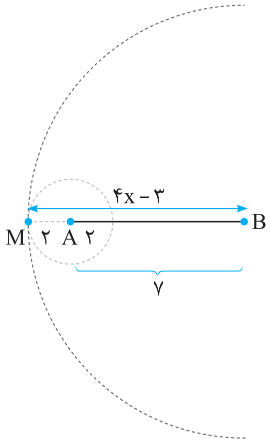
$AB=|AM-MB|$

$\Rightarrow ۷=|۲-۴x+۳|$

$\Rightarrow |۵-۴x|=۷$

$\Rightarrow ۵-۴x=\pm۷\Rightarrow \underbrace{۴x=-۲}_{\text{غ ق ق}}$

$۴x=۱۲\Rightarrow x=۳$ یا



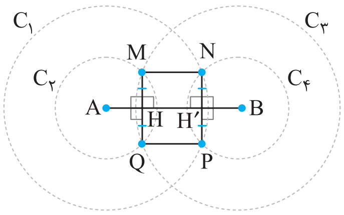
از دو حالت فوق نتیجه می‌گیریم $x=۲$ یا $x=۳$.

۵ پاره‌خط AB به اندازهٔ ۸ واحد در صفحهٔ مختصات، مفروض است. چهار دایره با مراکز A و B و شعاع‌های ۳ و ۷ واحد رسم می کنیم. نقاط تلاقی دایره‌های کوچک با دایره‌های بزرگ، دقیقاً رأس‌های کدام چهارضلعی هستند؟ *(ریاضی ۹۹ داخل)*

گزینهٔ «۳»

۱) لوزی　　۲) متوازی‌الاضلاع　　۳) مستطیل　　۴) ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین

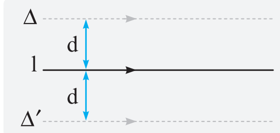
پاسخ: اولاً چون دایره‌ها دوبه‌دو هم‌نهشت‌اند، $MQ=NP$. می‌دانیم خط‌المرکزین دو دایرهٔ متقاطع، عمودمنصف وتر مشترک آن‌ها است، پس $MH=NH'$ و چون $MH\parallel NH'$ و $\hat{H}=\hat{H'}=۹۰^\circ$، چهارضلعی $MNH'H$ مستطیل است. در نتیجه $\hat{M}=\hat{N}=۹۰^\circ$. به همین ترتیب نتیجه می‌گیریم $\hat{P}=\hat{Q}=۹۰^\circ$.



بنابراین چهارضلعی MNPQ هم مستطیل است.

مکان‌هندسی - ۲

مکان‌هندسی نقاطی از صفحه که از خط l به فاصلهٔ ثابت d باشند، دو خط Δ و Δ' به موازات l و به فاصلهٔ d در طرفین آن می‌باشند.

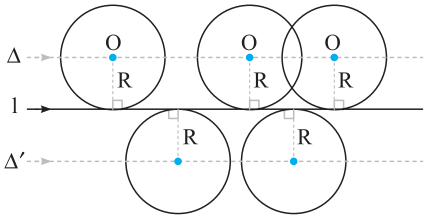


۶ خط l در صفحه، مفروض است. مکان‌هندسی مرکز دایره‌هایی به شعاع R که بر خط l مماس باشند، کدام است؟ $(R > 0)$ *(مشابه تمرین کتاب درسی)*

۱) یک خط به موازات l ۲) یک خط عمود بر l ۳) دو خط به موازات l ۴) دو خط عمود بر l

«گزینهٔ ۳»

پاسخ: می‌دانیم خط مماس بر دایره، بر شعاع گذرنده از نقطهٔ تماس، عمود است. پس مرکز تمام دایره‌های موردنظر، از خط l به فاصلهٔ ثابت R قرار دارند و برعکس. بنابراین مکان‌هندسی مرکز این دایره‌ها، دو خط Δ و Δ' به موازات l و در طرفین آن است.



۷ مربع ABCD به ضلع ۳ واحد، مفروض است. چند نقطه روی محیط این مربع وجود دارد که از قطر AC به فاصلهٔ $\frac{\pi}{2}$ باشد؟ *(کنکورهای قدیم)*

۱) صفر ۲) یک ۳) دو ۴) چهار

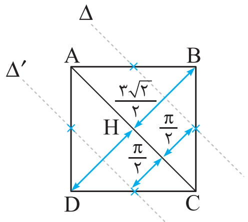
«گزینهٔ ۴»

پاسخ:

یادآوری طول قطر مربعی به ضلع a، برابر است با $a\sqrt{2}$.

مکان‌هندسی نقاطی از صفحه که از AC به فاصلهٔ $\frac{\pi}{2}$ باشند، دو خط Δ و Δ' به موازات آن است.

حال چون $BH = \frac{1}{2}BD = \frac{3\sqrt{2}}{2} \simeq 2/1$ و $\frac{\pi}{2} \simeq 1/5$، نتیجه می‌گیریم $\frac{\pi}{2} < \frac{3\sqrt{2}}{2}$. پس Δ و Δ' محیط مربع را در چهار نقطه، قطع می‌کنند.

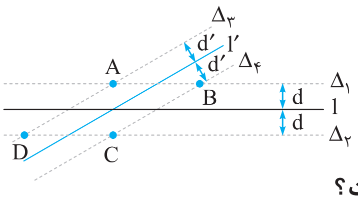


۸ دو خط متقاطع l و l′ در صفحه مفروض‌اند. چند نقطه در صفحه وجود دارد که از l به فاصلهٔ d و از l′ به فاصلهٔ d′ باشد؟ $(d, d' > 0)$ *(مشابه تمرین کتاب درسی)*

۱) صفر یا دو ۲) صفر یا چهار ۳) دقیقاً دو ۴) دقیقاً چهار

«گزینهٔ ۴»

پاسخ: مکان‌هندسی نقاطی که از l به فاصلهٔ d باشند، دو خط Δ_1 و Δ_2 به موازات l و مکان‌هندسی نقاطی که از l′ به فاصلهٔ d′ باشند، دو خط Δ_3 و Δ_4 به موازات l′ می‌باشند. حال چون l و l′ متقاطع‌اند، Δ_1 و Δ_2 با Δ_3 و Δ_4 متقاطع‌اند و مسئله، چهار جواب دارد.

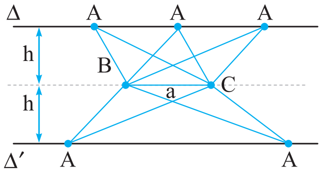


۹ در صفحه، مکان‌هندسی رئوس مثلث‌های هم‌ارزی (هم‌مساحتی) که قاعدهٔ آن‌ها مشترک باشد، کدام است؟

۱) یک خط ۲) دو خط متقاطع ۳) دو خط موازی ۴) دو خط عمود برهم

«گزینهٔ ۳»

پاسخ: می‌دانیم مساحت مثلث، برابر است با نصف حاصل‌ضرب قاعده در ارتفاع $(S = \frac{1}{2}ah)$. حال چون مساحت و طول قاعدهٔ این مثلث‌ها یکسان است، ارتفاع آن‌ها (h) هم یکسان است. پس رأس سوم این مثلث‌ها (نقطهٔ A)، به فاصلهٔ ثابت (h) از ضلع BC قرار دارد و برعکس. در نتیجه، مکان هندسی نقطهٔ A روی دو خط Δ و Δ' به موازات BC و در طرفین آن می‌باشد.

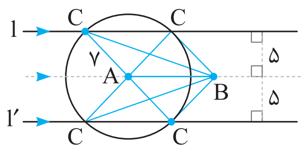


۱۰ چند نقطهٔ متمایز برای رأس C در مثلث ABC واقع در صفحهٔ مختصات، می‌توان یافت که فاصلهٔ رأس C از نقطهٔ A و پاره‌خط AB، به ترتیب ۷ و ۵ واحد باشد؟ *(ریاضی ۹۹ خارج)*

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

«گزینهٔ ۴»

پاسخ: مکان هندسی نقاطی از صفحه که از نقطهٔ A به فاصلهٔ ۷ واحد باشند، دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۷ و مکان هندسی نقاطی از صفحه که از پاره‌خط AB به فاصلهٔ ۵ واحد باشند، دو خط l و l′ به موازات آن و در طرفین آن است. پس نقطهٔ C، محل برخورد دایره با l و l′ است که چون $7 > 5$، دایره با هر دو خط، متقاطع است و مسئله چهار جواب دارد.



تذکر چون پاره‌خط AB معلوم نیست، نقطهٔ B می‌تواند درون، بیرون یا روی دایره باشد که در هر صورت، تأثیری در پاسخ این سوال ندارد.

فصل سوم

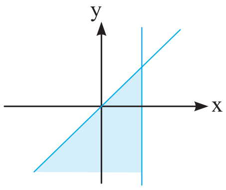
بردارها

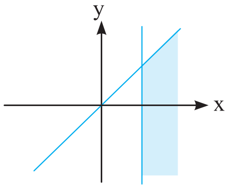
آشنایی با روابط در فضای $\mathbb{R}^2$

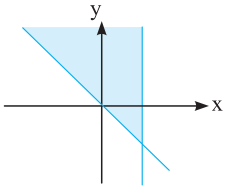
فضای دو بعدی، مجموعهٔ همهٔ زوج مرتب‌هایی است که مؤلفه‌های آن‌ها، اعداد حقیقی‌اند. به عبارت دیگر، $\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$. حال برای مشخص کردن ناحیه‌هایی که توسط خطوط یا منحنی‌ها در این فضا ایجاد می‌شوند، کافی است مختصات یک نقطه از آن ناحیه را با روابط داده شده، مقایسه کنیم.

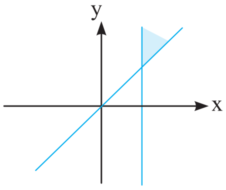
۱ **نمودار مربوط به رابطهٔ $\begin{cases} y \le x \\ x \le 3 \end{cases}$، کدام است؟** *(مشابه تمرین کتاب درسی)*

گزینهٔ «۱»

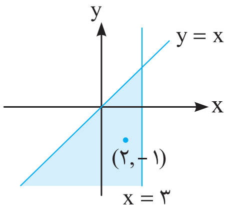
۱) 

۲) 

۳) 

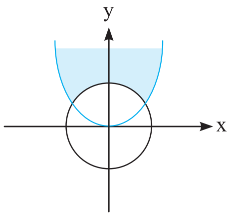
۴) 

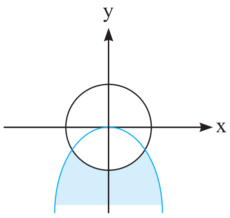
پاسخ: دو خط $y = x$ و $x = 3$ چهار ناحیه در صفحه می‌سازند (با محورهای مختصات کاری نداریم). حال یک نقطه مانند $(2,-1)$ که در رابطهٔ موردنظر صدق می‌کند را انتخاب کرده و ناحیه‌ای که این نقطه در آن واقع است را می‌یابیم:

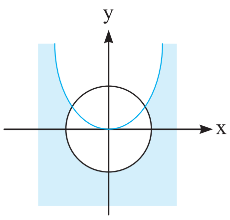


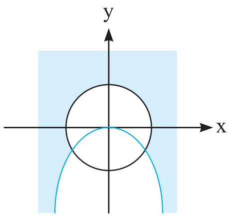
۲ **نمودار رابطهٔ $x^2 + y^2 \ge 1$ و $x^2 + y \ge 0$، کدام است؟** *(مشابه تمرین کتاب درسی)*

گزینهٔ «۴»

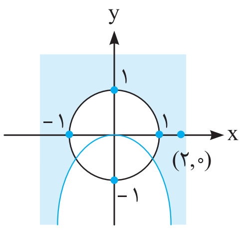
۱) 

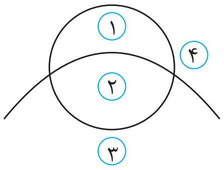
۲) 

۳) 

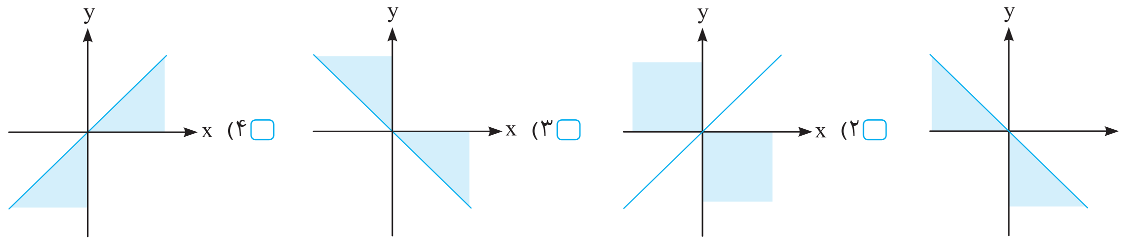
۴) 

پاسخ: دایرهٔ $x^2 + y^2 = 1$ و سهمی $y = -x^2$، چهار ناحیه در صفحه می‌سازند. حال نقطه‌ای مانند $(2,0)$ که در هر دو رابطهٔ مورد نظر صدق می‌کند را در نظر گرفته و ناحیه‌ای که این نقطه در آن واقع است را مشخص می‌کنیم:



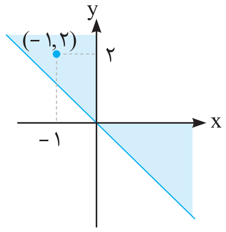


۳ نمودار رابطهٔ $x+y \geq 0$ و $xy \leq 0$ ، کدام است؟ (مشابه تمرین کتاب درسی)



۱) ☐ ۲) ☐ ۳) ☐ ۴) ☐

گزینهٔ «۳»

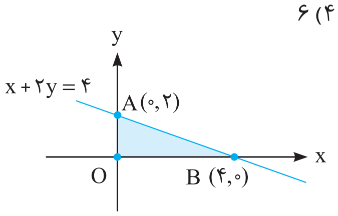


پاسخ: خط $x+y=0$ صفحه را به دو ناحیه تقسیم می‌کند که با انتخاب نقطهٔ $(-1,2)$ که در رابطهٔ $x+y\geq 0$ صدق می‌کند، ناحیهٔ $x+y\geq 0$ را می‌یابیم. از طرف دیگر، رابطهٔ $xy\leq 0$ نشان می‌دهد که مختصات نقاط موردنظر باید مختلف‌العلامه یا صفر باشند (یعنی در ربع دوم یا چهارم قرار داشته باشند)، پس باید قسمتی از ناحیهٔ $x+y\geq 0$ را انتخاب کنیم که در ربع دوم یا چهارم قرار دارد.

۴ مساحت ناحیهٔ حاصل از اشتراک روابط $x+2y\leq 4$ ، $x\geq 0$ و $y\geq 0$ ، کدام است؟ (مشابه تمرین کتاب درسی)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

گزینهٔ «۳»



پاسخ: طبق فرض، باید قسمتی از ناحیهٔ $x+2y\leq 4$ را انتخاب کنیم که در ربع اول قرار دارد. با یافتن نقاط برخورد خط $x+2y=4$ با محورهای مختصات، داریم:

$$\left.\begin{array}{l} x=0 \Rightarrow 2y=4 \Rightarrow A=(0,2) \\ y=0 \Rightarrow x=4 \Rightarrow B=(4,0) \end{array}\right\} \Rightarrow S_{\overset{\Delta}{OAB}}=\frac{1}{2}(4)(2)=4$$

۵ چند نقطه با مختصات صحیح مانند (x,y) در ناحیهٔ اول و دوم وجود دارد که رابطهٔ $x^2+y\leq 8$ برای مختصات آن‌ها برقرار باشد؟

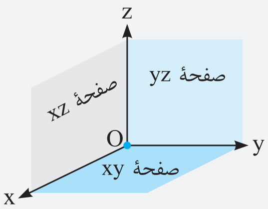
۱) ۲۵ ۲) ۳۰ ۳) ۳۵ ۴) ۴۰

گزینهٔ «۳»

پاسخ: اولاً چون فقط نقاط با مختصات صحیح خواسته شده، نیازی به یافتن ناحیهٔ $x^2+y\leq 8$ نیست. حال طبق فرض، چون $y\geq 0$ ، نتیجه می‌گیریم $x^2\leq 8$ و چون x عددی صحیح است، حالت‌های زیر را داریم:

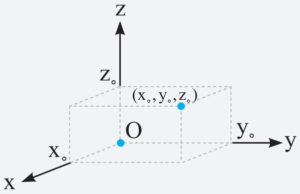
$$\left.\begin{array}{l} x=0 \Rightarrow y\leq 8 \Rightarrow y=0,1,\dots,8 \to \text{۹ نقطه} \\ x=\pm 1 \Rightarrow y\leq 7 \Rightarrow y=0,1,\dots,7 \to \text{۸×۲ نقطه} \\ x=\pm 2 \Rightarrow y\leq 4 \Rightarrow y=0,1,\dots,4 \to \text{۵×۲ نقطه} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{تعداد کل نقاط}=9+16+10=35$$

آشنایی با فضای سه بعدی ($\mathbb{R}^3$)



مجموعهٔ تمام سه‌تایی‌های مرتب از اعداد حقیقی را فضای سه‌بعدی $(\mathbb{R}^3)$ گوییم. یعنی $\mathbb{R}^3=\{(x,y,z)\mid x,y,z\in\mathbb{R}\}$.

برای نشان دادن مختصات نقاط در این فضا، از سه محور دوبه‌دو عمود بر هم استفاده می‌کنیم (محورهای x، y و z). از برخورد هر دو محور مختصات، یک صفحهٔ مختصات ایجاد می‌شود (صفحات xy، yz و zx).



نقطهٔ (x_0,y_0,z_0) را در دستگاه مختصات سه‌بعدی، در نظر می‌گیریم. در این‌صورت:

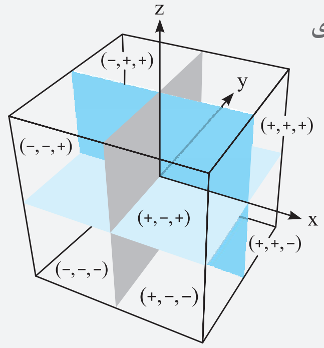
۱) x_0 برابر است با فاصلهٔ جهت‌دار نقطه از صفحهٔ yz.

۲) y_0 برابر است با فاصلهٔ جهت‌دار نقطه از صفحهٔ xz.

۳) z_0 برابر است با فاصلهٔ جهت‌دار نقطه از صفحهٔ xy.

نتیجه فاصلهٔ نقطهٔ (x_0,y_0,z_0) از هر یک از صفحات xy، yz و zx، به‌ترتیب $|z_0|$ ، $|x_0|$ و $|y_0|$ است.

تذکر صفحات مختصات، فضای $\mathbb{R}^3$ را به هشت ناحیه تقسیم می‌کنند که برای شماره‌گذاری آن‌ها، چهار ناحیهٔ بالای صفحهٔ xy را مشابه نواحی فضای $\mathbb{R}^2$ و چهار ناحیهٔ پایینی را هم در ادامهٔ آن‌ها نام‌گذاری می‌کنیم.

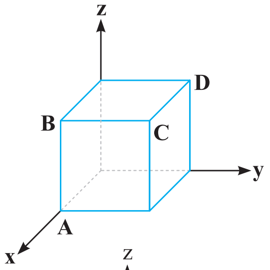


فصل ۳

هندسه دوازدهم

۶ در شکل مقابل، طول یال مکعب ۲ واحد است. مختصات کدام نقطه، درست **نیست**؟

«گزینهٔ ۴»



۱) $A(۲,۰,۰)$

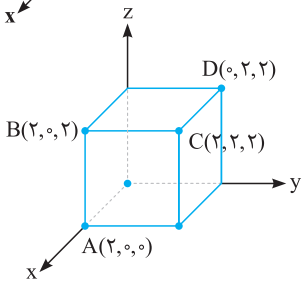
۲) $B(۲,۰,۲)$

۳) $C(۲,۲,۲)$

۴) $D(۲,۲,۰)$

پاسخ: چون طول یال مکعب، ۲ واحد است، مختصات نقاط A، B، C و D، به‌صورت زیر است،

پس گزینهٔ (۴)، درست نیست.



تصویر و قرینهٔ یک نقطه

۱) برای تصویر کردن یک نقطه روی یک محور (یا صفحه) مختصات، مولفه‌های غیر همنام با آن محور (یا صفحه) را صفر می‌کنیم. به‌عنوان مثال:

$A(-۲,۱,۳)\xrightarrow[\text{صفحه xz}]{\text{تصویر روی}}A'(-۲,۰,۳)$ $\qquad$ $A(-۲,۱,۳)\xrightarrow[\text{محور oz}]{\text{تصویر روی}}A'(۰,۰,۳)$

۲) برای قرینه کردن یک نقطه نسبت به یک محور (یا صفحه) مختصات، مولفه‌های غیر همنام با آن را قرینه می‌کنیم. به‌عنوان مثال:

$A(-۲,۱,۳)\xrightarrow[\text{صفحه xy}]{\text{قرینه نسبت به}}A'(-۲,۱,-۳)$ $\qquad$ $A(-۲,۱,۳)\xrightarrow[\text{محور ox}]{\text{قرینه نسبت به}}A'(-۲,-۱,-۳)$

۷ نقطهٔ $A(۵,-۱,-۲)$ را نسبت به صفحهٔ xz قرینه کرده و نقطهٔ حاصل را نسبت به محور Oz قرینه می‌کنیم. تصویر نقطهٔ حاصل بر روی صفحهٔ xy، کدام است؟

«گزینهٔ ۲»

۱) $(۵,-۱,۰)$ $\quad$ ۲) $(-۵,-۱,۰)$ $\quad$ ۳) $(۰,۰,-۲)$ $\quad$ ۴) $(-۵,۱,-۲)$

پاسخ: طبق مطالب درسنامه، داریم:

$$A(۵,-۱,-۲)\xrightarrow[\text{صفحه xz}]{\text{قرینه نسبت به}}A'(۵,۱,-۲)\xrightarrow[\text{محور Oz}]{\text{قرینه نسبت به}}A''(-۵,-۱,-۲)\xrightarrow[\text{صفحه xy}]{\text{تصویر روی}}A'''(-۵,-۱,۰)$$

۸ دو نقطهٔ $A(-۱,۱,a)$ و $B(b,۱,-۲)$ نسبت به یکی از محورهای مختصات، قرینهٔ یکدیگرند. حاصل $a+b$، کدام است؟

«گزینهٔ ۳»

۱) ۱ $\quad$ ۲) ۱- $\quad$ ۳) ۳ $\quad$ ۴) ۳-

پاسخ: می‌دانیم برای یافتن قرینهٔ یک نقطه نسبت به یک محور مختصات، باید مؤلفهٔ نظیر آن محور را ثابت نگه داشته و دو مؤلفهٔ دیگر را قرینه کنیم. پس چون مؤلفهٔ دوم این نقاط، یکسان است، این نقاط قرینهٔ یکدیگر نسبت به محور y ها بوده و داریم:

$$\begin{cases}b=-(-۱)\\-۲=-(a)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=۱\\a=۲\end{cases}\Rightarrow a+b=۳$$

معادلهٔ خط و صفحه در حالت‌های خاص

۱) معادلهٔ صفحهٔ موازی با صفحهٔ xy (عمود بر محور zها)، به‌صورت $z=k$ است $(k\in\mathbb{R})$ (و به‌همین ترتیب برای دیگر صفحات موازی با صفحات مختصات).

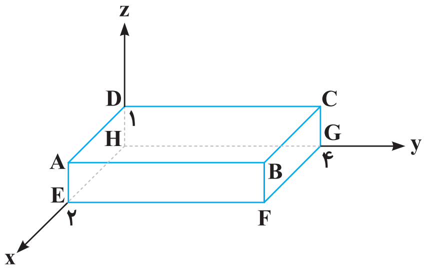
۲) معادلهٔ خط عمود بر صفحهٔ xy (موازی با محور zها)، به صورت $\begin{cases}x=a\\y=b\end{cases}$ است $(a,b\in\mathbb{R})$ (و به همین ترتیب برای دیگر خطوط عمود بر صفحات مختصات).

تذکر خط $\begin{cases}x=a\\y=b\end{cases}$ فصل مشترک دو صفحهٔ $x=a$ و $y=b$ است.

۹ در مکعب‌مستطیل زیر، معادلهٔ کدام‌یک از یال‌ها، درست **نیست**؟

«گزینهٔ ۳»

(مشابه تمرین کتاب درسی)



۱) $AB:\begin{cases}x=۲\\۰\le y\le ۴\\z=۱\end{cases}$

۲) $BC:\begin{cases}۰\le x\le ۲\\y=۴\\z=۱\end{cases}$

۳) $CG:\begin{cases}۰\le x\le ۲\\y=۴\\z=۱\end{cases}$

۴) $AD:\begin{cases}۰\le x\le ۲\\y=۰\\z=۱\end{cases}$

آزمون‌های جامع

آزمون جامع (۱)

۱ اگر حاصل‌ضرب $\begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & 4 \\ 2 & b \\ c & -1 \end{bmatrix}$، یک ماتریس اسکالر باشد، کدام‌یک از ماتریس‌های زیر، قطری است؟

۱) $\begin{bmatrix} a+b & c-a \\ c-3b & b+c \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} c & 2a+b \\ b-3c & a+b \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} a+b & b-c \\ 3a+c & 2b \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} b-a & 2a+c \\ c-3b & 3a \end{bmatrix}$

۲ اگر A یک ماتریس 3×3 باشد، دترمینان ماتریس $\frac{-|A^2|A}{2}$، کدام است؟

۱) $\frac{|A|^7}{8}$ ۲) $\frac{|A|^5}{4}$ ۳) $\frac{-|A|^7}{8}$ ۴) $\frac{-|A|^5}{4}$

۳ اگر $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ و $A^2X-A^3=2A$، ماتریس X کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

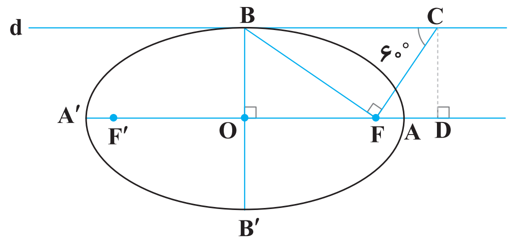
۴ شعاع دایرهٔ گذرنده از نقطهٔ $A(1,2)$ که بر خط $l_1: x-y-1=0$ مماس و بر خط $l_2: x+2y=0$ عمود باشد، کدام است؟

۱) $3\sqrt{2}$ ۲) $4\sqrt{2}$ ۳) $5\sqrt{2}$ ۴) $6\sqrt{2}$

۵ شعاع بزرگ‌ترین دایره به مرکز $(-4,0)$ که با دایرهٔ $C: x^2+y^2+6x-2y+2=0$ مماس داخل باشد، کدام است؟

۱) $3\sqrt{2}$ ۲) $2\sqrt{3}$ ۳) $4\sqrt{2}$ ۴) $3\sqrt{3}$

۶ در شکل زیر، خط d در نقطهٔ B بر بیضی به کانون‌های F و F' مماس است. حاصل $\frac{AD}{AF}$، کدام است؟



۱) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ۲) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ۳) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ۴) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

۷ فاصلهٔ کانون یک سهمی از خط هادی آن، $\frac{1}{2}$ واحد است. اگر سهمی محور xها را در دو نقطه به طول‌های ۲ و ۴ واحد قطع کند، عرض رأس آن با علامت منفی، کدام است؟

۱) -1 ۲) -2 ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{3}{2}$

۸ نقاط $A(2,-1,4)$، $B(1,-3,2)$ و C مفروض‌اند. اگر $\overrightarrow{AC}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$، فاصلهٔ نقطهٔ C از مبدا مختصات، کدام است؟

۱) $4\sqrt{6}$ ۲) $5\sqrt{6}$ ۳) $4\sqrt{5}$ ۴) $6\sqrt{5}$

۹ طول بردارهای a و b به‌ترتیب ۲ و ۳ واحد و زاویهٔ بین آن‌ها، 120° است. اگر با این دو بردار یک متوازی‌الاضلاع بسازیم، کسینوس زاویهٔ بین قطرهای آن، کدام است؟

۱) $\frac{-7}{\sqrt{137}}$ ۲) $\frac{-5}{\sqrt{133}}$ ۳) $\frac{-3}{\sqrt{131}}$ ۴) $\frac{-1}{\sqrt{129}}$

۱۰ اگر $\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$، مساحت مثلثی که با بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{a}\times\vec{j}$ ساخته می‌شود، کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{30}}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{35}}{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{29}}{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{31}}{2}$