

به نام خدایی که هست من است
گچ اکنون دوباره به دست من است

ساعتها با المپیاد ریاضی

میثم اسکندری

مدال برنز المپیاد ریاضی

مهدي تفرشی

مدال برنز المپیاد ریاضی

سرشناسه	: اسکندری، میثم - ۱۳۷۱
عنوان و نام پدیدآور	: ساعت‌ها با المپیاد ریاضی - مؤلفان: میثم اسکندری - مهدی تفرشی
مشخصات نشر	: تهران، انتشارات گچ، ۱۳۹۶
مشخصات ظاهری	: ۲۴۸ ص. مصور، جدول، نمودار
شابک	: ۹۷۸-۶۰۰-۹۵۸۷۸-۶-۵
وضعیت فهرست نویسی	: فیپای مختصر
سرشناسه افزوده	: تفرشی، مهدی - ۱۳۷۲
شماره کتابشناسی ملی	: ۴۵۴۴۱۴۰

نشر گچ

ساعت‌ها با المپیاد ریاضی

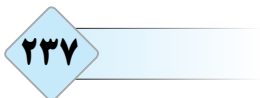
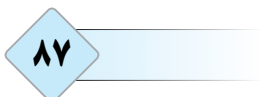
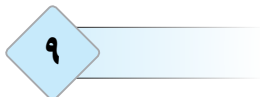
مؤلفان:	میثم اسکندری - مهدی تفرشی
ناشر:	گچ
صفحه‌آرایی:	میم گرافیک
طراحی جلد:	مهدی صمدی
نوبت و سال چاپ:	اول - ۱۳۹۶
شمارگان:	۲۵۰۰ نسخه
قیمت:	۲۵۰۰۰ تومان
شابک:	۹۷۸-۶۰۰-۹۵۸۷۸-۶-۵

email: info@gachpub.com | www.gachpub.com

کلیه حقوق این اثر برای انتشارات گچ محفوظ است. انتشار، تکثیر و ذخیره‌سازی تمام یا بخشی از آن به هر صورت (چاپ، الکترونیکی و ...) با هر هدفی بدون مجوز کتبی از ناشر، غیرقانونی است و پیگیری دارد.

فهرست مطالب

شماره صفحه



آزمون‌ها

پاسخنامه‌ها

ضمیمه

شماره بخش



گذر عمر تابع حالت است که تغییرات آن با داشتن نقاط ابتدا و انتهای هر بازه مشخص می‌شود. حتماً شما ده سال بعد، ده سال بزرگ‌تر (و یا شاید پیرتر) شده‌اید. این طول زندگی شماست و با سرعت در حال پیش‌روی است، جالب اینکه هیچ کنترلی بر روی آن ندارید. این طول، محدودیت دارد و در نهایت به پایان می‌رسد. برای انسان‌های مختلف هم تفاوت زیادی ندارد، چند سال کمتر یا بیشتر!

حالا چشمان خود را ببندید و به آینده نگاه کنید، می‌توانید بگویید ده سال بعد، شما که هستید؟ حالت‌های ممکن، عرض زندگی شما و یک تابع مسیر است. هر لحظه از این ده سال می‌تواند در چیزی که در انتهای آن خواهید بود مؤثر باشد.

هیچ وقت کسی ما را به خاطر توابع حالت زندگی‌مان بازخواست نمی‌کند، مثلاً تا حالا از شما پرسیده‌اند چرا در این سه سال فقط سی و شش ماه بزرگ‌شده‌ای؟ اما توابع مسیر را خودمان باید بسازیم، برای همین باید پاسخگوی این تغییرات باشیم. شاید بعضی از این سؤالات را شنیده باشید:

- چرا این قدر لاغر شدی؟ (پس وزن یک تابع مسیر است)
- چی شد که این قدر خستگ شدی؟ (پس هنر یک تابع مسیر است)
- چطور تونستی صبر کنی؟ (پس اخلاق یک تابع مسیر است)
- چی کار کردی این همه پول درآوردی؟ (پس موفقیت شغلی یک تابع مسیر است)
- چرا همه تو رو دوست دارند؟ (پس شهرت یک تابع مسیر است)
- چقدر خوب می‌فهمی! (پس درک، فهم و تحصیلات تابع مسیر است)
- ...

می‌توانیم بخواهیم و همین‌طور که خواهیم، صد یا دویست سال بعد، کلاً و برای همیشه در این دنیا بخواهیم، بدون اینکه تابع مسیری از خود باقی گذاشته باشیم! اما عرض زندگی نهایت ندارد و در هر فرصتی، هر چقدر که بخواهیم می‌توانیم به آن وسعت بدهیم؛ انتخاب با خود ما است.

المپیاد یکی از بهترین زمینه‌ها برای دانش‌آموزان دبیرستانی است تا داشته‌ها و استعدادهای علمی که خداوند در وجود ایشان نهاده، به فعلیت رسانند و برای حضور در عرصه‌های علمی و فنی بالاتر، مهیا شوند.

در این میان خلاءهای زیادی برای پیشرفت و تغذیه علمی آن دسته از دانش‌آموزان مستعد که المپیاد را بستر رشد و شکوفایی علمی خود قرار داده‌اند، دیده می‌شود؛ و این وظیفهٔ معلمین، مؤلفین و مدال‌آوران سال‌های گذشته المپیادهای علمی کشور است که دست به دست هم داده و با توکل به خدا، کاستی‌های موجود را جبران نمایند.

در کشور ما، آثار موجود در زمینهٔ المپیاد ریاضی، نسبت به سایر المپیادها حقاً و انصافاً برای شرکت‌کنندگان مرحله اول، از غنای قابل قبولی برخوردار هستند. هر چند هنوز از وضع مطلوب فاصلهٔ زیادی داریم.

یکی از خلاءهای موجود در این زمینه برای داوطلبان شرکت در مرحله اول المپیاد ریاضی، آزمون‌های آزمایشی استاندارد و مطابق با مباحث و سطح مرحله اول می‌باشد. البته در سال‌های اخیر مؤسسات علمی زیادی در این وادی خدمات شایان تقدیری ارائه نموده‌اند. از جملهٔ این مؤسسات می‌توان به "آیریسک" (مرجع علمی المپیادهای علمی ایران) اشاره کرد که از دهه هشتاد، اقدام به برگزاری منظم آزمون‌های آزمایشی مرحله اول نموده و دانش‌آموزان بسیاری از خدمات علمی آن بهره برده‌اند.

کتاب حاضر مشتمل بر ۱۲ آزمون آزمایشی برگزار شده توسط آیریسک در چند سال اخیر می‌باشد. البته برای تک‌تک آزمون‌ها، تغییرات، اصلاحات و در بسیاری از موارد تکمیلات اساسی و مفصل از لحاظ سطح سؤالات، تعداد سؤالات، تنظیم و تعدیل تعداد سؤالات هر مبحث و ... رخ داده است تا آزمون‌ها به شکل نسبتاً استاندارد و در نهایت کیفیت و دقت ممکن و نیز با پاسخ‌های تشریحی کامل، در اختیار دانش‌پژوهان محترم قرار گیرند. تا این‌شاء .. ما نیز در شمار افرادی باشیم که در راستای اعتلای علمی ایران اسلامی، گامی هر چند کوچک بر می‌داریم.

جا دارد یادی کنیم از همه اساتید بزرگواری که در طول سالیان برگزاری این آزمون‌ها، در طراحی هسته اولیه سؤالات اثر حاضر با ما همکاری داشته‌اند. آقایان (به ترتیب حروف الفبا): محمد مهدی آذری، نوید جلال منش، آرشام جمشیدی، بهزاد خزایی، حمید زرگران، محمد شریفی و محمدرضا کریمی.

در پایان لازم می‌بینیم از جناب آقای مرتضی خلینا، مدیریت محترم آیریسک و انتشارات گچ، و همچنین همکاران ایشان در بخش‌های مختلف چاپ و نشر کتاب، جهت تلاش‌های بی‌وقفه برای طبع اثر حاضر و آثار مشابه در زمینه‌های مختلف المپیاد تقدیر و تشکر کنیم.

اسکندری- تفرشی

پاییز ۱۳۹۶ خورشیدی



سوالات

المپیاد ریاضی



۱ فرض کنید:

$$\frac{ababab + abcabcabc}{37} = \frac{33}{37}$$

که a ، b و c سه رقم (نه لزوماً متمایز) هستند. $a + b + c$ کدام است؟

- ۱۰ (۱) ۱۳ (۲) ۱۵ (۳) ۱۶ (۴) ۱۸ (۵)

۲ ۳۱ عدد دور یک دایره نوشته شده است. می‌دانیم هر عدد برابر مجموع دو عدد مجاور خود

است. جمع این ۳۱ عدد چند تا از اعداد زیر می‌تواند باشد؟

$$15 - 20 - 31 - 62 - 1394 = 0$$

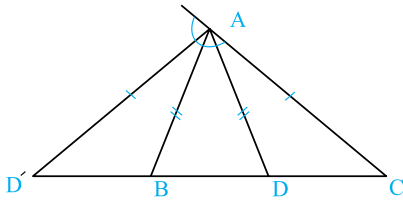
- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵ (۵)

۳ فرض کنید $x_1 < x_2 < x_3$ سه ریشه حقیقی معادله زیر هستند. حاصل $x_1(x_1 + x_2)$ برابر کدام

گزینه است؟

$$\sqrt{1394}x^3 - 2789x^2 + 2 = 0$$

- $\frac{1}{2}$ (۱) ۲ (۲) ۱۳۹۴ (۳) $1 + \frac{1}{1394}$ (۴) $\frac{2789}{1394}$ (۵)



۴ در مثلث $\triangle ABC$ طول نیمساز داخلی زاویه $\angle A$ برابر است با طول ضلع AB و طول نیمساز خارجی زاویه $\angle A$ برابر است با طول ضلع AC نسبت $\frac{AC}{AB}$ برابر است با:

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $\sqrt{3}$ (۳) ۲ (۴) $\sqrt{2} + 1$ (۵) $\sqrt{3} + 1$

۵ فرض کنید S مجموعه همه مربع کامل‌هایی است که به سه رقم ۲۵۶ ختم می‌شوند و T مجموعه اعدادی است که از حذف شدن سه رقم ۲۵۶ از سمت راست اعضای S ایجاد می‌شوند. دهمین جمله کوچک T ، سه رقم سمت راستش برابر است با:

- (۱) ۰۳۰ (۲) ۱۷۰ (۳) ۲۰۸ (۴) ۳۲۰ (۵) ۵۴۰

۶ فرض کنید a و b اعدادی طبیعی‌اند که $\frac{ab+1}{a+b} < \frac{3}{2}$ بیش‌ترین مقدار ممکن برای $\frac{a^2b^2+1}{a^2+b^2}$ را A در نظر بگیرید. $[A]$ کدام است؟ $[A]$ برابر بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر یا مساوی A است.

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸ (۵) ۹

۷ نادر به علی می‌گوید من دنبال چندجمله‌ایی به فرم

$$P(x) = 2x^2 - 2ax^2 + (a^2 - 1)x - c$$

می‌گردم که ریشه‌های آن اعدادی طبیعی‌اند. آیا می‌توانی مقادیر a و c را به من بگویی؟

بعد از کمی فکر کردن، علی می‌گوید: بیش از یک چندجمله‌ای با این شرط وجود دارد.

نادر می‌گوید: درست می‌گویی. سپس نادر مقدار a را روی تخته می‌نویسد و به علی می‌گوید حالا می‌توانی مقدار c را بگویی؟

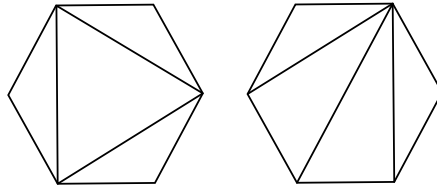
علی می‌گوید هنوز دو مقدار ممکن برای c وجود دارد.

مجموع دو مقدار ممکن برای c چقدر است؟

- (۱) ۱۸۰ (۲) ۲۳۰ (۳) ۳۰۰ (۴) ۳۶۰ (۵) ۴۴۰



۸ مثلث‌بندی کردن یک n ضلعی محدب یعنی رسم کردن $n - 3$ قطر نامتقاطع از n ضلعی و تبدیل آن به $n - 2$ مثلث. برای مثال شکل زیر دو نمونه از مثلث‌بندی کردن یک ۶ ضلعی را نمایش می‌دهد.



در مثلث‌بندی کردن یک ۱۵ ضلعی منتظم، حداکثر چند مثلث حاده‌الزاویه تشکیل می‌شود؟ (مثلث حاده‌الزاویه مثلثی است که هر زاویه آن از 90° درجه کمتر باشد).

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۱۱ (۳) ۱۲ (۴) ۱۳ (۵)

۹ پنج رابطه نادرست، با نمایش دیجیتال ارقام صفر تا ۹ ساخته شده توسط چوب کبریت، در زیر داده شده است. چند رابطه از پنج رابطه را با جابجایی (نه حذف) فقط یک چوب کبریت، می‌توان به تساوی تبدیل کرد؟

	(a)		(d)	۱ (۱)
	(b)		(e)	۲ (۲)
	(c)			۳ (۳)
				۴ (۴)
				۵ (۵)

۱۰ فرض کنید R مجموعه همه باقی‌مانده‌های اعداد به فرم 2^n بر 1000 است که عدد n عددی صحیح و نامنفی است. مجموع اعضای R را S در نظر می‌گیریم. سه رقم سمت راست S چقدر است؟

- ۱ (۳۷۵) ۲ (۰۰۷) ۳ (۰۱۴) ۴ (۷۱۱) ۵ (۰۱۷)

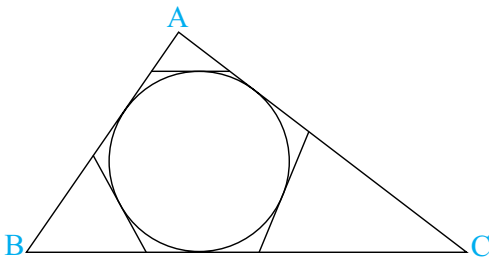
۱۱ در یک کلاس ۱۲ نفره معلم می‌خواهد گروه‌هایی تشکیل دهد به طوری که هر دو گروه حداقل یک عضو مشترک داشته باشند، ولی ترکیب آن‌ها با هم فرق می‌کند. او توانست ۱۰۰۰ گروه تشکیل دهد. معلم حداکثر چند گروه دیگر می‌تواند بسازد؟

- (۱) ۲۴ (۲) ۱۰۴۸ (۳) ۲۳ (۴) ۱۰۴۷ (۵) ۱

۱۲ فرض کنید N بزرگترین مضرب ۳۶ است که رقم‌های آن زوج بوده و هیچ دو رقم آن یکسان نیست. سه رقم سمت راست N چند است؟

- (۱) ۴۶۰ (۲) ۸۰۴ (۳) ۲۰۸ (۴) ۸۲۰ (۵) ۶۴۰

۱۳ سه پاره خط موازی اضلاع مثلث ABC و مماس بر دایره محاطی آن رسم شده است. اگر طول اضلاع مثلث ABC برابر ۳، ۴، ۵ باشد، مساحت شش ضلعی محیط بر دایره چقدر است؟



(۱) ۳ (۲) $\frac{10}{3}$

(۳) $\frac{7}{2}$ (۴) $\frac{11}{3}$

(۵) ۴

۱۴ روی یک صفحه یک ۱۰ ضلعی و یک ۲۵ ضلعی محذب داده شده است. این دو چند ضلعی صفحه را حداکثر به چند بخش تقسیم می‌کند؟

- (۱) ۲۰ (۲) ۲۲ (۳) ۲۵ (۴) ۳۰ (۵) ۳۵

۱۵ در ساخت یک ساعت دیواری به علت قرار ندادن یک چرخ‌دنده، عقربه ساعت شمار برعکس می‌چرخد یعنی اگر الان ساعت ۷:۳۰ باشد یک ساعت دیگر ساعت ۶:۳۰ را نشان می‌دهد. در این ساعت از ساعت ۷:۳۰ تا ۱۴:۴۵ (این زمان‌ها، زمان‌های واقعی هستند نه زمانی که ساعت خراب نشان می‌دهد) چندبار دو عقربه دقیقه‌شمار و ساعت‌شمار روی هم منطبق می‌شوند؟

- (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹ (۵) ۱۰

۱۶ فرض کنید $f_1(x) = \frac{2}{3} - \frac{3}{3x+1}$ و برای هر $n \geq 2$

$$f_n(x) = f_1(f_{n-1}(x))$$

جواب معادله $f_{100}(x) = x - 3$ برابر کدام گزینه است؟

- (۱) ۲ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{5}{3}$ (۴) ۳ (۵) $\frac{7}{5}$

۱۷ چند عدد طبیعی m وجود دارد که به ازای آن، اعداد صحیح و نامنفی X_0, X_1, \dots, X_m وجود داشته باشند که:

$$m^x = \sum_{k=1}^{x+1} m^{x_k}$$

- (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۲ (۴) ۱۶ (۵) ۱۸

۱۸ در یک مهدکودک، هر پسر بچه با سه دختر بچه، و هر دختر بچه با دو پسر بچه دوست است. در این کلاس ۱۶ نیمکت دوفره وجود دارد. امروز ۲۷ بچه در این کلاس حاضر هستند. در این کلاس چند نفر غایب هستند؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳ (۵) ۴

۱۹ فرض کنید $X_1, X_2, \dots, X_r, X_1$ اعدادی حقیقی و نامنفی با مجموع ۱ هستند و

$$x_1 x_2 x_3 + x_2 x_3 x_4 \geq \frac{1}{540}$$

بیشترین مقدار ممکن برای عبارت زیر چند است؟

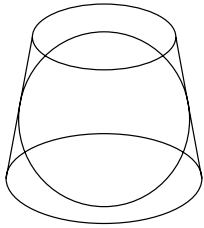
$$x_1 x_2 x_3 + x_2 x_3 x_4 + x_3 x_4 x_5 + x_4 x_5 x_6 + x_5 x_6 x_1 + x_6 x_1 x_2$$

- (۱) $\frac{1}{30}$ (۲) $\frac{1}{24}$ (۳) $\frac{19}{540}$ (۴) $\frac{31}{720}$ (۵) $\frac{1}{27}$

۲۰ زاویه $\angle XOY = 60^\circ$ و نقاط A و B بر نیم خط OX مفروض‌اند. $OA = 1$ و $OB = 4$. شعاع

دایره‌ای که از نقاط A و B می‌گذرد و بر نیم خط OY مماس است، تقریباً چقدر است؟

- (۱) $\frac{1}{5}$ (۲) $\frac{1}{6}$ (۳) $\frac{1}{7}$ (۴) $\frac{1}{8}$ (۵) $\frac{1}{9}$



- ۲۱ کره‌ای به شعاع واحد در مخروطی ناقص محاط است. (دو قاعده مخروط ناقص و دیواره جانبی آن بر کره مماس‌اند). اگر شعاع قاعده بزرگ‌تر برابر ۲ باشد، حجم مخروط ناقص چقدر است؟

$$\frac{14}{3}\pi \quad (5)$$

$$\frac{7}{2}\pi \quad (4)$$

$$\frac{17}{6}\pi \quad (3)$$

$$\frac{8}{3}\pi \quad (2)$$

$$\frac{17}{12}\pi \quad (1)$$

- ۲۲ فرض کنید a_1, a_2, a_3, \dots و b_1, b_2, b_3, \dots تصادهایی هندسی با قدر نسبت یکسان هستند. اگر $a_1 = 27$ ، $b_1 = 99$ و $a_{15} = b_{11}$ ، آن‌گاه a_4 برابر کدام گزینه است؟

$$514 \quad (5)$$

$$432 \quad (4)$$

$$268 \quad (3)$$

$$343 \quad (2)$$

$$363 \quad (1)$$

- ۲۳ چهار نفر که سوار خودرویی هستند (دو نفر جلو و دو نفر دقیقاً پشت سر آن‌ها) از خودرو پیاده می‌شوند. این چهار نفر به چند طریق مختلف می‌توانند دوباره سوار خودرو شوند، به طوری که هیچ‌کس جای قبلی خود ننشیند؟

$$23 \quad (5)$$

$$8 \quad (4)$$

$$9 \quad (3)$$

$$12 \quad (2)$$

$$16 \quad (1)$$

- ۲۴ چه تعداد دنباله ۸ رقمی از $\{0, 1, 2\}$ وجود دارد که هر دو رقم کنار هم حداکثر ۱ واحد اختلاف داشته باشند؟

$$1404 \quad (5)$$

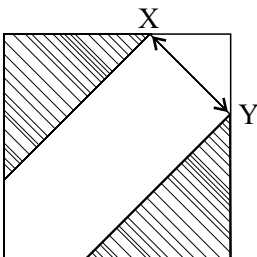
$$1402 \quad (4)$$

$$1400 \quad (3)$$

$$1394 \quad (2)$$

$$1393 \quad (1)$$

- ۲۵ در شکل زیر، مجموع مساحت‌های دو مثلث یکسان و متساوی‌الساقین هاشور خورده، نصف مساحت مربع است. فاصله دو نقطه X و Y از یکدیگر چندبرابر ضلع مربع است؟



$$\sqrt{2}-1 \quad (2)$$

$$\sqrt{3}-1 \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \quad (4)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (3)$$

$$\sqrt{2}+1 \quad (5)$$

۲۶ کوچکترین عدد طبیعی n که در میان 1000 عدد طبیعی متوالی با شروع از $1000n$ ، هیچ مربع کاملی وجود نداشته باشد، کدام است؟

- (۱) ۲۵۱ (۲) ۲۶۶ (۳) ۲۷۵ (۴) ۲۸۲ (۵) ۲۹۶

۲۷ دو دایره برابر به مراکز O_1 و O_2 در نقاط A و B متقاطع اند. خط مماس مشترک دو دایره (که به نقطه B نزدیک تر است). در نقاط C و D بر دایره‌ها مماس است. خطوط AC و AD دایره‌ها را در نقاط E و F قطع می‌کنند. اگر نقاط O_1, O_2, E, F, A بر یک دایره قرار داشته باشند، اندازه زاویه $\angle CAD$ چند درجه است؟

- (۱) 15° (۲) 18° (۳) 30° (۴) 36° (۵) 45°

۲۸ فرض کنید $D_i(n)$ تعداد جایگشت‌های $1, 2, \dots, n$ باشد به طوری که که دقیقاً i تا از جمله‌ها سر جای خود قرار داشته باشند، حاصل عبارت

$$D_1(10) \times D_1(10) \times D_2(10) \times \dots \times D_{10}(10)$$

چند است؟

- (۱) $10!$ (۲) $10!^5$ (۳) $9!^5$ (۴) $9!^{10}$ (۵) صفر

۲۹ عدد 50 روی تخته نوشته شده‌اند. در هر حرکت می‌توانیم دو عدد دلخواه a و b را از روی تخته پاک کنیم و عدد $a + b + ab$ را روی تخته بنویسیم. اگر در نهایت یک عدد روی تخته باقی بماند این عدد کدام است؟

- (۱) 101 (۲) 100 (۳) 51 (۴) 50 (۵) نمی‌توان تعیین کرد

۳۰ معادله $21x^2 - 8y^2 = 18$ در مجموعه اعداد صحیح چند جواب دارد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳ (۵) بی‌نهایت