

مؤلف درس، تست‌های طراحی شده و تنظیم تست‌های این فصل: فرهاد حمی

۱. توابع چندجمله‌ای - توابع صعودی و نزولی

توابع چندجمله‌ای و تابع درجه‌ی سوم

صفحه‌های ۵ تا ۲۵ و تمرین‌های صفحه‌ی ۱۰ ریاضی ۳

توابع چندجمله‌ای و تابع درجه‌ی سوم

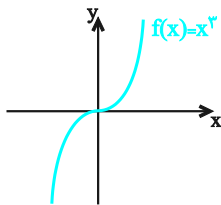
توابع چندجمله‌ای ◀ هر تابع به صورت $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots + k$ را که در آن a, b, c, \dots و k اعداد حقیقی و n یک عدد صحیح نامنفی و $a \neq 0$ ، یک تابع چندجمله‌ای از درجه‌ی n می‌نامند.

تذکره: دامنه‌ی توابع چندجمله‌ای مجموعه‌ی اعداد حقیقی است.

توابع زیر همگی چندجمله‌ای‌اند.	توابع زیر چندجمله‌ای نیستند.
$y = 5x - 2$ و $y = 7$ و $y = x^2 - x$	$y = x x $ و $y = x^{-2} + x$
$y = 3x^3 - 2x^2$ و $y = x^6 + x^5 - 2x + 7$	$y = \frac{x^3}{x}$ و $y = \sqrt{x^3}$

توجه ◀◀ توابع ثابت، همانی، خطی و درجه‌ی دوم، توابعی چندجمله‌ای هستند.

توابع درجه‌ی سوم ◀ هر تابع به معادله‌ی $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$)، یک تابع درجه‌ی سوم نامیده می‌شود، یک حالت خاص از این تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x^3$ است.



با نقطه‌یابی می‌توان نمودار این تابع را یافت. با توجه به شکل روبه‌رو، ویژگی‌های زیر در این تابع دیده می‌شود:

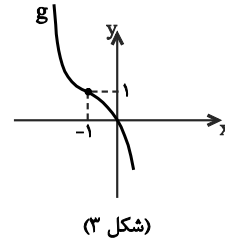
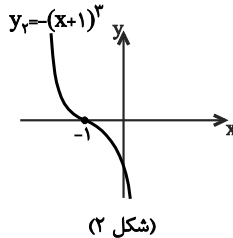
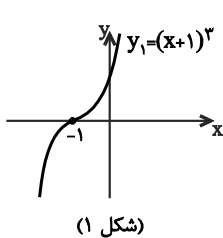
- دامنه و برد تابع، R است.
- نمودار تابع نسبت به مبدأ مختصات متقارن است.
- تابع $f(x) = x^3$ یک به یک است.

توجه ◀◀ با استفاده از خواص انتقالی می‌توانیم نمودار توابع به شکل کلی $y = a(x+b)^3 + c$ ($a \neq 0$ و b, c اعداد حقیقی) را به کمک تابع $y = x^3$ رسم کنیم.

مثال: نمودار تابع با ضابطه‌ی $g(x) = 1 - (x+1)^3$ را به کمک نمودار تابع $y = x^3$ رسم کنید.

حل: به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

- انتقال افقی: ابتدا نمودار $y = x^3$ را یک واحد به چپ انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y_1 = (x+1)^3$ به دست آید. (شکل ۱)
- انعکاس: قرینه‌ی نمودار y_1 نسبت به محور x را رسم می‌کنیم تا نمودار تابع $y_2 = -(x+1)^3$ به دست آید. (شکل ۲)
- انتقال عمودی: نمودار y_2 را یک واحد به بالا انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $g(x) = 1 - (x+1)^3$ به دست آید. (شکل ۳)



سؤال

صفحه‌های ۲ تا ۵ و تمرین‌های صفحه‌ی ۱۰ ریاضی ۳

تیپ ۱

تابع درجه‌ی سوم

(ریاضی ۳ - صفحه‌ی ۵ - مکمل کار در کلاس)

۱- نمودار تابع $y = 2 - x^3$ از کدام ناحیه‌ی دستگاه مختصات عبور نمی‌کند؟

چهارم (۴)

سوم (۳)

دوم (۲)

اول (۱)

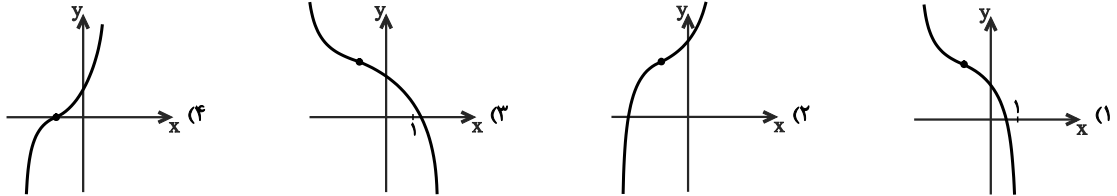
۲-۲ نمودار تابع $f(x) = x^3$ در بازه $(-\infty, a)$ بالای نمودار تابع $g(x) = x^2$ قرار ندارد. بیشترین مقدار a کدام است؟

(ریاضی ۳- صفحه ۴- مکمل فعالیت)

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) هر مقدار دلخواهی (۴) -۱

(ریاضی ۳- صفحه ۵- مشابه کار در کلاس)

۳-۳ نمودار تابع با ضابطه $y = 2 - (x+1)^3$ کدام شکل زیر است؟



۴-۴ نمودار تابع با ضابطه $f(x) = x^3$ با دو انتقال بر نمودار تابع $g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x$ منطبق می‌شود. در این انتقال، نقطه به طول ۲ واقع بر نمودار f به نقطه‌ای با کدام عرض بر نمودار تابع g قرار می‌گیرد؟

(ریاضی ۳- صفحه ۵- مرتبط با کار در کلاس)

- (۱) ۷ (۲) ۶۳ (۳) -۱ (۴) ۲۶

۵-۵ نمودار تابع با ضابطه $f(x) = -(x-1)^3 + a$ ، همواره به ازای هر مقدار a از ناحیه سوم عبور نمی‌کند. حدود a کدام است؟

(ریاضی ۳- صفحه ۱۰- مکمل تمرین ۱)

- (۱) $a \geq 1$ (۲) $a \leq 1$ (۳) $a \geq -1$ (۴) $a \leq -1$

۶-۶ نمودار تابع با ضابطه $f(x) = x^3 - 3(x^2 - x) + 2$ از کدام ناحیه دستگاه مختصات عبور نمی‌کند؟

(ریاضی ۳- صفحه ۱۰- مکمل تمرین ۱)

- (۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم

۷-۷ اگر $f(x) = x^3$ ، آنگاه نمودار دو تابع $y = f(x) - 1$ و $y = f(x-1)$ در چند نقطه مشترک‌اند؟

(ریاضی ۳- صفحه ۱۰- مکمل تمرین ۱)

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) هیچ

۸-۸ نمودار تابع با ضابطه $f(x) = x^3$ ، در بازه $(-\infty, a)$ همواره پایین خط به معادله $y = 3 - 2x$ است، بیشترین مقدار a کدام است؟

(ریاضی ۳- صفحه ۴- مکمل فعالیت)

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) -۱ (۴) -۲

۹-۹ نمودار تابع با ضابطه $f(x) = (x+1)^3$ ، خط به معادله $y = -3x + 5$ را در کدام ناحیه دستگاه مختصات قطع می‌کند؟

(ریاضی ۳- صفحه ۴- مکمل فعالیت)

- (۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم

۱۰-۱۰ برد تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x^3 - 2 & x \geq 0 \\ a + x & x < 0 \end{cases}$ مجموعه‌ی اعداد حقیقی است، کم‌ترین مقدار a کدام است؟

(ریاضی ۳- صفحه ۱۰- مکمل تمرین ۱)

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) -۱ (۴) -۲

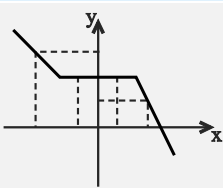
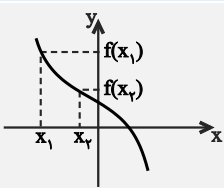
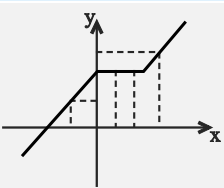
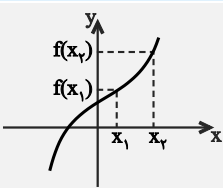
۱. توابع چندجمله‌ای - توابع صعودی و نزولی

توابع صعودی و نزولی

صفحه‌های ۱۰ تا ۶ ریاضی ۳

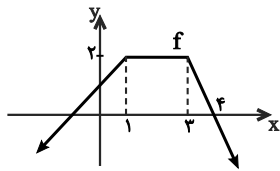
توابع صعودی و نزولی

تعریف و نمودار - فرض کنید x_1 و x_2 متعلق به یک بازه (دامنه) از تابع f باشند، آنگاه f تابعی:

نزولی	اکیداً نزولی	صعودی	اکیداً صعودی
$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$	$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$	$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$	$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
			
در بازه‌ای که تابع f نزولی است با حرکت روی نمودار از چپ به راست، رو به بالا نخواهیم رفت.	در بازه‌ای که تابع f اکیداً نزولی است با حرکت روی نمودار از چپ به راست، همواره رو به پایین خواهیم رفت.	در بازه‌ای که تابع f صعودی است با حرکت روی نمودار از چپ به راست، رو به بالا خواهیم رفت.	در بازه‌ای که تابع f اکیداً صعودی است با حرکت روی نمودار از چپ به راست، همواره رو به بالا خواهیم رفت.

دقت کنید اگر بازه‌ی I برابر دامنه‌ی تابع باشد، آنگاه گوییم تابع f در دامنه‌ی خود صعودی (اکیداً صعودی) یا نزولی (اکیداً نزولی) است. همچنین اگر تابعی در دامنه‌ی خود صعودی (نزولی) باشد، آنگاه آن را **یکنوا** می‌نامیم.

تذکره: ۱) هر تابع اکیداً صعودی، خود یک تابع صعودی است و به طریق مشابه هر تابع اکیداً نزولی، خود یک تابع نزولی است.
 ۲) تابع f را در یک بازه، ثابت گوییم، هرگاه به ازای تمام مقادیر x در این بازه، $f(x)$ یک مقدار ثابت باشد، تابع ثابت را، تابعی هم صعودی و هم نزولی در نظر می‌گیریم.



مثال: شکل مقابل نمودار تابع f را نمایش می‌دهد. به سؤال‌های زیر پاسخ دهید:

- الف) تابع f در چه بازه‌ای اکیداً صعودی است؟
 - ب) تابع f در چه بازه‌ای صعودی است؟
 - پ) f در چه بازه‌ای ثابت است؟
 - ث) f در چه بازه‌ای نزولی است؟
- حل:** الف) f در بازه‌ی $(-\infty, 1]$ اکیداً صعودی است.
 پ) f در بازه‌ی $[1, 3]$ ثابت است.
 ث) f در بازه‌ی $[1, +\infty)$ نزولی است.

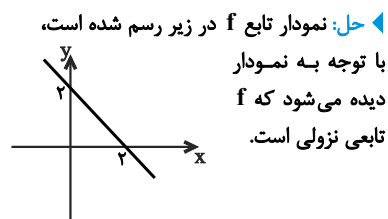
ب) f در بازه‌ی $(-\infty, 3]$ صعودی است.
 ت) f در بازه‌ی $[3, +\infty)$ اکیداً نزولی است.

توجه: اگر تابع f در دامنه‌ی خود صعودی یا نزولی نباشد، آنگاه f را تابعی **غیر یکنوا** می‌نامیم.

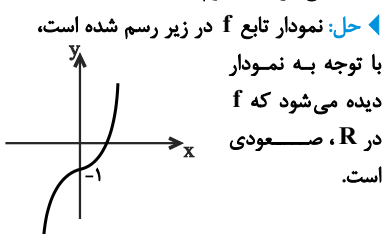
تعیین یکنوایی توابع با رسم نمودار آن‌ها - با رسم نمودار یک تابع می‌توان در مورد یکنوایی آن نظر داد.

مثال: با رسم نمودار، یکنوایی توابع زیر را بررسی کنید.

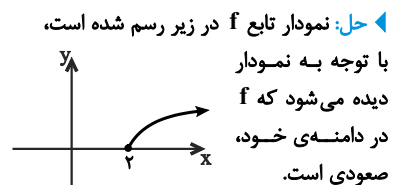
۱) $f(x) = 2 - x$ (تابع خطی)



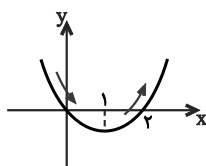
۲) $f(x) = x^3 - 1$ (تابع درجه‌ی سوم)



۳) $f(x) = \sqrt{x-2}$



تذکره: بعضی توابع در دامنه‌ی خود غیر یکنوا هستند، ولی با محدود کردن دامنه‌ی تابع می‌توان تابعی یکنوا به دست آورد.



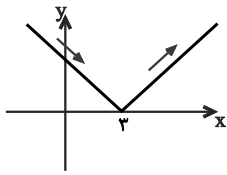
مثال: نمودار تابع $f(x) = x^2 - 2x$ را رسم کنید. آیا f در R یکنواست؟ در چه بازه‌هایی f یکنواست؟

حل: محل‌های تلاقی نمودار f با محور x ها، صفر و ۲ است. طول رأس $x = 1$ و عرض آن (-1) است، بنابراین نمودار تابع به صورت روبه‌روست. با توجه به نمودار دیده می‌شود که f در R غیر یکنواست. تابع f در بازه‌ی $(-\infty, 1)$ نزولی و در بازه‌ی $(1, +\infty)$ صعودی است.

نتیجه: تابع درجه‌ی دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ در R غیر یکنواست ولی در هر بازه‌ای که طول رأس نقطه‌ی درونی آن بازه نباشد، یکنواست؛ به عبارت دیگر f در بازه‌های $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$ و $[\frac{-b}{2a}, +\infty)$ یکنواست.

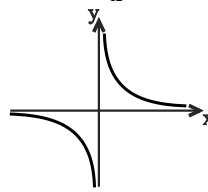
مثال: با رسم نمودار، یکنوایی توابع زیر را بررسی کنید.

۱ $f(x) = |x - 3|$



حل: نمودار تابع f در روبه‌رو رسم شده است. با توجه به نمودار دیده می‌شود که f غیر یکنواست ولی در بازه‌ی $[3, +\infty)$ صعودی و در بازه‌ی $(-\infty, 3]$ نزولی است.

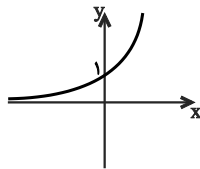
۲ $f(x) = \frac{1}{x}$



حل: دامنه‌ی تابع f ، $R - \{0\}$ است. f در دامنه‌ی خود غیر یکنواست ولی در هر یک از بازه‌های $(-\infty, 0)$ و $(0, +\infty)$ نزولی است.

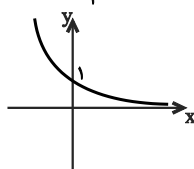
مثال: با رسم نمودار، یکنوایی توابع زیر را بررسی کنید.

۱ $f(x) = 3^x$



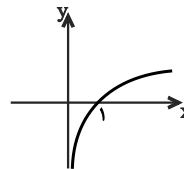
(f اکیداً صعودی است.)

۲ $f(x) = (\frac{1}{3})^x$



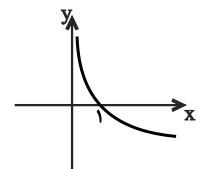
(f اکیداً نزولی است.)

۳ $f(x) = \log_3 x$



(f اکیداً صعودی است.)

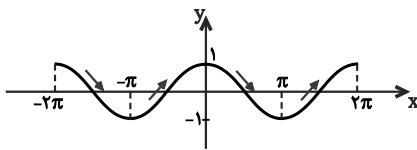
۴ $f(x) = \log_{0.1} x$



(f اکیداً نزولی است.)

نتیجه: الف) توابع $y = \log_a x$ و $y = a^x$ ، به ازای $a > 1$ ، اکیداً صعودی‌اند. ب) توابع $y = \log_a x$ و $y = a^x$ ، به ازای $0 < a < 1$ ، اکیداً نزولی‌اند.

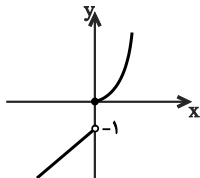
مثال: با رسم نمودار تابع $f(x) = \cos x$ در بازه‌ی $[-2\pi, 2\pi]$ ، یکنوایی آن را بررسی کنید.
حل: نمودار تابع در روبه‌رو رسم شده است. با توجه به نمودار دیده می‌شود که تابع f در این بازه غیر یکنواست. تابع f در هر یک از بازه‌های $[0, \pi]$ و $[-\pi, -2\pi]$ نزولی و در هر یک از بازه‌های $[\pi, 2\pi]$ و $[-2\pi, -\pi]$ صعودی است.



مثال: یکنوایی توابع زیر را بررسی کنید.

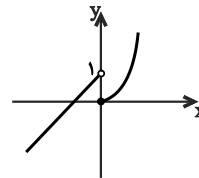
۱ $f(x) = \begin{cases} x-1, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$

حل: با رسم نمودار دیده می‌شود که f در R ، صعودی و یکنواست.



۲ $f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$

حل: با رسم نمودار دیده می‌شود که f در R ، غیر یکنواست.



سؤال ۱۰

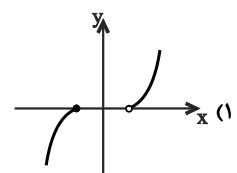
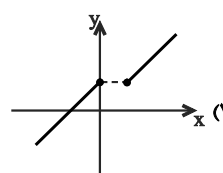
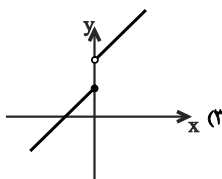
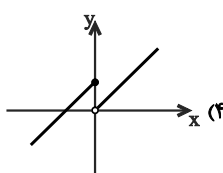
صفحه‌های ۶ تا ۱۰ ریاضی ۳

تیپ ۲

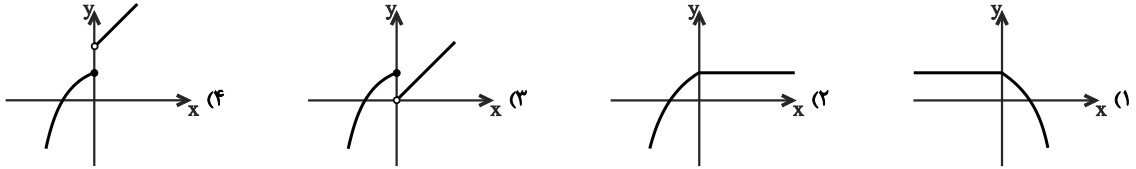
تعریف و نمودار

ریاضی ۳ - صفحه‌ی ۸ - مکمل کار در کلاس (آزمون کانون - ۸۷)

۱۱ - کدام تابع با نمودار زیر، صعودی است ولی اکیداً صعودی نیست؟



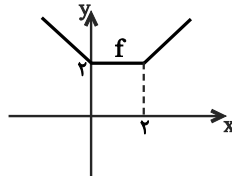
۲) -۱۲ کدام تابع با نمودار زیر، غیر یکنواست؟



(ریاضی ۳- صفحه ۸- مکمل کار در کلاس)

۳) -۱۳ نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. در کدام بازه‌ی زیر، f نزولی است ولی اکیداً نزولی نیست؟

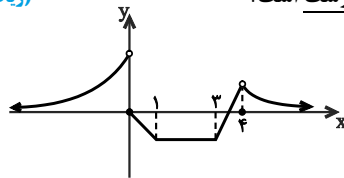
(ریاضی ۳- صفحه ۱۰- مکمل تمرین ۳) (آزمون کانون - ۸۷)



- (۱) $(-\infty, 0]$
- (۲) $(-\infty, 2]$
- (۳) $[-4, 4]$
- (۴) $[0, +\infty)$

۴) -۱۴ نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. کدام گزینه نادرست است؟

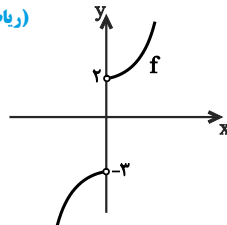
(ریاضی ۳- صفحه ۱۰- مکمل تمرین ۳) (آزمون کانون - ۸۸)



- (۱) f در بازه‌ی $(-\infty, 0)$ اکیداً صعودی است.
- (۲) f در بازه‌ی $[0, 3]$ نزولی است.
- (۳) f در بازه‌ی $[3, 4]$ اکیداً صعودی است.
- (۴) f در بازه‌ی $(4, +\infty)$ اکیداً نزولی است.

۵) -۱۵ نمودار تابع f در زیر رسم شده است. $f(0)$ در کدام بازه قرار داشته باشد تا تابع f در دامنه‌ی خود اکیداً صعودی باشد؟

(ریاضی ۳- صفحه ۸- مکمل کار در کلاس) (آزمون کانون - ۸۸)



- (۱) $[-3, 2]$
- (۲) $[2, +\infty)$
- (۳) $(-\infty, -3]$
- (۴) $(-3, 3)$

۶) -۱۶ اگر تابع $f = \{(2, 2m+3), (1, 6), (3, -4)\}$ یک تابع نزولی اکید باشد، آن‌گاه در محدوده‌ی m چند عدد صحیح وجود دارد؟

(ریاضی ۳- صفحه ۷- متن درس) (آزمون کانون - ۹۶ تیر ۹۶)

- (۱) ۳
- (۲) ۴
- (۳) ۵
- (۴) ۶

۷) -۱۷ اگر f تابعی پیوسته در R و یکنوا باشد و داشته باشیم $f(0) = f(4) = 2$ ، آنگاه خط $y = 2$ نمودار تابع $y = f(x)$ را در چند نقطه قطع می‌کند؟

(ریاضی ۳- صفحه ۱۰- مکمل تمرین ۱۰) (آزمون کانون - ۸۸)

- (۱) یک
- (۲) دو
- (۳) بی‌شمار
- (۴) هیچ

۸) -۱۸ اگر تابع f روی بازه‌ی $[a, b]$ اکیداً صعودی باشد، آنگاه f محور x ها را

- (۱) حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.
- (۲) دقیقاً در یک نقطه قطع می‌کند.
- (۳) قطع نمی‌کند.
- (۴) حداقل در یک نقطه قطع می‌کند.

۹) -۱۹ تابع $f: R \rightarrow R$ یک تابع پیوسته و اکیداً نزولی است که محور x ها را با طول یک قطع می‌کند. دامنه‌ی تابع $g(x) = \sqrt{xf(x)}$ کدام است؟

(ریاضی ۳- صفحه ۸- مکمل کار در کلاس) (آزمون کانون - ۳ آذر ۹۶)

- (۱) $[1, +\infty)$
- (۲) $[0, +\infty)$
- (۳) $(-\infty, 1]$
- (۴) $[0, 1]$

۱۰) -۲۰ تابع f اکیداً نزولی است، هرگاه $f(3a-1) < f(a+1)$ باشد، آنگاه حدود a کدام است؟

(ریاضی ۳- صفحه ۷- متن درس) (آزمون کانون - ۸۹)

- (۱) $a \geq 2$
- (۲) $a \geq 1$
- (۳) $a > 1$
- (۴) $a > 2$

۲۰
سؤال

صفحه‌های ۶ تا ۱۰ ریاضی ۳

تیپ ۳

تعیین یکتوایی با رسم نمودار تابع

- ۱-۲۱ در تابع خطی نزولی $f(x) = ax + b$ ، اگر $f(ax + b) = 4x + 1$ باشد، $f(1)$ کدام است؟
 (۱) ۲ (۲) صفر (۳) -۲ (۴) -۳
- ۲-۲۲ تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x^2 - 2x - 3$ با دامنه‌ی $\{x : |x - 1| < 2\}$ ، همواره چگونه است؟
 (۱) منفی (۲) مثبت (۳) صعودی (۴) نزولی
- ۳-۲۳ حدود a برای آن که تابع $y = (a - 4)x^2 - x$ در بازه‌ی $[2, +\infty)$ صعودی باشد، کدام است؟
 (۱) $a \geq 4$ (۲) $a \geq \frac{17}{4}$ (۳) $\frac{1}{2} < a < \frac{17}{4}$ (۴) $\frac{1}{3} < a < 4$
- ۴-۲۴ کدام تابع زیر صعودی است؟
 (۱) $y = x^2$ (۲) $y = -x^3$ (۳) $y = x|x|$ (۴) $y = -x|x|$
- ۵-۲۵ کدام تابع زیر نزولی است؟
 (۱) $y = x + |x|$ (۲) $y = 2x + |x|$ (۳) $y = |x| - x$ (۴) $y = x - 2|x|$
- ۶-۲۶ کدام تابع زیر غیر یکتواست؟
 (۱) $y = [x]$ (۲) $y = [-x]$ (۳) $y = \frac{1}{x}$ (۴) $y = x + \frac{|x|}{x}$
- ۷-۲۷ تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x + |x - 2|$ در کدام بازه‌ی زیر هم صعودی و هم نزولی است؟
 (۱) $(-\infty, 2)$ (۲) $[2, +\infty)$ (۳) \mathbb{R} (۴) \emptyset
- ۸-۲۸ تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} -x & , x < -2 \\ -1 & , -2 \leq x < 2 \\ 2x - 4 & , x \geq 2 \end{cases}$ را در نظر بگیرید. کدام گزینه درست نیست؟
 (۱) f در بازه‌ی $(-\infty, -2]$ نزولی است.
 (۲) f در بازه‌ی $[-2, 2]$ نزولی است.
 (۳) f در بازه‌ی $[0, +\infty)$ یکتواست.
 (۴) f در بازه‌ی $[2, +\infty)$ صعودی است.
- ۹-۲۹ تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & , -1 \leq x < 1 \\ 0 & , x = 1 \\ x + 1 & , x > 1 \end{cases}$ در بازه‌ی $[-1, +\infty)$...
 (۱) صعودی است. (۲) نزولی است. (۳) غیر یکتواست. (۴) یک به یک است.
- ۱۰-۳۰ اگر تابع $f(x) = \begin{cases} -3x + 1 & ; x \geq 0 \\ ax + a + 4 & ; x < 0 \end{cases}$ در تمام دامنه‌اش نزولی اکید باشد، مجموعه تمام مقادیر ممکن برای a کدام است؟
 (۱) $\{a \leq 0\}$ (۲) $\{-3 \leq a \leq 0\}$ (۳) $\{-3 < a < 0\}$ (۴) $\{a < 0\}$
- ۱۱-۳۱ اگر تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} x^2 & , x \leq 0 \\ g(x) & , x > 0 \end{cases}$ در \mathbb{R} نزولی باشد، g کدام تابع با ضابطه‌ی زیر می‌تواند باشد؟
 (۱) \sqrt{x} (۲) x^3 (۳) $-x$ (۴) $1 - x^2$

۱۲) ۳۲- تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x & , 0 \leq x \leq 4 \\ x^2 + 6x & , x < 0 \end{cases}$ در بازه $[a, b]$ صعودی است. اگر $-1 \in [a, b]$ باشد، آنگاه بزرگترین مقدار $b - a$ کدام است؟

(ریاضی ۳- صفحه ۱۰- مکمل تمرین ۲)

- ۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۴

۱۳) ۳۳- تابع با ضابطه $f(x) = x^2 + 2|x - 2|$ در کدام بازه صعودی است؟

(ریاضی ۳- صفحه ۹- مکمل کار در کلاس ۲)

- ۱) $(-\infty, 1)$ ۲) $(1, +\infty)$ ۳) $(-1, +\infty)$ ۴) $(-\infty, -1)$

۱۴) ۳۴- کدام تابع با ضابطه $y = \sqrt{x-2}$ زیر، در دامنه خود نزولی است؟

(ریاضی ۳- صفحه ۱۰- مکمل تمرین ۴)

- ۱) $y = \sqrt{x-2}$ ۲) $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ ۳) $y = \frac{1}{x-2}$ ۴) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$

۱۵) ۳۵- رابطه $f(x) = (13 - a^x)^x$ به ازای بزرگترین مقدار صحیح a ، یک تابع نمایی صعودی است، $f(0/25)$ کدام است؟

(ریاضی ۳- صفحه ۱۰- مکمل تمرین ۴)

- ۱) ۲ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) ۴

۱۶) ۳۶- کدام تابع با ضابطه $y = 2^{-x+2}$ زیر نزولی نیست؟

(ریاضی ۳- صفحه ۱۰- مکمل تمرین ۴)

- ۱) $y = 2^{-x+2}$ ۲) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ ۳) $y = -\log_2 x + 2$ ۴) $y = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2x-2}$

۱۷) ۳۷- مجموعه جواب نامعادله $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2-3x} \leq (\sqrt{2})^{2x^2}$ کدام است؟

(ریاضی ۳- صفحه ۱۰- مرتبط با تمرین ۴) (آزمون کانون - ۹۰)

- ۱) $R - (2, 3)$ ۲) $[2, 3]$ ۳) $R - (1, 2)$ ۴) $[1, 2]$

۱۸) ۳۸- مجموعه جواب نامعادله $\log_{\frac{e}{1}}(x-2) \geq \log_{\frac{e}{1}}(e-x)$ شامل چند عدد طبیعی است؟

(ریاضی ۳- صفحه ۱۰- مرتبط با تمرین ۴) (آزمون کانون - ۸۷)

- ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۹) ۳۹- تابع $y = \cos x$ در بازه $(-\pi, 3\pi)$ ، چند بار از صعودی به نزولی تغییر جهت می‌دهد؟

(ریاضی ۳- صفحه ۹- مکمل کار در کلاس ۱)

- ۱) یکبار ۲) دوبار ۳) سه‌بار ۴) چهاربار

۲۰) ۴۰- در کدام بازه زیر، هر دو تابع $y = \sin x$ و $y = \cos x$ نزولی‌اند و مقادیر آنها مختلف‌العلامت هستند؟

(ریاضی ۳- صفحه ۹- مشابه کار در کلاس ۱)

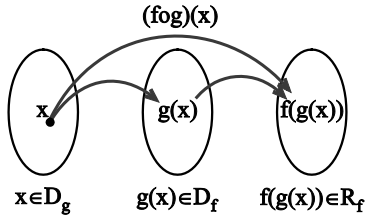
- ۱) $(0, \frac{\pi}{2})$ ۲) $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ ۳) $(\pi, \frac{3\pi}{2})$ ۴) $(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$

۲. ترکیب توابع

نمایش ضابطه‌ای و ماشینی

صفحه‌های ۱۱ تا ۱۴ و تمرین‌های صفحه‌های ۲۲ و ۲۳ ریاضی ۳

نمایش ضابطه‌ای و ماشینی



تعریف ترکیب دو تابع: فرض کنید f و g دو تابع باشند، آنگاه ترکیب دو تابع f و g به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(fog)(x) = f(g(x))$$

شرط تشکیل این تابع آن است که اشتراک برد تابع g و دامنه‌ی تابع f تهی نباشد، در این صورت دامنه‌ی تابع fog ، زیرمجموعه‌ی دامنه‌ی تابع g خواهد بود و برد تابع fog زیرمجموعه‌ی برد تابع f خواهد بود و می‌نویسیم:

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

نمایش ضابطه‌ای ترکیب توابع: در نماد تابع‌های مرکب، پرانتز نشان می‌دهد که کدام تابع اول وارد محاسبه می‌شود، نماد $f(g(x))$ ، یعنی،

«اول g ، بعد f » و نماد $g(f(x))$ ، یعنی «اول f بعد g ». به حالت‌های زیر توجه کنید.

۱ محاسبه‌ی مقدار $(fog)(a)$: برای محاسبه‌ی $(fog)(a)$ ، داریم:

$$(fog)(a) = f(g(a))$$

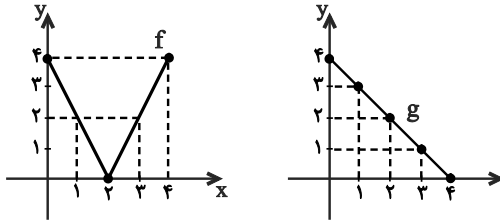
ابتدا مقدار تابع g را در a محاسبه کرده و سپس مقدار تابع f را در $g(a)$ می‌یابیم. توجه کنید که شرط تشکیل $(fog)(a)$ آن است که g در a و f در $g(a)$ تعریف شده باشد.

مثال: اگر $f(-3) = 6$ و $g(6) = 4$ باشد، آنگاه $(gof)(-3)$ را بیابید.

حل: از آنجایی که $(gof)(-3) = g(f(-3))$ ، بنابراین ابتدا $f(-3)$ وارد محاسبه می‌شود:

$$(gof)(-3) = g(f(-3)) = g(6) = 4 \Rightarrow (gof)(-3) = 4$$

مثال: نمودار دو تابع f و g در شکل زیر رسم شده است، مقادیر زیر را در صورت وجود بیابید.



$$(1) f(g(1)) \quad (2) (gof)(0)$$

$$(3) (fof)(2) \quad (4) (gog)(3)$$

حل: (۱) $g(1) = 3$ بنابراین $f(g(1)) = f(3) = 3$

(۲) $f(0) = 4$ بنابراین $(gof)(0) = g(f(0)) = g(4) = 0$

(۳) $f(2) = 0$ بنابراین $(fof)(2) = f(f(2)) = f(0) = 4$

(۴) $g(3) = 1$ بنابراین $(gog)(3) = g(g(3)) = g(1) = 3$

مثال: اگر $f(x) = [-x]$ و $g(x) = \sqrt{2+x}$ ، آنگاه $(fog)(1)$ را بیابید.

حل: از آنجایی که $(fog)(1) = f(g(1))$ ، از طرفی $g(1) = \sqrt{2+1} = \sqrt{3}$ ، بنابراین:

$$(fog)(1) = f(g(1)) = f(\sqrt{3}) = [-\sqrt{3}] = -\sqrt{3} \approx -1.732$$

مثال: اگر $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x \geq 0 \\ x^2-7 & x < 0 \end{cases}$ ، آنگاه $(fof)(-3)$ را بیابید.

حل: از آنجایی که $(fof)(-3) = f(f(-3))$ ، بنابراین ابتدا $f(-3)$ را از ضابطه‌ی پایین محاسبه می‌کنیم:

$$f(-3) = (-3)^2 - 7 = 9 - 7 = 2 \Rightarrow (fof)(-3) = f(f(-3)) = f(2)$$

$$f(2) = 2 \times 2 + 1 = 5 \Rightarrow (fof)(-3) = 5$$

برای محاسبه‌ی $f(2)$ از ضابطه‌ی بالا استفاده می‌کنیم:

۲ یافتن ضابطه‌ی $(fog)(x)$: نماد $(fog)(x)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(fog)(x) = f(g(x))$$

و به این معنی است که در تابع $f(x)$ هر جا به جای x قرار دهیم $g(x)$.

مثال: اگر $f(x) = ax + b$ ($a > 0$) و $(fog)(x) = 4x + 3$ ، آنگاه $f(-2)$ را بیابید.

$$\Rightarrow \begin{cases} f(f(x)) = a(ax + b) + b = a^2x + b(a+1) & (1) \\ f(f(x)) = 4x + 3 & (2) \end{cases}$$

حل:

با متحد قرار دادن دو طرف خواهیم داشت:

$$\xrightarrow{(1) \equiv (2)} \begin{cases} a^2x + b(a+1) = 4x + 3 \\ a > 0 \end{cases} \Rightarrow a = 2, b = 1 \Rightarrow f(x) = 2x + 1 \Rightarrow f(-2) = -3$$

■ مثال: اگر $f(x) = 3x + 2$ و $g(x) = x^2 - 3$ آن گاه به ازای چه مقادیری از x نمودار تابع $h(x) = (f \circ g)(x)$ پایین خط $y = 8$ است؟
 ◀ حل: داریم $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ ، با تشکیل آن داریم:

$$h(x) = f(g(x)) = f(x^2 - 3) = 3(x^2 - 3) + 2 = 3x^2 - 7$$

باید $h(x) < 8$ باشد، بنابراین:

$$3x^2 - 7 < 8 \Rightarrow x^2 < 5 \Rightarrow -\sqrt{5} < x < \sqrt{5}$$

■ مثال: اگر $f(x) = \frac{x+1}{x}$ و $(f \circ g)(x) = \sqrt{x} - 1$ ، آنگاه $g(25)$ را بیابید.

◀ حل: در تابع $f(x) = \frac{x+1}{x}$ ، با تشکیل $f(g(x))$ به رابطه‌ی $f(x) = \frac{g(x)+1}{g(x)}$ می‌رسیم، از طرفی $f(g(x)) = \sqrt{x} - 1$ ، بنابراین:

$$\frac{g(x)+1}{g(x)} = \sqrt{x} - 1 \xrightarrow{x=25} \frac{g(25)+1}{g(25)} = \sqrt{25} - 1 = 4 \Rightarrow g(25)+1 = 4g(25) \Rightarrow g(25) = \frac{1}{3}$$

■ مثال: اگر $g(x) = 2x + 1$ و $(f \circ g)(x) = \sqrt[3]{x}$ باشد، آن گاه $f(5)$ را بیابید.

◀ حل: با توجه به $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt[3]{x}$ با توجه به این که $g(x) = 2x + 1$ ، پس $f(2x + 1) = \sqrt[3]{x}$ ، برای یافتن $f(5)$ ، کافی است قرار دهیم $2x + 1 = 5$ ، بنابراین $x = 2$ ، پس:

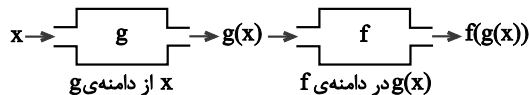
$$f(2x + 1) = \sqrt[3]{x} \xrightarrow{x=2} f(5) = \sqrt[3]{2}$$

■ مثال: اگر $f(x - 2) = \sqrt[3]{x}$ باشد، آن گاه $f(5 - 2x)$ را بیابید.

◀ حل: با فرض $x - 2 = t$ داریم: $x = t + 2$ ، پس:

$$f(t) = \sqrt[3]{t+2} \rightarrow f(x) = \sqrt[3]{x+2} \xrightarrow{x \rightarrow 5-2x} f(5-2x) = \sqrt[3]{5-2x+2} = \sqrt[3]{7-2x}$$

■ نمایش ماشینی ترکیب توابع ◀ فرض کنید خروجی‌های تابعی مانند g را بتوان به عنوان ورودی‌های تابعی مانند f به کار برد. در این صورت همان طوری که در شکل زیر دیده می‌شود، می‌توانیم f و g را با هم ترکیب کنیم تا تابع جدیدی تشکیل شود که ورودی‌هایش، ورودی g و خروجی‌هایش، مقادیر $f(g(x))$ باشند.



■ مثال: اگر خروجی ماشین زیر برابر ۶ باشد، مقدار ورودی را بیابید.

$$\text{ورودی} \rightarrow \boxed{2x+3} \rightarrow \boxed{5x+1} \rightarrow \text{خروجی}$$

◀ حل: اگر در ماشین بالا ورودی را x ، $f(x) = 2x + 3$ ، $g(x) = 5x + 1$ و خروجی را y بگیریم در این صورت $x \rightarrow \boxed{f} \rightarrow \boxed{g} \rightarrow y$ ، این همان تعریف تابع با ضابطه‌ی $(g \circ f)(x)$ است و داریم:

$$y = g(f(x)) = g(2x + 3) = 5(2x + 3) + 1 = 6 \Rightarrow 10x + 16 = 6 \Rightarrow 10x = -10 \Rightarrow x = -1$$

۲۰
سؤال

۲۰
سؤال

صفحه‌های ۱۱ تا ۱۴ و تمرین‌های صفحه‌های ۲۲ و ۲۳ ریاضی ۳

تیپ ۴

محاسبه‌ی مقدار $(f \circ g)(a)$

(ریاضی ۳- صفحه‌ی ۱۴- مشابه کار در کلاس)

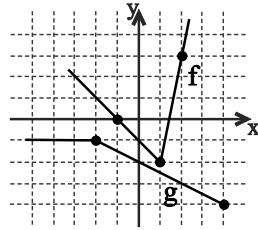
x	f(x)	g(x)
-1	-2	2
0	1	3
1	-3	5
2	4	-1

① -۴۱ با توجه به جدول روبه‌رو، حاصل $\frac{(f \circ g)(-1) + (g \circ f)(0)}{f(-g(2))}$ کدام است؟

-۳ (۲)	۳ (۱)
$-\frac{9}{5}$ (۴)	$\frac{9}{5}$ (۳)

ریاضی ۳- صفحه ۲۳- مکمل تمرین ۸

۴۲ (۲) نمودار دو تابع f و g در شکل زیر رسم شده است. حاصل $\frac{(g \circ f)(1)}{(f \circ g)(0)}$ کدام است؟



- (۱) -۲
(۲) -۱
(۳) $\frac{1}{2}$
(۴) $-\frac{1}{2}$

ریاضی ۳- صفحه ۲۲- مکمل تمرین ۳- پ

۴۳ (۳) اگر $f(5) = 3$ ، $g(3) = 2$ و $f(-2) = 1$ باشند، آنگاه حاصل $f(-g(f(5)))$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۵

ریاضی ۳- صفحه ۲۲- مکمل تمرین ۴- الف (سراسری ریاضی - ۷۰)

۴۴ (۴) اگر $f(x) = 2x + 3$ و $g(x) = x - 4$ مقدار $\frac{(f \circ g)(2)}{(g \circ f)(-1)}$ چقدر است؟

- (۱) $-\frac{7}{3}$ (۲) $-\frac{3}{7}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) ۲

۴۵ (۵) اگر $f(x) = |x|$ و $g(x) = x^2 + 2x + 1$ ، آنگاه حاصل $(f \circ g)(1 - \sqrt{2}) - (g \circ f)(1 - \sqrt{2})$ ، کدام است؟

ریاضی ۳- صفحه ۲۲- مکمل تمرین ۴- الف (سراسری تجربی - ۸۹)

- (۱) $4(1 - \sqrt{2})$ (۲) $4(\sqrt{2} - 1)$ (۳) ۴ (۴) $4\sqrt{2}$

ریاضی ۳- صفحه ۲۲- مکمل تمرین ۴- الف (سراسری تجربی - ۸۶)

۴۶ (۶) اگر $f(x) = [x]$ و $g(x) = \frac{x}{1-x}$ ، آنگاه $(f \circ g)(\sqrt{2})$ کدام است؟

- (۱) -۴ (۲) -۳ (۳) -۲ (۴) -۱

۴۷ (۷) در تابع با ضابطه $f(x) = x^2 - 2[x]$ ، مقدار $f\left(-\frac{1}{4}f(\sqrt{3})\right)$ کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

ریاضی ۳- صفحه ۲۲- مکمل تمرین ۴- الف (سراسری تجربی خارج از کشور - ۹۰)

- (۱) $1/75$ (۲) $2/25$ (۳) $2/5$ (۴) $2/75$

ریاضی ۳- صفحه ۲۲- مکمل تمرین ۴- الف (آزمون کانون - ۵ آذر ۹۵)

۴۸ (۸) اگر $f(x) = \begin{cases} \sqrt{3} + 2x & , x \geq 1 \\ \sqrt{3} - x & , x < 1 \end{cases}$ مقدار $f(f(\sqrt{3} - 1))$ کدام است؟

- (۱) $2 + \sqrt{3}$ (۲) $\sqrt{3} - 2$ (۳) $\sqrt{3} + 1$ (۴) ۱

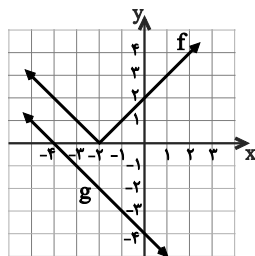
ریاضی ۳- صفحه ۲۲- مکمل تمرین ۴- الف

۴۹ (۹) اگر $f(x) = \begin{cases} x + 3 & , x < 2 \\ 2x + 1 & , x \geq 2 \end{cases}$ و $g(x) = x^2 - 5x$ ، آنگاه $(\Delta f) \circ g$ در $x = 1$ کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) -۵ (۳) -۱ (۴) ۱

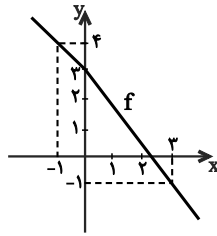
ریاضی ۳- صفحه ۲۳- مکمل تمرین ۸

۵۰ (۱۰) اگر نمودار دو تابع f و g به صورت زیر باشند، آنگاه از $(f \circ g)(a) = 0$ مقدار a کدام است؟



- (۱) صفر
(۲) -۱
(۳) -۲
(۴) ۱

(ریاضی ۳- صفحه ۲۳-۲۲- مکمل تمرین ۸)



۱۱) اگر نمودار تابع f به صورت زیر باشد، جواب معادله $(f \circ f)(x) = 4$ کدام است؟

- ۱) ۳
- ۲) -۱
- ۳) صفر
- ۴) $\frac{9}{4}$

صفحه‌های ۱۱ تا ۱۴ و تمرین‌های صفحه‌های ۲۲ و ۲۳ ریاضی ۳

تیپ ۵

یافتن ضابطه‌ی fog

(ریاضی ۳- صفحه ۲۳-۲۲- مکمل تمرین ۹) (سراسری تجربی - ۷۶)

۱۲) اگر $f(x) = 3x + a$ و $g(x) = 2 - x$ و $(f \circ g)(x) - (g \circ f)(x) = 6$ ، چقدر است a ؟

- ۱) -۲
- ۲) -۱
- ۳) ۱
- ۴) ۲

۱۳) اگر $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ و $g(x) = \frac{2x+2}{2-x}$ باشند، ضابطه‌ی تابع $(g \circ f)(x)$ کدام است؟

(ریاضی ۳- صفحه ۱۴- مشابه کار در کلاس) (سراسری تجربی - ۹۶)

- ۱) $x-1$
- ۲) $x+1$
- ۳) x
- ۴) $2x$

۱۴) اگر $y = f(x)$ یک تابع خطی گذرنده از نقاط $(0, a)$ و $(a, 0)$ باشد، ضابطه‌ی $(f \circ f)(x)$ کدام است؟

(ریاضی ۳- صفحه ۱۴- مکمل مثال ۱) (سراسری ریاضی - ۷۷)

- ۱) صفر
- ۲) x
- ۳) $f(x)$
- ۴) $x + 2a$

(ریاضی ۳- صفحه ۱۴- مکمل مثال ۱) (سراسری ریاضی - ۷۷)

۱۵) اگر تابع $f(x) = 2x + m$ نمودار تابع $(f \circ f \circ f)(x)$ را در نقطه‌ای به طول ۲ قطع کند، m کدام است؟

- ۱) -۲
- ۲) ۲
- ۳) -۴
- ۴) ۴

(ریاضی ۳- صفحه ۱۴- مکمل مثال ۱) (سراسری تجربی - ۸۳)

۱۶) اگر $f(x) = |x| - x$ ، ضابطه‌ی تابع $(f \circ f)(x)$ برابر کدام است؟

- ۱) x
- ۲) $|x|$
- ۳) $x + |x|$
- ۴) صفر

۱۷) اگر $f(x) = (2x-3)^2$ و $g(x) = x+2$ نمودارهای دو تابع f و g ، با کدام طول متقاطع‌اند؟

(ریاضی ۳- صفحه ۲۳-۲۲- مکمل تمرین ۹-الف) (سراسری تجربی - ۹۲)

- ۱) -۱
- ۲) $\frac{1}{2}$
- ۳) ۱
- ۴) $\frac{3}{2}$

۱۸) اگر $f(x) = 2x - 5$ و $g(x) = x^2 - 3x + 8$ ، آنگاه مجموع مربعات ریشه‌های معادله $(f \circ g)(x) = 7$ کدام است؟

(ریاضی ۳- صفحه ۲۳-۲۲- مکمل تمرین ۹-الف)

- ۱) ۵
- ۲) ۴
- ۳) ۶
- ۴) ۸

۱۹) اگر $g(x) = 1 - 2x$ و $f(x) = 3x^2 + x - 1$ ، آنگاه خط $y = -5$ نمودار تابع $y = (g \circ f)(x)$ را را

(ریاضی ۳- صفحه ۲۳-۲۲- مکمل تمرین ۸-ب)

- ۱) در دو نقطه به طول مثبت قطع می‌کند.
- ۲) در دو نقطه به طول منفی قطع می‌کند.
- ۳) قطع نمی‌کند.
- ۴) در دو طرف محور y ها قطع می‌کند.

۲۰) اگر $f(x) = x^2 + 5x + 4$ و $g(x) = 3x^2 + x - 2$ ، آنگاه مجموع جواب‌های حقیقی معادله $(f \circ g)(x) = 0$ کدام است؟

(ریاضی ۳- صفحه ۲۳-۲۲- مکمل تمرین ۸) (آزمون کانون - ۹۱)

- ۱) $-\frac{1}{3}$
- ۲) $-\frac{2}{3}$
- ۳) $-\frac{16}{3}$
- ۴) جواب حقیقی ندارد.

۶۱) اگر $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$ و $g(x) = x+4$ باشند، جواب معادله $(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x)$ کدام است؟

(ریاضی ۳- صفحه ۲۳-۲۲- مکمل تمرین ۸) (سراسری تجربی خارج از کشور - ۹۷)

- ۱) $-1, -7$
- ۲) $1, -7$
- ۳) $-1, 7$
- ۴) $1, 7$

۶۲- اگر $f(x) = x^2 + x + 1$ ، آنگاه جواب منفی معادله‌ی $f(3x) = f(x+1)$ کدام است؟ (ریاضی ۳- صفحه‌ی ۲۳- مکمل تمرین ۸) (آزمون کانون - ۶ آذر ۹۴)

- (۱) -۱ (۲) -۲ (۳) $-\frac{1}{4}$ (۴) $-\frac{1}{2}$

۶۳- اگر $f(x) = x^2$ ، آنگاه معادله‌ی $f(f(x)-1) = 1$ چند ریشه‌ی حقیقی دارد؟ (ریاضی ۳- صفحه‌ی ۲۳- مکمل تمرین ۸)

- (۱) دو ریشه‌ی ساده و یک ریشه‌ی مضاعف (۲) یک ریشه‌ی ساده و یک ریشه‌ی مضاعف
(۳) چهار ریشه‌ی ساده (۴) سه ریشه‌ی ساده

۶۴- اگر $f(x) = x^2 + 3x$ و $g(x) = -\frac{1}{2}x + 2$ ، آنگاه مجموعه‌ی طول نقاطی از منحنی تابع $g \circ f$ که در بالای محور x ها قرار می‌گیرند برابر کدام بازه است؟ (ریاضی ۳- صفحه‌ی ۲۳- مکمل تمرین ۸) (سراسری تجربی - ۹۱)

- (۱) $(-4, 1)$ (۲) $(-3, 2)$ (۳) $(-2, 1)$ (۴) $(-1, 4)$

۶۵- اگر $f(x) = x^2 + x$ و $g(x) = \sqrt{4x+1}$ ، آنگاه مساحت ناحیه‌ی محدود به نمودار تابع $g \circ f$ و خط به معادله‌ی $y = 3$ کدام است؟ (ریاضی ۳- صفحه‌ی ۱۴- مکمل مثال ۲) (سراسری تجربی - ۹۵)

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) $\frac{4}{5}$ (۴) ۶

۶۶- تابع با ضابطه‌ی $g(x) = x - \sqrt{x}$ مفروض است. اگر نمودار تابع f محور x ها را در دو نقطه به طول‌های ۶ و $-\frac{1}{4}$ قطع کند، آنگاه نمودار تابع $f \circ g$ محور x ها را با کدام طول قطع می‌کند؟ (ریاضی ۳- صفحه‌ی ۱۴- مکمل مثال ۲) (سراسری ریاضی خارج از کشور - ۹۴)

- (۱) $\frac{1}{4}$ و ۹ (۲) $\frac{1}{4}$ و ۹ (۳) $\frac{1}{4}$ و ۴ (۴) ۹ و ۴

۶۷- اگر $f(2x-3) = 4x^2 - 14x + 13$ باشد، ضابطه‌ی $f(x)$ برابر کدام است؟ (ریاضی ۳- صفحه‌ی ۲۲- مکمل تمرین ۳) (سراسری تجربی - ۹۷)

- (۱) $x^2 - x + 3$ (۲) $x^2 - 2x - 1$ (۳) $x^2 - 2x + 1$ (۴) $x^2 - x + 1$

۶۸- اگر $f(x-3) = x^2 - 4x + 5$ ، آنگاه $f(1-x)$ کدام است؟ (ریاضی ۳- صفحه‌ی ۲۲- مکمل تمرین ۳) (سراسری تجربی - ۹۰)

- (۱) $x^2 + 1$ (۲) $x^2 + 3$ (۳) $x^2 + 4x + 5$ (۴) $x^2 - 4x + 5$

۶۹- اگر $f(x+1) + f(3) = 2x + 1$ باشد، نمودار تابع $y = (f \circ f)(x)$ محور y ها را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند؟ (ریاضی ۳- صفحه‌ی ۲۲- مکمل تمرین ۳) (آزمون کانون - ۹ بهمن ۹۴)

- (۱) $\frac{27}{2}$ (۲) $-\frac{21}{2}$ (۳) $-\frac{9}{2}$ (۴) $\frac{7}{2}$

۷۰- اگر $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ و $f \circ g(x) = \frac{x^2+2}{x^2+1}$ ، مقدار $g(1)$ کدام است؟ (ریاضی ۳- صفحه‌ی ۲۲- مکمل تمرین ۳) (سراسری تجربی - ۸۴)

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۷۱- اگر $f(x) = 2x^2 + 4$ و $f(g(x)) = 4x^2 + 6x$ ، مقدار $g(-2)$ کدام است؟ (ریاضی ۳- صفحه‌ی ۲۲- مکمل تمرین ۳) (سراسری تجربی خارج از کشور - ۸۴)

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) ۲

۷۲- اگر $f(x) = 2x^2 + 1$ و $(f \circ g)(x) = 2x - 4\sqrt{x} + 3$ باشند، $g(4)$ کدام می‌تواند باشد؟ (ریاضی ۳- صفحه‌ی ۲۲- مکمل تمرین ۳) (آزمون کانون - ۹ بهمن ۹۴)

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۷۳- اگر $f(x) = \frac{4x-1}{3}$ و $g \circ f(x+1) = \frac{2x+3}{5}$ باشد، $g(-1)$ کدام است؟ (ریاضی ۳- صفحه‌ی ۲۲- مکمل تمرین ۳) (آزمون کانون - ۱۵ مرداد ۹۵)

- (۱) $\frac{1}{5}$ (۲) $-\frac{1}{5}$ (۳) ۱ (۴) صفر

۱۴ -۷۴ اگر $g(x) = \sqrt{x}$ و $f(g(x)) = x^2 + x$ باشد، مقدار $f(g(1)) + f(2g(1))$ کدام است؟
 (۱) ۱۸ (۲) ۲۰ (۳) ۲۲ (۴) ۲۴

۱۵ -۷۵ اگر $f(x) = (\sqrt{3})^x$ و $g(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ ، آنگاه تابع $g \circ f$ چگونه است؟
 (ریاضی ۳- ترکیبی- ترکیب توابع و یکنوایی) (آزمون کانون- ۸۹)

(۱) صعودی (۲) نزولی (۳) ابتدا صعودی و بعد نزولی (۴) ابتدا نزولی و بعد صعودی

۱۶ -۷۶ تعداد باکتری‌هایی که در یک غذای معین تولید می‌شود با فرمول $2 \leq T \leq 14$ و $N(T) = 20T^2 - 80T + 500$ که در آن T دمای غذا برحسب درجه‌ی سلسیوس است، محاسبه می‌شود. وقتی غذا از فریزر خارج می‌شود، دمای غذا توسط رابطه‌ی $T(t) = 4t + 2$ ، $0 \leq t \leq 3$ محاسبه می‌شود، که در آن t برحسب ساعت است، چند ساعت بعد تعداد باکتری‌ها ۱۱۴۰ خواهد بود؟
 (ریاضی ۳- صفحه ۱۱- مشابه فعالیت)

(۱) ۲ ساعت (۲) ۳ ساعت (۳) ۱/۵ ساعت (۴) ۲/۵ ساعت

۱۷ -۷۷ هزینه‌ی تولید هفتگی x واحد از یک کالای صنعتی، توسط تابع با ضابطه‌ی $c(x) = 70x + 800$ (به هزار تومان) به دست می‌آید. هم‌چنین تعداد واحد کالای تولید شده در هر ساعت از رابطه‌ی $x(t) = 40t$ به دست می‌آید. هزینه‌ی تولید ۶ ساعت از کالای مفروض، چند هزار تومان است؟
 (ریاضی ۳- صفحه ۱۱- مرتبط با فعالیت)

(۱) ۱۷۶۰۰ (۲) ۱۵۸۰۰ (۳) ۱۶۸۰۰ (۴) ۱۵۶۰۰

صفحه‌های ۱۱ تا ۱۴ ریاضی ۳

تیپ ۶

نمایش ماشینی ترکیب توابع

۱۸ -۷۸ اگر توابع f و g به عنوان ماشین به صورت $x \rightarrow \boxed{f} \rightarrow \boxed{g} \rightarrow 2x$ باشند و $g(x) = 3x + 4$ ، آنگاه مقدار $f(5)$ کدام است؟

(ریاضی ۳- صفحه ۱۲- متن درس) (سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۱)

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۹ -۷۹ با توجه به ماشین $x \rightarrow \boxed{g} \rightarrow \boxed{f} \rightarrow 6x + k$ ، اگر $g(x) = 3x^3 - 2$ و $f(-\frac{19}{9}) = 1$ باشد، حاصل $f(1)$ کدام است؟

(ریاضی ۳- صفحه ۱۲- متن درس) (آزمون کانون- ۲۵ دی ۹۴)

(۱) ۷ (۲) ۹ (۳) ۳ (۴) ۵

۲۰ -۸۰ اگر خروجی ماشین شکل مقابل برای ورودی ۲، برابر ۵- باشد، A کدام است؟
 (ریاضی ۳- صفحه ۱۲- متن درس) (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۸۲)

(۱) $-\frac{15}{4}$ (۲) -۳ (۳) ۳ (۴) $\frac{15}{4}$

ورودی $\rightarrow \boxed{2x + A} \rightarrow \boxed{\sqrt{x} - 2x - 4} \rightarrow$ خروجی

صفحه ۱۳ و تمرین‌های صفحه ۲۲ ریاضی ۳

نمایش زوج مرتبی ترکیب توابع \leftarrow برای محاسبه‌ی تابع $f \circ g$ وقتی دو تابع f و g به صورت زوج مرتب داده شده باشند، مقدار تابع $f \circ g$ را در نقاط دامنه‌ی g حساب می‌کنیم. اگر $x_0 \in D_g$ ولی $x_0 \notin D_f$ ، آنگاه x_0 در ترکیب شرکت نمی‌کند.

مثال: اگر $f = \{(1, 2), (3, 6), (-2, 5), (7, 11)\}$ و $g = \{(1, 0), (2, -1), (5, 11), (6, 9)\}$ ، آنگاه تابع $g \circ f$ را بیابید.

حل: از آنجایی که $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ ، با ورودی‌های x_0 از زوج‌های مرتب (x_0, y_0) تابع f شروع می‌کنیم و مقدار تابع g را در y_0 می‌یابیم. (به شرط وجود).

$$\xrightarrow{x=1} g(f(1)) = g(2) = -1 \rightarrow (1, -1)$$

$$\xrightarrow{x=3} g(f(3)) = g(6) = 9 \rightarrow (3, 9) \quad \Rightarrow g \circ f = \{(1, -1), (3, 9), (-2, 11)\}$$

$$\xrightarrow{x=-2} g(f(-2)) = g(5) = 11 \rightarrow (-2, 11)$$

$$\xrightarrow{x=7} g(f(7)) = g(11) \text{ تعریف نمی‌شود.}$$

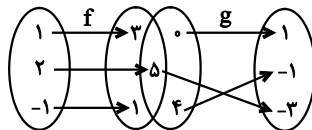
سؤال ۱۰

صفحه ۱۳ و تمرین‌های صفحه ۲۲ ریاضی ۳

تیپ ۷

نمایش زوج مرتبی ترکیب توابع

ریاضی ۳ - صفحه ۱۳ - مکمل مثال (آزمون کانون - ۹۲)

۱-۸۱ با توجه به شکل مقابل، تابع $f \circ g$ کدام است؟

- (۱) $\{(2, -2)\}$
 (۲) $\{(1, 1), (2, -2), (-1, -2)\}$
 (۳) $\{(0, 3), (4, 1)\}$
 (۴) $\{(5, -2)\}$

۲-۸۲ اگر $f = \{(3, -1), (4, -5), (1, -2)\}$ و $g = \{(-1, -3), (2, 4), (-1, 3)\}$ باشد، حاصل $f(-g(-1)) + g(2f(4))$ کدام است؟

ریاضی ۳ - صفحه ۲۲ - مکمل تمرین (۱)

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) -۴ (۴) -۲

ریاضی ۳ - صفحه ۲۲ - مکمل تمرین (۲) (آزمون کانون - ۹۰)

۳-۸۳ اگر $f(x) = \frac{1}{x-1}$ و $g = \{(1, 4), (2, 1), (3, -1)\}$ ، آنگاه تابع $f \circ g$ کدام است؟

- (۱) $\{(1, \frac{1}{3}), (3, -1)\}$ (۲) $\{(4, \frac{4}{3}), (-1, \frac{-1}{3})\}$ (۳) $\{(1, \frac{1}{3}), (3, \frac{-1}{3})\}$ (۴) $\{(1, 4), (3, -1)\}$

ریاضی ۳ - صفحه ۲۲ - مکمل تمرین (۱) (سراسری تجربی - ۸۳)

۴-۸۴ اگر $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ و $f = \{(x, 2x-1), x \in A\}$ ، تابع $f(f(x))$ چند عضو دوتایی دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۵-۸۵ تابع $f = \{(2, 1), (3, 2), (4, 5), (1, 7)\}$ و $g = \{(1, 2), (3, 1), (a, 3), (b, 1)\}$ مفروض‌اند. اگر $(4, 1) \in g \circ f$ و $(4, 2) \in f \circ g$ باشند، دوتایی (a, b) کدام است؟

ریاضی ۳ - صفحه ۲۲ - مکمل تمرین (۱) (سراسری ریاضی - ۹۰)

- (۱) $(3, 4)$ (۲) $(4, 3)$ (۳) $(4, 5)$ (۴) $(5, 4)$

۶-۸۶ اگر $f(x) = x + \sqrt{x}$ و $g = \{(1, 2), (5, 4), (6, 5), (2, 3)\}$ ، آنگاه عدد a کدام است؟

ریاضی ۳ - صفحه ۲۲ - مکمل تمرین (۱) (سراسری تجربی - ۹۱)

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۷-۸۷ اگر $f = \{(a, 2), (5, 2a-b), (2a, -b)\}$ و $g = \{(2, a+b), (-1, 5), (6, 3a+b)\}$ و $g(f(a)) = 2f(g(-1)) = 6$ ، آنگاه $g(6)$ کدام است؟

ریاضی ۳ - صفحه ۲۲ - مکمل تمرین (۱)

- (۱) ۱۲ (۲) ۹ (۳) ۱۵ (۴) ۲۷

۸-۸۸ مجموعه اعضای برد تابع $y = f \circ f$ وقتی که $f = \{(2, 6), (1, 5), (5, 7), (6, 9)\}$ باشد، کدام است؟

ریاضی ۳ - صفحه ۲۲ - مکمل تمرین (۱) (آزمون کانون - ۹۴)

- (۱) ۱۲ (۲) ۱۶ (۳) ۶ (۴) ۸

۹-۸۹ اگر $f = \{(1, -1), (5, 2), (-1, 0/5), (4, 1/5)\}$ و $g = \{(3, 2), (2, 3), (4, -3), (1, 5)\}$ ، برد تابع $g \circ f$ کدام است؟

ریاضی ۳ - صفحه ۲۲ - مکمل تمرین (۱)

- (۱) $\{5, -3\}$ (۲) $\{5, -3, 2\}$ (۳) $\{2, -3, 3\}$ (۴) $\{-3, 2, 5, 3\}$

۱۰-۹۰ اگر بدانیم که $f(x) = 2^{-x}$ و $g = \{(5, 6), (4, 5), (2, 1), (3, a)\}$ ، حداکثر a برای این که تابع $f \circ g$ نزولی باشد، کدام است؟

ریاضی ۳ - ترکیبی - ترکیب توابع و یکنوایی (آزمون کانون - ۹۶)

- (۱) ۵ (۲) ۴ (۳) ۲ (۴) ۱

دامنه‌ی ترکیب توابع

۲. ترکیب توابع

صفحه‌های ۱۱ تا ۱۴ ریاضی ۳

دامنه‌ی ترکیب توابع

دامنه‌ی ترکیب توابع ◀ برای دو تابع f و g با دامنه‌های D_f و D_g ، دامنه‌ی تابع $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ ، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

■ مثال: اگر $f(x) = \frac{1}{x+2}$ آنگاه دامنه و ضابطه‌ی تابع $f \circ f$ را بیابید.

◀ حل: دامنه‌ی تابع f ، $D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$ است، با توجه به تعریف داریم:

$$D_{f \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_f\} = \{x \neq -2 \mid \frac{1}{x+2} \neq -2\} \Rightarrow \frac{1}{x+2} \neq -2 \Rightarrow -\frac{1}{2} \neq x+2 \Rightarrow x \neq -\frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow D_{f \circ f} = \mathbb{R} - \{-2, -\frac{5}{2}\}$$

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f\left(\frac{1}{x+2}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x+2} + 2} = \frac{x+2}{2x+5} \Rightarrow (f \circ f)(x) = \frac{x+2}{2x+5}, x \neq -2$$

نتیجه: در تعیین ضابطه‌ی تابع مرکب، باید دامنه‌ی تابع مرکب را بیابیم و در کنار ضابطه بنویسیم.

■ مثال: اگر نمودار تابع f به صورت زیر باشد و آنگاه دامنه‌ی تابع $f \circ g$ را بیابید.

◀ حل: دامنه‌ی تابع f ، برابر $D_f = [-3, 4]$ و $D_g = [1, +\infty)$ بنابراین:

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in [1, +\infty) \mid -3 \leq 3\sqrt{x-1} \leq 4\}$$

باید نامعادله‌ی $-3 \leq 3\sqrt{x-1} \leq 4$ را حل کنیم، با به توان دو رساندن طرفین نامساوی داریم:

$$0 \leq 3\sqrt{x-1} \leq 4 \Rightarrow 0 \leq 9x-9 \leq 16 \Rightarrow 9 \leq 9x \leq 25 \Rightarrow 1 \leq x \leq \frac{25}{9}$$

$$\text{پس } D_{f \circ g} = \left[1, \frac{25}{9}\right]$$

نکته: با توجه به تعریف دامنه‌ی تابع مرکب، اگر دامنه‌ی تابع f ، بازه‌ی $[a, b]$ باشد، برای تعیین دامنه‌ی تابع $f(kx)$ کافی است از

نامعادله‌ی $a \leq kx \leq b$ ، حدود تغییرات x را بیابیم.

■ مثال: اگر دامنه‌ی تابع f بازه‌ی $[-2, 4]$ باشد، دامنه‌ی تابع $f(2x)$ را بیابید.

◀ حل: باید نامعادله‌ی توأم $-2 \leq 2x \leq 4$ را حل کنیم:

$$-2 \leq 2x \leq 4 \Rightarrow -1 \leq x \leq 2$$

$$\Rightarrow D_{f(2x)} = [-1, 2]$$

تذکره: ترکیب توابع در حالت کلی خاصیت جابجایی ندارد، یعنی $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$.

■ مثال: اگر $f(x) = \sqrt{x-2}$ و $g(x) = 2x$ ، ضابطه‌ی دو تابع $f \circ g$ و $g \circ f$ را بیابید.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{g(x)-2} = \sqrt{2x-2}, x \geq 1$$

◀ حل:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2f(x) = 2\sqrt{x-2}, x \geq 2$$

■ مثال: تابع $h(x) = (\sqrt{x} + 1)^3$ را به صورت ترکیب دو تابع بنویسید. آیا جواب منحصر به فرد است؟

◀ حل: دو تابع f و g را با ضابطه‌های $f(x) = \sqrt{x} + 1$ و $g(x) = x^3$ در نظر بگیرید. با تشکیل تابع $g \circ f$ داریم:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x} + 1) = (\sqrt{x} + 1)^3 = h(x)$$

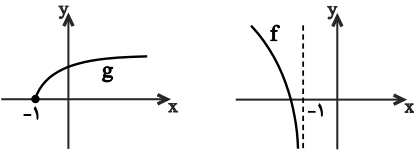
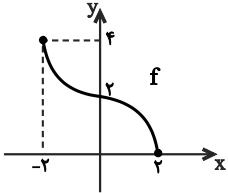
از طرفی با انتخاب دو تابع f و g با ضابطه‌های $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = (x+1)^3$ و تشکیل تابع $g \circ f$ نیز به همین جواب می‌رسیم، پس جواب منحصر به فرد نیست.

سؤال ۱۰

صفحه‌های ۱۱ تا ۱۴ و تمرین‌های صفحه‌ی ۲۲ ریاضی ۳

تیپ ۸

دامنه‌ی ترکیب توابع

- ۱-۹۱ اگر $f(x) = \sqrt{x-2}$ و $g(x) = 2x^2 - 5$ ، آنگاه ضابطه‌ی تابع $(g \circ f)(x)$ کدام است؟
 (۱) $x \geq 1$ و $2x - 3$ (۲) $x \in \mathbb{R}$ و $2x - 9$ (۳) $x \geq 2$ و $2x - 9$ (۴) $x \in \mathbb{R}$ و $2x - 3$ (ریاضی ۳ - صفحه‌ی ۱۴ - مشابه مثال ۲)
- ۲-۹۲ اگر $f(x) = \frac{x}{x-1}$ و $g(x) = \frac{1}{x}$ ، آنگاه $(f \circ g)(x)$ برابر است با:
 (۱) $x \neq 0$ و $\frac{1}{1-x}$ (۲) $x \neq 0$ و $\frac{1}{x-1}$ (۳) $\frac{1}{1-x}$ (۴) $\frac{1}{x-1}$ (ریاضی ۳ - صفحه‌ی ۱۲ - مشابه کار در کلاس)
- ۳-۹۳ اگر f و g دو تابع و $h(x) = (f \circ g)(x) = \sqrt[3]{x^2 - 4}$ ، آنگاه ضابطه‌ی $f(x)$ کدام تابع زیر نمی‌تواند باشد؟
 (۱) $\sqrt[3]{x}$ (۲) $\sqrt[3]{x-4}$ (۳) $\sqrt[3]{x+4}$ (۴) $\sqrt[3]{x^4 - 4}$ (ریاضی ۳ - صفحه‌ی ۲۲ - مکمل تمرین ۷)
- ۴-۹۴ اگر $g(x) = \frac{x+1}{x-1}$ و $D_f = [3, +\infty)$ باشند، آنگاه دامنه‌ی تابع $(f \circ g)(x)$ کدام است؟
 (۱) $(1, 3]$ (۲) $[3, +\infty)$ (۳) $(1, 2]$ (۴) $[2, +\infty)$ (ریاضی ۳ - صفحه‌ی ۱۴ - مکمل کار در کلاس) (آزمون کانون - ۱۱ بهمن ۹۲)
- ۵-۹۵ هرگاه نمودار تابع‌های f و g به صورت زیر باشد، $D_{f \circ g}$ کدام است؟
 (۱) $[-1, +\infty)$ (۲) $(-\infty, -1]$ (۳) $[0, +\infty)$ (۴) \emptyset

- ۶-۹۶ اگر نمودار تابع f به صورت شکل زیر باشد، دامنه‌ی تابع $f \circ f$ شامل چند عدد صحیح خواهد بود؟
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

- ۷-۹۷ در کدام محدوده از دامنه‌ی تابع $f(x) = 1 - \sqrt{x+1}$ ، تابع $f \circ f$ قابل تعریف است؟
 (۱) $x \geq -1$ (۲) $x \geq 1$ (۳) $x \leq 3$ (۴) $-1 \leq x \leq 3$ (ریاضی ۳ - صفحه‌ی ۱۴ - مکمل مثال ۲) (آزمون کانون - ۱۷ آذر ۹۶)
- ۸-۹۸ اگر $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ و $g(x) = \sqrt{2x+4}$ باشند، آنگاه دامنه‌ی تابع $(g \circ f)(x)$ کدام است؟
 (۱) $[-1, 0)$ (۲) $(-2, 2]$ (۳) $[-1, 1]$ (۴) $[0, 1]$ (ریاضی ۳ - صفحه‌ی ۲۲ - مشابه تمرین ۱-ب) (آزمون کانون - ۲۳ بهمن ۹۴)
- ۹-۹۹ اگر $g(x) = \sqrt{4-x^2}$ و $f(x) = x + \frac{1}{x}$ باشند، دامنه‌ی تابع $g \circ f$ کدام است؟
 (۱) $\{1, -1\}$ (۲) $\{1, 0, -1\}$ (۳) $[2, +\infty)$ (۴) $(-\infty, -2]$ (ریاضی ۳ - صفحه‌ی ۲۲ - مکمل تمرین ۱-ب)
- ۱۰-۱۰۰ اگر $f(x) = \sqrt{x+|x+2|}$ ، دامنه‌ی تابع $f(-x)$ کدام است؟
 (۱) $x \leq -1$ (۲) $x \geq -1$ (۳) $x \leq 1$ (۴) $x \geq 1$ (ریاضی ۳ - صفحه‌ی ۲۲ - مکمل تمرین ۱) (سراسری تجربی خارج از کشور - ۹۲)

نمودار تابع $kf(x)$

۳. تبدیل نمودار توابع

صفحه‌های ۱۵ تا ۲۳ ریاضی ۳

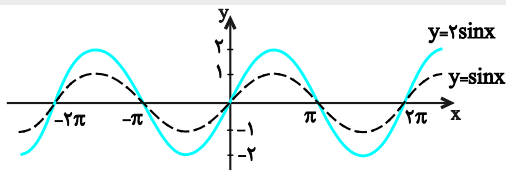
نمودار تابع $kf(x)$

نمودار تابع $kf(x)$ فرض کنید نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = f(x)$ در دسترس است. برای رسم نمودار تابع $y = kf(x)$ کافی است عرض هر نقطه‌ی تابع f را k برابر کنیم. به عبارت دیگر اگر نقطه‌ی $A(a, b)$ روی تابع f باشد، نقطه‌ی $A'(a, kb)$ روی تابع $kf(x)$ است.

$y = kf(x), k > 1$	$y = kf(x), 0 < k < 1$
	
اگر $k > 1$ باشد، تابع f با ضریب k در راستای محور y ها منبسط (کشیده‌تر) می‌شود.	اگر $0 < k < 1$ باشد، تابع f با ضریب k در راستای محور y ها منقبض (فشرده‌تر) می‌شود.

نکته‌ی (۱): دامنه‌ی تابع‌های $y = kf(x)$ و $y = f(x)$ یکسان است. برای محاسبه‌ی برد تابع $y = kf(x)$ کافی است برد f را در عدد k ضرب کنیم. به عبارت دیگر اگر برد تابع f بازه‌ی $[a, b]$ باشد، آنگاه برد تابع kf بازه‌ی $[ka, kb]$ است. ($k > 0$)

نکته‌ی (۲): محل‌های تلاقی (صفرهای تابع) دو تابع f و kf با محور x ها یکسان است.

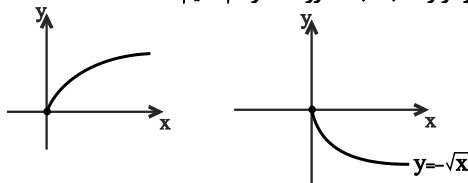


مثال: نمودار تابع $y = 2\sin x$ را به کمک نمودار تابع $y = \sin x$ رسم کنید.
 حل: برای رسم تابع $y = 2\sin x$ به کمک $y = \sin x$ کافی است عرض هر نقطه از آن را ۲ برابر کنیم. در این صورت حداکثر تابع $y = 2\sin x$ برابر ۲ و حداقل آن -۲ است.

رسم نمودار تابع $y = -f(x)$: فرض کنید نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = f(x)$ در دسترس باشد، برای رسم نمودار تابع $y = -f(x)$ کافی است قرینه‌ی نمودار تابع $y = f(x)$ را نسبت به محور x ها رسم کنیم.

مثال: با توجه به نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = \sqrt{x}$ ، نمودار تابع $y = -\sqrt{x}$ را رسم کرده، دامنه و برد آن را بیابید.

حل: نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ به شکل زیر است، برای رسم $y = -\sqrt{x}$ کافی است قرینه‌ی نمودار را نسبت به محور x ها رسم کنیم:



$D_y = [0, +\infty)$

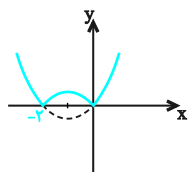
$R_y = (-\infty, 0]$

مثال: چگونه می‌توان با استفاده از نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x^2$ ، نمودار تابع با ضابطه‌ی $g(x) = 1 - 2(x - 3)^2$ را رسم نمود؟

حل: ابتدا تابع $f(x) = x^2$ را سه واحد به راست انتقال می‌دهیم تا $y = (x - 3)^2$ حاصل شود، سپس آن را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم تا

$y = -(x - 3)^2$ به دست آید و با ضریب ۲ آن را در راستای محور y ها (عمودی) می‌کشیم و در نهایت یک واحد به بالا انتقال می‌دهیم.

رسم نمودار تابع $y = |f(x)|$: فرض کنید نمودار تابع $y = f(x)$ در اختیار باشد، برای رسم نمودار تابع $y = |f(x)|$ کافی است قسمت‌هایی از نمودار که پایین محور x هاست را نسبت به محور x ها، قرینه کنیم و سپس قسمت پایین محور x ها را حذف کنیم.



مثال: نمودار تابع $y = |x^2 + 2x|$ را رسم کنید.

حل: ابتدا نمودار تابع $y = x^2 + 2x$ را رسم نموده و سپس قسمت‌هایی از نمودار که پایین محور x هاست را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم.

سؤال

صفحه‌های ۱۵ تا ۱۷ ریاضی ۳

تیپ ۹

نمودار تابع $kf(x)$

۱-۱۰ اگر نقطه‌ی $A(-4, 2)$ بر روی تابع $y = f(x)$ باشد و تبدیل یافته‌ی این نقطه بر روی تابع $g(x) = af(x)$ نقطه‌ی $A'(-4, -4)$ باشد، آنگاه a کدام است؟

$-\frac{1}{2}$ (۴)

$\frac{1}{2}$ (۳)

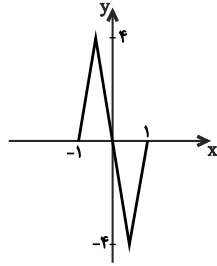
-۲ (۲)

۲ (۱)

(ریاضی ۳- صفحه‌ی ۱۵- مرتبط با یادآوری)

۱۰۲- اگر نمودار تابع $y = 2f(x-1)$ به شکل زیر باشد، آنگاه برد تابع $g(x) = \frac{-2}{3}f(x)$ شامل چند عدد صحیح است؟

(ریاضی ۳- صفحه ۱۵- مکمل مثال)



- (۱) یک
- (۲) دو
- (۳) سه
- (۴) چهار

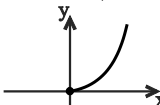
۱۰۳- برای رسم نمودار تابع $y = -2f(x)$ از روی تابع $y = f(x)$ کافی است ابتدا نمودار تابع f را نسبت به محور قرینه کرده و سپس با ضریب در راستای محور y ها منبسط کنیم.

(۴) y ها - $\frac{1}{2}$

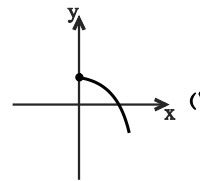
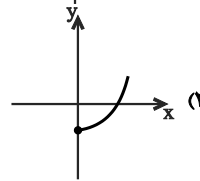
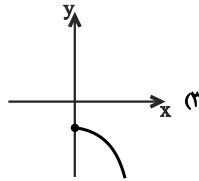
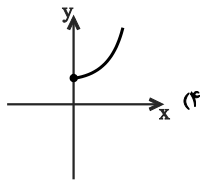
(۳) y ها - ۲

(۲) x ها - $\frac{1}{2}$

(۱) x ها - ۲

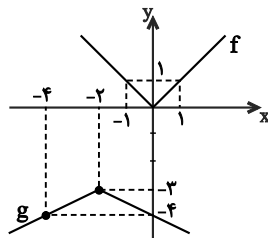
۱۰۴- اگر نمودار تابع $y = 1 - f(x)$ به شکل  باشد، نمودار تابع $y = f(x)$ به کدام شکل زیر است؟

(ریاضی ۳- صفحه ۱۵- مکمل مثال)



(ریاضی ۳- صفحه ۱۶- مکمل کار در کلاس ۱)

۱۰۵- در شکل زیر، نمودار g از روی f ساخته می‌شود. $g(x)$ برابر کدام است؟



(۱) $-2f(x+2) - 3$

(۲) $\frac{1}{2}f(x+2) - 3$

(۳) $2f(x+2) - 3$

(۴) $-\frac{1}{2}f(x+2) - 3$

۱۰۶- فرض کنید $f(x) = |x|$. تابع g از انتقال یک واحد f به راست و سپس انعکاس نمودار حاصل نسبت به محور x ها و در انتها انتقال یک واحد به بالای نمودار حاصل در راستای محور y ها به دست می‌آید. در چه بازه‌ای نمودار دو تابع f و g بر هم منطبق‌اند؟

(ریاضی ۳- صفحه ۱۶- مکمل کار در کلاس ۱)

(۴) \mathbb{R}

(۳) $(-\infty, 0]$

(۲) $[1, +\infty)$

(۱) $[0, 1]$

۱۰۷- اگر $f(x) = \sqrt{x}$ باشد، آنگاه نمودار دو تابع $y = f(x-2) - 2$ و $y = 3 - f(x)$ ، یکدیگر را در کدام بازه‌ی زیر قطع می‌کنند؟

(ریاضی ۳- صفحه ۱۶- مرتبط با کار در کلاس ۱)

(۴) $(9, +\infty)$

(۳) $(6, 9)$

(۲) $(2, 6)$

(۱) $(0, 6)$

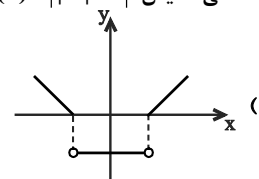
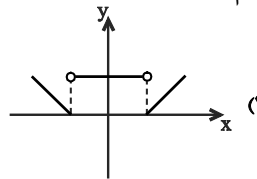
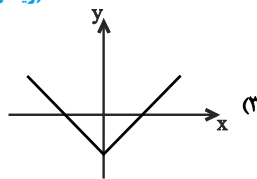
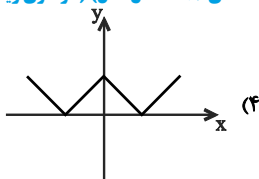
صفحه ۱۷ ریاضی ۳

تیپ ۱۰

نمودار تابع $y = |f(x)|$

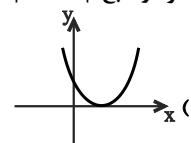
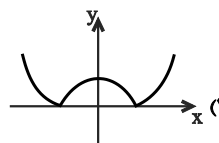
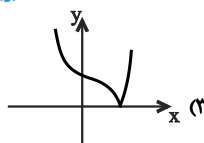
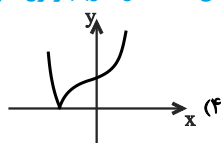
(ریاضی ۳- صفحه ۱۷- مکمل مثال) (سراسری ریاضی - ۶۷)

۱۰۸- منحنی نمایش $f(x) = ||x| - 2|$ کدام است؟



(ریاضی ۳- صفحه ۱۷- مکمل مثال) (آزمون کانون - ۵ آذر ۹۵)

۱۰۹- نمودار تابع $y = |x^2 - 1|$ کدام است؟



(ریاضی ۳- صفحه ۱۷- مکمل مثال) (آزمون کانون با تغییر - ۱۹ آذر ۹۵)

۱۱۰- خط به معادله‌ی $y = 2x$ نمودار تابع $y = |x^2 - 2|$ را در چند نقطه قطع می‌کند؟

(۴) ۴

(۳) صفر

(۲) ۲

(۱) ۱

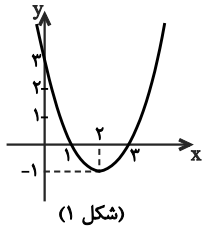
نمودار تابع $f(kx)$

۳. تبدیل نمودار توابع

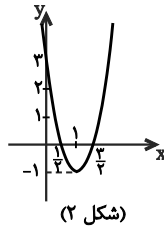
صفحه‌های ۲۳ تا ۲۳ ریاضی ۳

نمودار تابع $f(kx)$

نمودار تابع $f(kx)$ ◀ تابع با ضابطه‌ی $f(x) = (x-1)(x-3)$ را در نظر بگیرید. محل‌های تلاقی این تابع با محور x ها دو نقطه به طول‌های ۱ و ۳ هستند و نقطه‌ی می‌نیم آن به طول $x_S = \frac{1+3}{2} = 2$ و به عرض -1 است، بنابراین رأس آن $S(2, -1)$ و نمودار این تابع به شکل (۱) است. حال تابع با ضابطه‌ی $y = f(2x)$ را در نظر بگیرید. داریم:



(شکل ۱)



(شکل ۲)

$$y = f(2x) = (2x-1)(2x-3)$$

محل‌های تلاقی این تابع با محور x ها نقاط به طول‌های $\frac{1}{2}$ و $\frac{3}{2}$ است، هم‌چنین طول رأس آن $x_{S'} = 1$ و رأس آن به مختصات $S'(1, -1)$ است و نمودار آن به شکل (۲) است.

با مقایسه‌ی دو نمودار دیده می‌شود که هر نقطه‌ی $A(x_0, y_0)$ روی تابع $f(x)$ ، به نقطه‌ی $A'(\frac{x_0}{k}, y_0)$ روی تابع $f(kx)$ تبدیل می‌شود. فرض کنید نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = f(x)$ در اختیار باشد. برای رسم نمودار تابع $y = f(kx)$ ، کافی است طول هر نقطه‌ی تابع f را بر k تقسیم کنیم، به عبارت دیگر اگر نقطه‌ی $A(a, b)$ روی تابع f باشد، نقطه‌ی $A'(\frac{a}{k}, b)$ روی تابع $f(kx)$ است. در این حالت عرض هر نقطه ثابت می‌ماند.

$y = f(kx), k > 1$	$y = f(kx), 0 < k < 1$
اگر $k > 1$ باشد، تابع f در راستای محور x ها با ضریب $\frac{1}{k}$ منقبض (فشرده‌تر) می‌شود.	اگر $0 < k < 1$ باشد، تابع f در راستای محور x ها با ضریب $\frac{1}{k}$ منبسط (کشیده‌تر) می‌شود.

نکته (۱): برد تابع‌های $y = f(x)$ و $y = f(kx)$ یکسان است. برای محاسبه‌ی دامنه‌ی تابع $y = f(kx)$ کافی است دامنه‌ی f را بر عدد k تقسیم کنیم.

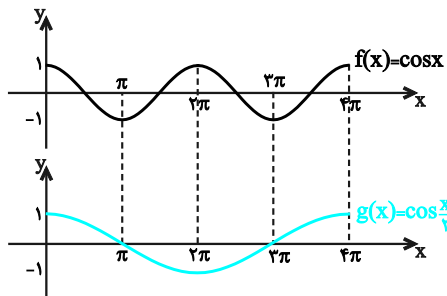
نکته (۲): برای یافتن محل‌های تلاقی (صفرهای تابع) $y = f(kx)$ با محور x ها کافی است محل‌های تلاقی تابع f با محور x ها را بر k تقسیم کنیم.

مثال: اگر دامنه‌ی تابع $y = f(x)$ بازه‌ی $D_f = [-3, 9]$ ، و برد آن $R_f = [2, 4]$ باشد، دامنه و برد تابع $h(x) = f(3x)$ را بیابید.
 حل: برای تعیین دامنه داریم:
 $-3 \leq 3x \leq 9 \Rightarrow -1 \leq x \leq 3 \Rightarrow D_{f(3x)} = [-1, 3]$
 برد دو تابع $y = f(x)$ و $h(x) = f(3x)$ یکسان است:

$$R_{f(x)} = R_{f(3x)} = [2, 4]$$

مثال: نمودار تابع $g(x) = \cos \frac{x}{2}$ را به کمک نمودار تابع $f(x) = \cos x$ در بازه‌ی $[0, 4\pi]$ رسم کنید.

حل: نمودار تابع f در بازه‌ی $[0, 4\pi]$ به شکل زیر است. از آنجایی که $k = \frac{1}{2}$ نمودار تابع g از انبساط نمودار تابع f با ضریب ۲ به دست می‌آید.



محل‌های تلاقی نمودار تابع g با محور x ها از تقسیم محل‌های تلاقی نمودار تابع f بر $\frac{1}{2}$ به دست می‌آید، بنابراین محل‌های تلاقی نمودار تابع g با محور x ها عبارتند از:

$$\frac{\pi}{\frac{1}{2}} = \pi, \quad \frac{3\pi}{\frac{1}{2}} = 3\pi$$

بنابراین نمودار تابع g به صورت روبرو است.

۱ رسم نمودار تابع‌های $y = f(-x)$ و $y = -f(-x)$: فرض کنید نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = f(x)$ در دسترس باشد:

الف- برای رسم نمودار تابع $y = f(-x)$ ، کافی است قرینه‌ی نمودار تابع $y = f(x)$ را نسبت به محور y ها رسم کنیم.

ب- برای رسم نمودار تابع $y = -f(-x)$ ، کافی است قرینه‌ی نمودار تابع $y = f(x)$ را نسبت به مبدأ مختصات رسم کنیم.