

فصل اول: مجموعه‌ها

مجموعه

مجموعه: یکی از مفاهیم تعریف نشده در ریاضیات است که معمولاً آن را با حروف بزرگ انگلیسی نام‌گذاری می‌کنیم (A, B, C, \dots) و اعضای آن را داخل آکولاد می‌گذاریم. به‌عنوان مثال مجموعه $A = \{2, 6, 8\}$ ، سه عضو دارد و زیر مجموعه‌های آن به‌صورت زیر است:

$$A_1 = \emptyset, A_2 = \{2\}, A_3 = \{6\}, A_4 = \{8\}, A_5 = \{2, 6\}, A_6 = \{2, 8\}, A_7 = \{6, 8\}, A_8 = \{2, 6, 8\}$$

تذکر: مجموعه تهی را با دو نماد \emptyset یا $\{\}$ نمایش می‌دهیم و می‌دانیم \emptyset زیر مجموعه همه مجموعه‌ها است.

نکته: تعداد زیر مجموعه‌های یک مجموعه n عضوی، 2^n است.

مجموعه‌های مهم و پرکاربرد در ریاضیات به‌صورت زیر هستند:

۱. مجموعه اعداد طبیعی $= \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

۲. مجموعه اعداد حسابی $= \mathbb{W} = \{0, 1, 2, \dots\}$

۳. مجموعه اعداد صحیح $= \mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

۴. هر عدد گویا از تقسیم دو عدد صحیح به‌دست می‌آید. $= \mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$

۵. مثلاً $\sqrt{2}, -\sqrt{3}, \pi$ همگی اعدادی گنگ هستند. مجموعه همه اعداد غیرگویا را گنگ می‌نامیم $= \mathbb{Q}' = \mathbb{Q}'$

۶. مجموعه اعداد حقیقی $= \mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$

نکته: همواره داریم: $\mathbb{Q}' \subseteq \mathbb{R}, \mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

۱ کدام گزینه درست است؟

(۲) $\{\emptyset\} \in \emptyset$

(۱) $\emptyset \in \{\{\emptyset\}\}$

(۴) $\{\{\emptyset\}\} \in \{\{\emptyset\}, \emptyset\}$

(۳) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$

پاسخ: بررسی گزینه‌ها:

گزینه (۱): $\{\emptyset\}$ عضو مجموعه $\{\{\emptyset\}\}$ است نه \emptyset .

گزینه (۲): مجموعه \emptyset هیچ عضوی ندارد، پس $\{\emptyset\} \notin \emptyset$.

گزینه (۳): می‌دانیم \emptyset زیر مجموعه همه مجموعه‌ها است، پس این گزینه درست است.

گزینه (۴): اعضای مجموعه $\{\{\emptyset\}, \emptyset, \{\emptyset\}\}$ و \emptyset هستند نه $\{\{\emptyset\}\}$.

(ریاضی دامل ۹۵)

۲ مجموعه‌های $A = \{2\}$ ، $B = \{3, 5, \{2\}\}$ و $C = \{\{\{2\}, 3, 5\}, 2\}$ مفروض است، کدام بیان در مورد آن‌ها نادرست است؟

(۲) $A \in C$

(۱) $A \in B$

(۴) $A \subseteq C$

(۳) $B \in C$

پاسخ: تنها گزینه نادرست، گزینه (۲) است، زیرا مجموعه C تنها دو عضو دارد که $\{\{2\}, 3, 5\}$ و 2 هستند و $A = \{2\}$ عضو آن نیست، پس $A \notin C$.

۴

گزینه «۴»

اگر $A \cup \{1, 2, 4\} = \{1, 2, 3, \dots, 8\}$ باشد، چند حالت مختلف برای مجموعه A وجود دارد؟

- ۱۶ (۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۱۰ (۴)

پاسخ: اگر $B = \{1, 2, 4\}$ و $C = \{1, 2, 3, \dots, 8\}$ باشند، پس طبق فرض می‌توان نوشت $A \cup B = C$.

برای تعیین اعضای A باید توجه کنیم که همه اعدادی که در C هستند و در B نیستند باید در A باشند؛ یعنی اعداد ۳، ۵، ۶، ۷، ۸ حتماً در مجموعه A هستند، پس هر کدام از این اعضا تنها یک حالت دارند از طرفی هر یک از اعداد ۱، ۲، ۴ ممکن است در مجموعه A باشند یا نباشند، یعنی برای هر کدام از این اعضا دو حالت داریم. پس در کل، تعداد حالت‌های موجود برای اعضای A برابر $2 \times 2 \times 2 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1$ حالت است.

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

مجموعه‌ها را از نظر تعداد اعضا به دو دسته مقابل تقسیم می‌کنیم: ۱) متناهی ۲) نامتناهی

مجموعه متناهی: مجموعه‌ای که تعداد اعضای آن عددی حسابی باشد، مانند مجموعه همه انسان‌های روی کره زمین (با اینکه خیلی زیاد هستن ولی بالاخره متناهی هستند).

مجموعه نامتناهی: مجموعه‌ای که تعداد اعضای آن از هر عددی بزرگ‌تر باشد، مانند مجموعه اعداد طبیعی.

- ← A نامتناهی باشد $B \subseteq A$ نامتناهی است.
 - ← B متناهی باشد $A \subseteq B$ متناهی است.
 - ← A متناهی باشد $B \subseteq A$ متناهی یا نامتناهی است.
 - ← B نامتناهی باشد $A \subseteq B$ متناهی یا نامتناهی است.
- نکته: اگر $A \subseteq B$ باشد

اگر $A \subseteq B$ ، B نامتناهی و A ناتهی باشد، A کدام مجموعه زیر نمی‌تواند باشد؟

- ۱) $\{x \mid x \in \mathbb{R}, |x| < 1\}$ ۲) $\{x \mid x \in \mathbb{Z}, |x| < 1\}$
- ۳) $\{x \mid x \in \mathbb{R}, |x| > -1\}$ ۴) $\{x \mid x \in \mathbb{R}, |x| < -1\}$

پاسخ: می‌دانیم $A \subseteq B$ و B نامتناهی است، یعنی A می‌تواند متناهی و یا نامتناهی باشد، پس مجموعه A هر مجموعه‌ای می‌تواند باشد به جز تهی (طبق فرض تست)، تنها گزینه‌ای که معادل \emptyset است گزینه (۴) است، زیرا می‌دانیم قدرمطلق همواره بزرگ‌تر و مساوی صفر است، پس مجموعه $\{x \mid x \in \mathbb{R}, |x| < -1\}$ هیچ عضوی ندارد.

تذکر

در مورد گزینه (۳)، توجه کنید که این گزینه معادل \mathbb{R} است، زیرا همواره $|x| > -1$ می‌باشد، پس جواب‌های قابل قبول برای x ، مجموعه اعداد حقیقی می‌شود.

اگر مجموعه‌های $A = \{\frac{1}{x} \mid x \in \mathbb{N}\}$ و $B = \{\frac{x}{\lambda} \mid x \in \mathbb{N}\}$ مفروض باشند، کدام یک از مجموعه‌های زیر متناهی است؟

- ۱) $A - B$ ۲) $B - A$ ۳) $A \cap B$ ۴) $A \cup B$

پاسخ: نمایش دو مجموعه A و B با اعضا به صورت زیر است:

$$A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \dots\right\}, B = \left\{\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}, \frac{2}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}, \frac{3}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}, \frac{4}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}, \frac{5}{\lambda}, \frac{2}{\lambda}, \frac{6}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}, \frac{7}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}, \frac{8}{\lambda}, \dots\right\}$$

همان‌طور که می‌بینید، اعضای مجموعه A مدام کوچک می‌شوند ولی اعضای مجموعه B مدام بزرگ می‌شوند، پس این دو مجموعه بی‌شمار عضو غیرمشترک دارند، پس تنها گزینه‌ای که متناهی است $A \cap B$ و نمایش آن به صورت $A \cap B = \{1, \frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}\}$ می‌باشد.

اگر A مجموعه اعداد اول و B مجموعه اعداد طبیعی فرد باشند، کدام یک از مجموعه‌های زیر متناهی است؟

- ۱) $A \cup B$ ۲) $A \cap B$ ۳) $B - A$ ۴) $A - B$

پاسخ: مجموعه‌های A و B به صورت مقابل‌اند:

$$A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots\}, B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, \dots\}$$

همان‌طور که می‌دانید A و B هر دو نامتناهی‌اند و همچنین همه اعداد اول (به جز ۲)، اعدادی فرد هستند، پس در بین گزینه‌ها تنها مجموعه متناهی، $A - B$ است که نمایش مجموعه‌ای آن به صورت $A - B = \{2\}$ می‌باشد.

بازه: زیر مجموعه‌ای از \mathbb{R} که شامل تمام اعداد حقیقی بین دو عدد (مثلاً a و b) باشد را بازه می‌نامیم.

نکته هر بازه به صورت (a, b) را یک بازه باز می‌نامیم و به صورت « $\circ \text{---} \circ$ » نمایش می‌دهیم.

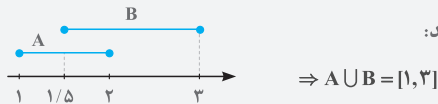
هر بازه به صورت $[a, b]$ یا $(a, b]$ را یک بازه نیم‌باز می‌نامیم و به ترتیب به صورت « $\bullet \text{---} \circ$ » یا « $\circ \text{---} \bullet$ » نمایش می‌دهیم.

هر بازه به صورت $[a, b]$ را یک بازه بسته می‌نامیم و به صورت « $\bullet \text{---} \bullet$ » نمایش می‌دهیم.

تذکره ۱: هر بازه به صورت $(a, +\infty)$ یا $(-\infty, b)$ را بازه باز می‌نامیم و به ترتیب به صورت « $\circ \text{---} \rightarrow$ » یا « $\leftarrow \text{---} \circ$ » نمایش می‌دهیم.

۲: زمانی که بخواهیم روی چند مجموعه اعمالی از قبیل $(\cup, \cap, -)$ را انجام دهیم. می‌توانیم از روش نمایش مجموعه‌ها روی یک محور استفاده کنیم.

به عنوان مثال با نمایش مجموعه‌های $A = [1, 2]$ و $B = [1/5, 3]$ روی یک محور به راحتی $A \cup B$ به دست می‌آید:



مثال آموزشی

درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $(1, 2) \subseteq (1, 2)$

ب) $\{1, 2\} \subseteq [1, 2]$

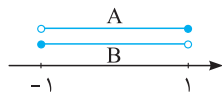
پاسخ الف) $(1, 2) \subseteq (1, 2)$: این گزاره نادرست است، زیرا عدد ۱ در بازه $(1, 2)$ قرار دارد که در بازه $(1, 2)$ نیست. پس $(1, 2)$ نمی‌تواند زیرمجموعه $(1, 2)$ باشد.
 ب) $\{1, 2\} \subseteq [1, 2]$: این گزاره درست است. توجه کنید که مجموعه $\{1, 2\}$ تنها دو عضو دارد که هر دو در مجموعه $[1, 2]$ هستند.

۷ اگر $A = (-1, 1]$ و $B = \{x \in \mathbb{R} \mid (-x) \in A\}$ باشد، مجموعه $B - A$ کدام است؟

- (۱) (۲) $\{-1\}$ (۳) (۴) \emptyset

پاسخ: شرط ورود به مجموعه B به صورت $(-x) \in A$ است، پس می‌توان نوشت:

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid (-x) \in A\} : -1 < -x \leq 1 \xrightarrow{\times(-1)} -1 \leq x < 1$$



$$\Rightarrow B - A = [-1, 1) - (-1, 1] = \{-1\}$$

بنابراین $B = [-1, 1)$ است. در نهایت مجموعه $B - A$ به صورت مقابل می‌باشد:

(ریاضی دائل ۹۲)

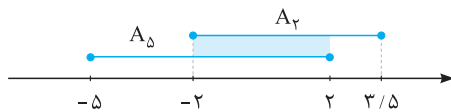
۸ اگر $A_i = [-i, \frac{9-i}{4}]$ و $i \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ ، آن‌گاه مجموعه $(A_2 \cap A_5) - (A_1 \cap A_7)$ به کدام صورت است؟

- (۱) $[-2, -1) \cup (1, 2]$ (۲) $[-2, -1] \cup [1, 2]$ (۳) $[-1, 1]$ (۴) \emptyset

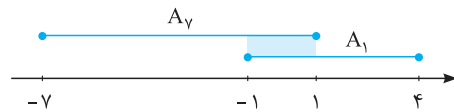
پاسخ: به کمک بازه $A_i = [-i, \frac{9-i}{4}]$ ، A_7 و A_5 را به دست می‌آوریم:

$$A_1 = [-1, 4], A_2 = [-2, 3/4], A_5 = [-5, 2], A_7 = [-7, 1]$$

حالا باید $(A_2 \cap A_5)$ و $(A_1 \cap A_7)$ را به کمک محور به دست آوریم:



$$A_2 \cap A_5 = [-2, 2]$$

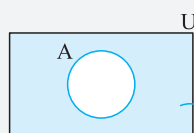


$$A_1 \cap A_7 = [-1, 1]$$

$$(A_2 \cap A_5) - (A_1 \cap A_7) = [-2, 2] - [-1, 1] = [-2, -1) \cup (1, 2]$$

پس می‌توان نوشت:

مجموعه مرجع و متمم یک مجموعه



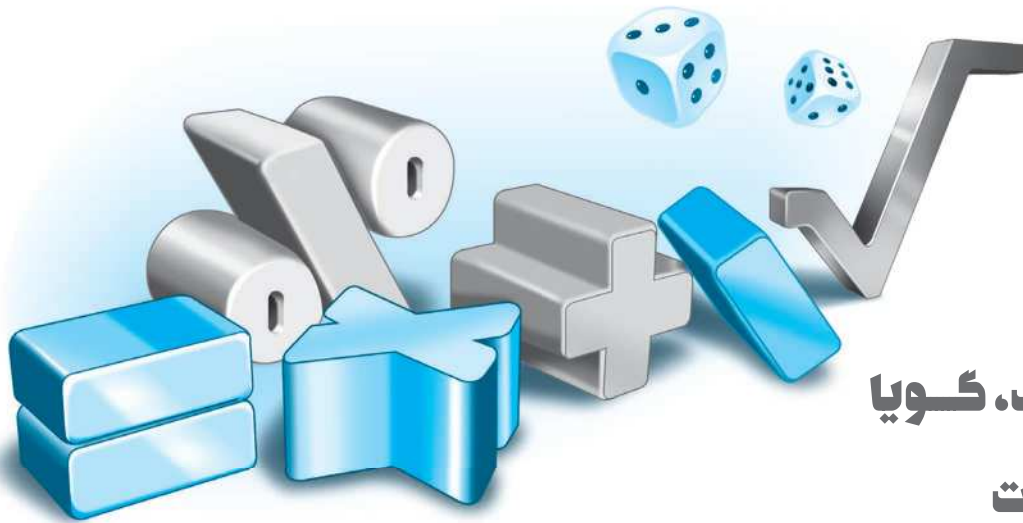
$$A' = U - A$$

مجموعه مرجع: مجموعه مرجع را با U نمایش می‌دهیم و همه مجموعه‌های مورد بحث زیر مجموعه آن هستند.

متمم مجموعه: مجموعه A مفروض است $(A \subseteq U)$ ، متمم مجموعه A را با نماد A' نمایش می‌دهیم و

به صورت مقابل تعریف می‌کنیم: $A' = \{x \mid x \notin A\}$. در واقع A' شامل همه عضوایی از U است که در A نیست.

تذکره برای پیدا کردن متمم یک مجموعه حتماً باید مجموعه مرجع مشخص شود. مثلاً متمم مجموعه $A = [1, 2]$ نسبت به $U = \mathbb{R}$ ، مجموعه $A' = (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$ است و متمم مجموعه $A = [1, 2]$ نسبت به $U = [1, 2]$ ، مجموعه $A' = \{2\}$ است.



فصل پنجم:

معادلات گویا، گویا

و تعیین علامت

معادلات گویا

معادلات گویا: برای حل معادلاتی که شامل جملات گویا هستند، معادله را در ک. م. م. مخرج‌ها ضرب می‌کنیم، سپس آن را ساده می‌کنیم و جواب‌های آن را به دست می‌آوریم.

تذکره ۱: حواستان باشد که ریشه‌های به دست آمده، مخرج‌ها را صفر نکنند و همچنین با شرایط مسئله سازگار باشند.

۲: برای حل معادلات گویا می‌توانیم از مخرج مشترک و طرفین وسطین هم استفاده کنیم.

مثال آموزشی

جواب‌های معادله $\frac{x}{x-2} + \frac{x-2}{x+2} = \frac{8}{x^2-4}$ را به دست آورید.

پاسخ برای حل این معادله گویا، طرفین معادله را در ک. م. م. مخرج‌ها یعنی $(x-2)(x+2)$ ضرب می‌کنیم، پس می‌توان نوشت:

$$x(x+2) + (x-2)(x-2) = \frac{8}{(x-2)(x+2)}(x-2)(x+2) \Rightarrow x^2 + 2x + x^2 - 4x + 4 = 8 \Rightarrow 2x^2 - 2x - 4 = 0 \xrightarrow{=:2} x^2 - x - 2 = 0$$

$$\xrightarrow{b=a+c} x_1 = -1, x_2 = \frac{-c}{a} = 2$$

از طرفی $x = 2$ مخرج کسر را صفر می‌کند، پس غیر قابل قبول است و جواب مسئله فقط $x = -1$ است.

تذکره در بعضی از تست‌ها، با خواندن صورت تست ابتدا باید یک معادله گویا بنویسیم و سپس آن را حل کنیم، به مثال زیر دقت کنید:

مثال آموزشی

دو کارگر اگر کاری را با هم انجام دهند ۶ روزه تمام می‌شود و اگر به تنهایی انجام دهند، کارگر اول کل کار را ۵ روز زودتر از کارگر دوم انجام می‌دهد. هر یک از کارگرها، کار را به تنهایی در چند روز انجام می‌دهند؟

پاسخ فرض می‌کنیم کارگر اول کل کار را در x روز انجام دهد، پس کارگر دوم کل کار را در $x+5$ روز انجام می‌دهد. یعنی نتیجه می‌گیریم کارگر اول در هر روز $\frac{1}{x}$ کار را و کارگر دوم در هر روز $\frac{1}{x+5}$ کار را انجام می‌دهد. از طرفی اگر هر دو کارگر، کار را با هم در ۶ روز انجام دهند، پس در هر روز $\frac{1}{6}$ کار را انجام می‌دهند، پس می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+5} = \frac{1}{6} \xrightarrow{\times(x)(x+5)} x+5+x = \frac{1}{6}(x)(x+5) \xrightarrow{\times 6} 6x+30+6x = x^2+5x \Rightarrow x^2-7x-30=0$$

هر دو کارگر با هم کار کنند

$$\Rightarrow (x-10)(x+3) = 0 \Rightarrow x = 10, x = -3$$

از آنجایی که تعداد روزهای انجام کار نمی‌تواند منفی باشد، پس کارگر اول کل کار را در ۱۰ روز و کارگر دوم کل کار را به تنهایی در ۱۵ روز انجام می‌دهند.

نکته مستطیلی به طول x و عرض y که نسبت طول به عرض آن $\frac{x}{y} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ باشد را مستطیل طلایی می‌نامیم.

بالافره توی کنکور تهرپی ۹۸، از معادله‌های گویا اومد. انصافاً هم تستش فیلی قشنگ بود. 😊

۱ در معادله $x + \frac{2x-1}{x-4} = -2$ ، ریشه‌ها چگونه‌اند؟

- گزینه «۴»
 (۱) فقط یک ریشه قابل قبول (۲) دو ریشه عکس هم
 (۳) دو ریشه مساوی (۴) دو ریشه قرینه

پاسخ: برای حل معادله، مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\frac{x}{1} + \frac{2x-1}{x-4} = -2 \Rightarrow \frac{x(x-4) + 2x-1}{x-4} = -2 \Rightarrow \frac{x^2 - 4x + 2x - 1}{x-4} = -2 \Rightarrow x^2 - 2x - 1 = -2x + 8 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$$

پس دو ریشه معادله قرینه هم هستند.

۲ ریشه بزرگتر معادله گویای $\frac{6x}{x-1} + \frac{x-1}{3x} = 3$ کدام است؟

- گزینه «۲»
 (۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{1}{5}$ (۳) $\frac{1}{5}$ (۴) $\frac{1}{4}$

پاسخ: برای حل این معادله، مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\frac{(6x)(3x) + (x-1)(x-1)}{(x-1)(3x)} = 3 \Rightarrow \frac{18x^2 + x^2 - 2x + 1}{3x^2 - 3x} = 3 \Rightarrow 19x^2 - 2x + 1 = 9x^2 - 9x \Rightarrow 10x^2 + 7x + 1 = 0$$

$$\Delta = (7)^2 - 4(10) = 9 \Rightarrow x_1 = \frac{-7+3}{20} = -\frac{1}{5}, \quad x_2 = \frac{-7-3}{20} = -\frac{1}{2}$$

پس ریشه بزرگتر معادله $x = -\frac{1}{5}$ است.

۳ یازده کیلوگرم رنگ با غلظت ۴۰ درصد با چهار کیلوگرم رنگ از همان نوع با غلظت ۷۰ درصد مخلوط شده‌اند. با تبخیر چند کیلوگرم آن، غلظت محلول به ۵۰ درصد می‌رسد؟

(ریاضی فارغ ۹۲)

- گزینه «۱»
 (۱) ۰/۴ (۲) ۰/۵ (۳) ۰/۶ (۴) ۰/۸

پاسخ: در مجموع $11 + 4 = 15$ کیلوگرم رنگ داریم که رنگ خالص آن برابر است با:
 حالا اگر x کیلوگرم آن را تبخیر کنیم، x کیلوگرم از وزن حلال کم می‌شود، پس برای آن که غلظت محلول به ۵۰ درصد برسد باید داشته باشیم:

$$\frac{7/2}{15-x} = \frac{50}{100} \Rightarrow \frac{7/2}{15-x} = \frac{1}{2} \Rightarrow 14/4 = 15-x \Rightarrow x = 0/6 \text{ kg}$$

۴ بهروز یک مجله را به تنهایی ۹ ساعت زودتر از فرهاد تایپ می‌کند. اگر هر دو با هم کار کنند، در ۲۰ ساعت این کار انجام می‌شود. بهروز به تنهایی در چند ساعت این کار را انجام می‌دهد؟

(ریاضی دافل ۹۸)

- گزینه «۴»
 (۱) ۳۲ (۲) ۳۳ (۳) ۳۵ (۴) ۳۶

پاسخ: فرض می‌کنیم بهروز یک مجله را به تنهایی در x ساعت تایپ کند، پس بهروز در هر ساعت $\frac{1}{x}$ مجله را به تنهایی تایپ می‌کند. از طرفی فرهاد همان مجله را به تنهایی در $x+9$ ساعت تایپ می‌کند. پس فرهاد در هر ساعت $\frac{1}{x+9}$ مجله را به تنهایی تایپ می‌کند.
 همچنین اگر هر دو با هم کار کنند کل کار را در ۲۰ ساعت انجام می‌دهند؛ یعنی اگر هر دو با هم کار کنند در هر ساعت $\frac{1}{20}$ کار تایپ مجله به پایان می‌رسد.
 پس طبق اطلاعات به دست آمده می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+9} = \frac{1}{20} \Rightarrow \frac{x+9+x}{x(x+9)} = \frac{1}{20} \Rightarrow \frac{2x+9}{x^2+9x} = \frac{1}{20} \Rightarrow x^2+9x = 40x+180 \Rightarrow x^2-31x-180=0$$

$$\Rightarrow (x-36)(x+5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 36 \\ x = -5 \text{ (امکان پذیر نیست)} \end{cases}$$

پس بهروز به تنهایی کل کار تایپ مجله را در ۳۶ ساعت انجام می‌دهد.

برای پیدا کردن جواب معادله $x^2 - 31x - 180 = 0$ بهتر است از گزینه‌ها کمک بگیریم.

۵ سرعت یک قایق موتوری، در آب راکد ۱۰۰ متر در دقیقه است. این قایق فاصله ۱۲۰۰ متری در رودخانه را رفته و برگشته است. اختلاف زمان رفت و برگشت ۵ دقیقه است. سرعت آب رودخانه، چند متر در دقیقه است؟

(تهرپی دافل ۹۸)

- گزینه «۳»
 (۱) ۱۲ (۲) ۱۵ (۳) ۲۰ (۴) ۲۵

پاسخ: از کتاب فیزیک می‌دانیم که $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ است که در آن Δx تغییرات مکان، Δt تغییرات زمان و v سرعت است. با توجه به اطلاعات مسئله می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} 100 + v \frac{m}{min} = \text{سرعت قایق در جهت حرکت آب} \\ 100 - v \frac{m}{min} = \text{سرعت قایق در خلاف جهت حرکت آب} \end{cases}$$

همچنین می‌دانیم اختلاف زمان رفت و برگشت ۵ دقیقه است، بنابراین:

$$t_2 - t_1 = 5 \Rightarrow \frac{1200}{100-v} - \frac{1200}{100+v} = 5$$

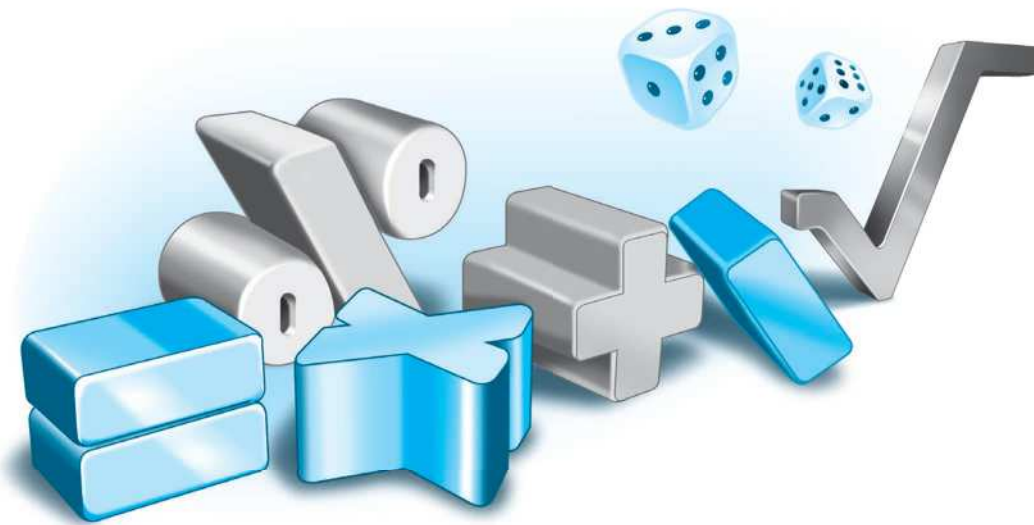
حل معادله بالا کار دشواری است، پس برای سادگی در حل معادله و پیدا کردن v (سرعت آب رودخانه) از گزینه‌ها کمک می‌گیریم. تنها گزینه‌ای که در

معادله صدق می‌کند $v = 20 \frac{m}{min}$ است:

$$v = 20 \frac{m}{min} \Rightarrow \frac{1200}{100-20} - \frac{1200}{100+20} = \frac{1200}{80} - \frac{1200}{120} = 15 - 10 = 5 \checkmark$$

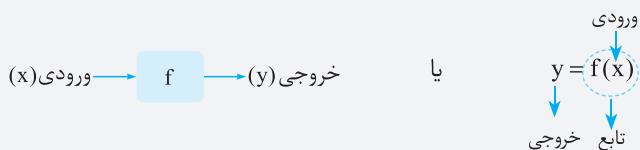
فصل هفتم:

تابع



تابع

تعریف تابع: تابع (function) یک ماشین است که به هر ورودی (x)، دقیقاً یک خروجی (y) می‌دهد. معمولاً توابع را با حروف f یا g نمایش می‌دهیم:



فرم‌های نمایش تابع به یکی از چهار حالت زیر است:

۱. نمودار بیگانه

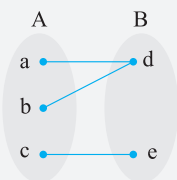
۲. زوج مرتب

۳. نمودار

باید شرایط تابع بودن را در هر یک از فرم‌های بالا بلد باشیم، حالا به نمایش هر یک از فرم‌های مختلف تابع می‌پردازیم:

۱) نمودار بیگانه: یک رابطه از مجموعه A به B زمانی تابع است که از هر عضو مجموعه A، دقیقاً یک فلش خارج شود.

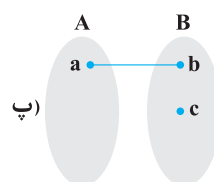
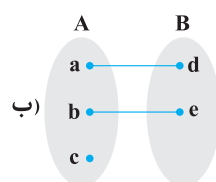
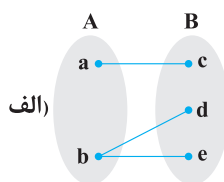
به‌عنوان مثال نمودار بیگانه مقابل تابع است:



تذکر: اعضای مجموعه B، هیچ تأثیری روی تابع بودن یا نبودن نمودار بیگانه ندارد. (مجموعه B به ما هیچ ربطی ندارد.)

مثال آموزشی

تابع بودن یا نبودن روابط زیر را بررسی کنید.



پاسخ: الف) تابع نیست، زیرا در مجموعه A از عضو b دو فلش خارج شده است. هم‌چنین در مورد ب) از عضو c هیچ فلشی خارج نشده است، پس آن هم تابع نیست ولی پ) تابع است، زیرا از هر عضو A دقیقاً یک فلش خارج شده است.

۲) زوج مرتب: یک رابطه به صورت زوج مرتب زمانی تابع است که مؤلفه اول تکراری نداشته باشد، حالا اگر مؤلفه‌های اول، تکراری بودند، برای تابع بودن باید مؤلفه‌های دوم نظیرشان هم برابر باشند.

مثال آموزشی

اگر رابطه $R = \{(1,1), (1, m^2 - 3), (m, 2), (2, 4)\}$ تابع باشد، m را به دست آورید.

پاسخ

در بین زوج مرتب‌ها هم $(1,1)$ و هم $(1, m^2 - 3)$ را داریم، پس باید مؤلفه‌های دوم نظیرشان با هم برابر باشند، یعنی:

$$m^2 - 3 = 1 \Rightarrow m^2 = 4 \Rightarrow m = \pm 2$$

حواستان باشد حتماً هر دو مقدار به دست آمده را در رابطه جای‌گذاری کنید و از قابل قبول بودن مقادیر به دست آمده مطمئن شوید:

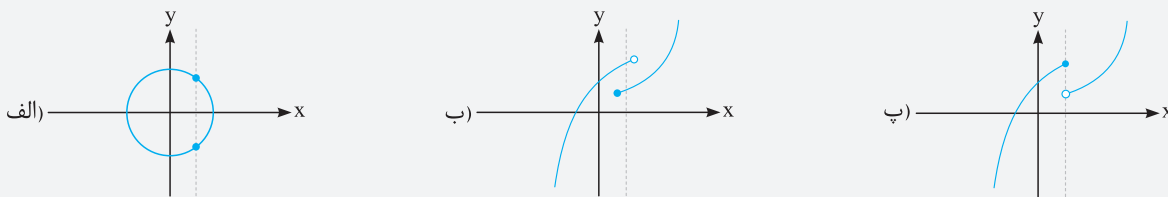
$$m = 2 \Rightarrow \{(1,1), (1, 4-3), (2,2), (2,4)\} \quad \times$$

$$m = -2 \Rightarrow \{(1,1), (1, 4-3), (-2,2), (2,4)\} \quad \checkmark$$

همان‌طور که می‌بینید به ازای $m = 2$ ، در زوج مرتب‌ها هم عضو $(2,2)$ و هم عضو $(2,4)$ داریم، پس به ازای $m = 2$ رابطه R تابع نیست و فقط $m = -2$ قابل قبول است.

۳) نمودار: یک رابطه زمانی تابع است که هر خط موازی محور y ها، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

به عنوان مثال می‌توان نوشت:



نمودارهای (الف) و (ب) به وضوح تابع نیستند، ولی نمودار (پ) تابع است. (حواستان باشد که از دو نقطه‌ای که در شکل زیر هم قرار گرفته‌اند یکی توپرو دیگری توخالی است.)

۴) ضابطه: اگر بتوان y را بر حسب x به صورت صریح $y = f(x)$ بنویسیم آن رابطه حتماً تابع است. به عنوان مثال $y = x^2 + 2x - 4$ ، $y = \sin x - \cos x$ و ... همگی تابع‌اند.

مثال آموزشی

آیا رابطه‌های $y^2 = x^2 + 1$ و $y^3 = x^2 + 1$ تابع‌اند؟

پاسخ

بررسی تابع بودن $y^3 = x^2 + 1$:

$$y^3 = x^2 + 1 \Rightarrow y = \sqrt[3]{x^2 + 1} \Rightarrow \text{تابع است}$$

$$y^2 = x^2 + 1 \Rightarrow \sqrt{y^2} = \sqrt{x^2 + 1} \Rightarrow |y| = \sqrt{x^2 + 1} \Rightarrow y = \pm \sqrt{x^2 + 1}$$

بررسی تابع بودن $y^2 = x^2 + 1$:
رابطه به صورت صریح $y = f(x)$ نیست، پس تابع نیست. (هم + و هم - داره)

نکته معمولاً ضابطه‌هایی که y دارای توان زوج، قدر مطلق، جزء صحیح و یا درون نسبت مثلثاتی (مثلاً $\cos y$...) هستند، تابع نیستند، به عنوان مثال $x = \sin y$ و $|y| = x$ و ...

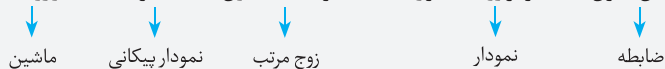
تذکره در حالت کلی اگر در یک رابطه به ازای یک x ، دو یا چند y بگیریم آن رابطه تابع نیست، مانند:

$$y^2 = x \xrightarrow{x=1} y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1$$

دامنه و برد

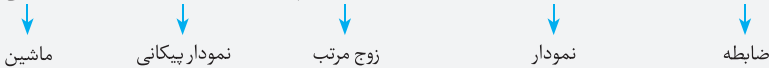
دامنه: دامنه تابع $y = f(x)$ را با D_f نمایش می‌دهیم و دامنه در حالت‌های مختلف نمایش، به صورت زیر است:

x های قابل قبول = تصویر روی محور x ها = مؤلفه‌های اول = مجموعه A = ورودی‌ها $\Rightarrow D_f$



برد: برد تابع $y = f(x)$ را با R_f نمایش می‌دهیم و برد در حالت‌های مختلف نمایش، به صورت زیر است:

y های قابل قبول = تصویر روی محور y ها = مؤلفه‌های دوم = زیرمجموعه‌ای از B = خروجی‌ها $\Rightarrow R_f$



تذکره ۱: در نمایش نمودار پیکانی، برد زیر مجموعه‌ای از B است نه خود B .

تذکره ۲: مجموعه B را هم دامنه می‌نامیم و همواره $R_f \subseteq B$ است.

پننا تست فوب از مفوم تابع رو با هم ببینیم!

۱ چه تعداد از نقاط تابع $f = \{(3, m^2), (2, 1), (-3, m), (-2, m), (3, m+2), (m, 4)\}$ در ناحیه اول و دوم قرار دارند؟

- گزینه «۱» صفر ۲ ۳ ۴ ۴

پاسخ: برای تابع بودن، نباید مؤلفه‌های اول تکراری باشند، در صورت تکراری بودن، مؤلفه‌های دوم نظیرشان باید برابر باشند، پس می‌توان نوشت:

$$(3, m^2), (3, m+2) \Rightarrow m^2 = m+2 \Rightarrow m^2 - m - 2 = 0 \xrightarrow{b=a+c} m = -1, m = 2$$

حواستان باشد باید هر دو m به دست آمده در f جای‌گذاری کنیم تا از درست بودن آن‌ها مطمئن شویم:

$$m = -1 \Rightarrow \{(3, 1), (2, 1), (-3, -1), (-2, -1), (3, 1), (-1, 4)\} \checkmark$$

$$m = 2 \Rightarrow \{(3, 4), (2, 1), (-3, 2), (-2, 2), (3, 4), (2, 4)\} \times$$

پس فقط $m = -1$ قابل قبول است و تابع به صورت مقابل است:

$f = \{(3, 1), (2, 1), (-3, -1), (-2, -1), (-1, 4)\}$
از طرفی می‌دانیم نقاطی در ناحیه اول و دوم قرار دارند که مؤلفه دومشان (y) مثبت باشد، پس در این تابع نقاط $(3, 1)$ ، $(2, 1)$ و $(-1, 4)$ در ناحیه اول و دوم قرار دارند که تعدادشان ۳ تا است.

نکته تعداد توابع از یک مجموعه m عضوی به یک مجموعه n عضوی برابر n^m است.

۲ چند تابع از مجموعه A عضو 4 به مجموعه B عضو 3 وجود دارد؟

- گزینه «۱» ۱۲ ۲۴ ۳۱ ۶۴ ۸۱

پاسخ: روش اول: مجموعه‌های A و B را به صورت مقابل در نظر می‌گیریم:

$A = \{a, b, c, d\}, B = \{e, f, g\}$
برای هر یک از اعضای مجموعه A یعنی a, b, c, d سه انتخاب وجود دارد، مثلاً عضو a به یکی از اعضای e, f, g می‌تواند برود (عضو a سه حالت دارد)، همچنین مجدداً عضو b هم می‌تواند به هر یک از اعضای e, f, g یا برود یعنی برای عضو b هم سه حالت رخ می‌دهد و ...

پس طبق اصل ضرب تعداد کل توابع از مجموعه A به مجموعه B برابر است با:

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$$

(حواستان باشد برای تابع بودن مؤلفه‌های اول نباید تکراری باشند ولی تکراری بودن مؤلفه‌های دوم هیچ ایرادی ندارد، مثلاً عضوهای a و b هر دو می‌توانند به f بروند و ...)

روش دوم: با توجه به نکته بالا تعداد توابع از A به B برابر $3^4 = 81$ است.

نکته روابطی که به صورت چند ضابطه‌ای هستند (با فرض آن‌که تک تک ضابطه‌ها تابع باشند) در صورتی تابع اند که دامنه‌ها اشتراک نداشته باشند و اما

در صورتی که دامنه‌ها اشتراک داشتند، برای تابع بودن باید آن x ‌های مشترک، یک y بدهند نه بیشتر.

۳ کدام یک از گزینه‌های زیر یک تابع را نمایش می‌دهد؟

- گزینه «۱» $y = \begin{cases} 2x+2 & ; x \geq 0 \\ -x+1 & ; x \leq 0 \end{cases}$ ۲ $y = \begin{cases} x-1 & ; x > 2 \\ 2x^2-1 & ; x < 4 \end{cases}$ ۳ $y = \begin{cases} [x] & ; x > 1 \\ 3 & ; x < 3 \end{cases}$ ۴ $y = \begin{cases} -2x+1 & ; x \leq 4 \\ -x-3 & ; x \geq 4 \end{cases}$

پاسخ: بررسی گزینه‌ها:

گزینه (۱): اشتراک دامنه‌ها $x = 0$ است، با جای‌گذاری $x = 0$ در هر دو ضابطه داریم:

پس این رابطه تابع نیست، زیرا به ازای $x = 0$ دو y مختلف به دست می‌آید.

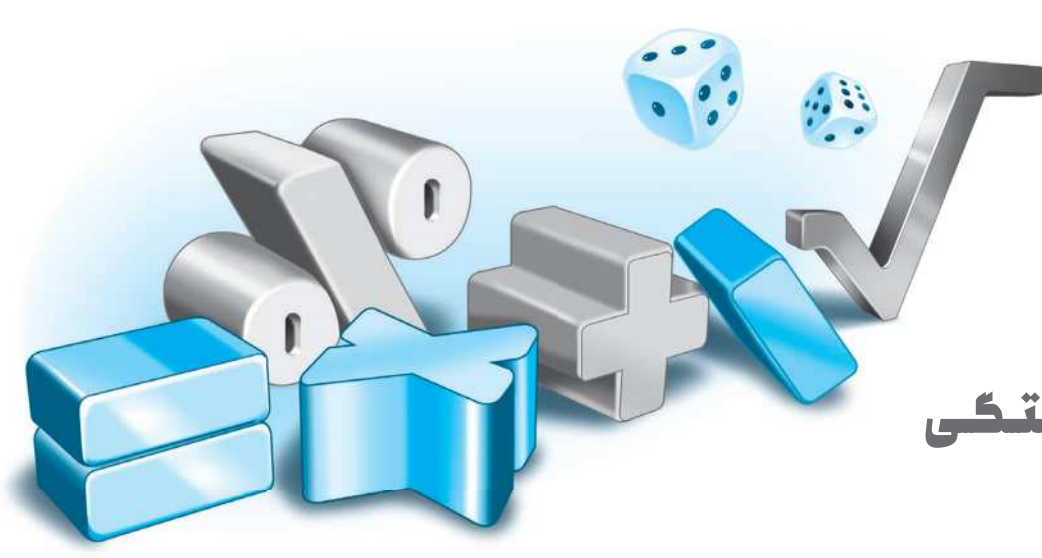
گزینه (۲): اشتراک دامنه‌ها بازه $(2, 4)$ است، یعنی مثلاً برای تابع بودن به ازای $x = 3$ باید یک y بدهد:

پس این رابطه هم تابع نیست.

گزینه (۳): اشتراک دامنه‌ها بازه $(1, 3)$ است، از طرفی به ازای $x = 2$ ، ضابطه اول ۲ و ضابطه دوم ۳ می‌دهد، پس تابع نیست.

گزینه (۴): اشتراک دامنه‌ها $x = 4$ است و با جای‌گذاری در ضابطه‌ها داریم:

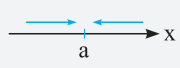
همان طور که می‌بینید هر دو ضابطه به ازای تنها عضو مشترک دامنه‌ها ($x = 4$) مقدار y را -7 می‌دهند، پس این رابطه، تابع است.



فصل دهم: حد و پیوستگی

مفهوم حد

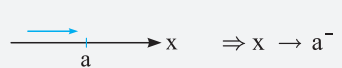
میل کردن: اگر x مدام به نقطه a نزدیک شود (چه از چپ و چه از راست)، ولی هیچ وقت به a نرسد، می‌گوییم x به a میل می‌کند و می‌نویسیم: « $x \rightarrow a$ ».



و همچنین در حالت‌های دیگر می‌توان به صورت زیر نوشت:



۱. x از سمت راست a به نقطه a نزدیک می‌شود:



۲. x از سمت چپ a به نقطه a نزدیک می‌شود:

مقدار مد تابع در یک نقطه: اگر با نزدیک شدن x به نقطه a به اندازه دلخواه (چه از چپ و چه از راست)، $f(x)$ به L نزدیک شود، می‌گوییم حد تابع $f(x)$ در $x = a$ برابر L است و می‌نویسیم:

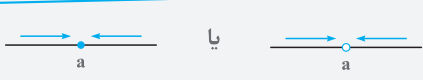
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

به راحتی قابل نتیجه‌گیری است که:

۱. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_1$: حد راست تابع $f(x)$ در $x = a$ برابر L_1 است. ۲. $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L_2$: حد چپ تابع $f(x)$ در $x = a$ برابر L_2 است.

شرط وجود حد: می‌گوییم تابع $f(x)$ در $x = a$ حد دارد هرگاه حد چپ و راست در a موجود و برابر باشند:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \text{یک عدد مشخص}$$

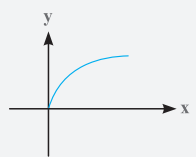


تذکره ۱. برای محاسبه حد تابع $f(x)$ در $x = a$ ، بودن یا نبودن نقطه a در دامنه تابع

$f(x)$ اهمیتی ندارد؛ زیرا x به نقطه a نزدیک می‌شود ولی هیچ وقت به خود a نمی‌رسد.

۲. اگر حداقل یکی از حدهای (چپ یا راست) تابع $f(x)$ در $x = a$ تعریف نشده باشد (در دامنه نباشد)، تابع در a حد ندارد.

برای مثال تابع $f(x) = \sqrt{x}$ در $x = 0$ حد ندارد؛ زیرا دامنه این تابع $x \geq 0$ است و اصلاً حد چپ ($x \rightarrow 0^-$) تعریف نشده است.



مثال آموزشی

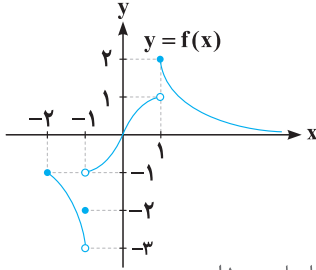
حد تابع $f(x) = \frac{1}{[x]}$ را در $x = 0$ بررسی کنید.

پاسخ دامنه توابع کسری {ریشه‌های مخرج} $\mathbb{R} - \{0\}$ است، پس می‌توان نوشت: $D_f = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ $[x] = 0 \Rightarrow 0 \leq x < 1 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ همان طور که از D_f مشخص است، حد راست تابع در $x = 0$ ($x \rightarrow 0^+$) تعریف نشده است، پس $f(x) = \frac{1}{[x]}$ در این نقطه حد ندارد.

محاسبه حد از روی نمودار: برای محاسبه $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ ، از نقطه $x = a$ کمی جلوتر می‌رویم ($x \rightarrow a^+$) و مقدار تابع را در این نقطه به دست می‌آوریم و همچنین برای محاسبه $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ ، از نقطه $x = a$ کمی عقب‌تر می‌رویم ($x \rightarrow a^-$) و مقدار تابع را در این نقطه به دست می‌آوریم. در نهایت اگر $f(x)$ بخواهد در $x = a$ حد داشته باشد، باید شاخه سمت چپ و راست نمودار در این نقطه به هم برسند.

مثال آموزشی

با توجه به شکل مقابل، حدهای زیر را به دست آورید.



۱) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

۲) $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x)$

۳) $\lim_{x \rightarrow 1^+} [f(x)]$

۴) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$

۵) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

۱) وقتی $x \rightarrow 1^-$ می‌رود؛ یعنی کمی از نقطه $x = 1$ عقب‌تر می‌رویم و مقدار تابع را به دست می‌آوریم که حاصل حد ۱ است.

پاسخ

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$

۲) وقتی $x \rightarrow (-1)^-$ می‌رود؛ یعنی کمی از نقطه $x = -1$ عقب‌تر می‌رویم و مقدار تابع را به دست می‌آوریم که حاصل حد، -۳ است.

$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = -3$

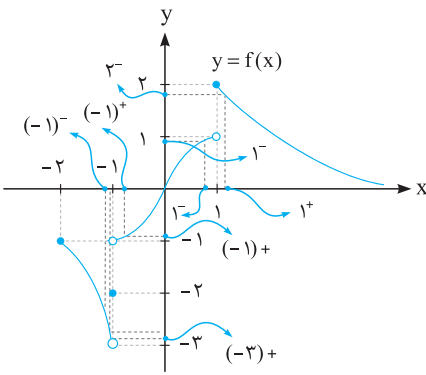
۳) وقتی $x \rightarrow 1^+$ می‌رود؛ یعنی کمی از نقطه $x = 1$ جلوتر می‌رویم و مقدار تابع را به دست می‌آوریم که حاصل حد ۲ است، اما به صورت دقیق 2^- است، پس $\lim_{x \rightarrow 1^+} [f(x)] = [2^-] = 1$

۴) تابع $f(x)$ در $x = -2$ حد ندارد، زیرا در این نقطه شاخه سمت چپ برای -2 نداریم؛ یعنی $(-2)^-$ وجود ندارد.

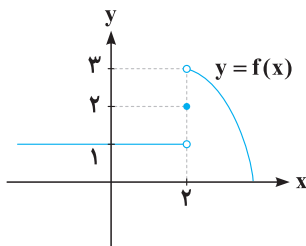
۵) وقتی $x \rightarrow -1$ می‌رود باید حد را در دو حالتی که $x \rightarrow (-1)^+$ و $x \rightarrow (-1)^-$ بررسی کنیم. با توجه به نمودار می‌توان نوشت:

$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = -1$, $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = -3$

پس f در $x = -1$ حد ندارد.



مثلا تست باحال از تشفی من در توابع از روی نمودار.



با توجه به نمودار مقابل، حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) - f(2) - \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ کدام است؟

(مشابه متن کتاب درسی)

- گزینه «۱» ۱) ۶
- گزینه «۲» ۲) ۱
- گزینه «۳» ۳) صفر
- گزینه «۴» ۴) ۲

$f(2) = 3, \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 3, \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1$

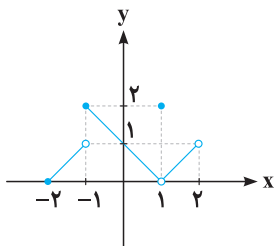
پاسخ: با توجه به نمودار بالا، مشاهده می‌شود که:

$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) - f(2) - \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 3 - 3 - 1 = -1$

پس می‌توان نوشت:

(مشابه تمرین کتاب درسی)

با توجه به نمودار مقابل، کدام گزینه زیر نادرست است؟



گزینه «۱» ۱) $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} [f(x)] = 1$

گزینه «۲» ۲) وجود ندارد $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$

گزینه «۳» ۳) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} [f(x)] = 0$

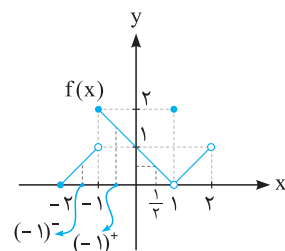
گزینه «۴» ۴) $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = 2$

پاسخ: بررسی گزینه‌ها:

گزینه ۱) وقتی $x \rightarrow (-1)^+$ ، از نقطه $x = -1$ کمی جلوتر می‌رویم و مقدار تابع را به دست می‌آوریم که حاصل، ۲ است. پس می‌توان نوشت:

$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} [f(x)] = [2] = 1$

پس گزینه ۱)، درست است.



گزینه (۲): این گزینه درست است، زیرا با توجه به نمودار تابع $f(x)$ ، شاخه سمت چپ برای f در $x = -2$ نداریم، پس $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ وجود ندارد.
گزینه (۳): وقتی $x \rightarrow \frac{1}{p}$ (چه از چپ و چه از راست)، حد تابع عددی بین صفر و ۱ است، پس می‌توان نوشت:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{p}} [f(x)] = [\text{عددی بین صفر و یک}] = 0$$

پس این گزینه هم درست است.

گزینه (۴): این گزینه نادرست است، زیرا:

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = 2 + 1 = 3$$

کدام تابع داده شده در نقطه $x = 1$ حد دارد؟

گزینه «۴»

(۱) $y = \sqrt{x^2 - 1}$ (۲) $y = \frac{|x-1|}{x-1}$ (۳) $y = \frac{1}{[x]}$ (۴) $y = \sqrt{|x-1|}$

پاسخ: برای حد داشتن در $x = 1$ ، ابتدا باید شاخه چپ و راست تابع در این نقطه وجود داشته باشد.

بررسی گزینه‌ها:

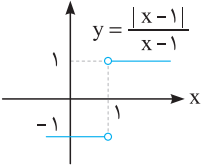
گزینه (۱): $y = \sqrt{x^2 - 1} \xrightarrow{\text{دامنه}} x^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 1 \xrightarrow{\text{جذر}} |x| \geq 1 \Rightarrow x \geq 1 \text{ یا } x \leq -1$

همان‌طور که می‌بینید شاخه سمت چپ در $x = 1$ وجود ندارد، پس تابع $y = \sqrt{x^2 - 1}$ در $x = 1$ حد ندارد.

گزینه (۲):

$$y = \frac{|x-1|}{x-1} \Rightarrow y = \begin{cases} \frac{x-1}{x-1} = 1 & ; x > 1 \\ \frac{-(x-1)}{x-1} = -1 & ; x < 1 \end{cases}$$

پس نمودار این تابع به صورت مقابل است:



$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x-1|}{x-1} = 1, \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x-1|}{x-1} = -1$$

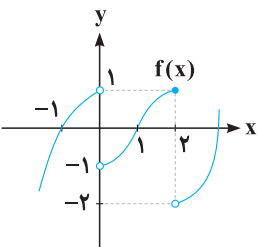
پس تابع $y = \frac{|x-1|}{x-1}$ در $x = 1$ حد ندارد.

گزینه (۳): $y = \frac{1}{[x]} \xrightarrow{\text{دامنه}} D_y : [x] = 0 \Rightarrow 0 \leq x < 1 \Rightarrow D_y = \mathbb{R} - [0, 1) = (-\infty, 0) \cup [1, +\infty)$

برای این تابع، شاخه چپ در $x = 1$ وجود ندارد، پس تابع $y = \frac{1}{[x]}$ در $x = 1$ حد ندارد.

گزینه (۴): $y = \sqrt{|x-1|} \xrightarrow{\text{دامنه}} D_y : |x-1| \geq 0$

می‌دانیم قدر مطلق همواره بزرگ‌تر و مساوی صفر است، پس دامنه تابع $y = \sqrt{|x-1|}$ برابر \mathbb{R} می‌باشد و همچنین حاصل حد تابع در $x = 1$ صفر است.



نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت مقابل است. حاصل $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x-1) + \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(-x+1)$ کدام است؟

- گزینه «۲»
- (۱) صفر
(۲) ۲
(۳) -۱
(۴) -۳

پاسخ: روش اول: برای محاسبه $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x-1) + \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(-x+1)$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x-1) \Rightarrow x < 1 \xrightarrow{-1} x-1 < 0 \Rightarrow x-1 \rightarrow 0^- : \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x-1) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$$

که با توجه به نمودار داده شده حاصل $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x-1) = 1$ است.

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(-x+1) : x \rightarrow (-1)^+ \Rightarrow x > -1 \xrightarrow{x(-1)} -x < 1 \xrightarrow{+1} -x+1 < 2 \Rightarrow -x+1 \rightarrow 2^- : \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(-x+1) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$$

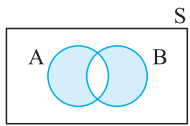
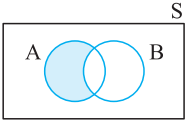
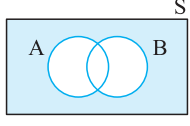
$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x-1) + \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(-x+1) = 1 + 1 = 2$$

با توجه به نمودار حاصل $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(-x+1) = 1$ است، پس داریم:

روش دوم: در محاسبه $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x-1)$ ، می‌توان x را تقریباً $0/99$ در نظر گرفت. پس باید $f(0/99) = f(-0/01)$ را به دست آوریم که از روی نمودار این

مقدار تقریباً ۱ است. همچنین برای محاسبه $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(-x+1)$ ، می‌توان x را $0/99$ - در نظر گرفت، پس باید $f(1/99) = f(-(-0/99)+1)$ را به دست

آوریم که تقریباً این مقدار هم ۱ است.

نمودار ون	رابطه	نام مجموعه	پیشامد
	$n((A - B) \cup (B - A)) = n(A) + n(B) - 2n(A \cap B)$	$(A - B) \cup (B - A)$	فقط یکی رخ بدهد.
	$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$	$A - B$	فقط A رخ بدهد.
	$n(A \cup B)' = n(S) - n(A \cup B)$	$(A \cup B)' = A' \cap B'$	هیچ کدام رخ ندهد.

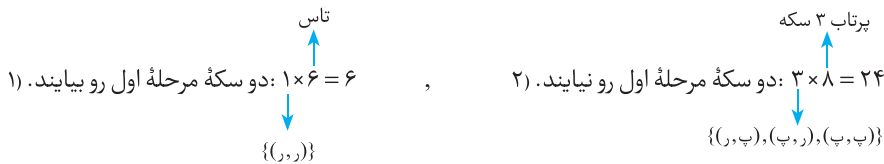
پیشامدهای ناسازگار: دو پیشامد A و B را ناسازگار می‌گوییم هرگاه $A \cap B = \emptyset$ باشد. که در این صورت $(n(A \cap B) = 0)$ است.

۱ دو سکه را پرتاب می‌کنیم. اگر هر دو رو آمدند، یک تاس پرتاب می‌کنیم در غیر این صورت سه سکه دیگر پرتاب می‌کنیم. تعداد اعضای فضای نمونه این آزمایش کدام است؟

(مشابه تمرین کتاب درسی)

- گزینه «۱» ۴۰ (۱) گزینه «۲» ۳۰ (۲) گزینه «۳» ۱۸ (۳) گزینه «۴» ۲۴ (۴)

پاسخ: در این آزمایش تصادفی دو حالت داریم:



پس طبق اصل جمع $6 + 24 = 30$ حالت برای اعضای فضای نمونه‌ای رخ می‌دهد.

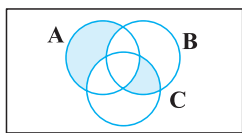
۲ در یک خانواده ۵ فرزندی، اگر A پیشامد آن باشد که خانواده ۳ پسر داشته باشد و B پیشامد آن باشد که خانواده حداقل ۳ دختر داشته باشد، تعداد اعضای پیشامد $A \cap B'$ کدام است؟

- گزینه «۱» ۱۰ (۱) گزینه «۲» ۱۶ (۲) گزینه «۳» ۱۴ (۳) گزینه «۴» صفر (۴)

پاسخ: برای مشخص کردن تعداد اعضای پیشامد A کافی است مشخص کنیم کدام یک از این ۵ فرزند، پسر هستند. (مثلاً فرزند اول، دوم و چهارم) که برای این کار $n(A) = \binom{5}{3} = 10$ حالت داریم. حالا از آن جایی که A و B دو پیشامد ناسازگارند (در خانواده ۵ فرزندی نمی‌توانیم ۳ پسر و حداقل ۳ دختر داشته باشیم)، پس $n(A \cap B) = 0$ است. بنابراین داریم:

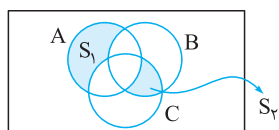
$$n(A \cap B') = n(A) - n(A \cap B) \xrightarrow{n(A \cap B) = 0} n(A \cap B') = n(A) = 10$$

۳ در نمودار شکل زیر، پیشامدهای A، B و C سه پیشامد از فضای نمونه‌ای S هستند. قسمت رنگی بیانگر کدام پیشامد است؟



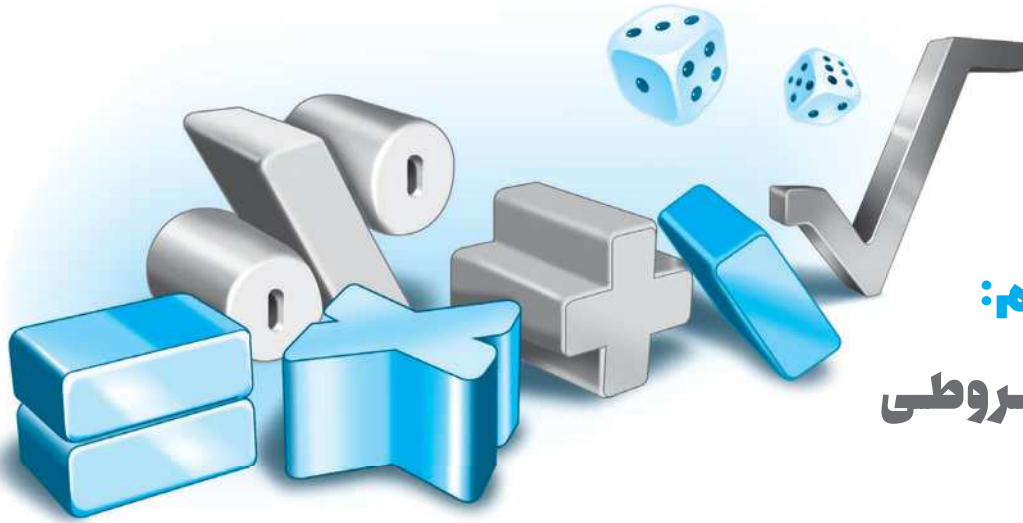
- گزینه «۱» (۱) پیشامد A رخ بدهد یا پیشامدهای B و C با هم رخ بدهند.
گزینه «۲» (۲) فقط پیشامد A رخ بدهد یا فقط B و C رخ بدهند.
گزینه «۳» (۳) فقط پیشامد A رخ بدهد یا B و C رخ بدهند.
گزینه «۴» (۴) فقط A یا B یا C رخ بدهد.

پاسخ: همان طور که از شکل زیر می‌بینید ناحیه رنگی S_1 فقط قسمتی از A را نشان می‌دهد که با B و C اشتراکی ندارد. (فقط پیشامد A رخ بدهد.) و



ناحیه رنگی S_2 مربوط به اشتراک B و C است که با A اشتراک ندارد (فقط B و C رخ بدهند).

پس پاسخ تست، گزینه (۲) است.



فصل هجدهم: مقاطع مخروطی

دوران

در این فصل ابتدا با مسائل مربوط به دوران و برش آشنا می‌شویم:

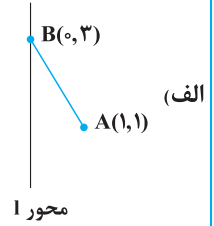
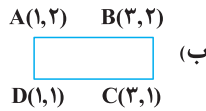
مسائل دوران: از دوران (چرخاندن) شکل‌های هندسی مختلف، حول یک محور، اجسام هندسی دارای سطح (دو بعدی) و حجم (سه بعدی) به وجود می‌آیند.

چند دوران مهم:

فرمول مساحت جانبی	فرمول حجم	شکل حاصل از دوران	محور	شکل هندسی اولیه
دایره دو بعدی است و مساحت آن $S = \pi r^2$ است.			خط l عمود بر پاره خط	پاره خط به طول r
$S = 4\pi r^2$	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$		قطر دایره	دایره به شعاع r
$S = 2\pi rh + 2\pi r^2$	$V = \pi r^2 h$		یکی از اضلاع	مستطیل (مربع)
$S = \pi rL + \pi r^2$	$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$		یکی از اضلاع زاویه قائمه	مثلث قائم الزاویه

مثال آموزشی

در هریک از دوران های زیر، شکل حاصل را مشخص کنید و سپس حجم آن را به دست آورید.



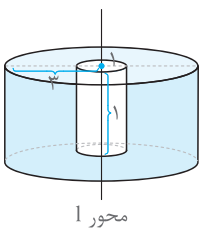
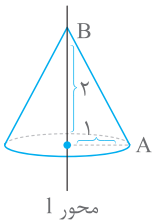
پاسخ

الف) از دوران پاره خط AB حول محور 1 یک مخروط به شعاع قاعده 1 و ارتفاع 2 به دست می آید که حجم این مخروط برابر است با:

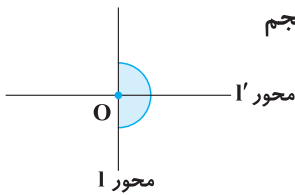
$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h \xrightarrow{r=1, h=2} V = \frac{1}{3} \pi (1)^2 \times 2 = \frac{2\pi}{3}$$

ب) از دوران مستطیل ABCD حول محور 1 قسمتی از فضای بین دو استوانه به دست می آید (پیراشکی) که برای محاسبه حجم آن کافی است حجم دو استوانه را از هم کم کنیم. (حجم استوانه $\pi r^2 h$ است)

$$V_{\text{پیراشکی}} = V_{\text{استوانه کوچک}} - V_{\text{استوانه بزرگ}} = \frac{\pi(3)^2(1) - \pi(1)^2(1)}{\text{شعاع استوانه بزرگ و شعاع استوانه کوچک}} = 9\pi - \pi = 8\pi$$



1 مطابق شکل مقابل، نیم دایره به قطر 12 را یک بار حول محور 1 و بار دیگر حول محور 1' دوران می دهیم. نسبت حجم شکل های به وجود آمده کدام می تواند باشد؟



- (1) $\frac{1}{4}$
- (2) 3
- (3) $\frac{1}{3}$
- (4) $\frac{2}{3}$

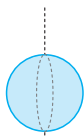
پاسخ: از دوران نیم دایره حول محور 1، کره مقابل به دست می آید که حجم آن برابر است با:

$$\text{قطر} = 12 \Rightarrow r = 6, V = \frac{4}{3} \pi (r)^3 = \frac{4}{3} \pi (6)^3 = 288\pi$$

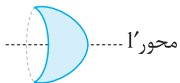
و همچنین از دوران نیم دایره حول محور 1' یک کره نیم به دست می آید که حجم آن برابر است با:

$$r = 6, V = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3} \pi r^3 \right) = \frac{1}{2} \times \pi (6)^3 = 144\pi$$

پس نسبت حجم های به دست آمده 2 و 1 یا $\frac{1}{3}$ است که طبق گزینه ها $\frac{1}{3}$ قابل قبول است.



محور 1



محور 1'

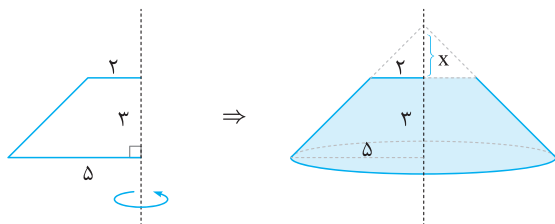
تذکر

البته با دوران نیم دایره، حول دو محور 1 و 1' به ترتیب کره و نیم کره به دست می آید، پس نسبت حجم ها 2 و 1 یا $\frac{1}{3}$ می باشد.

2 یک دوزنقه قائم الزاویه به قاعده های 2 و 5 و ساق قائم 3 واحد را حول ساق قائم دوران می دهیم. حجم جسم حاصل کدام است؟ (ریاضی دافل 95)

- (1) 36π
- (2) 38π
- (3) 39π
- (4) 40π

پاسخ: با توجه به شکل زیر، از دوران دوزنقه قائم الزاویه حول ساق قائم، یک مخروط ناقص به دست می آید که برای به دست آوردن حجم آن، حجم مخروط بزرگ را منهای حجم مخروط بالایی می کنیم:



« سؤالات کنکور ۹۹ داخل کشور

« سؤالات کنکور ۹۹ خارج از کشور

« پاسخنامه کنکور ۹۹ داخل کشور

« پاسخنامه کنکور ۹۹ خارج از کشور

کنکورهای سراسری ۹۹

۱ حاصل عبارت $(\sqrt{8} + \sqrt{27}) - 2(\sqrt[4]{9} - 1)^{-1} - \frac{5}{\sqrt{6}}$ ، کدام است؟

- (۱) $1 + \sqrt{3}$ (۲) $-1 + \sqrt{2}$ (۳) $1 - \sqrt{2}$ (۴) $\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$

۲ اعداد طبیعی متوالی را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم، که آخرین عدد هر گروه مربع کامل باشد، یعنی $\{1\}, \{2, 3, 4\}, \dots$. در دسته نهم، واسطه حسابی

بین دو عدد اول و آخر آن، کدام است؟

- (۱) ۷۱ (۲) ۷۲ (۳) ۷۳ (۴) ۷۴

۳ فرض کنید چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x^2 - 1$ بخش پذیر باشد. اگر $Q(x) = P(x-1) + P(1-x)$ ، آن‌گاه حاصل تقسیم $Q(x)$ بر $x-2$ کدام است؟

- (۱) -1 (۲) صفر (۳) ۱ (۴) ۲

۴ معادله درجه دوم $m = 0$ دارای دو ریشه حقیقی است. اگر مجموع ریشه‌ها با معکوس حاصل ضرب آن دو ریشه برابر باشد، مقدار m کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) ۳ (۳) -1 (۴) $-\frac{5}{2}$

۵ مجموعه جواب نامعادله $3 < \frac{x+1}{2x-1} < 1$ ، کدام است؟

- (۱) $(\frac{1}{5}, \frac{1}{6})$ (۲) $(\frac{1}{2}, \frac{1}{8})$ (۳) $(2, 1)$ (۴) $(2, \frac{1}{8})$

۶ فرض کنید نقاط $(-2, 5)$ ، $(0, 5)$ و $(1, 11)$ ، بر سهمی $y = ax^2 + bx + c$ واقع باشند. این سهمی، از کدام یک از نقاط زیر می‌گذرد؟

- (۱) $(-1, 3)$ (۲) $(-1, 4)$ (۳) $(2, 9)$ (۴) $(2, 15)$

۷ نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{x}$ را در امتداد محور x ها، ۱۲ واحد در جهت مثبت و سپس در امتداد محور y ها، ۲ واحد در جهت مثبت، انتقال

می‌دهیم. فاصله نقطه برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f ، از مبدأ مختصات، کدام است؟

- (۱) $4\sqrt{15}$ (۲) $6\sqrt{7}$ (۳) $4\sqrt{17}$ (۴) $6\sqrt{10}$

۸ در بازه (a, b) ، نمودار تابع با ضابطه $y = |2x^2 - 4|$ در زیر خط $y = 2x$ واقع است. بیشترین مقدار $b - a$ ، کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۹ اگر $f(x) = 2x - [2x]$ و $g(x) = -x^2 + 4x$ باشند، بُرد تابع $g \circ f$ ، کدام است؟

- (۱) $[0, 2)$ (۲) $[0, 3)$ (۳) $[0, 4)$ (۴) $[1, 4)$

۱۰ اگر تابع g وارون تابع $f(x) = x + \sqrt{x}$ باشد، مقدار $g(6) + g(12)$ ، کدام است؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۱ (۳) ۱۳ (۴) ۱۴

۱۱ تابع f با ضابطه $f(x) = x - \frac{2}{x}$ در دامنه $D_f = (-\infty, 0)$ را در نظر بگیرید. نمودار تابع f^{-1} نیمساز ناحیه چهارم را با کدام طول، قطع می‌کند؟

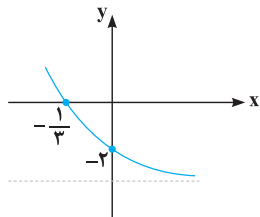
- (۱) $\frac{3}{4}$ (۲) ۱ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) ۲

۱۲ اگر $\log_4 3 = \frac{1}{8}$ باشد، مقدار $\log_{12} 6$ ، کدام است؟

- (۱) $\frac{13}{18}$ (۲) $\frac{8}{11}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{7}{9}$

۱۳ شکل روبه‌رو، نمودار تابع با ضابطه $f(x) = -4 + 2^{ax+b}$ است. $f(-\frac{5}{3})$ ، کدام است؟

- (۱) ۵۴ (۲) ۶۰ (۳) ۴۸ (۴) ۲۸

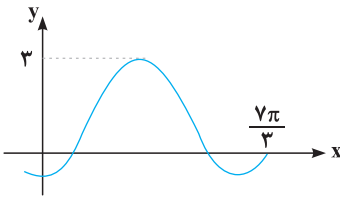


۱۴ فرض کنید در دامنه $[0, +\infty)$ ، تابع با ضابطه $f(x) = \frac{2^x + (\frac{1}{2})^x}{2}$ ، مفروض باشد. $f^{-1}(2)$ ، کدام است؟

- (۱) $\log_2(2 - \sqrt{3})$ (۲) $\log_2(\sqrt{3} - 1)$ (۳) $\log_2(1 + \sqrt{3})$ (۴) $\log_2(2 + \sqrt{3})$

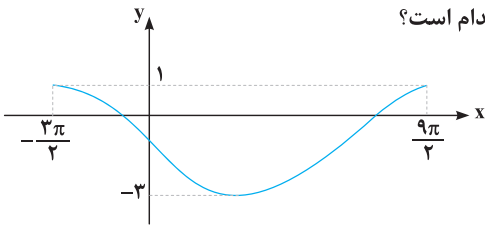
۱۵ حاصل عبارت $\tan(30^\circ)\cos(210^\circ) + \tan(48^\circ)\sin(84^\circ)$ ، کدام است؟ (اعداد داده شده بر حسب درجه هستند.)

- (۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) صفر (۳) ۱ (۴) ۲



۱۶. شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع با ضابطه $y = a + b \sin(\frac{\pi}{3} + x)$ است. مقدار b ، کدام است؟

- ۱) ۲
 ۲) ۱
 ۳) -۱
 ۴) -۲



۱۷. شکل زیر، نمودار تابع $y = a \sin(bx) + c$ را در یک بازه تناوب، نشان می‌دهد. نسبت $\frac{a}{b}$ ، کدام است؟

- ۱) -۲
 ۲) -۳
 ۳) -۴
 ۴) -۶

۱۸. جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin(2x - \frac{\pi}{6}) = \cos(x + \frac{\pi}{6})$ ، با شرط $x \neq k\pi$ ، که در آن k یک عدد صحیح است، کدام است؟

- ۱) $\frac{k\pi}{3}$ ۲) $\frac{2k\pi}{3}$ ۳) $\frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{6}$ ۴) $\frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$

۱۹. حاصل $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{[x] + 3}{x + 2}$ ، کدام است؟

- ۱) $-\infty$ ۲) -۱ ۳) صفر ۴) ۱

۲۰. تابع با ضابطه $f(x) = \frac{ax - \sqrt{x^2 - 1}}{4x^n - 12}$ را در نظر بگیرید. اگر $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{1}{6}$ باشد، آن‌گاه $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ ، کدام است؟

- ۱) $\frac{1}{24}$ ۲) $\frac{1}{18}$ ۳) $\frac{1}{12}$ ۴) $\frac{5}{36}$

۲۱. تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \sqrt{5-2x} & ; x \leq -2 \\ -\frac{1}{4}x^2 + bx + c & ; x > -2 \end{cases}$ ، در $x = -2$ ، مشتق پذیر است. مقدار c کدام است؟

- ۱) $-\frac{2}{3}$ ۲) $-\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{2}{3}$

۲۲. مشتق تابع با ضابطه $f(x) = (\frac{\sqrt{x^2 + 2x}}{x^2 - x})^3$ ، در نقطه $x = 2$ ، کدام است؟

- ۱) $-\frac{3}{4}$ ۲) $-\frac{5}{4}$ ۳) $-\frac{5}{2}$ ۴) $-\frac{15}{4}$

۲۳. فاصله نقطه ماکزیمم نسبی تابع با ضابطه $f(x) = x + \sqrt{4x - x^2}$ ، از نیمساز ناحیه اول کدام است؟

- ۱) ۱ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) ۲ ۴) $2\sqrt{2}$

۲۴. از بین مثلث‌های قائم‌الزاویه با اندازه وتر ۱۰ واحد، دو ضلع قائم با کدام نسبت انتخاب شود تا حجم حاصل از دوران این مثلث حول ضلع قائم، بیشترین باشد؟

- ۱) $\frac{2}{1}$ ۲) $\frac{\sqrt{3}}{1}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{2}}{1}$

۲۵. به چند طریق می‌توان ۵ نفر از ۹ دوست صمیمی خود را به مهمانی دعوت کرد، به طوری که دو نفر آنان، نخواهند با هم در مهمانی شرکت کنند؟

- ۱) ۸۴ ۲) ۸۷ ۳) ۹۱ ۴) ۹۵

۲۶. ۵ کتاب زبان فارسی و ۳ کتاب زبان انگلیسی، به تصادف در یک قفسه کنار هم چیده شده‌اند. با کدام احتمال کتاب‌های هم‌زبان، کنار هم قرار می‌گیرند؟

- ۱) $\frac{1}{14}$ ۲) $\frac{1}{21}$ ۳) $\frac{1}{28}$ ۴) $\frac{1}{56}$

۲۷. ضریب تغییرات داده‌های آماری به صورت جدول زیر، کدام است؟

داده	۱۰, ۱۰, ۱۰, ۱۰, ۱۰, ۱۱, ۱۱, ۱۱, ۱۱, ۱۴, ۱۴, ۱۴, ۱۴, ۱۴, ۱۴
------	--

- ۱) ۰/۱۲ ۲) ۰/۱۵ ۳) ۰/۱۷ ۴) ۰/۱۸

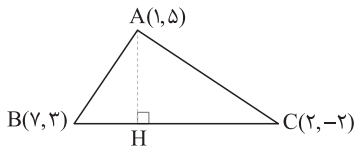
۲۸. مثلثی با رأس‌های $A(1, 5)$ ، $B(7, 3)$ و $C(2, -2)$ مفروض است. اندازه ارتفاع AH در مثلث ABC ، کدام است؟

- ۱) ۴ ۲) $3\sqrt{2}$ ۳) ۵ ۴) $4\sqrt{2}$

۲۷ برای محاسبه ضریب تغییرات داده‌های داده شده، ابتدا میانگین داده‌ها را محاسبه کرده، سپس واریانس و انحراف معیار را یافته و در آخر با تقسیم انحراف معیار بر میانگین داده‌ها، ضریب تغییرات را محاسبه می‌کنیم، پس داریم:

$$\bar{x} = \frac{5 \times 10 + 4 \times 11 + 7 \times 14}{16} = \frac{50 + 44 + 98}{16} = \frac{192}{16} = 12, \quad \sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = \frac{5(10-12)^2 + 4(11-12)^2 + 7(14-12)^2}{16} = \frac{5(4) + 4(1) + 7(4)}{16} = \frac{52}{16} = \frac{13}{4} \Rightarrow \sigma = \frac{\sqrt{13}}{2} = 1/8 \Rightarrow cv = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{1/8}{12} = 0/15$$



۲۸ معادله ضلع BC را می‌نویسیم، پس فاصله نقطه A از پاره خط BC در واقع همان اندازه ارتفاع AH است:

$$m_{BC} = \frac{3 - (-2)}{7 - 2} = \frac{5}{5} = 1 \Rightarrow y - 3 = 1(x - 7) \Rightarrow y = x - 4 \Rightarrow BC: y - x + 4 = 0$$

حالا به کمک فرمول فاصله نقطه از خط، فاصله نقطه A از خط BC به معادله $y - x + 4 = 0$ را پیدا می‌کنیم،

$$AH = \frac{|5 - 1 + 4|}{\sqrt{(1)^2 + (-1)^2}} = \frac{8}{\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$$

پس داریم:

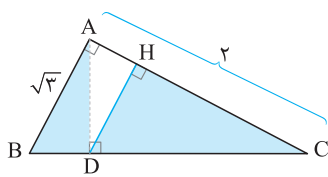
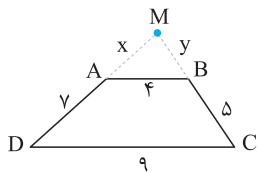
۲۹ هر نوبه‌ای (1) می‌داند که ABCD در شکل صورت سؤال دوزنقه است نه متوازی‌الاضلاع. بعضی وقتا پیش میار دیگه.

با توجه به این‌که در دوزنقه‌ها، قاعده‌ها موازی هستند، پس شرایط استفاده از تالس برقرار است و با فرض این‌که

$MA = x$ و $MB = y$ باشند، می‌توان نوشت:

$$\frac{x}{x+y} = \frac{y}{y+5} = \frac{4}{9} \Rightarrow \begin{cases} 4x + 28 = 9x \Rightarrow x = \frac{28}{5} = 5/6 \\ 9y = 4y + 20 \Rightarrow y = 4 \end{cases}$$

در نهایت محیط مثلث MAB برابر با $P = x + y + 4 = 5/6 + 4 + 4 = 13/6$ است.



۳۰ با توجه به قضیه فیثاغورس می‌توان نوشت: $BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow BC^2 = 3 + 4 = 7 \Rightarrow BC = \sqrt{7}$

از طرفی طبق روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه داریم:

$$AC^2 = CD \times CB \Rightarrow DC \times \sqrt{7} = 2^2 \Rightarrow DC = \frac{4}{\sqrt{7}}$$

همچنین می‌دانیم دو مثلث ABD و CHD متشابه‌اند، پس برای نسبت مساحت‌های آن‌ها می‌توان نوشت:

$$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle CHD}} = \left(\frac{AB}{CD}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{\frac{4}{\sqrt{7}}}\right)^2 = \frac{3 \times 7}{16} = \frac{21}{16} \Rightarrow \frac{S_{\triangle CHD}}{S_{\triangle ABD}} = \frac{16}{21}$$

پاسخنامه کنکور ۹۹ خارج از کشور

۱ ابتدا مقادیر زیر رادیکال را تا جای ممکن تجزیه کرده و سپس مقدار عبارت را به دست می‌آوریم، پس داریم:

$$\frac{\sqrt{27}-1}{4+\sqrt{3}} + (2-\sqrt{3})^{-1} = \frac{3\sqrt{3}-1}{4+\sqrt{3}} + \frac{1}{2-\sqrt{3}}$$

اکنون هر کسر را در مزدوج مخرج خودش ضرب و تقسیم می‌کنیم تا به عبارت ساده‌تری برسیم، پس می‌توان نوشت:

$$\frac{(3\sqrt{3}-1)(4-\sqrt{3})}{(4+\sqrt{3})(4-\sqrt{3})} + \frac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = \frac{12\sqrt{3}-9-4+\sqrt{3}}{16-3} + \frac{2+\sqrt{3}}{4-3} = \frac{13\sqrt{3}-13}{13} + (2+\sqrt{3})$$

$$= \frac{13(\sqrt{3}-1)}{13} + 2 + \sqrt{3} = \sqrt{3}-1+2+\sqrt{3} = 1+2\sqrt{3}$$

۲ روش اول: با توجه به صورت سؤال، چون جملات داده شده در دنباله حسابی سه جمله متوالی دنباله هندسی هستند، بنابراین جمله وسط، واسطه هندسی

$$a_3, a_7, a_{16} \Rightarrow (a_7)^2 = a_3 a_{16} \Rightarrow (a_1 + 6d)^2 = (a_1 + 2d)(a_1 + 15d)$$

دو جمله دیگر است، پس داریم:

$$\Rightarrow a_1^2 + 36d^2 + 12a_1 d = a_1^2 + 15a_1 d + 2a_1 d + 30d^2 \Rightarrow 6d^2 = 5a_1 d \Rightarrow 6d = 5a_1 \Rightarrow d = \frac{5}{6} a_1 \quad (*)$$

حالا برای به دست آوردن قدرنسبت، کافی است دو جمله متوالی دنباله هندسی را بر هم تقسیم نماییم، داریم:

$$r = \frac{a_7}{a_3} = \frac{a_1 + 6d}{a_1 + 2d} \stackrel{(*)}{=} \frac{a_1 + 5a_1}{a_1 + 2(\frac{5}{6}a_1)} = \frac{6a_1}{a_1 + \frac{5}{3}a_1} = \frac{6a_1}{\frac{8}{3}a_1} = \frac{6}{8/3} = \frac{36}{8} = \frac{9}{2}$$

روش دوم: همان‌طور که قبلاً گفتیم، در این حالت قدرنسبت دنباله هندسی از رابطه $r = \frac{p-n}{n-m}$ به دست می‌آید، پس داریم:

$$a_3, a_7, a_{16} \Rightarrow r = \frac{16-7}{7-3} = \frac{9}{4}$$

طبق صورت سؤال، باقی‌مانده تقسیم $P(x)$ بر $x-4$ برابر ۳ و بر $x+2$ برابر ۱ است، پس $P(4)=3$ و $P(-2)=1$. حالا باید باقی‌مانده تقسیم عبارت $P(x^2)+4P(-x)$ بر $x-2$ را به دست بیاوریم؛ به کمک قضیه تقسیم می‌توان نوشت:

$$P(x^2)+4P(-x)=(x-2)Q(x)+R$$

دقت کنید که با قرار دادن $x=2$ در سمت چپ معادله بالا، عبارت به دست آمده به صورت $P(4)+4P(-2)$ درمی‌آید که مقادیر آن‌ها مشخص است، بنابراین داریم:

$$P(x^2)+4P(-x)=(x-2).Q(x)+R \xrightarrow{x=2} P(4)+4P(-2)=0 \times Q(x)+R \xrightarrow{P(4)=3, P(-2)=1} R=3+4(1)=7$$

برای آن که معادله درجه دوم $2x^2+mx+m+6=0$ ، دارای دو ریشه مثبت باشد، باید $\Delta > 0$ و $S > 0$ و $P > 0$ باشد، بنابراین هر یک از این شروط را اعمال می‌کنیم، داریم:

$$\Delta > 0 \Rightarrow m^2 - 4(2)(m+6) > 0 \Rightarrow m^2 - 8m - 24 > 0 \Rightarrow (m-12)(m+2) > 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} m < -2 \cup m > 12 \quad (1)$$

$$S > 0 \Rightarrow \frac{-m}{2} > 0 \Rightarrow -m > 0 \Rightarrow m < 0 \quad (2), \quad P > 0 \Rightarrow \frac{m+6}{2} > 0 \Rightarrow m+6 > 0 \Rightarrow m > -6 \quad (3)$$

حالا باید بین جواب‌های به دست آمده (۱)، (۲) و (۳) اشتراک بگیریم، پس داریم:

روش اول: کافی است نامعادله داده شده را در دو حالت زیر حل کنیم و در آخر بین جواب‌های به دست آمده اشتراک بگیریم، داریم:

حالت اول: $-1 < \frac{2x-1}{x+1} \Rightarrow \frac{2x-1}{x+1} + 1 > 0 \Rightarrow \frac{2x-1+x+1}{x+1} > 0 \Rightarrow \frac{3x}{x+1} > 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$

حالت دوم: $\frac{2x-1}{x+1} < 3 \Rightarrow \frac{2x-1}{x+1} - 3 < 0 \Rightarrow \frac{2x-1-3x-3}{x+1} < 0 \Rightarrow \frac{-x-4}{x+1} < 0 \Rightarrow \frac{x+4}{x+1} > 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} x \in (-\infty, -4) \cup (-1, +\infty)$

حالا باید بین جواب‌های به دست آمده اشتراک بگیریم که در این صورت مجموعه جواب به صورت $\mathbb{R} - [-4, 0]$ می‌شود.

روش دوم: ابتدا از طرفین نامعادله داده شده، یک واحد کم می‌کنیم و سپس به کمک خواص قدرمطلق، نامعادله را به شکل قدرمطلق می‌نویسیم و حل می‌کنیم:

$$-1 < \frac{2x-1}{x+1} < 3 \xrightarrow{-1} -2 < \frac{2x-1}{x+1} - 1 < 2 \Rightarrow -2 < \frac{2x-1-x-1}{x+1} < 2 \xrightarrow{\text{خواص قدرمطلق}} \left| \frac{x-2}{x+1} \right| < 2$$

$$\Rightarrow |x-2| < 2|x+1| \xrightarrow{\text{توان } 2} (x-2)^2 < 4(x+1)^2 \Rightarrow (x-2)^2 < (2x+2)^2 \Rightarrow (x-2)^2 - (2x+2)^2 < 0$$

$$\xrightarrow{\text{مزدوج}} (x-2-2x-2)(x-2+2x+2) < 0 \Rightarrow (-x-4)(3x) < 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} x < -4 \cup x > 0$$

در نهایت جواب نامعادله را می‌توانیم به صورت $\mathbb{R} - [-4, 0]$ نیز نشان دهیم.

برای اینکه بدانیم سهمی از کدام نقطه می‌گذرد، باید با استفاده از نقاط داده شده، معادله سهمی را بنویسیم، ابتدا چون نقطه A رأس سهمی است، داریم:

$$A(-1, 9): x_S = \frac{-b}{2a} = -1 \Rightarrow b = 2a \quad (1); \quad f(-1) = 9 \Rightarrow (-1)^2 a + (-1)b + c = 9 \Rightarrow a - b + c = 9 \quad (2)$$

حالا چون سهمی $f(x) = ax^2 + bx + c$ از نقطه $(3, 1)$ می‌گذرد، پس $f(3) = 1$ است. داریم:

$$f(3) = 1 \Rightarrow a(3)^2 + b(3) + c = 1 \Rightarrow 9a + 3b + c = 1 \xrightarrow{(1)} 9a + 3(2a) + c = 1 \Rightarrow 15a + c = 1 \Rightarrow c = 1 - 15a \quad (3)$$

حالا با جای‌گذاری روابط (۱) و (۳) در رابطه (۲) داریم:

$$a - (2a) + 1 - 15a = 9 \Rightarrow -16a = 8 \Rightarrow a = \frac{-1}{16} \Rightarrow b = -1, c = \frac{17}{16}$$

بنابراین با داشتن مقادیر a, b, c معادله درجه دوم ما به صورت $y = \frac{-1}{16}x^2 - x + \frac{17}{16}$ به دست می‌آید که از بین گزینه‌ها نقطه $(5, -9)$ در آن صدق می‌کند.

ابتدا تابع $f(x)$ را نسبت به محور x قرینه کرده و بعد آن را ۱۶ واحد در جهت مثبت محور y ‌ها جابه‌جا می‌کنیم. سپس ضابطه به دست آمده را با ضابطه $f(x)$ قطع می‌دهیم و معادله تقاطع را به دست می‌آوریم. داریم:

$$f(x) = x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1 \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } x} -f(x) = -(x-1)^2 + 1 \xrightarrow{\text{۱۶ واحد در جهت مثبت } y} -f(x) + 16 = -(x-1)^2 + 1 + 16 = -(x-1)^2 + 17$$

$$g(x) = -f(x) + 16 = f(x) \Rightarrow -(x-1)^2 + 17 = (x-1)^2 - 1 \Rightarrow 2(x-1)^2 = 18 \Rightarrow (x-1)^2 = 9 \Rightarrow x-1 = \pm 3 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -2 \end{cases}$$

با برابر قرار دادن ضابطه تابع $f(x)$ و تابع انتقال یافته، طول نقطه برخورد این دو منحنی پیدا شد، اکنون کافی است $x=4$ را در تابع $f(x)$ قرار داده و عرض نقطه برخوردشان را نیز حساب کرده و فاصله نقطه به دست آمده را از مبدأ پیدا کنیم، داریم:

$$x=4: f(4) = (4)^2 - 2(4) = 16 - 8 = 8 \Rightarrow A(4, 8) \Rightarrow OA = \sqrt{4^2 + 8^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$