

مجموعه، الگو و دنباله



فصل اول

آبی سبز زرد

مجموعه‌های اعداد
بازه‌ها
مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

۱. مجموعه‌های متناهی و نامتناهی
(۳۲ سؤال شناسنامه‌دار)

آبی سبز زرد

مجموعه‌ی مرجع
تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه

۲. متمم یک مجموعه
(۳۴ سؤال شناسنامه‌دار)

آبی سبز زرد

الگو
الگوی خطی
الگوهای غیر خطی
دنباله

۳. الگو و دنباله
(۱۶ سؤال شناسنامه‌دار)

آبی سبز زرد

دنباله‌ی حسابی
دنباله‌ی هندسی

۴. دنباله‌های حسابی و هندسی
(۳۶ سؤال شناسنامه‌دار)

با درخت دانش، گام به گام پیشرفت خود را ارزیابی کنید.

گام اول: میزان تسلط خود را با رنگ مشخص کنید.
آبی: خیلی خوب، مسلط هستم
سبز: خوب، تسلط نسبی دارم
زرد: مسلط نیستم.

گام‌های بعدی: اگر در گام اول دانش خود را در حد رنگ زرد ارزیابی کردید اما در نوبت‌های بعدی پیشرفت کردید، می‌توانید خانه‌های سبز یا آبی را رنگ کنید. هرگاه به رنگ‌ها نگاه کنید متوجه می‌شوید در کدام قسمت‌ها نیاز به تمرین بیشتر دارید.

مجموعه، الگو و دنباله

۱۱۸ سؤال شناسنامه‌دار، شامل:
۵۵ سؤال مکمل و مرتبط با کار در کلاس‌ها
۳۶ سؤال مکمل و مرتبط با تمرین‌ها
۱۳ سؤال مکمل و مرتبط با فعالیت‌ها
۱۱ سؤال از متن درس
۳ سؤال مکمل و مرتبط با مثال‌ها

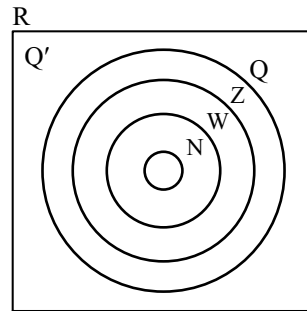
۱. مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

مجموعه‌های اعداد

مؤلف: فرهاد حامی

در سال‌های گذشته، با تعدادی از مجموعه‌های اعداد آشنا شدید. به مجموعه‌های زیر توجه کنید.

- مجموعه‌ی اعداد طبیعی: $N = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$
- مجموعه‌ی اعداد حسابی: $W = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
- مجموعه‌ی اعداد صحیح: $Z = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
- مجموعه‌ی اعداد گویا: $Q = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in Z, b \neq 0 \right\}$
- مجموعه‌ی تمام اعداد حقیقی که گویا نیستند: $Q' =$ مجموعه‌ی اعداد گنگ
- $R = Q \cup Q'$ مجموعه‌ی اعداد حقیقی



$N \subset W \subset Z \subset Q \subset R$ (C: به معنی زیرمجموعه بودن)

تذکر: با توجه به شکل بالا دیده می‌شود که:

تذکر: نماد \in ، به معنی عضویت در مجموعه و نماد \notin ، به معنی عدم عضویت در مجموعه است.

مثال: $2 \in N, \sqrt{2} \in Q', \frac{1}{4} \in Q, 0.222\dots \in Q, 2 + \sqrt{2} \in R, \frac{1}{4} \notin Z, \sqrt{2} \notin Q, -7 \notin N, \pi \notin Q, 0.2020020002000\dots \notin Q$

تذکر: اگر A و B دو مجموعه باشند و $A \subset B$ ، آنگاه $A \cup B = B$ و $A \cap B = A$.

مثال: در مجموعه‌ی اعداد $Z \cap Q = Z$ و $N \cap W = N$ ، همچنین $Z \cup Q = Q$ و $N \cup W = W$.

تذکر: اگر A و B دو مجموعه باشند، $A - B$ مجموعه‌ای است که اعضای آن شامل همه‌ی عضوهای A است که متعلق به مجموعه‌ی B نباشند.

مثال: $W - N = \{0, 1, 2, \dots\} - \{1, 2, 3, \dots\} = \{0\}$

تذکر: اگر A و B دو مجموعه و $A \subset B$ باشد، آنگاه $A - B = \emptyset$.

مثال: در مجموعه‌ی اعداد از آنجایی که $N \subset W$ ، در نتیجه $N - W = \emptyset$.

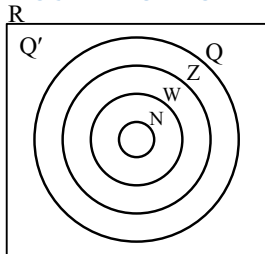
(صفحه‌ی ۲ - مرتبط با پاراگراف ۲)

۱- با علامت درستی و با علامت نادرستی هر یک از عبارتهای زیر را مشخص کنید.

- الف) $N \subset Q$
- ب) $Z \in R$
- پ) $W \subset Q \subset Q'$
- ت) $Q \in R$
- ث) $N \not\subset W$
- ج) $Z \in Q$

(صفحه‌ی ۲ - کار در کلاس - مکمل و مشابه تمرین ۱، قسمت ب)

۲- هر یک از اعداد داده شده را در محل مناسب در شکل زیر قرار دهید.



- الف) $\frac{-4}{3}$
- ب) ۰
- پ) $\sqrt{5}$
- ت) $1 + \sqrt{3}$
- ث) ۵
- ج) $0.110111011110\dots$
- چ) $0.7777\dots$

۳- با علامت درستی و با علامت نادرستی هر یک از عبارتهای زیر را مشخص کنید. (صفحه‌ی ۲ - کار در کلاس - مکمل و مرتبط با تمرین ۱، قسمت ب)

- الف) $\frac{7}{3} \in (Q \cup Q')$
- ب) $\sqrt{5} \notin (Z \cup Q')$
- پ) $-\frac{3}{5} \in (N \cup R)$
- ت) $2 + \sqrt{3} \subset (Q \cap R)$

۴- با علامت درستی و با علامت نادرستی هر یک از عبارتهای زیر را مشخص کنید.

(صفحه‌ی ۲ - کار در کلاس - مکمل و مرتبط با قسمت‌های الف و ب)

- الف) $N \cap W = N$
- ب) $W - N = \{0\}$
- پ) $N - W = \{0\}$
- ت) $R - Q = Q'$
- ث) $W - (W - N) = \{0\}$
- ج) $(Q \cap W) \subset Z$

(صفحه‌ی ۲ - کار در کلاس - مکمل و مرتبط با تمرین ۱، قسمت الف)

۵- چند تا از مجموعه‌های زیر، یک مجموعه‌ی تهی را نمایش می‌دهد؟

- الف) $Q - R$
- ب) $W \cap (Z - N)$
- پ) $Z - (R - Q')$

(صفحه‌ی ۲ - کار در کلاس - مکمل و مرتبط با تمرین ۱، قسمت ت و ث)

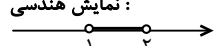
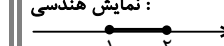
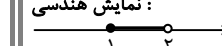
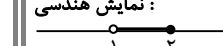
۶- طرف دوم هر یک از تساوی‌های زیر را بنویسید.

- الف) $N \cap (Q - Z) =$
- ب) $(W \cap Z) - \{0\} =$
- پ) $N - Q =$

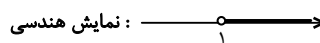
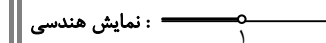
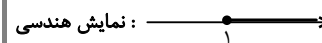
بازهها

۱. مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

در بخش قبل با زیرمجموعه‌های مهم مجموعه‌ی اعداد حقیقی (\mathbb{R}) آشنا شدید. در این بخش با نوع دیگری از زیرمجموعه‌های اعداد حقیقی بنام **بازه** یا **فاصله** آشنا می‌شوید. وقتی بخواهیم کلیه‌ی اعداد حقیقی بین دو عدد را نمایش دهیم از نماد **بازه** استفاده می‌کنیم. اگر a و b دو عدد حقیقی و $a < b$ باشد، آنگاه مجموعه‌ی اعداد حقیقی بین a و b را با نماد (a, b) نمایش می‌دهیم و آن را **بازه باز** a و b می‌نامیم. بازه‌هایی که شامل دو نقطه‌ی انتهایی هستند، **بسته‌اند** و با نماد $[a, b]$ نمایش داده می‌شوند، همچنین بازه‌هایی که فقط شامل یک نقطه‌ی انتهایی هستند **نیم‌باز** هستند و با نمادهای $[a, b)$ یا $(a, b]$ نمایش داده می‌شوند. به مثال‌های زیر در مورد بازه‌ها و نمایش‌های مختلف آن توجه کنید.

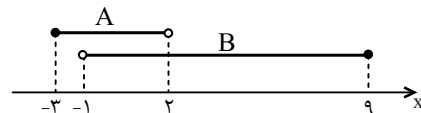
<p>(۱) $(1, 2)$ باز : نوع بازه نمایش مجموعه‌ای $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2\}$ نمایش هندسی</p> 	<p>(۲) $[1, 2]$ بسته : نوع بازه نمایش مجموعه‌ای $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 2\}$ نمایش هندسی</p> 	<p>(۳) $(1, 2]$ نیم‌باز : نوع بازه نمایش مجموعه‌ای $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 2\}$ نمایش هندسی</p> 	<p>(۴) $[1, 2)$ نیم‌باز : نوع بازه نمایش مجموعه‌ای $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < 2\}$ نمایش هندسی</p> 
--	---	---	--

تذکر برای نمایش مجموعه‌ی $\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$ در قالب نماد بازه، از نماد $(a, +\infty)$ و برای نمایش مجموعه‌ی $\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$ در قالب نماد بازه، از نماد $(-\infty, a)$ استفاده می‌کنیم. توجه کنید که $+\infty$ و $-\infty$ اعداد حقیقی نیستند. به مثال‌های زیر توجه کنید.

<p>(۱) $(1, +\infty)$ باز : نوع بازه نمایش مجموعه‌ای $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$ نمایش هندسی</p> 	<p>(۲) $(-\infty, 1)$ باز : نوع بازه نمایش مجموعه‌ای $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$ نمایش هندسی</p> 	<p>(۳) $[1, +\infty)$ نیم‌باز : نوع بازه نمایش مجموعه‌ای $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$ نمایش هندسی</p> 
---	---	--

تذکر مجموعه‌ی اعداد حقیقی را با نماد بازه‌ای به صورت $(-\infty, +\infty)$ نمایش می‌دهیم. اعمال بر روی بازه‌ها: در محاسبات اجتماع، اشتراک و تفاضل دو یا چند بازه، به طور معمول از نمایش هندسی استفاده می‌کنیم. به مثال زیر توجه کنید.

■ مثال: اگر $A = [-3, 2)$ و $B = (-1, 9]$ ، آنگاه مجموعه‌های $A \cap B$ ، $A \cup B$ و $A - B$ را به دست آورید. **حل:** ابتدا نمایش هندسی هر دو بازه را روی یک محور رسم می‌کنیم.



از روی شکل دیده می‌شود که:

$$A \cap B = (-1, 2) \quad \text{و} \quad A \cup B = [-3, 9] \quad \text{و} \quad A - B = [-3, -1)$$

۷- هر یک از بازه‌های زیر با یکی از مجموعه‌ها برابر است. مطابق نمونه‌ی حل شده، آن‌ها را مشخص کنید.

(صفحه‌ی ۳- متن درس - مرتبط با پاراگراف ۲)

الف) $[-2, 3]$	$A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 4\}$
ب) $(-1, 4]$	$B = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 3\}$
پ) $(-1, 4)$	$C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$
ت) $(2, +\infty)$	$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1\}$
ث) $(-\infty, 1]$	$E = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq 4\}$
ج) $[-1, 4)$	$F = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$
چ) $[2, +\infty)$	$G = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 4\}$

(صفحه‌ی ۳- متن درس - مرتبط با پاراگراف ۲)

۸- هر یک از بازه‌های زیر را به صورت مجموعه بنویسید.

الف) $(-1, +\infty) =$	ب) $[\sqrt{5}, 3) =$
پ) $[-5, 1] =$	ت) $(-\infty, 3] =$

۹- هر یک از مجموعه‌های زیر را به صورت بازه بنویسید.

(صفحه‌ی ۳- متن درس - مرتبط با پاراگراف ۲)

الف) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1/5\} =$

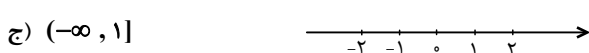
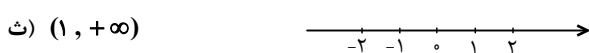
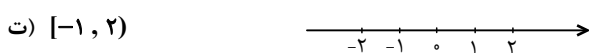
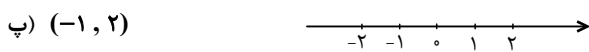
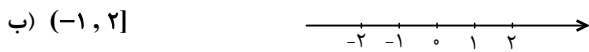
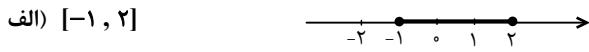
ب) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > \sqrt{2}\} =$

پ) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -3\} =$

ت) $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x \leq \sqrt{5}\} =$

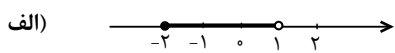
۱۰- هر بازه را همانند نمونه‌ی حل شده، روی محور مشخص کنید.

(صفحه‌ی ۳- متن درس - مرتبط با پاراگراف ۲)

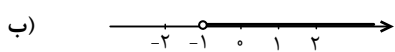


۱۱- بازه‌ی مربوط به هر شکل را با نماد بازه، همانند نمونه‌ی حل شده بنویسید و وصل کنید.

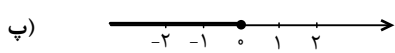
(صفحه‌ی ۳- متن درس - مرتبط با پاراگراف ۲)



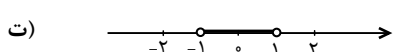
A = (.....,)



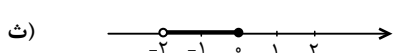
B = (.....,)



C = [-2, 1)



D = (.....,]



E = (.....,]

۱۲- با فرض $a, b \in \mathbb{R}$ و $a < b$ جدول را مطابق نمونه‌ی حل شده کامل کنید.

(صفحه‌های ۳ و ۴- مکمل و مشابه فعالیت)

نوع بازه	نمایش بازه‌ای	نمایش مجموعه‌ای	نمایش هندسی
بسته	$[a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	
	$[a, b)$		
		$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$	
			
	$(-\infty, a)$		

۱۳- کدام یک از مجموعه‌های زیر، یک بازه را نمایش می‌دهد؟

(صفحه‌ی ۳- متن درس - مرتبط با پاراگراف ۲)

الف) $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid 1 \leq x \leq 2\}$

ب) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 2\}$

۱۴- هر یک از مجموعه‌های زیر را به صورت یک بازه بنویسید.

(صفحه ۳- متن درس - مرتبط با پاراگراف ۲)

الف) $\{1, 2\} - \{1\} =$

ب) $\{1\} \cup \{2\} =$

پ) $\{2\} - \{1, 2\} =$

ت) $\{2\} \cup \{1, 2\} =$

ث) $\{2\} \cap \{1, 2\} =$

ج) $\{2\} \cap \{1, 2\} =$

۱۵- با علامت درستی و با علامت نادرستی هر یک از عبارتهای زیر را مشخص کنید.

(صفحه ۵- کار در کلاس - مکمل و مرتبط با تمرین ۱)

الف) $a \in (a, b]$

ب) $b \in (a, b]$

پ) $[a, b) \subset (a, b]$

ت) $[a, b) = (a, b]$

ث) $\{-1, 2\} \subset [-2, 1]$

ج) $\emptyset \subset (a, b)$

۱۶- هر یک از مجموعه‌های زیر را به صورت یک بازه بنویسید.

(صفحه ۴- متن درس - مرتبط با پاراگراف ۲)

الف) = مجموعه‌ی اعداد حقیقی نامنفی (الف)

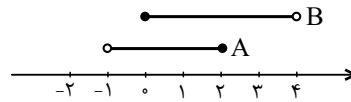
ب) = مجموعه‌ی اعداد حقیقی منفی (ب)

پ) = مجموعه‌ی اعداد حقیقی مثبت (پ)

۱۷- بازه‌های $A = (-1, 2]$ و $B = [0, 4)$ در شکل زیر رسم شده‌اند. مجموعه‌های زیر را به صورت بازه نمایش دهید.

(صفحه ۵- کار در کلاس - مکمل و مشابه تمرین ۳)

الف) $A \cap B =$



ب) $A \cup B =$

پ) $A - B =$

ت) $B - A =$

۱۸- بازه‌های $A = [-2, 3)$ و $B = (-1, 5]$ مفروض‌اند. به جای مربع از نمادهای اجتماع، اشتراک یا تفاضل استفاده کنید تا تساوی درست حاصل شود.

(صفحه ۵- کار در کلاس - نتیجه‌گیری از تمرین ۳)

الف) $A \cap B = (-1, 3)$

ب) $A \cap B = [-2, 5]$

پ) $A \cap B = [-2, -1]$

۱۹- اگر $A = [1, +\infty)$ ، $B = (-\infty, 2]$ و $C = (-1, 3)$ ، آنگاه مجموعه‌ی $(A \cap B) - C$ را بیابید.

(صفحه ۵- کار در کلاس - نتیجه‌گیری از تمرین ۳)

۱. مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

تعریف: اگر تعداد اعضای یک مجموعه محدود باشد و عمل شمارش آنها سرانجام به انتها برسد، گوئیم آن مجموعه متناهی است. در غیر این صورت آن مجموعه را نامتناهی می‌نامیم. به عبارت دیگر تعداد اعضای یک مجموعه‌ی متناهی یک عدد حسابی است. مجموعه‌ی تهی متناهی محسوب می‌شود و تعداد اعضای آن صفر است.

به مثال‌هایی از مجموعه‌های متناهی و نامتناهی در زیر توجه کنید.

مجموعه‌های متناهی	مجموعه‌های نامتناهی
مجموعه‌ی $\{a, b\}$ (۱)	مجموعه‌ی اعداد طبیعی (۱)
مجموعه‌ی اعداد طبیعی دو رقمی (۲)	اعداد گویای بین $\frac{1}{2}$ و $\frac{3}{5}$ (۲)
مجموعه‌ی حروف الفبای انگلیسی (۳)	بازه‌ی $(-1, 1)$ (۳)
مجموعه‌ی اتم‌های موجود در جو زمین (۴)	اعداد صحیح کوچکتر از -5 (۴)

تذکر ▶ ملاک متناهی بودن یک مجموعه، بزرگی یا کوچکی آن مجموعه نیست، نکته‌ی اساسی آن است که اگر به اندازه‌ی کافی وقت صرف کنیم، بتوانیم کل اعضای آن مجموعه را شمارش کنیم.

به عنوان مثال، اگر امکان شمارش مورچه‌های کره‌ی زمین را داشته باشیم، پس از صرف سال‌ها وقت، حتماً تمام مورچه‌ها را می‌توانیم بشماریم، پس مجموعه‌ی مورچه‌های کره‌ی زمین مجموعه‌ای متناهی است.

تذکر ▶ اگر مجموعه‌ی A ، یک زیرمجموعه‌ی نامتناهی داشته باشد، آنگاه A ، مجموعه‌ای نامتناهی است.

اگر مجموعه‌ی A ، مجموعه‌ای متناهی باشد، هر زیرمجموعه از آن هم متناهی است.

■ **مثال:** به عنوان مثال اگر مجموعه‌ی $\{x \in \mathbb{Z} \mid x < -2\}$ زیرمجموعه‌ی مجموعه‌ی A باشد، آنگاه A ، مجموعه‌ای نامتناهی است.

■ **مثال:** اگر $B \subset \{x \in \mathbb{W} \mid 1 < x < 158\}$ باشد، آنگاه B ، مجموعه‌ای متناهی است.

۲۰- مجموعه‌ای که تعداد اعضای آن را بتوان با یک عدد بیان کرد، مجموعه‌ای متناهی نامیده می‌شود.

(صفحه‌ی ۵- مکمل و مشابه فعالیت)

(صفحه‌ی ۶- کار در کلاس- مکمل و مشابه تمرین ۱)

۲۱- متناهی یا نامتناهی بودن هر یک از مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.

.....متناهی

الف) مجموعه‌ی اعداد اول زوج یک رقمی

ب) مجموعه‌ی تمام خطوط موازی با خط $y = x + 1$.

پ) مجموعه‌ی مگس‌های کره‌ی زمین

ت) مجموعه‌ی اعداد صحیح مثبت

ث) مجموعه‌ی خطوط مماس بر یک دایره

ج) مجموعه‌ی اعداد گویای بین $0/0001$ و $0/001$

چ) اعداد متعلق به بازه‌ی $(0/2, 0/3)$

ح) مجموعه‌ی اعداد طبیعی که مضرب ۴ باشند ولی مضرب ۲ نباشند.

خ) مجموعه‌ی اعداد حسابی ۵۰ رقمی

د) مجموعه‌ی اعداد صحیح مثبتی که در تقسیم بر ۳ باقی‌مانده‌ی ۲ دارند.

ذ) مجموعه‌ی کوچکترین عدد صحیح بزرگتر از -1

ر) مجموعه‌ی اعداد طبیعی بین ۱۰ و ۱۱

ز) مجموعه‌ی اعداد گویایی که مربعشان با خودشان برابر است.

۲۲- متناهی یا نامتناهی بودن هر یک از مجموعه‌های زیر را با مشخص کردن اعضای آنها (در صورت امکان)، مشخص کنید.

(صفحه‌ی ۷- نتیجه‌گیری از فعالیت)

الف) $W - N$

ب) $Z - N$

پ) $W \cap \{1, 0\}$

ت) $R - Q$

N-Q (ث)

Q-Z (ج)

(صفحه ۶- کار در کلاس- مکمل و مشابه تمرین های ۲ و ۳)

۲۳- سه مجموعه‌ی متناهی و دو مجموعه‌ی نامتناهی نام ببرید.

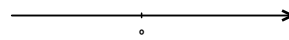
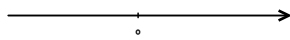
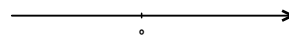
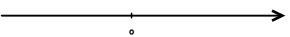
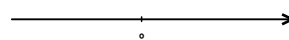
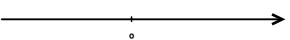
(صفحه ۷- مکمل و مرتبط با تمرین ۲)

۲۴- مجموعه‌های زیر را با نوشتن اعضا نمایش دهید و متناهی یا نامتناهی بودن آنها را مشخص کنید.

(الف) $\{3k-1 \mid k \in \mathbb{Z}, -1 \leq k < 7\}$ (ب) $\{x \mid x \in \mathbb{N}, x > 1\}$ (پ) $\{n^2 \mid n \in \mathbb{N}, -1 < n < 1\}$ (ت) $\{\sqrt{x} \mid x \in \mathbb{W}\}$

(صفحه ۷- مکمل و مشابه تمرین ۴)

۲۵- حاصل هر یک از مجموعه‌های زیر را با رسم بازه‌های آنها روی محور به دست آورید.

(الف) $(-2, 1) \cup [-1, 3] =$ (ب) $(-\infty, 4] \cap (1, 6] =$ (پ) $[4, 6) \cup [1, +\infty) =$ (ت) $(-\infty, 1) \cap [-1, 1] =$ (ث) $(-5, 2] \cap (2, 7) =$ (ج) $(-\infty, 2) \cup (1, +\infty) =$ 

۲۶- هر یک از مجموعه‌های زیر را به صورت اجتماع دو بازه می‌توان نمایش داد. همانند نمونه‌ی حل شده، مجموعه‌ی معادل آنها را بنویسید.

(صفحه ۷- نتیجه‌گیری از تمرین ۵)

(الف) $\mathbb{R} - [a, b] = (-\infty, a) \cup [b, +\infty)$ (ب) $\mathbb{R} - [a, b] =$ (پ) $\mathbb{R} - (a, b) =$ (ت) $\mathbb{R} - (a, b) =$ (ث) $\mathbb{R} - \{a\} =$

(صفحه ۶- کار در کلاس- مکمل و مشابه تمرین های ۳ و ۴)

۲۷- دو زیرمجموعه از مجموعه‌ی اعداد طبیعی مثال بزنید که:

(الف) هر دو نامتناهی و یکی زیرمجموعه‌ی دیگری باشد.

(ب) هر دو متناهی و یکی دقیقاً یک عضو بیشتر از دیگری داشته باشد.

(پ) هر دو نامتناهی، اشتراک آنها تهی و اجتماع آنها برابر مجموعه‌ی اعداد طبیعی باشد.

۲۸- اگر A و B دو مجموعه $A \subset B$ باشد، آنگاه عبارت‌های زیر را با قراردادن کلمه‌ی (متناهی) یا (نامتناهی) به یک عبارت صحیح تبدیل کنید.(الف) اگر A باشد، آنگاه B نیز است.(ب) اگر B باشد، آنگاه A نیز است.

۲۹- فرض کنید A و B دو زیر مجموعه از مجموعه ی اعداد حقیقی باشند. درستی یا نادرستی هر یک از عبارتهای زیر را با مثال مناسب بررسی کنید.
(صفحه ی ۷- نتیجه گیری از تمرین ۳)

- الف) اگر A و B دو مجموعه ی متناهی باشند، آنگاه $A \cap B$ متناهی است.
□ ب) اگر A و B دو مجموعه ی نامتناهی باشند، آنگاه $A \cap B$ همواره نامتناهی است.
□ پ) اگر حداقل یکی از دو مجموعه ی A و B نامتناهی باشد، آنگاه $A \cap B$ متناهی است.
□ ت) اگر $A \cap B$ مجموعه ای متناهی باشد، آنگاه A و B متناهی اند.

۳۰- فرض کنید A و B دو زیر مجموعه از مجموعه ی اعداد حقیقی باشند. درستی یا نادرستی هر یک از مجموعه های زیر را با مثال مناسب بررسی کنید.
(صفحه ی ۷- نتیجه گیری از تمرین ۳)

- الف) اگر حداقل یکی از دو مجموعه ی A و B نامتناهی باشند، آنگاه $A \cup B$ نامتناهی است.
□ ب) اگر $A \cup B$ متناهی باشد، آنگاه دو مجموعه ی A و B متناهی اند.

۳۱- فرض کنید A و B دو زیر مجموعه از مجموعه ی اعداد حقیقی باشند. درستی یا نادرستی هر یک از مجموعه های زیر را با مثال مناسب بررسی کنید.
(صفحه ی ۷- نتیجه گیری از تمرین ۳)

- الف) اگر $A \cap B$ متناهی باشد، آنگاه $A \cup B$ همواره متناهی است.
□ ب) اگر $A \cup B$ متناهی باشند، آنگاه $A \cap B$ متناهی است.
□ پ) اگر $A \cap B$ نامتناهی باشد، آنگاه $A \cup B$ نیز نامتناهی است.

۳۲- فرض کنید A و B دو زیر مجموعه از مجموعه ی اعداد حقیقی باشند. اگر $A \subset B$ باشد، درستی یا نادرستی هر یک از مجموعه های زیر را با مثال مناسب بررسی کنید.
(صفحه ی ۷- نتیجه گیری از تمرین ۳ و ۶)

- الف) اگر $A \cap B$ متناهی باشد، آنگاه B همواره متناهی است.
□ ب) اگر $B - A$ متناهی باشد، آنگاه A همواره متناهی است.

۲. متمم یک مجموعه

مجموعه مرجع

مجموعه مرجع: در بحث مجموعه‌ها، مجموعه‌ای که کلیه مجموعه‌های مورد بحث، زیرمجموعه‌ی آن باشند را مجموعه مرجع می‌نامیم و با نماد U یا M نمایش می‌دهیم. به مجموعه مرجع، مجموعه اصلی یا عام نیز گفته می‌شود.

U



متمم یک مجموعه: هرگاه U مجموعه مرجع و مجموعه A زیرمجموعه‌ی آن باشد، آنگاه مجموعه $U - A$ را متمم A می‌نامیم و با A' نمایش می‌دهیم. مجموعه A' شامل همه‌ی عضوهای U است که در A نیستند.

$$\text{مجموعه } A' = U - A \text{ مجموعه مرجع } U \text{ متمم مجموعه } A$$

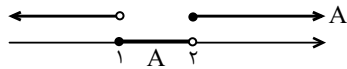
■ مثال: اگر $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ مجموعه مرجع، $A = \{0, 2, 3\}$ و $B = \{4, 5, 6, 7\}$ باشد، آنگاه مجموعه‌های A' و B' را بیابید.

$$A' = U - A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} - \{0, 2, 3\} = \{1, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

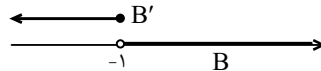
$$B' = U - B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} - \{4, 5, 6, 7\} = \{0, 1, 2, 3, 8\}$$

■ مثال: اگر R مجموعه مرجع، $A = [1, 2)$ و $B = (-1, +\infty)$ باشند، آنگاه مجموعه‌های A' و B' را با نماد بازه نمایش دهید.

$$A' = R - A = R - [1, 2) = (-\infty, 1) \cup [2, +\infty)$$



$$B' = R - (-1, +\infty) = (-\infty, -1]$$



■ مثال: اگر N را مجموعه مرجع در نظر بگیریم، متمم مجموعه‌ی اعداد طبیعی زوج، مجموعه‌ی اعداد طبیعی فرد است. اجتماع مجموعه‌ی اعداد طبیعی زوج و مجموعه‌ی اعداد طبیعی فرد، مجموعه‌ی اعداد طبیعی است. از طرفی اشتراک مجموعه‌ی اعداد طبیعی فرد و مجموعه‌ی اعداد طبیعی زوج، تهی است. بنابراین به نتیجه‌ی زیر می‌رسیم:

$$\text{نتیجه ۱} \quad \text{اگر } U \text{ مجموعه مرجع و } A \subset U \text{ باشد، آنگاه } A \cap A' = \emptyset \text{ و } A \cup A' = U$$

■ مثال: اگر $M = \{a, b, c, d, e, f\}$ مجموعه مرجع، $A = \{b, c\}$ و $B = \{a, c, e\}$ باشند، مجموعه‌های $A' \cap B'$ و $(A \cup B)'$ را بیابید و نتیجه بگیرید.

$$A' = \{a, d, e, f\} \text{ و } B' = \{b, d, f\} \Rightarrow A' \cap B' = \{d, f\}$$

$$A \cup B = \{a, b, c, e\} \Rightarrow (A \cup B)' = M - \{a, b, c, e\} = \{d, f\}$$

$$\text{نتیجه ۲} \quad \text{اگر } U \text{ مجموعه مرجع باشد و } A \text{ و } B \text{ دو زیرمجموعه دلخواه از } U \text{ باشند، آنگاه } (A \cup B)' = A' \cap B' \text{ و } (A \cap B)' = A' \cup B'$$

۳۳- اگر U مجموعه مرجع و A زیرمجموعه‌ای از U باشد، آنگاه مجموعه‌ای شامل همه‌ی عضوهای U که عضو A را متمم A می‌نامند. (صفحه ۸- متن درس - مرتبط با پاراگراف ۳)

۳۴- در جدول زیر، با توجه به مجموعه مرجع داده شده و مجموعه A که زیرمجموعه‌ی آن است، مجموعه متمم A را بیان کنید. (صفحه ۹- کار در کلاس - مکمل و مرتبط با تمرین‌های ۱ و ۲)

A' (متمم مجموعه A)	مجموعه A	مجموعه مرجع (U)
	مجموعه حروف بی‌صدای زبان انگلیسی	مجموعه حروف زبان انگلیسی
	مجموعه اعداد طبیعی زوج	مجموعه اعداد طبیعی
	مجموعه اعداد اول فرد	مجموعه اعداد اول

۳۵- اگر $U = \{1, 2, 3, \dots, 20\}$ مجموعه مرجع فرض شود و $A \subset U$ ، آنگاه در هر یک از مجموعه‌های زیر، متمم A را مشخص کنید. (صفحه ۹- کار در کلاس - مکمل و مرتبط با تمرین ۳)

مجموعه A	مجموعه A'
الف) اعضای آن اعداد فرد باشند.	
ب) اعضای آن بر ۴ بخش پذیر باشند.	
پ) اعضای آن از ۱۰ بزرگتر باشند.	
ت) اعضای آن از ۷ کوچکتر باشند.	
ث) اعضای آن اعداد اول باشند.	

۳۶- اگر U ، مجموعه‌ی مرجع را مجموعه‌ی اعداد صحیح در نظر بگیریم و A مجموعه‌ی اعداد صحیح نامنفی و B مجموعه‌ی اعداد صحیح منفی باشند، آنگاه طرف دوم هر یک از تساوی‌های زیر را بنویسید.

(صفحه‌ی ۹- کار در کلاس - مکمل و مشابه تمرین ۴)

الف) $A \cup A' =$ ب) $A \cap A' =$

پ) $A \cap B' =$ ت) $\emptyset' =$

ث) $U - B =$ ج) $A' \cup B' =$

۳۷- اگر Z را به‌عنوان مجموعه‌ی مرجع در نظر بگیریم، آنگاه هر یک از مجموعه‌های زیر را با نوشتن اعضایشان مشخص کنید.

(صفحه‌ی ۹- کار در کلاس - مکمل و مشابه تمرین ۵)

الف) $N' =$ ب) $(W - N)' =$

۳۸- اگر N را به‌عنوان مجموعه‌ی مرجع در نظر بگیریم، آنگاه متمم هر یک از مجموعه‌های زیر را با نماد ریاضی نمایش دهید.

(صفحه‌ی ۹- کار در کلاس - مکمل و مرتبط با تمرین ۳)

الف) مجموعه‌ی اعداد طبیعی زوج

.....

ب) مجموعه‌ی اعداد طبیعی فرد

.....

پ) مجموعه‌ی اعداد طبیعی مضرب ۵

.....

۳۹- اگر R مجموعه‌ی مرجع باشد، متمم هر یک از مجموعه‌های زیر را به‌صورت بازه نمایش دهید.

(صفحه‌ی ۱۲- مکمل و مشابه تمرین ۱)

الف) $A = [۳, +\infty)$ ب) $B = [-۱, ۴]$

پ) $C = (-\infty, ۲)$ ت) $D = (-\infty, ۰) \cup (۰, +\infty)$

ث) $E = (-۱, ۳)$ ج) $F = (۱, +\infty)$

۴۰- اگر $M = \{۱, ۲, ۳, \dots, n\}$ مجموعه‌ی مرجع باشد، آنگاه متمم هر یک از مجموعه‌های زیر را بیابید. ($n \geq ۱۵$)

(صفحه‌ی ۹- کار در کلاس - مکمل و مشابه تمرین ۳)

الف) $A = \{۵, ۶, ۷, \dots, n-۲\}$

ب) $B = \{۲k-۳ \mid k \in N, ۲ \leq k \leq ۷\}$

۴۱- اگر W را به عنوان مجموعه‌ی مرجع در نظر بگیریم:

الف) مجموعه‌ای نامتناهی مثال بزنید که متمم آن هم نامتناهی باشد.

(صفحه‌ی ۱۲- مکمل و مرتبط با تمرین ۲)

ب) مجموعه‌ای نامتناهی مثال بزنید که متمم آن متناهی باشد.

۴۲- اگر $M = \{1, 2, 3, 4, \dots, 10\}$ مجموعه‌ی مرجع باشد و $A = \{2, 3, 4\}$ و $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ، آنگاه:

(صفحه‌ی ۱۲- کار در کلاس- نتیجه‌گیری از تمرین ۲)

الف) نشان دهید $A \subset B$ است.

ب) A' و B' را بیابید.

پ) نشان دهید $B' \subset A'$ است.

ت) آیا می‌توانیم از $A \subset B$ به‌طور کلی نتیجه بگیریم $B' \subset A'$ است؟ با استفاده از نمودار ون، درستی جواب خود را بررسی کنید.

(صفحه‌ی ۱۲- کار در کلاس- نتیجه‌گیری از تمرین ۲)

۴۳- فرض کنید $U = \{x: x \in \mathbb{N}, x < 9\}$ ، $A = \{x: x \text{ مقسوم‌علیه‌های طبیعی عدد } 6\}$ و $B = \{1, 4, 6\}$. درستی هر یک از تساوی‌های

(صفحه‌ی ۹- کار در کلاس- مکمل و مشابه تمرین ۶)

زیر را بررسی کنید.

الف) $(A')' = A$

ب) $U - B = B'$

پ) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

ت) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

ث) $A - B = A \cap B'$

ج) $(A - B)' = A' \cup B$

۴۴- اگر $U = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ مجموعه‌ی مرجع باشد و مجموعه‌های $A = \{a, c, e, f\}$ ، $B = \{b, d, e\}$ ، $C = \{a, e\}$ و $D = \{a, d, e, g\}$ داده شده باشند، مجموعه‌های زیر را بیابید.

(صفحه‌ی ۹- کار در کلاس- مکمل و مرتبط با تمرین ۶)

الف) $B' =$ ب) $A \cap B' =$

پ) $C' - A =$ ت) $C' \cap B' =$

ث) $(A \cup D)' =$ ج) $(A' - B)' =$

۴۵- اگر $M = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ مجموعه‌ی مرجع باشد و A و B دو زیرمجموعه از آن که A مجموعه‌ی اعداد اول یک رقمی و $B = \{3k - 2 \mid k \in \mathbb{Z}, 1 \leq k \leq 4\}$ ، آنگاه مجموعه‌های زیر را بیابید.

(صفحه‌ی ۹- کار در کلاس- مکمل و مرتبط با تمرین ۶)

الف) $A' =$ ب) $B' =$

پ) $(A \cup B)' =$ ت) $(A - B)' =$

۴۶- $M = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ مجموعه‌ی مرجع است و مجموعه‌های $A = \{1, 3, 5\}$ و $B = \{2, 3, 4, 5\}$ داده شده‌اند. مجموعه‌های زیر را بیابید.

(صفحه‌ی ۹- کار در کلاس- مکمل و مرتبط با تمرین ۶)

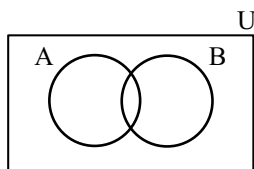
الف) $A \cup (A \cap B)' =$ ب) $(A \cap B') \cup (A \cap B) =$

پ) $(A - B)' \cap (A \cup B)' =$

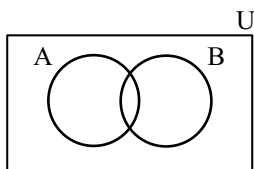
۴۷- در نمودارهای ون زیر، هر یک از مجموعه‌های خواسته شده را هاشور بزینید.

(صفحه‌ی ۹- کار در کلاس- مکمل و مرتبط با تمرین ۶)

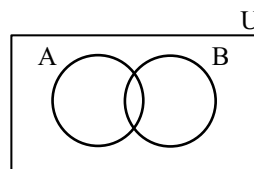
الف) A'



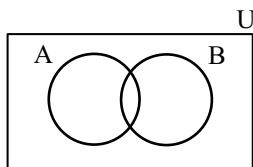
ب) B'



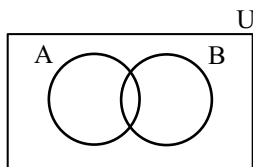
پ) $A' \cup B'$



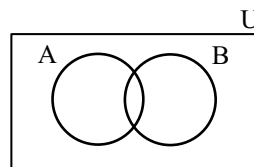
ت) $A \cap B$

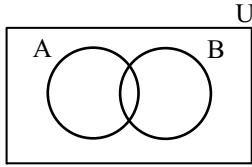


ث) $(A \cap B)'$



ج) $A - B$



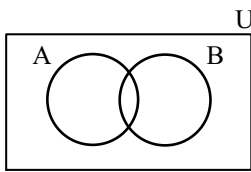
چ) $A \cap B'$ 

۱) از سطح هاشورخورده‌ی شکل‌های (پ) و (ث) چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

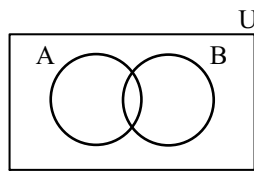
۲) از سطح هاشورخورده‌ی شکل‌های (ج) و (چ) چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

(صفحه‌ی ۹- کار در کلاس- مکمل و مرتبط با تمرین ۶)

۴۸- با هاشور زدن نمودارهای ون در شکل‌های زیر، نشان دهید:



$A' \cup (A - B)$



$(A \cap B)'$

$$A' \cup (A - B) = (A \cap B)'$$

۴۹- اگر N مجموعه‌ی مرجع و $A' = \{x \in N \mid x < 5\}$ و $B' = \{x \in N \mid x > 9\}$ باشند، آنگاه مجموعه‌های زیر را بیابید.

(صفحه‌ی ۹- کار در کلاس- مکمل و مرتبط با تمرین ۶)

الف) $A \cap B =$

ب) $A \cup B =$

پ) $A - B =$

۵۰- اگر A و B دو زیرمجموعه از اعداد حقیقی باشند، درستی یا نادرستی هر یک از جملات زیر را بررسی کنید.

(صفحه‌ی ۱۲- کار در کلاس- نتیجه‌گیری از تمرین ۳)

الف) اگر $A \subset B$ و A' مجموعه‌ای متناهی باشد، آنگاه B نیز همواره مجموعه‌ای متناهی است.

ب) اگر $A \subset B$ و B' مجموعه‌ای نامتناهی باشد، آنگاه A همواره مجموعه‌ای متناهی است.

۲. متمم یک مجموعه

تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه

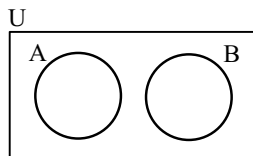
دو مجموعه‌ی جدا از هم: اگر اشتراک دو مجموعه تهی باشد، آنگاه دو مجموعه را جدا از هم یا مجزا می‌نامیم.

■ مثال: دو مجموعه $A = \{۷, ۸\}$ و $B = \{۳, ۴\}$ جدا از هم هستند، زیرا عضو مشترکی ندارند.

■ مثال: مجموعه‌ی اعداد گویا و مجموعه‌ی اعداد گنگ جدا از هم هستند.

تذکر ◀ نمودار ون دو مجموعه‌ی جدا از هم به صورت زیر است. با توجه به نمودار دیده می‌شود که:

$$\begin{array}{ll} (۱) A - B = A & (۲) B - A = B \\ (۳) A \subset B' & (۴) B \subset A' \end{array}$$



نتیجه‌ی ۱ ▶ در دو مجموعه‌ی جدا از هم A و B همواره خواهیم داشت:

$$(A - B) \cap (B - A) = \emptyset$$

زیرا $A - B = A$ و $B - A = B$ و اشتراک A و B تهی است.

■ مثال: اگر $A = \{۶, ۷\}$ و $B = \{۲, ۳, ۴\}$ ، آنگاه $A \cup B$ و تعداد اعضای آن را بیابید.

$$A \cup B = \{۶, ۷\} \cup \{۲, ۳, ۴\} = \{۲, ۳, ۴, ۶, ۷\}$$

◀ حل: A و B جدا از هم‌اند، پس:

پس $n(A \cup B) = ۵$. توجه کنید که $n(A) = ۲$ و $n(B) = ۳$ ، بنابراین در دو مجموعه‌ی جدا از هم خواهیم داشت:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه: اگر A و B دو زیرمجموعه‌ی دلخواه متناهی از مجموعه‌ی مرجع متناهی U و $n(A)$ و $n(B)$ به ترتیب تعداد اعضای مجموعه‌های A و B باشند، آنگاه تعداد اعضای اجتماع دو مجموعه‌ی A و B برابر است با:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

که در آن $n(A \cap B)$ ، تعداد اعضای اشتراک دو مجموعه است.

■ مثال: اگر $n(A) = ۱۰$ ، $n(B) = ۷$ و $n(A \cup B) = ۱۳$ باشند، $n(A \cap B)$ را بیابید.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow ۱۳ = ۱۰ + ۷ - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cap B) = ۴$$

◀ حل:

■ مثال: یک روستا ۴۰۰ کشاورز دارد که ۳۰۰ نفر از آنها گندم یا جو می‌کارند. در صورتی که ۲۱۰ نفر گندم و ۱۴۰ نفر جو بکارند، آنگاه:

(الف) چند نفر هم گندم می‌کارند و هم جو؟

(ب) چند نفر فقط گندم می‌کارند؟

(پ) چند نفر جو نمی‌کارند؟

◀ راه حل اول: استفاده‌ی مستقیم از فرمول اجتماع:

(الف) در این سؤال $n(U) = ۴۰۰$ (مجموعه‌ی کشاورزان روستاست) و A مجموعه‌ی کشاورزانی که گندم می‌کارند، پس $n(A) = ۲۱۰$ و B مجموعه‌ی کشاورزانی

که جو می‌کارند پس $n(B) = ۱۴۰$ ، لذا طبق فرمول اجتماع داریم:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow ۳۰۰ = ۲۱۰ + ۱۴۰ - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cap B) = ۵۰$$

تعداد کشاورزانی که هم گندم می‌کارند و هم جو.

(ب) تعداد کشاورزانی که فقط گندم می‌کارند، برابر است با:

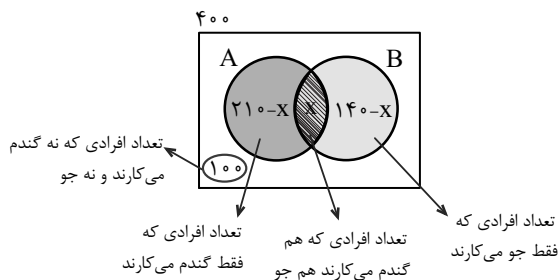
تعداد کشاورزانی که هم گندم می‌کارند و هم جو - تعداد کشاورزی که گندم می‌کارند = تعداد کشاورزانی که فقط گندم می‌کارند

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = ۲۱۰ - ۵۰ = ۱۶۰$$

$$n(B') = n(U) - n(B) = ۴۰۰ - ۱۴۰ = ۲۶۰$$

(پ) تعداد کشاورزانی که جو نمی‌کارند، برابر است با:

راه حل دوم: استفاده از نمودار ون. چون $n(A \cap B)$ مجهول است، با فرض $n(A \cap B) = x$ ، نمودار ون را کامل می‌کنیم.



$$n(A \cup B) = ۳۰۰$$

$$\Rightarrow ۳۰۰ = (۲۱۰ - x) + x + (۱۴۰ - x) \Rightarrow x = ۵۰$$

(ب) باید $x = ۲۱۰ - ۱۶۰$ را بیابیم، پس:

$$\xrightarrow{x=۵۰} ۲۱۰ - ۵۰ = ۱۶۰ = \text{تعداد افرادی که فقط گندم می‌کارند.}$$

(پ) تعداد افرادی که جو نمی‌کارند برابر است با:

$$۴۰۰ - ۱۴۰ = ۲۶۰$$

(صفحه ۱۰ - مرتبط با فعالیت)

۵۱- دو مجموعه A و B را جدا از هم گویند، هرگاه آنها تهی باشد.

(صفحه ۱۰ - فعالیت - مکمل و مرتبط با تمرین ۱)

۵۲- کدام یک از مجموعه‌های زیر جدا از هم هستند؟

الف) Q و Q'

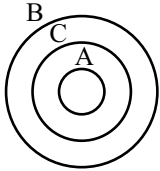
ب) Z و Q

پ) $R - Q'$ و W

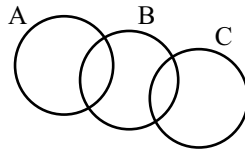
(صفحه ۱۰ - فعالیت - پیش‌نیاز تمرین ۱)

۵۳- در هر نمودار، معین کنید کدام یک از مجموعه‌های A ، B و C جدا از هم هستند.

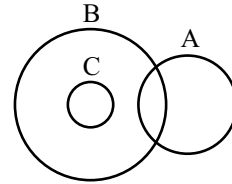
الف)



ب)



پ)

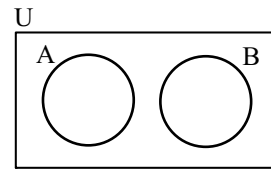
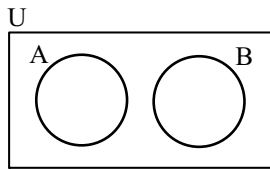


(صفحه ۱۰ - فعالیت - پیش‌نیاز تمرین ۱)

۵۴- با استفاده از نمودار ون نشان دهید هرگاه A و B دو مجموعه‌ی جدا از هم باشند، آنگاه:

الف) $A \subset B'$

ب) $B \subset A'$



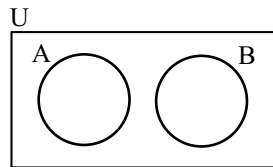
(صفحه ۱۰ - فعالیت - پیش‌نیاز تمرین ۱)

۵۵- با توجه به نمودار ون نشان دهید که:

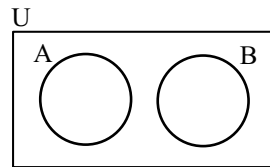
الف) $A - B = A$

ب) $B - A = B$

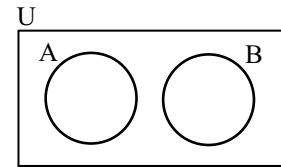
پ) $(A - B) \cap (B - A) = \emptyset$



(الف)



(ب)



(پ)

۵۶- اگر A و B دو زیرمجموعه‌ی مجزا در مجموعه‌ی مرجع متناهی U و $n(A) = 3$ و $n(B) = 5$ باشند، آنگاه تعداد عضوهای مجموعه‌ی $A \cup B$ را بیابید.

(صفحه ۱۰ - فعالیت - مکمل و مشابه تمرین ۱)

۵۷- اگر A و B دو زیرمجموعه از مجموعه‌ی مرجع U و $n(A) = 5$ ، $n(B) = 7$ و $n(A \cap B) = 2$ باشد، آنگاه $n(A \cup B)$ را بیابید.

(صفحه ۱۳ - مکمل و مشابه تمرین ۲)

۵۸- اگر A و B دو زیرمجموعه از مجموعه‌ی مرجع U و $n(U) = 19$ ، $n(A) = 4$ ، $n(B) = 9$ و $n(A \cap B) = 3$ باشند، آنگاه مقدار هر یک از عبارتهای زیر را بیابید.

(صفحه ۱۳ - مکمل و مشابه تمرین ۳)

الف) $n(A') =$

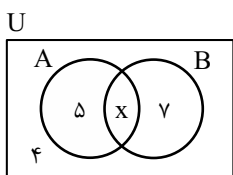
ب) $n(B') =$

پ) $n(A \cup B) =$

ت) $n((A \cup B)') =$

۵۹- در نمودار ون زیر، اگر $n(U) = 20$ باشد، مطلوب است:

(صفحه ۱۳ - مکمل و مرتبط با تمرین ۴)



الف) $n(A \cap B) =$ ب) $n(A) =$

پ) $n(B) =$ ت) $n(A \cup B) =$

ث) $n(A') =$ ج) $n(B') =$

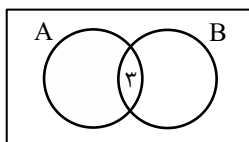
چ) $n(A' \cap B') =$

۶۰- اگر A و B دو زیرمجموعه از مجموعه مرجع U باشند و $n(U) = 30$ ، $n(A) = 10$ ، $n(B) = 6$ و $n(A \cap B) = 3$ باشند، آنگاه

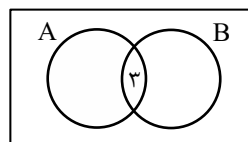
(صفحه ۱۳ - مکمل و مرتبط با تمرین ۴)

نمودار ون را برای هر یک از قسمت‌های زیر کامل کنید.

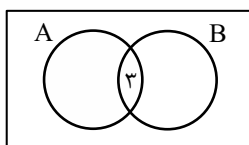
ب) تعداد اعضای که فقط شامل B باشند.



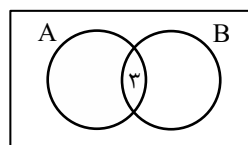
الف) تعداد اعضای که فقط شامل A باشند.



ت) تعداد اعضای که شامل هیچ‌کدام از دو مجموعه A یا B نباشند.



پ) تعداد اعضای که شامل A یا B باشند.



۶۱- مجموعه A، ۱۲ عضو و مجموعه B، ۶ عضو است. اگر مجموعه $B - (A \cap B)$ ، ۴ عضو باشد، مجموعه $A \cup B$ چند عضو دارد؟

(صفحه ۱۳ - مکمل و مرتبط با تمرین ۴)

۶۲- اگر A و B دو مجموعه جدا از هم و زیرمجموعه مجموعه مرجع ۱۹ عضو باشند به طوری که مجموعه $A - B$ ، ۳ عضو و مجموعه $B \cup A$ ، ۹ عضو داشته باشد، آنگاه مجموعه‌های زیر چند عضو هستند؟

(صفحه ۱۳ - مکمل و مرتبط با تمرین ۴)

الف) B'

ب) $B \cap A'$

۶۳- در یک میهمانی ۳۰ نفری، ۱۴ نفر کیک و ۱۲ نفر بستنی خورده‌اند. اگر ۶ نفر هم بستنی و هم کیک خورده باشند، آنگاه در این میهمانی: (صفحه‌ی ۱۳- مکمل و مرتبط با تمرین‌های ۵)

الف) چند نفر کیک یا بستنی خورده‌اند؟

.....

ب) چند نفر فقط کیک خورده‌اند؟

.....

پ) چند نفر نه کیک خورده‌اند و نه بستنی؟

.....

۶۴- در یک کلاس ۴۰ نفری، ۱۳ نفر فوتبال و ۱۷ نفر والیبال بازی می‌کنند. اگر ۱۳ نفر نه فوتبال بازی کنند و نه والیبال، آنگاه در این کلاس: (صفحه‌ی ۱۳- مکمل و مرتبط با تمرین‌های ۵ و ۶)

الف) چند نفر هم فوتبال بازی می‌کنند و هم والیبال؟

.....

ب) چند نفر حداقل یکی از دو رشته را بازی می‌کنند؟

.....

پ) چند نفر دقیقاً یکی از دو رشته را بازی می‌کنند؟

.....

ت) چند نفر حداکثر یکی از دو رشته را بازی می‌کنند؟

.....

۶۵- در یک گروه دانش‌آموزی، تعداد افرادی که بسکتبال یا فوتبال بازی می‌کنند، ۳۰ نفر است. تعداد افرادی که فقط فوتبال بازی می‌کنند دو برابر تعداد افرادی است که فقط بسکتبال بازی می‌کنند. اگر تعداد افرادی که هم فوتبال و هم بسکتبال بازی می‌کنند ۶ نفر باشد، تعداد افرادی که بسکتبال بازی می‌کنند را بیابید. (صفحه‌ی ۱۳- مکمل و مرتبط با تمرین‌های ۵ و ۶)

.....

.....

.....

.....

۶۶- در یک کلاس برای حل مسأله‌های ریاضی، ۴ نفر فقط از ماشین حساب، ۶ نفر فقط از خودکار و ۲ نفر فقط از مداد و ۸ نفر از ماشین حساب و خودکار با هم و ۲ نفر از خودکار و مداد با هم و یک نفر از خودکار، مداد و ماشین حساب استفاده می‌کنند و هیچ دانش‌آموزی فقط از مداد و ماشین حساب با هم استفاده نمی‌کند. در صورتی که هر دانش‌آموز موظف باشد فقط از این وسایل استفاده کند، این کلاس چند دانش‌آموز دارد؟ (صفحه‌ی ۱۳- مکمل و مرتبط با تمرین‌های ۵ و ۶)

.....

.....

.....

الگو

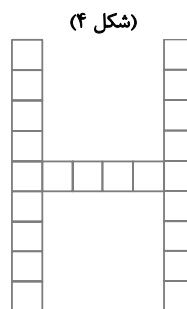
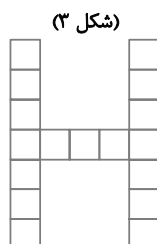
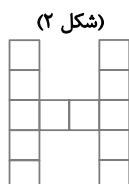
الگوی خطی

الگوهای غیر خطی

۳. الگو و دنباله

◆ الگو ◆

برای ساختن حرف H با استفاده از مربع‌های هم‌مساحت، شکل‌های زیر داده شده‌اند.



...

برای یافتن یک مدل ریاضی (الگو)، باید رابطه‌ای بین شماره‌های هر مرحله (اندیس جمله) و مقدار آن (مقدار جمله) را بیابیم که این رابطه در تمامی مراحل (شکل‌ها) ثابت باشد. این رابطه را جمله‌ی عمومی الگو می‌نامیم.

شماره‌ی شکل	۱	۲	۳	۴	
	↓	↓	↓	↓	
مقدار جمله	a_1	a_2	a_3	a_4	...
	↓	↓	↓	↓	
رابطه‌ی بین شماره‌ی شکل و مقدار جمله	$7 = 1 \times 5 + 2$	$12 = 2 \times 5 + 2$	$17 = 3 \times 5 + 2$	$22 = 4 \times 5 + 2$	

می‌بینیم که با اضافه شدن عدد ۵ به هر جمله (غیر از جمله اول)، جمله‌ی بعدی به‌دست می‌آید؛ بنابراین جمله‌ی عمومی الگوی داده شده $a_n = 5n + 2$ است.

سؤال: آیا شکلی وجود دارد که تعداد مربع‌ها در آن ۶۲ باشد؟

حل: باید $a_n = 62$ یا $5n + 2 = 62$ و از آنجا $5n = 60$ و در نتیجه $n = 12$ ، پس در شکل دوازدهم تعداد مربع‌ها ۶۲ است.

تذکر: a_n را جمله‌ی عمومی الگو و n را شماره‌ی جمله (اندیس) می‌نامیم؛ به عنوان مثال:

جمله‌ی n ام a_n و جمله‌ی نوزدهم a_{19} و جمله‌ی هفتم a_7

◆ الگوی خطی ◆

اگر جمله‌ی عمومی یک الگو به صورت $t_n = an + b$ باشد (a و b اعداد حقیقی دلخواه و ثابت)، الگو را خطی می‌نامیم. در الگوهای خطی، میزان تغییر جملات متوالی، برابر ضریب n ، یعنی عدد a است.

مثال: رابطه‌ی بین شماره‌ی جملات و مقدار آنها در یک الگو، در جدول زیر داده شده است. آیا الگوی داده شده خطی است؟

n	۱	۲	۳	۴	...
a_n	۱	۵	۹	۱۳	...

$$5 - 1 = 4, 9 - 5 = 4, 13 - 9 = 4, \dots$$

حل: کافی است اختلاف هر دو جمله‌ی متوالی را بیابیم:

چون اختلاف هر دو جمله‌ی متوالی، مقدار ثابتی است، پس الگو خطی است.

تذکر: با داشتن دو جمله از یک الگوی خطی می‌توانیم جمله‌ی عمومی آن را بیابیم.

مثال: اگر جملات چهارم و نهم یک الگوی خطی به ترتیب ۱۴ و ۲۹ باشند، جمله‌ی عمومی و سپس جمله‌ی دوازدهم این الگو را بیابید.

حل: جمله‌ی عمومی الگوی خطی را $t_n = an + b$ فرض می‌کنیم، بنابراین طبق فرض داریم:

$$\begin{aligned} t_4 = 14 &\Rightarrow \begin{cases} 14 = 4a + b \\ 29 = 9a + b \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} 29 - 14 = 5a \Rightarrow a = 3 \\ t_9 = 29 &\Rightarrow \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{a=3} 14 = 4 \times 3 + b \Rightarrow b = 2 \Rightarrow t_n = 3n + 2$$

$$t_{12} = 3 \times 12 + 2 = 38$$

برای یافتن جمله‌ی دوازدهم به جای n ، ۱۲ قرار می‌دهیم:

◆ الگوهای غیرخطی ◆

هرگاه در یک الگو، اختلاف هر دو جمله متوالی مقدار ثابتی نباشد، الگو، غیر خطی است. به عنوان مثال، جدول‌های زیر الگوهای غیر خطی را نمایش می‌دهند.

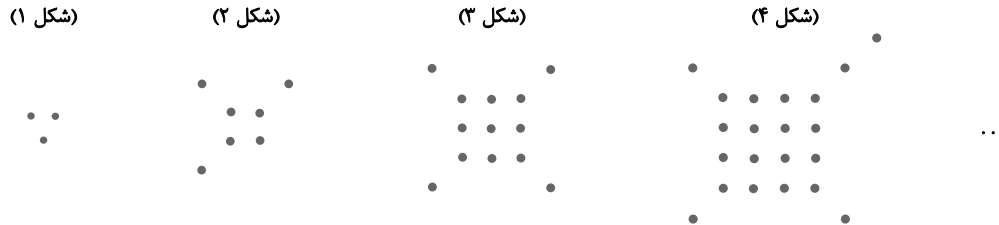
شماره‌ی جمله	۱	۲	۳	۴	...
مقدار جمله	۱	۷	۱۷	۳۱	...

$\xrightarrow{+6}$ $\xrightarrow{+10}$ $\xrightarrow{+14}$

شماره‌ی جمله	۱	۲	۳	۴	...
مقدار جمله	۲	۴	۸	۱۶	...

$\xrightarrow{\times 2}$ $\xrightarrow{\times 4}$ $\xrightarrow{\times 8}$

■ مثال: یک جمله‌ی عمومی برای تعداد نقطه‌ها در هر مرحله بیابید.

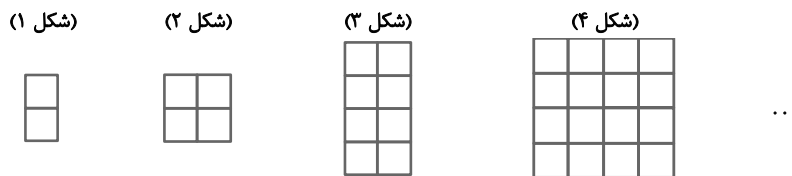


◀ حل: با توجه به شکل، در هر مرحله، تعداد نقطه‌هایی که در وسط قرار گرفته‌اند، مربع شماره‌ی شکل و تعداد نقطه‌هایی که در گوشه‌ها قرار گرفته‌اند، یک واحد از شماره‌ی شکل بیشتر است، یعنی:

شماره‌ی شکل	۱	۲	۳	۴	...	n
تعداد نقطه‌ها	$a_1 = 1^2 + (1+1)$	$a_2 = 2^2 + (2+1)$	$a_3 = 3^2 + (3+1)$	$a_4 = 4^2 + (4+1)$...	$a_n = n^2 + (n+1)$

بنابراین جمله‌ی عمومی الگو $a_n = n^2 + n + 1$ است.

■ مثال: یک جمله‌ی عمومی برای تعداد مربع‌های کوچک هم مساحت در هر مرحله بیابید.



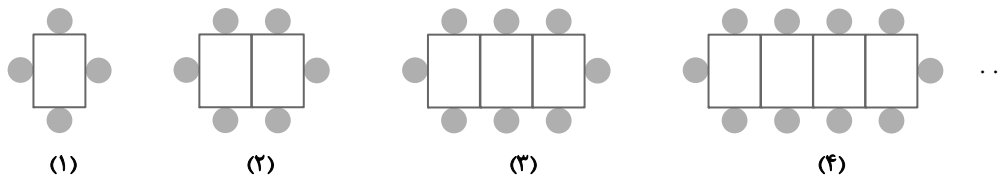
شماره‌ی شکل	۱	۲	۳	۴	...	n
تعداد مربع‌ها	۲	$4 = 2^2$	$8 = 2^3$	$16 = 2^4$...	2^n

بنابراین جمله‌ی عمومی الگو، $a_n = 2^n$ است.

الگو

(صفحه‌ی ۱۴ - مکمل و مشابه مثال)

۶۷- با توجه به شکل زیر، به سؤال‌ها پاسخ دهید.



الف) تعداد دایره‌ها را در هر مرحله بیابید و عبارت‌ها را کامل کنید.

	a_1	,	a_2	,	a_3	,	a_4	,	...
تعداد دایره‌ها	↓		↓		↓		↓		
رابطه‌ی بین شماره‌ی شکل و تعداد دایره در هر شکل	۴		۶						
	↓		↓						
	$2 \times 1 + 2$		$2 \times 2 + 2$						

ب) تعداد دایره، در شکل نهم را بیابید.

پ) جمله ی عمومی (a_n) الگوی دایره ها را بیابید.

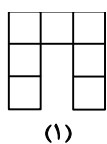
ت) با استفاده از جمله ی عمومی a_n ، تعداد دایره ها را در شکل دوازدهم بیابید.

ث) با استفاده از رابطه ی a_n ، مشخص کنید که چندمین شکل الگو، دارای ۴۴ دایره است.

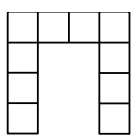
(صفحه ی ۲۰ - مکمل و مشابه تمرین ۱)

۶۸- در هریک از شکل های زیر، جمله ی عمومی خواسته شده را بیابید.

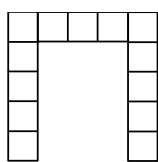
الف) تعداد مربع ها در شکل n ام



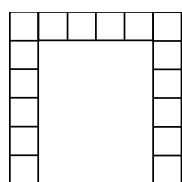
(۱)



(۲)



(۳)



(۴)

...

ب) تعداد کبریت ها در شکل n ام



طرح (۱)

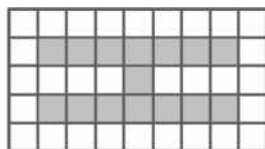
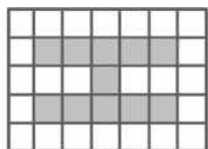
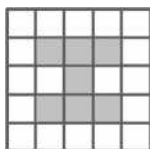


طرح (۲)

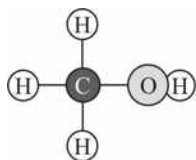


طرح (۳)

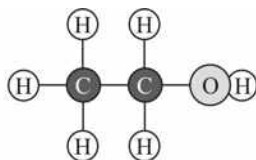
پ) تعداد مربع های رنگی برای ساختن حرف H در شکل n ام



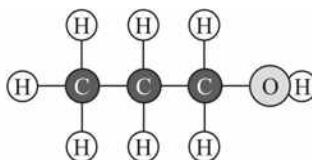
۶۹- در شیمی الکل ها، یک خانواده ی مواد شیمیایی از کربن، هیدروژن و اکسیژن ساخته می شود. مدل ساختن ۳ تا از این مواد به شکل زیر است. فرمولی که رابطه ی تعداد اتم های کربن و تعداد کل اتم ها در مدل ها را نشان دهد بیابید. (صفحه ی ۱۷ - مکمل و مرتبط با کار در کلاس)



متانول



اتانول



پروپانول

الگوی خطی

۷۰- آیا جدول زیر نشان‌دهنده یک الگوی خطی است؟ در صورت مثبت بودن جواب، رابطه‌ای بین n و a_n را بیابید.

(صفحه‌ی ۱۶- متن درس - مرتبط با پاراگراف ۱)

الف) ب)

n	۱	۲	۳	۴	...
a_n	۷	۱۳	۱۹	۲۵	...

n	۱	۲	۳	۴	...
a_n	۵	۸	۱۱	۱۴	...

۷۱- اگر جملات پنجم و هفتم یک الگوی خطی به ترتیب ۲۲ و ۳۲ باشند، جمله‌ی عمومی این الگو را بیابید.

(صفحه‌ی ۱۶- مکمل و مشابه با مثال)

(صفحه‌ی ۱۵- فعالیت - مکمل و مشابه تمرین ۲)

۷۲- در شکل زیر، تعداد نقطه‌ها از الگوی منظمی پیروی می‌کنند.



الف) جملات اول، دوم و سوم این الگو را بیابید و رابطه‌ی بین شماره‌ی جملات و تعداد نقطه‌ها در هر شکل را پیدا کنید.

a_1 , a_2 , a_3
 \downarrow \downarrow \downarrow
 ۴
 \downarrow

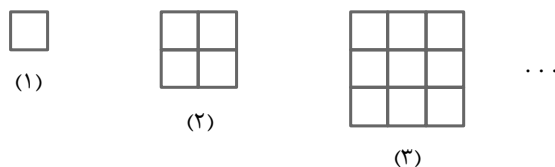
ب) رابطه‌ای برای جمله‌ی عمومی بیابید و با استفاده از آن a_7 را محاسبه کنید.

پ) آیا الگوی بالا خطی است؟ چرا؟

الگوهای غیرخطی

۷۳- در شکل زیر، تعداد مربع‌های کوچک، از الگوی منظمی پیروی می‌کند.

(صفحه‌ی ۱۷- مکمل و مشابه فعالیت)



الف) جدول زیر را کامل کنید.

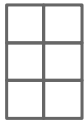
n : شماره‌ی شکل	۱	۲	۳	۴	...	۵۰	...	n
a_n : تعداد مربع‌ها	۱	۴	۹		
رابطه‌ی بین n و a_n	۱ ^۲	۲ ^۲			

ب) چندمین شکل از ۱۴۴ مربع کوچک تشکیل شده است؟

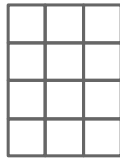
(صفحه ی ۱۷ - مکمل و مشابه فعالیت)



(۱)



(۲)



(۳)

...

۷۴- در شکل زیر، الگوی منظمی برای تعداد مربع های کوچک در هر مرحله وجود دارد.

فرمولی برای تعداد مربع ها در شکل n ام بیابید.

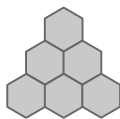
(صفحه ی ۱۹ - کار در کلاس - مکمل و مشابه تمرین ۲)



(۱)



(۲)



(۳)

...

۷۵- در شکل زیر، الگوی منظمی برای تعداد شش ضلعی های منتظم در هر مرحله وجود دارد.

الف) جدول زیر را کامل کنید.

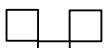
n : شماره ی شکل	۱	۲	۳	۴	۵	...
a_n : تعداد شش ضلعی ها	۱	۳	۶			...
رابطه ی بین n و a_n	۱	$۱+۲$...

ب) فرمولی برای a_n بر حسب n بیابید.

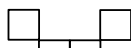
پ) در جمله ی صدم، چند شش ضلعی منتظم وجود دارد؟

(صفحه ی ۲۰ - مشابه تمرین ۲)

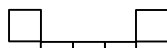
۷۶- در شکل زیر، الگوی منظمی برای تعداد مربع های کوچک در هر مرحله وجود دارد. جمله ی عمومی این الگو را بیابید.



(۱)



(۲)



(۳)

...

۷۶- در شکل زیر، الگوی منظمی برای تعداد مربع های کوچک در هر مرحله وجود دارد. جمله ی عمومی این الگو را بیابید.