گذرنامه
ورود به آینده شگفت انگیز

ریاضی یازدهم

(رشته تجربی)

کتاب آموزش کامل مفاهیم و آزمون

سعید جلالی • آرزو کامیار

بسم الله الرحمن الرحيم

مقدمه

به نام خداوند جان و خرد
کزین برتر اندیشه برنگذرد

درود و شادباش

دربارهٔ کتاب «ریاضی یازدهم»

۱- در این کتاب همهٔ مفاهیم کتاب درسی را با آوردن مثال‌ها و تمرین‌های حل شده، آموزش داده‌ایم و صفحه به صفحهٔ کتاب درسی مورد توجه بوده است. هیچ تمرین حل نشده‌ای در این کتاب وجود ندارد و بیش از هزار مثال، تمرین و تست حل شده پیش روی شماست!

۲- در هر درس از کتاب، با مثال‌های ساده شروع کرده‌ایم و سپس به مثال‌های با سطح بالاتر و پاسخ آنها به ساده‌ترین زبان پرداخته‌ایم. هر دانش‌آموز با هر سطحی می‌تواند مثال و تمرین‌های متناسب با وضع درسی خود را در این کتاب بیابد.

۳- نکتهٔ مهم، پایبندی طراحان کنکور به کتاب‌های درسی است. هر تست کنکور یا از کتاب درسی است یا از مفهومی برخاسته از کتاب درسی. برای آنکه بتوانید همهٔ تست‌های کنکور را درست بزنید یا از پس همهٔ سؤالات امتحان‌های رسمی برآیید، باید مفاهیم درسی را عمیق‌تر بیاموزید که در این کتاب به آن توجه شده است. تست‌ها، سؤالات تشریحی برخاسته از مفاهیم کتاب و سؤالات خلاقانه را نیز در کتاب مشاهده خواهید کرد.

چگونگی استفادهٔ بهتر از کتاب

ابتدا درسنامه را بخوانید، سپس به حل سؤالات تشریحی پایان هر درس بپردازید، پاسخ و روش حل سؤال را با پاسخ‌نامهٔ تشریحی مقایسه کنید. برای حل یک مسئله گاهی روش‌های مختلف، آموزش داده شده است. پس از تسلط و تثبیت آموخته‌ها، پرسش‌های چهار گزینه‌ای را پاسخ دهید. پیشنهاد می‌کنیم در بسته‌های ۱۰ تایی یا ۲۰ تایی باشد و برای هر تست تقریباً ۲ دقیقه زمان اختصاص یابد. پس از هر وعده، پاسخ تشریحی را بخوانید و بعد در فرصت دیگری ادامه دهید.

پس از هر درس، در یک صفحه نکته‌های آن درس با عنوان «مرور سریع درس» آمده است. با توجه به نتیجهٔ آزمون خود، می‌توانید نکته‌های دیگری هم به آن اضافه کنید.

قدردانی

لازم می‌دانیم از مدیرعامل محترم شرکت آموزشی، فرهنگی و انتشاراتی مبتکران جناب آقای یحیی دهقانی که امکان چاپ کتاب را فراهم آورده‌اند و از مهندس هادی عزیززاده که با راهنمایی‌های ایشان، این کتاب تألیف شد، تشکر کنیم.

به علاوه از خانم‌ها ناهید صبائی (حروفچین و صفحه‌آرا)، معصومه لطفی مقدم، ملیحه محمدی (رسام)، بهاره خدامی (گرافیست و طراح جلد) و شیوا خوش‌نقش (نمونه‌خوان) سپاسگزاریم.

متواضعانه از اساتید محترم ریاضی، مشاوران محترم درسی و کنکور و نیز از دانش‌آموزان عزیز و خانواده‌های گرامیشان درخواست داریم که با ارائهٔ نظرات، پیشنهادها و انتقادهای خود، ما را در اعتلای این مجموعه یاری نمایند.

شاد و تندرست باشید.

ممنونیم که امروز بیش از دیروز تمایل به یادگیری دارید.

سعید جلالی ـ آرزو کامیار

فهرست

فصل اول: هندسهٔ تحلیلی و جبر

درس ۱: هندسهٔ تحلیلی ۸
درس ۲: معادلهٔ درجهٔ دوم و تابع درجهٔ ۲ .... ۳۳
درس ۳: معادلات گویا و معادلات رادیکالی ۵۹

فصل دوم: هندسه

درس ۱: ترسیم‌های هندسی ۷۴
درس ۲: استدلال و قضیهٔ تالس ۸۷
درس ۳: تشابه مثلث‌ها ۱۰۳

فصل سوم: تابع

درس ۱: آشنایی با برخی از انواع توابع ۱۲۰
درس ۲: وارون یک تابع و تابع یک به یک ۱۴۴
درس ۳: اعمال جبری روی توابع ۱۶۳

فصل چهارم: مثلثات

درس ۱: واحدهای اندازه‌گیری زاویه ۱۷۸
درس ۲: روابط تکمیلی بین نسبت‌های مثلثاتی ۱۹۱
درس ۳: توابع مثلثاتی ۲۱۳

فصل پنجم: توابع نمایی و لگاریتمی

درس ۱: تابع نمایی و ویژگی‌های آن ۲۳۲
درس ۲: تابع لگاریتمی و ویژگی‌های آن ۲۵۱
درس ۳: کاربردهای توابع نمایی و لگاریتمی ۲۷۴

فصل ششم: حد و پیوستگی

درس ۱: فرایندهای حدی ۲۹۰
درس ۲: محاسبهٔ حد توابع ۳۰۴
درس ۳: پیوستگی ۳۲۸

فصل هفتم: آمار و احتمال

درس ۱: احتمال شرطی و پیشامدهای مستقل ۳۵۰
درس ۲: آمار توصیفی ۳۶۵
سؤالات کنکور ۹۸ و ۹۹ .... ۳۸۴
پاسخ سؤالات کنکور ۹۸ و ۹۹ .... ۳۸۷

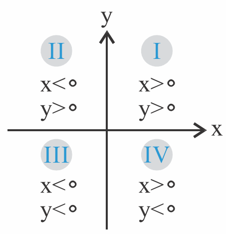
۱

فصل اول: هندسه تحلیلی و جبر

درس اول: هندسه تحلیلی

۱- دستگاه مختصات دکارتی

برای نشان دادن موقعیت هر نقطه در صفحه از «دستگاه مختصات دکارتی» استفاده می‌شود که شامل دو محور عمود بر هم x و y است و صفحه را به صورت مقابل به چهار ناحیه تقسیم می‌کند. همچنین وضعیت طول و عرض نقاط را در نواحی می‌بینید.



۲- فاصلهٔ دو نقطه از هم

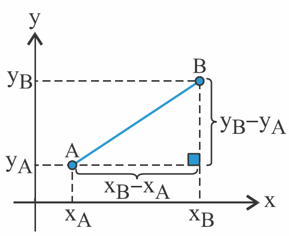
اگر دو نقطهٔ A و B در صفحه باشند، فاصلهٔ آنها از رابطهٔ مقابل به دست می آید:

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$

حالا این رابطه از کجا آمده است؟!

خیلی ساده است. شکل را ببینید:

AB وتر یک مثلث قائم‌الزاویه است که طول اضلاع قائمهٔ آن را داریم؛ با نوشتن رابطهٔ فیثاغورس اندازهٔ وتر یا همان AB به دست می‌آید.



مثال: اگر نقطهٔ $A(\frac{\alpha^2}{2}-\alpha-\frac{3}{2}, 2)$ روی محور عرض‌ها و نقطهٔ $B(\alpha+1, \alpha-4)$ در ناحیهٔ چهارم باشد، فاصلهٔ A و B را به دست آورید.

حل: A روی محور yهاست؛ پس طول آن صفر است:

$$\frac{\alpha^2}{2}-\alpha-\frac{3}{2}=0 \xrightarrow{\times(2)} \alpha^2-2\alpha-3=(\alpha-3)(\alpha+1)=0 \begin{cases}\alpha=-1\\ \alpha=3\end{cases}$$

دو مقدار برای α به دست آمد. برویم سراغ نقطهٔ B. گفته B در ناحیهٔ چهارم است؛ پس طول آن مثبت و عرضش منفی است. هر دو مقدار α را جایگذاری می‌کنیم:

$$B(\alpha+1, \alpha-4) \xrightarrow{\alpha=-1} B(0, -5)$$

قبول نیست؛ چون به این ترتیب B روی محور yها خواهد بود و می‌دانیم که نقاط روی محورها جزء نواحی محسوب نمی‌شوند.

$$B(\alpha+1, \alpha-4) \xrightarrow{\alpha=3} B(4, -1)$$

قبول است. در ناحیهٔ IV، طول مثبت و عرض منفی می‌باشد.

سؤال فاصلهٔ A و B را خواسته:

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{(4-0)^2+(-1-2)^2}=\sqrt{16+9}=5$$

مثال: اگر مختصات دو رأس مقابل در یک مربع $C(3, 5)$ و $A(2, 3)$ باشد، مساحت مربع را به دست آورید.

حل: فاصلهٔ دو نقطهٔ A و C برابر با قطر مربع است:

$$AC=\sqrt{(x_A-x_C)^2+(y_A-y_C)^2}=\sqrt{(2-3)^2+(3-5)^2}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$$

اگر در یک مربع ضلع را a در نظر بگیریم، قطر $a\sqrt{2}$ خواهد بود؛ پس:

$$a\sqrt{2}=\sqrt{5} \rightarrow a=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$$

$$S_{\text{مربع}}=(\frac{\sqrt{10}}{2})^2=\frac{10}{4}$$

مثال: مساحت مثلثی با سه رأس $A(۲,۵)$ ، $B(۳,۰)$ و $C(۰,۲)$ کدام است؟ (خارج ۹۲)

۱) ۶ ۲) ۶/۵ ۳) ۷ ۴) ۷/۵

حل: طول اضلاع را به دست می‌آوریم:

$$AB=\sqrt{(x_A-x_B)^۲+(y_A-y_B)^۲}=\sqrt{(۲-۳)^۲+(۵-۰)^۲}=\sqrt{۱+۲۵}=\sqrt{۲۶}$$

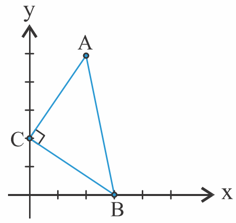
$$AC=\sqrt{(x_A-x_C)^۲+(y_A-y_C)^۲}=\sqrt{(۲-۰)^۲+(۵-۲)^۲}=\sqrt{۴+۹}=\sqrt{۱۳}$$

$$BC=\sqrt{(x_B-x_C)^۲+(y_B-y_C)^۲}=\sqrt{(۳-۰)^۲+(۰-۲)^۲}=\sqrt{۹+۴}=\sqrt{۱۳}$$

به اعداد به دست آمده نگاه کنید؛ بین آنها رابطهٔ فیثاغورس برقرار است: $AC^۲+BC^۲=AB^۲\rightarrow(\sqrt{۱۳})^۲+(\sqrt{۱۳})^۲=(\sqrt{۲۶})^۲$

پس ABC یک مثلث قائم‌الزاویه است. این یعنی AC و BC ارتفاع و قاعده هستند: $S_{ABC}=\dfrac{AC\times BC}{۲}=\dfrac{\sqrt{۱۳}\times\sqrt{۱۳}}{۲}=\dfrac{۱۳}{۲}=۶/۵$

شکل را هم ببینید:



مثال: دایره‌ای محور xها را در دو نقطه به طول‌های ۱ و ۳ قطع کرده و مرکز آن بر روی نیمساز ربع اول است. شعاع این دایره کدام است؟ (خارج ۹۵)

۱) $\sqrt{۳}$ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{۵}$ ۴) ۳

حل: نقاط $A(۳,۰)$ و $B(۱,۰)$ روی محیط دایره قرار دارند. از طرفی مرکز دایره روی خط $y=+x$ است؛ پس مختصات آن به شکل $(x,+x)$ می‌باشد. شعاع را خواسته، یعنی فاصلهٔ نقاط روی محیط دایره تا مرکز دایره؛ اول باید مختصات مرکز دایره را حساب کنیم.

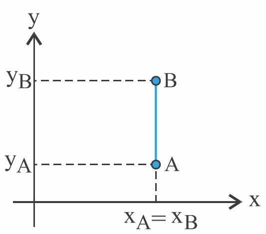
$$OB=OA\Rightarrow\sqrt{(۱-x)^۲+(۰-x)^۲}=\sqrt{(۳-x)^۲+(۰-x)^۲}\xrightarrow{\text{توان ۲}}۱-۲x+\cancel{x^۲}+\cancel{x^۲}=۹-۶x+\cancel{x^۲}+\cancel{x^۲}\rightarrow۴x=۸\rightarrow x=۲$$

پس مرکز دایره $O(۲,۲)$ است؛ پس شعاع برابر است با: $\sqrt{(۱-۲)^۲+(۰-۲)^۲}=\sqrt{۱+۴}=\sqrt{۵}$

حالات خاص

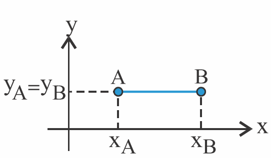
۱) اگر دو نقطهٔ A و B طول یکسان داشته باشند، جملهٔ $(x_B-x_A)^۲$ صفر خواهد بود؛ بنابراین:

$$AB=\sqrt{(y_B-y_A)^۲}=|y_B-y_A|$$



۲) اگر دو نقطهٔ A و B عرض یکسان داشته باشند، جملهٔ $(y_B-y_A)^۲$ صفر خواهد بود؛ بنابراین:

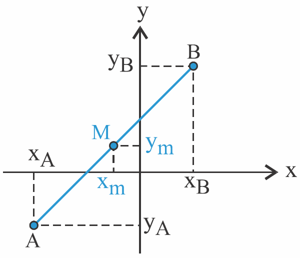
$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^۲}=|x_B-x_A|$$



۳- مختصات نقطهٔ وسط پاره‌خط

خب؛ دو نقطهٔ A و B در صفحه هستند. مختصات نقطهٔ وسط این دو را M می‌نامیم، قرار است مختصات M را به دست آوریم؛ خودتان چه حدسی می‌زنید؟!

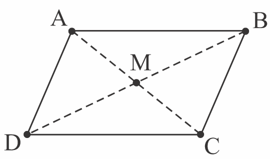
کتاب درسی برای آموزش مفهومی این قسمت خیلی زحمت کشیده ولی ما فکر می‌کنیم روشن است که طول و عرض **M** برابر با میانگین طول و عرض دو نقطهٔ **A** و **B** می‌باشد!



$$x_M=\frac{x_A+x_B}{۲}\quad,\quad y_M=\frac{y_A+y_B}{۲}$$

مثال: اگر $A(-۱,-۱)$ ، $B(۱,۶)$ ، $C(-۱,۵)$ و **D** رئوس یک متوازی‌الاضلاع باشند، فاصلهٔ رأس **D** تا مبدأ مختصات چقدر است؟

حل: قطرهای متوازی‌الاضلاع یکدیگر را نصف می‌کنند؛ پس با توجه به شکل فرضی مقابل، اگر محل برخورد قطرها را M بنامیم، داریم:



$$x_M=\frac{x_A+x_C}{۲}=\frac{x_B+x_D}{۲}\Rightarrow x_A+x_C=x_B+x_D\Rightarrow -۱-۱=۱+x_D\rightarrow x_D=-۳$$

$$y_M=\frac{y_A+y_C}{۲}=\frac{y_B+y_D}{۲}\Rightarrow y_A+y_C=y_B+y_D\Rightarrow -۱+۵=۶+y_D\rightarrow y_D=-۲$$

فاصلهٔ رأس $D(-۳,-۲)$ را از مبدأ مختصات $O(۰,۰)$ خواسته:

$$OD=\sqrt{(۰-x_D)^۲+(۰-y_D)^۲}=\sqrt{x_D^۲+y_D^۲}=\sqrt{(-۲)^۲+(-۳)^۲}=\sqrt{۴+۹}=\sqrt{۱۳}$$

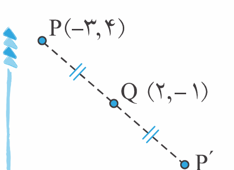
دقت با توجه به اینکه مختصات مبدأ $O(۰,۰)$ است؛ پس فاصلهٔ هر نقطهٔ دلخواه $(x_۰,y_۰)$ از مبدأ برابر است با: $\sqrt{x_۰^۲+y_۰^۲}$.

مثال: قرینهٔ نقطهٔ $P(-۳,۴)$ را نسبت به نقطهٔ $Q(۲,-۱)$ به دست آورید.

حل: اگر قرینهٔ نقطهٔ P را نسبت به Q، P' بنامیم، داریم:

$PQ=P'Q$

یعنی فاصلهٔ P تا Q برابر است با فاصلهٔ P' تا Q و این یعنی نقطهٔ Q وسط نقاط P و P' قرار دارد. شکل را ببینید:



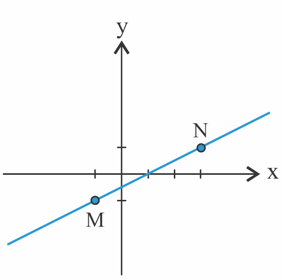
$$x_Q=\frac{x_P+x_{P'}}{۲}\rightarrow ۲=\frac{-۳+x_{P'}}{۲}\rightarrow x_{P'}=۷$$

$$y_Q=\frac{y_P+y_{P'}}{۲}\rightarrow -۱=\frac{۴+y_{P'}}{۲}\rightarrow y_{P'}=-۶$$

پس قرینهٔ P نسبت به Q می‌شود $P'(۷,-۶)$.

۴- معادله خط

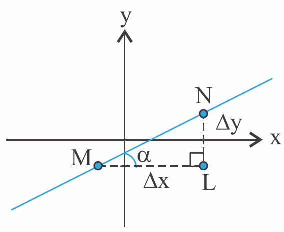
به خاطر دارید که فرم کلی معادلهٔ خط به صورت $y=mx+h$ می‌باشد که **m** شیب و **h** عرض از مبدأ است. معادلهٔ یک خط در واقع بیانگر رابطه‌ایست که بین طول و عرض همهٔ نقاطش برقرار است. مثلاً در خط به معادلهٔ $y=\frac{-x}{۲}+۱$، در هر نقطه، عرض از نصفِ قرینهٔ طول یک واحد بیشتر است.



عرض از مبدأ: یعنی محل برخورد خط با محور عرض‌ها که نقطه‌ای با مختصات $(۰,h)$ است.

شیب: از سال‌های گذشته به خاطر دارید که اگر خطی از نقاط **A** و **B** بگذرد، شیب آن از رابطهٔ $M_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$ به دست می‌آید؛ پس به قول کتاب درسی، شیب یک خط یعنی نسبت جابه‌جایی عمودی به جابه‌جایی افقی! مثلاً در صفحهٔ مقابل اگر بخواهیم از نقطهٔ **M** به نقطهٔ **N** برویم، باید ۲ واحد به سمت بالا (عمودی) و ۴ واحد به سمت راست (افقی) جابه‌جا شویم؛ بنابراین شیب خطی که از **M** و **N** می‌گذرد $\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲}$ است.

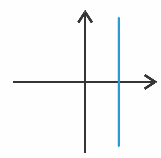
شیب یا همان $\tan\alpha$!

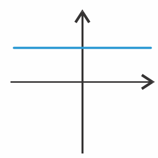


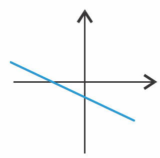
اگر α زاویه‌ای باشد که خط با جهت مثبت محور xها می‌سازد، شیب خط مــی‌شــود $\tan\alpha$!
مجدداً خطی که از نقاط M و N می‌گذرد را ببینید:

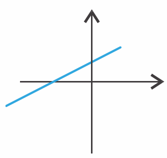
در مثلث MNL تانژانت زاویهٔ α برابر است با $\frac{NL}{ML}$ یا همان $\frac{\Delta y}{\Delta x}$، یعنی همان شیب خط!
مثلاً شیب خطی که با جهت مثبت محور xها زاویهٔ ۶۰° می‌سازد، $\tan ۶۰^\circ = \sqrt{۳}$ است.

شیب یک عدد است که می‌تواند صفر، منفی یا مثبت باشد. وقتی به خطی از چپ به راست نگاه می‌کنیم، اگر مثل یک جـادهٔ سـربالایی صعود کند، شیب مثبت است و برعکس اگر مثل یک جادهٔ سرپایینی نزول کند، شیب منفی است. همچنین شیب خطوط افقـی $(y=b)$ صفر و شیب خطوط قائم $(x=a)$ تعریف نشده است.


شیب تعریف نشده است.


شیب صفر است.


شیب منفی است.


شیب مثبت است.

مثال: سه نقطهٔ $P(-۱,-۵)$ ، $Q(t,۱)$ و $R(t-۲,-۳)$ بر یک امتدادند. t را به دست آورید.

حل: اینکه P ، Q و R بر یک امتدادند، یعنی روی یک خط قرار دارند؛ پس به کمک مفهوم شیب می‌توان t را پیدا کرد:

$$m_{PQ}=\frac{y_P-y_Q}{x_P-x_Q}=\frac{-۵-۱}{-۱-t}=\frac{۶}{۱+t}$$

$$m_{PR}=\frac{y_P-y_R}{x_P-x_R}=\frac{-۵+۳}{-۱-t+۲}=\frac{-۲}{-t+۱}\rightarrow m_{PQ}=m_{PR}\rightarrow\frac{۶}{۱+t}=\frac{-۲}{-t+۱}\rightarrow -۶t+۶=-۲-۲t\rightarrow ۸=۴t\rightarrow t=۲$$

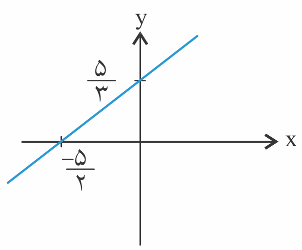
نوشتن معادله خط

قطعاً بلدید معادلهٔ خط را بنویسید ولی ما اینجا قرار است همه چیز را مو به مو یاد بدهیم:
در نوشتن معادلهٔ خط دو حالت رخ می‌دهد. یا به ما شیب و مختصات یک نقطـه از خـط، مـثلاً $(x_۰,y_۰)$ را مـی‌دهـد کـه در رابطـهٔ $y-y_۰=m(x-x_۰)$ جایگذاری می‌کنیم و یا مختصات دو نقطه از خط مثلاً (x_A,y_A) و (x_B,y_B) را می‌دهد که ابتدا شیب را بـه دست آورده و باقی داستان مثل حالت قبلی است.

مثال: خط به معادلهٔ $-۲x+۳y=۵$ از کدام ناحیه نمی‌گذرد؟

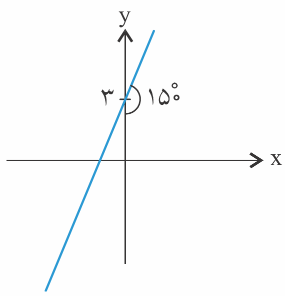
حل: برای رسم یک خط، داشتن دو نقطه از آن کافی است. یک‌بـار x را صفر می‌دهیم و بار دیگر y را:

x	۰	$\frac{-۵}{۲}$
y	$\frac{۵}{۳}$	۰



به کمک دو نقطهٔ $(۰,\frac{۵}{۳})$ و $(\frac{-۵}{۲},۰)$ خط را رسم کردیم، می‌بینید که این خط تنها از ناحیهٔ چهارم نمی‌گذرد.

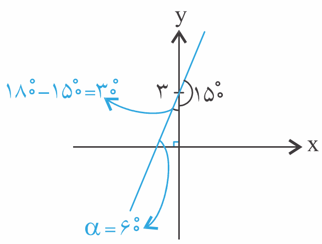
مثال: معادلهٔ خط مقابل کدام است؟



۱) $x=\sqrt{۳}y-۳$ ۲) $y=\sqrt{۳}x+۳$

۳) $y=\frac{\sqrt{۳}}{۳}x+۳$ ۴) $y+\sqrt{۳}x=۳$

حل: یک نقطه از خط یعنی $(۰,۳)$ را داریم به کمک زاویهٔ خط شیب را هم به دست می‌آوریم. فقط حواستان باشد برای به دست آوردن شیب به زاویه‌ای که خط با جهت مثبت محور xها می‌سازد نیازمندیم. شکل را ببینید: $m=\tan ۶۰^\circ=\sqrt{۳}$



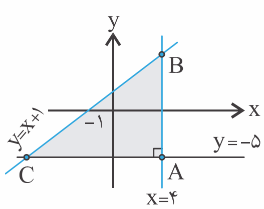
معادلهٔ خط $\rightarrow y-۳=\sqrt{۳}(x-۰)\rightarrow y=\sqrt{۳}x+۳$

پس گزینهٔ (۲) درست است.

مثال: معادلهٔ خطی که از نقطهٔ $(-۳,۱)$ می‌گذرد و طول از مبدأ آن ۲ است را به دست آورید.

حل: طول از مبدأ یک خط یعنی محل برخورد آن خط با محور xها، که در این سؤال نقطهٔ $(۲,۰)$ است. حالا دو نقطه از خط را داریم. اول شیب را به دست می‌آوریم: $m=\frac{۰-۱}{۲+۳}=\frac{-۱}{۵}$ و معادلهٔ خط : $y-۰=\frac{-۱}{۵}(x-۲)\rightarrow \boxed{y=\frac{-x}{۵}+\frac{۲}{۵}}$

مثال: مساحت سطح محصور بین سه خط $y=x+۱$ ، $x=۴$ و $y=-۵$ چند واحد است؟



حل: سه خط داده شده را رسم می‌کنیم. $x=۴$ یک خط قائم و $y=-۵$ یک خط افقی است. $y=x+۱$ را هم به کمک دو نقطه از آن رسم می‌کنیم. البته بچه‌هایی که مبحث انتقال را از سال گذشته به یاد دارند، می‌دانند که $y=x+۱$ همان نیمساز ربع (I) و (III) $(y=x)$ است که یک واحد بالا رفته است.

شکل حاصل از برخورد سه خط، مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC است. ارتفاع آن ضلع AB و قاعده‌اش ضلع AC است. نقطهٔ A محل برخورد دو خط $x=۴$ و $y=-۵$ است؛ پس: $A(۴,-۵)$

نقطهٔ B محل برخورد دو خط $x=۴$ و $y=x+۱$ است؛ پس: $y_B=۴+۱=۵\rightarrow B(۴,۵)$

نقطهٔ C محل برخورد خط $y=-۵$ و $y=x+۱$ است؛ پس: $-۵=x_C+۱\rightarrow x_C=-۶\rightarrow C(-۶,-۵)$

طول AB و AC را محاسبه می‌کنیم: $AC=|x_A-x_C|=|۴-(-۶)|=۱۰ \quad , \quad AB=|y_A-y_B|=|-۵-۵|=۱۰$

مساحت را خواسته: $S_{ABC}=\frac{AC\times AB}{۲}=\frac{۱۰\times ۱۰}{۲}=۵۰$

مثال: خطوط به معادلهٔ $y+۲a-ax=۱$ به ازای جمیع مقادیر a از کدام ناحیه می‌گذرند؟

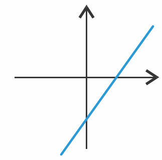
۱) $(-۲,۳)$ ۲) $(۲,۱)$ ۳) $(-۱,۱)$ ۴) $(۳,-۴)$

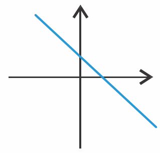
حل: اینکه گفته به ازای جمیع مقادیر a ... یعنی مقدار a مهم نیست! پس جملهٔ شامل a را صفر می‌کنیم. ببینید:

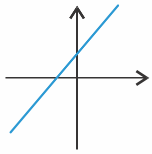
$y+۲a-ax=۱\rightarrow y+a(۲-x)=۱\rightarrow a(۲-x)=۰\rightarrow x=۲\ ,\ y=۱$

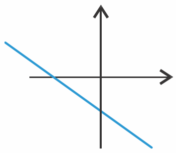
پس نقطهٔ مورد نظر $(۲,۱)$ است و گزینهٔ (۲) درست می‌باشد.

مثال: در معادلهٔ خط $ax+by+c=۰$ اگر $ab>۰$ و $bc<۰$ باشد، نمودار خط به کدام صورت است؟

۱ 

۲ 

۳ 

۴ 

حل: عادت داریم که y یک سمت باشد:

$$by=-ax-c \xrightarrow{\div(b)} y=\frac{-a}{b}x-\frac{c}{b}$$

شیب خط $\frac{-a}{b}$ است. در صورت سؤال گفته $ab>۰$، یعنی a و b هم‌علامت هستند؛ پس:

$\frac{a}{b}>۰ \rightarrow \frac{-a}{b}<۰ \rightarrow$ شیب منفی است؛ پس گزینه‌های (۱) و (۳) حذف می‌شوند.

عرض از مبدأ $\frac{-c}{b}$ است. در صورت سؤال داریم $bc<۰$، یعنی b و c غیرهم‌علامت هستند.

$\frac{c}{b}<۰ \rightarrow \frac{-c}{b}>۰ \rightarrow$ عرض از مبدأ مثبت است، یعنی خط محور yها را در بالای مبدأ قطع می‌کند؛ بنابراین گزینهٔ (۲) درست است.

مثال: نقطهٔ $A(۷,۶)$ رأس یک متوازی‌الاضلاع است که دو ضلع آن منطبق بر خطوط $۲y-۳x=۱۱$ و $۳y+۴x=۸$ هستند. مختصات وسط قطر آن کدام است؟ *(سراسری ۹۰)*

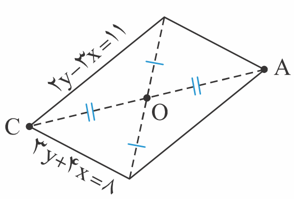
۱ $(۴,۳)$ ۲ $(۳,۴)$ ۳ $(۳,۵)$ ۴ $(۱,۵)$

حل: اول باید دید $A(۷,۶)$ در معادلهٔ خطوط داده شده صدق می‌کند یا نه:

$$۲y-۳x=۱۱ \xrightarrow{A(۷,۶)} ۲(۶)-۳(۷)\neq ۱۱$$

$$۳y+۴x=۸ \xrightarrow{A(۷,۶)} ۳(۶)+۴(۷)\neq ۸$$

A در هیچ کدام صدق نکرد؛ بنابراین A و نقطهٔ برخورد این دو خط، دو رأس مقابل در متوازی‌الاضلاع هستند. شکل فرضی مقابل را ببینید:



محل برخورد دو خط را C نامیده و با حل دستگاه زیر، مختصات آن را به دست می‌آوریم:

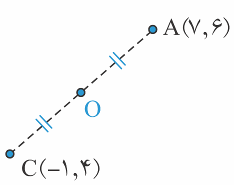
$$\begin{cases}۲y-۳x=۱۱ \xrightarrow{\times(-۳)} \\ ۳y+۴x=۸ \xrightarrow{\times(۲)}\end{cases} \quad + \begin{cases}-۶y+۹x=-۳۳ \\ ۶y+۸x=۱۶\end{cases}$$

$$۱۷x=-۱۷ \rightarrow x=-۱\ ,\ y=۴$$

وسط قطر را خواسته:

$$x_O=\frac{x_A+x_C}{۲}=\frac{۷-۱}{۲}=۳$$

$$y_O=\frac{y_A+y_C}{۲}=\frac{۶+۴}{۲}=۵$$



مختصات نقطهٔ مورد نظر $(۳,۵)$ است و پاسخ درست گزینهٔ (۳) می‌باشد.

مثال: خطوط $L_۱: ۵x-۳y=۷$ و $L_۲: -\sqrt{m}(x-۲)+۳y=m$ در نقطه‌ای به طول ۲ مشترک‌اند. زاویهٔ $L_۲$ با محور xها کدام است؟

۱ ۱۵۰° ۲ ۳۰° ۳ ۱۲۰° ۴ ۴۵°

حل: اسم نقطهٔ مشترک را A می‌گذاریم و با قرار دادن طول آن در معادلهٔ خط $L_۱$، عرضش را به دست می‌آوریم:

$$L_۱: ۵x-۳y=۷ \xrightarrow{x_A=۲} ۵(۲)-۳y_A=۷ \rightarrow y_A=۱$$

پس داریم: $A(۲,۱)$.

حالا برای پیدا کردن m، مختصات A را در $L_۲$ جایگذاری می‌کنیم:

$$L_۲: -\sqrt{m}(x-۲)+۳y=m \xrightarrow{A(۲,۱)} \cancelto{۰}{-\sqrt{m}(۲-۲)}+۳(۱)=m \rightarrow m=۳$$

پس معادلهٔ $L_۲$ به صورت $-\sqrt{۳}(x-۲)+۳y=۳$ است.

از ما زاویه خواسته، پس باید شیب $L_۲$ را به دست آوریم. بچه‌ها یاد بگیرید که هر وقت در معادلهٔ خط x و y یک سمت تساوی بودند، شیب برابر است با: $\dfrac{-\text{ضریب } x}{\text{ضریب } y}$

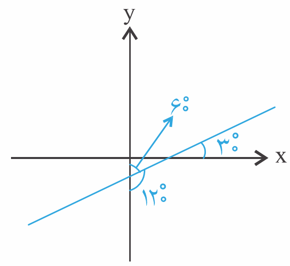
به این ترتیب شیب چند ثانیه زودتر به دست می‌آید:

$$m_{L_۲}=\frac{-(-\sqrt{۳})}{۳}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

شیب خط برابر است با تانژانت زاویه‌ای که خط با «جهتِ مثبتِ محور xها» می‌سازد:

$$\tan\alpha=\frac{\sqrt{۳}}{۳} \rightarrow \alpha=۳۰^\circ$$

ولی سؤال زاویهٔ خط با محور yها را خواسته. شکل را ببینید:



پس جواب، گزینهٔ (۳) است.

مثال: اگر معادلهٔ قطرهای دایره‌ای به صورت $۲y-m+(m-۱)x=-۵$ باشد، مختصات مرکز دایره را به دست آورید.

حل: می‌دانید که مرکز دایره محل برخورد قطرهای دایره است. به ازای دو مقدار دلخواه m، مختصات مرکز دایره به دست می‌آید:

$$m=۱ \rightarrow ۲y-۱+(\cancelto{۰}{۱-۱})x=-۵ \rightarrow ۲y=-۴ \rightarrow \underline{y=-۲}$$

$$m=۰ \rightarrow ۲y-۰+(۰-۱)x=-۵ \rightarrow ۲y-x=-۵ \xrightarrow{y=-۲} -۴-x=-۵ \rightarrow x=۱$$

بنابراین مختصات مرکز دایره $(۱,-۲)$ است.

در مقدار دادن به m زرنگی کردیم و اول $m=۱$ قرار دادیم که جملهٔ شامل x، یعنی $(m-۱)x$ کلاً صفر شود و y به دست آید.

مثال: چند نقطه روی خط $۳x-۴y-۴=۰$ قرار دارد به طوری که فاصلهٔ آنها از نقطهٔ $A(۱,۲)$ برابر ۲ باشد؟

حل: مختصات نقاط مورد سؤال را (m,n) در نظر می‌گیریم؛ چون این نقاط روی خط $۳x-۴y-۴=۰$ قرار دارند؛ پس:

$$۳m-۴n-۴=۰ \rightarrow n=\frac{۳m-۴}{۴}=\frac{۳}{۴}m-۱$$

باید فاصلهٔ این نقاط از $A(۱,۲)$، ۲ باشد:

$$\sqrt{(۱-m)^۲+(۲-n)^۲}=۲ \xrightarrow{\text{توان ۲}} (۱-m)^۲+(۲-n)^۲=۴ \xrightarrow{n=\frac{۳}{۴}m-۱}$$

$$(۱-m)^۲+(۲-\frac{۳}{۴}m+۱)^۲=۱+m^۲-۲m+\frac{۹}{۱۶}m^۲+۹-\frac{۹m}{۲}=\frac{۲۵}{۱۶}m^۲-\frac{۱۳}{۲}m+۱۰=۰$$

یک معادلهٔ درجهٔ ۲ داریم. Δ را محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta=b^۲-۴ac=(-\frac{۱۳}{۲})^۲-۴(\frac{۲۵}{۱۶})(۱۰)=\frac{۱۶۹}{۴}-\frac{۱۲۵}{۲}<۰$$

پس معادلهٔ درجهٔ ۲ ریشه ندارد، یعنی هیچ نقطه‌ای با شرایط داده شده نداریم.

۵- وضعیت خطوط نسبت به هم

۱ دو خط موازی

دو خط موازی شیب‌های برابر و عرض از مبدأهای متفاوت دارند.

مثال: چنانچه دو خط $y=4ax-x+2$ و $y=(\frac{1}{a}-1)x-3$ موازی باشند، a چقدر است؟

حل: باید شیب‌ها را مساوی هم قرار داد:

$$y=4ax-x+2=(4a-1)x+2 \rightarrow m=4a-1$$

$$y=(\frac{1}{a}-1)x-3 \rightarrow m'=\frac{1}{a}-1$$

$$m=m' \rightarrow 4a-1=\frac{1}{a}-1=\frac{1-a}{a} \xrightarrow{\text{طرفین - وسطین}} a(4a-1)=1-a \rightarrow 4a^2-\cancel{a}=1-\cancel{a} \rightarrow a^2=\frac{1}{4} \rightarrow a=\frac{\pm 1}{2}$$

۲ دو خط متقاطع

دو خطی که یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند؛ بنابراین نه شیب‌هایشان برابر است و نه عرض از مبدأهایشان.

مثال: a چقدر باشد تا خط‌های $3x-2y=7$ ، $x=-2y+5$ و $ax-2ay-x+y=3$ در یک نقطه یکدیگر را قطع کنند؟

حل: اول نقطهٔ تقاطع دو خط $3x-2y=7$ و $x=-2y+5$ را به کمک دستگاه به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}3x-\cancel{2y}=7\\ x+\cancel{2y}=5\end{cases}$$
$$\overline{4x=12} \rightarrow x=3\ ,\ y=1$$

نقطهٔ تقاطع سه خط $(3,1)$ است. کافیست $(3,1)$ در $ax-2ay-x+y=3$ جایگذاری شود تا a به دست آید.

$$a(3)-2a(1)-3+1=3 \rightarrow \boxed{a=5}$$

اگر دو خط متقاطع با شیب‌های m و m′ داشته باشیم، به طوری که $mm'=-1$ باشد؛ دو خط بر هم عمودند. به بیان دیگر شیب‌های دو خط عمود بر هم، عکس و قرینه هستند. $m=-\frac{1}{m'}$

مثال: معادلهٔ خطی را بنویسید که از نقطهٔ $(-1,3)$ بگذرد و بر خط $\frac{x-y}{3}=\frac{x}{2}$ عمود باشد.

حل: اول شیب خط داده شده را به دست می‌آوریم:

$$\frac{x-y}{3}=\frac{x}{2} \xrightarrow{\times(6)} \underbrace{2(x-y)}_{2x-2y}=3x \rightarrow y=\frac{-x}{2} \rightarrow m=\frac{-1}{2}$$

خط مورد نظر بر $\frac{x-y}{3}=\frac{x}{2}$ عمود است؛ پس شیبش عکس و قرینهٔ m است:

$$m'=\frac{-1}{m} \rightarrow m'=\frac{-1}{\frac{-1}{2}}=2$$

شیب و یک نقطه از خط را داریم، معادله را می‌نویسیم:

$$\left.\begin{matrix}A(-1,3)\\ m=2\end{matrix}\right\} y-y_0=m(x-x_0) \rightarrow y-3=2(x+1) \rightarrow \boxed{y=2x+5}$$

۳ دو خط منطبق

دو یا چند خط منطبق، شیب و عرض از مبدأ یکسان دارند و در واقع یک خط هستند.

مثال: به ازای چه مقدار a دو خط $ax+2(a^2+1)y=3a+2$ و $2x+5ay=4$ بر هم منطبق‌اند؟

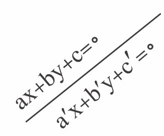
حل: یک راه این است که شیب و عرض از مبدأ هر دو خط را به دست آورده و نظیر به نظیر برابر هم قرار دهیم، ولی یک راه بهتر هم وجود دارد. در تعریف خطوط منطبق بر هم گفتیم که این خطوط در واقع یک خط هستند؛ بنابراین اگر معادلات آنها را به یک فرم مرتب کنیم، نسبت ضرایب آنها باید برابر هم باشند:

$$\begin{cases} ax+۲(a^۲+۱)y=۳a+۲ \\ ۲x+۵ay=۴ \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{۲}=\frac{۲(a^۲+۱)}{۵a}=\frac{۳a+۲}{۴}$$

حوصلهٔ کار کردن با عبارت درجهٔ ۲ نیست؛ پس تساوی کسرهای اول و سوم را بررسی می‌کنیم:

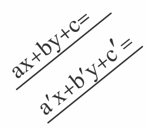
$$\frac{a}{۲}=\frac{۳a+۲}{۴} \rightarrow ۴a=۶a+۴ \rightarrow \boxed{a=-۲}$$

خلاصهٔ صحبت‌هایی که درمورد وضعیت خطوط نسبت به هم کردیم، اینها است:



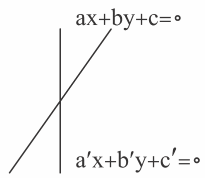
$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$

دو خط منطبق



$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$

دو خط موازی



$\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$

دو خط متقاطع

مثال: **اگر $A(۱,۱)$ و $C(-۳,-۳)$ دو رأس مقابل در لوزی ABCD باشند؛ معادلهٔ خطی که دو رأس B و D روی آن قرار می‌گیرند را به دست آورید.**

حل: در لوزی قطرها عمود منصف یکدیگرند؛ پس برای نوشتن معادلهٔ خط مورد نظر باید اول شیب خط AC را عکس و قرینه کرد، ثانیاً مختصات نقطهٔ وسط AC را به دست آورد:

$$m_{AC}=\frac{y_A-y_C}{x_A-x_C}=\frac{۱+۳}{۱+۳}=۱$$

$$m'=\frac{-۱}{m_{AC}}=-۱$$

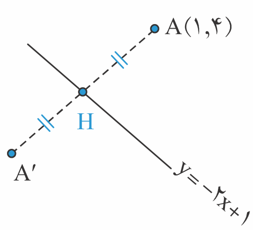
نقطهٔ وسط AC را m می‌نامیم:

$$\begin{cases} x_m=\frac{x_A+x_C}{۲}=\frac{۱-۳}{۲}=-۱ \\ y_m=\frac{y_A+y_C}{۲}=\frac{۱-۳}{۲}=-۱ \end{cases}$$

معادلهٔ خط : $y-y_m=m'(x-x_m) \rightarrow y+۱=-۱(x+۱) \rightarrow \boxed{y=-x-۲}$

مثال: **قرینهٔ نقطهٔ $(۱,۴)$ را نسبت به خط $y=-۲x+۱$ به دست آورید.**

حل: شکل تقریباً چنین چیزی است:



باید معادلهٔ AA' که عمود بر $y=-۲x+۱$ است را به دست آوریم:

$$y=-۲x+۱ \rightarrow m=-۲ \rightarrow m_{AA'}=\frac{۱}{۲} \quad , \quad A(۱,۴)$$

$$y-y_A=m_{AA'}(x-x_A) \rightarrow y-۴=\frac{۱}{۲}(x-۱) \rightarrow y=\frac{x}{۲}+\frac{۷}{۲}$$

برای به دست آوردن مختصات H، باید معادلهٔ دو خط را مساوی هم قرار دهیم:

$$-۲x+۱=\frac{x}{۲}+\frac{۷}{۲} \rightarrow ۱-\frac{۷}{۲}=\frac{x}{۲}+۲x \rightarrow \frac{۲-۷}{\cancel{۲}}=\frac{x+۴x}{\cancel{۲}} \rightarrow -۵=۵x \rightarrow x=-۱ \quad , \quad y=۳$$

نقطهٔ H دقیقاً وسط A و A' قرار دارد؛ پس:

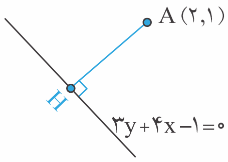
$$\begin{cases} x_H=\frac{x_A+x_{A'}}{۲} \rightarrow -۱=\frac{۱+x_{A'}}{۲} \rightarrow x_{A'}=-۳ \\ y_H=\frac{y_A+y_{A'}}{۲} \rightarrow ۳=\frac{۴+y_{A'}}{۲} \rightarrow y_{A'}=۲ \end{cases}$$

پس $A'(-۳,۲)$ می‌باشد.

مثال: دو نقطهٔ $A=(۲,m+۱)$ و $B(۲,m-۱)$ نسبت به چه خطی قرینه هستند؟

حل: طول دو نقطهٔ A و B یکی است؛ پس معادلهٔ خطی که از A و B می‌گذرد $x=۲$ است؛ بنابراین نسبت به خطی به معادلهٔ $y=a$ قرینه هستند. با توجه به اینکه $y=a$ دقیقاً وسط A و B قرار دارد؛ پس $y=\frac{m+۱+m-۱}{۲}=m$.

۶- فاصلهٔ نقطه از خط



فرض کنید نقطهٔ $A(۲,۱)$ و خط $L:۳y+۴x-۱=۰$ در صفحه باشند. می‌خواهیم فاصلهٔ A را از L به دست آوریم. فاصلهٔ نقطهٔ A از خط L در واقع طول پاره‌خطی است که از A بر L عمود می‌شود، یعنی AH؛ پس باید مختصات H را به دست آورد. خطی که از A و H گذشته را Δ نامیده و معادلهٔ آن را به دست می‌آوریم.

$$L:۳y+۴x-۱=۰ \to m_L=\frac{-۴}{۳}$$

$\Delta \to m_\Delta=\frac{۳}{۴}$ بر L عمود است.

$$\Delta: y=\frac{۳}{۴}x+L \xrightarrow{A(۲,۱)} ۱=\frac{۳}{۴}(۲)+L \to L=\frac{-۱}{۲}$$

$$\Delta: y=\frac{۳}{۴}x-\frac{۱}{۲}$$

حالا با حل دستگاه زیر، مختصات محل برخورد، یعنی همان H به دست می‌آید:

$$\begin{cases}۳y+۴x-۱=۰\\ y-\frac{۳}{۴}x+\frac{۱}{۲}=۰\end{cases} \to \begin{cases}۹y+\cancel{۱۲x}-۳=۰\\ ۱۶y-\cancel{۱۲x}+۸=۰\end{cases}$$

$$۲۵y=-۵ \to y=\frac{-۱}{۵}\ ,\ x=\frac{۲}{۵}$$

حالا باید فاصلهٔ $A(۲,۱)$ و $H(\frac{۲}{۵},\frac{-۱}{۵})$ را به دست بیاوریم.

$$AH=\sqrt{(x_A-x_H)^۲+(y_A-y_H)^۲}=\sqrt{(۲-\frac{۲}{۵})^۲+(۱+\frac{۱}{۵})^۲}=\sqrt{\frac{۶۴}{۲۵}+\frac{۳۶}{۲۵}}=\sqrt{\frac{۱۰۰}{۲۵}}=۲$$

پس فاصلهٔ نقطهٔ A از خط L، ۲ است.

حالا اگر همین راه حل را در حالت کلی برای فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_۰,y_۰)$ از خط $L:ax+by+c=۰$ اجرا کنیم، به رابطهٔ زیر می‌رسیم:

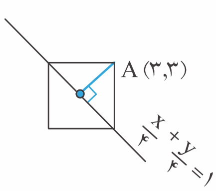
$$\text{فاصلهٔ نقطهٔ A از خط L}=d=\frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

فاصلهٔ $A(۲,۱)$ از $L:۳y+۴x-۱=۰$ را از رابطهٔ بالا به دست می‌آوریم:

$$d=\frac{|۴(۲)+۳(۱)-۱|}{\sqrt{۱۶+۹}}=\frac{|۸+۳-۱|}{\sqrt{۲۵}}=\frac{۱۰}{۵}=۲$$

مثال: در یک مربع معادلهٔ یکی از قطرها $\frac{x}{۴}+\frac{y}{۴}=۱$ و مختصات یکی از رأس‌ها $(۳,۳)$ است. مساحت مربع را به دست آورید.

حل: با توجه به اینکه مختصات نقطه در معادلهٔ قطر صدق نمی‌کند، شکل فرضی زیر را رسم کردیم:



اول فاصلهٔ A تا قطر که برابر با نصف قطر مربع، یعنی $\frac{a\sqrt{۲}}{۲}$ است را به دست می‌آوریم:

$$d=\frac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|\frac{۱}{۴}(۳)+\frac{۱}{۴}(۳)-۱|}{\sqrt{\frac{۱}{۱۶}+\frac{۱}{۱۶}}}=\frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{\sqrt{۲}}{۴}}=\frac{۴}{۲\sqrt{۲}}=\frac{۲}{\sqrt{۲}}=\sqrt{۲}$$

$$\frac{a\sqrt{۲}}{۲}=\sqrt{۲} \Rightarrow a=۲ \qquad S=a^۲=۲\times۲=۴$$

سراسری ۸۹ یک سؤال قشنگ داشته، ببینید:

مثال: دو نقطه بر خط به معادلهٔ $y=x-۱$ قرار دارند که فاصلهٔ این نقاط از خط به معادلهٔ $۲x-۳y=۵$ برابر $\sqrt{۱۳}$ است. طول این دو نقطه کدام است؟

۱) $-۱۵, ۹$ ۲) $-۱۵, ۱۱$ ۳) $۱۱, -۹$ ۴) $-۱۱, ۱۵$

حل: مختصات نقاطی که روی خط $y=x-۱$ قرار دارند، به صورت $(m, m-۱)$ است. فاصلهٔ $(m, m-۱)$ از $۲x-۳y=۵$ برابر است با:

$$\frac{|۲m-۳(m-۱)-۵|}{\sqrt{۲^۲+(-۳)^۲}}=\sqrt{۱۳}\rightarrow\frac{|۲m-۳m+۳-۵|}{\sqrt{۱۳}}=\sqrt{۱۳}\rightarrow|-m-۲|=۱۳\begin{cases}-m-۲=۱۳\rightarrow m=-۱۵\\-m-۲=-۱۳\rightarrow m=۱۱\end{cases}$$

طول این دو نقطه -۱۵ و ۱۱ است و گزینهٔ (۲) درست است. *(کار کردن با قدر مطلق که یادتون نرفته!)*

مثال: طول نقاط برخورد خط به معادلهٔ $y=۲x+۱$ و دایره‌ای به مرکز $(۲, ۵)$ و شعاع ۲ چقدر است؟

حل: سؤال ساده‌ای نیست. محل برخورد نقطه‌ایست که هم روی خط است، هم روی دایره؛ پس مختصات آن بـه صـورت $(a, ۲a+۱)$ می‌باشد. از طرفی فاصلهٔ این نقطه تا مرکز دایره یعنی تا نقطهٔ $(۲, ۵)$ برابر با شعاع دایره، یعنی ۲:

$$\sqrt{(۲-a)^۲+(۵-۲a-۱)^۲}=۲\xrightarrow{\text{توان ۲}}(۲-a)^۲+(-۲a+۴)^۲=۴\rightarrow\cancel{۴}-۴a+a^۲+۴a^۲+۱۶-۱۶a=\cancel{۴}\rightarrow ۵a^۲-۲۰a+۱۶=۰$$

یک معادلهٔ درجهٔ ۲ داریم که باید ریشه‌های آن را پیدا کنیم:

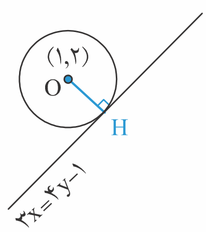
$$\Delta=b^۲-۴ac=(-۲۰)^۲-\overset{-۳۲۰}{\cancel{۴(۵)(۱۶)}}=۴۰۰-۳۲۰=۸۰$$

$$a_۱=\frac{-(-۲۰)+\sqrt{۸۰}}{۲(۵)}=\frac{۲۰+۴\sqrt{۵}}{۱۰}=\frac{۱۰+۲\sqrt{۵}}{۵}=۲+\frac{۲\sqrt{۵}}{۵}$$

$$a_۲=\frac{-(-۲۰)-\sqrt{۸۰}}{۲(۵)}=\frac{۲۰-۴\sqrt{۵}}{۱۰}=\frac{۱۰-۲\sqrt{۵}}{۵}=۲-\frac{۲\sqrt{۵}}{۵}$$

پس طول نقاط برخورد $۲+\frac{۲\sqrt{۵}}{۵}$ و $۲-\frac{۲\sqrt{۵}}{۵}$ می‌باشد.

مثال: اگر شعاع دایره‌ای به مرکز $(۱, ۲)$ و مماس به خط $۳x=۴y-۱$ برابر با $\sqrt{m+۲}$ باشد، m را محاسبه کنید.



حل: وضعیت خط و دایره به صورت زیر است:

می‌دانید که وقتی خطی بر دایره‌ای مماس می‌شود، در نقطهٔ تماس بر شعاع دایره عمـود اسـت، یعنـی در شکل روبه‌رو OH بر خط $۳x=۴y-۱$ عمود می‌باشد؛ بنابراین فاصلهٔ O از خط برابر با شعاع دایره است:

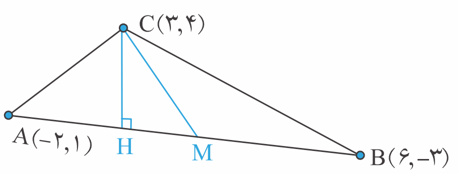
$$\text{فاصلهٔ O از خط}\ \frac{|۳-۸+۱|}{\sqrt{۹+۱۶}}=\frac{۴}{۵}\qquad \frac{۴}{۵}=\sqrt{m+۲}\xrightarrow{\text{توان ۲}}\frac{۱۶}{۲۵}=m+۲\rightarrow m=\frac{۱۶}{۲۵}-۲=\frac{۱۶-۵۰}{۲۵}=\frac{-۳۴}{۲۵}$$

مثال: فرض کنید که $A(-۲, ۱)$ ، $B(۶, -۳)$ و $C(۳, ۴)$ سه رأس مثلث ABC باشند. فاصلهٔ میانهٔ ضلع AB از پـای ارتفـاع وارد بر ضلع AB چقدر است؟

حل: شکل تقریباً این می‌شود:

وضعیت ارتفاع و میانه را می‌بینید. از ما طول HM را می‌خواهد.

اول طول MC را به دست می‌آوریم:



$$M:\ \text{وسط AB است.}\quad \begin{aligned}x_M&=\frac{x_A+x_B}{۲}=\frac{۶-۲}{۲}=۲\\ y_M&=\frac{y_A+y_B}{۲}=\frac{-۳+۱}{۲}=-۱\end{aligned}$$

$M(2,-1)$ و $C(3,4)$:

$$CM=\sqrt{(x_C-x_M)^2+(y_C-y_M)^2}=\sqrt{(3-2)^2+(4-(-1))^2}=\sqrt{1+25}=\sqrt{26}$$

حالا طول CH را به دست می‌آوریم. طول CH، یعنی فاصلهٔ نقطهٔ C از خط AB. معادلهٔ خط AB را می‌نویسیم:

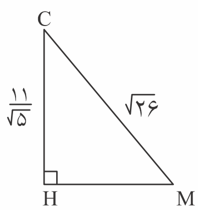
$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{-3-1}{6-(-2)}=\frac{-4}{8}=\frac{-1}{2}$$

$$y-y_A=m(x-x_A)\rightarrow y-1=\frac{-1}{2}(x+2)\rightarrow y+\frac{1}{2}x=0$$

حالا فاصلهٔ $C(3,4)$ از $y+\frac{1}{2}x=0$ را به دست می‌آوریم:

$$CH=\frac{|\frac{3}{2}+4|}{\sqrt{1+\frac{1}{4}}}=\frac{\frac{11}{2}}{\sqrt{\frac{5}{4}}}=\frac{\frac{11}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}}=\frac{11}{\sqrt{5}}$$

حالا در مثلث قائم‌الزاویهٔ CHM، وتر و یک ضلع قائمه را داریم و ضلع دیگر را می‌خواهیم:



$$HM=\sqrt{(\sqrt{26})^2-(\frac{11}{\sqrt{5}})^2}=\sqrt{26-\frac{121}{5}}=\sqrt{\frac{9}{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$$

مثال: **نقطهٔ B واقع بر محور عرض‌هاست و از خطی موازی نیمساز ربع دوم به معادلهٔ $ax+y+5=0$ به فاصلهٔ $4\sqrt{2}$ است. مقدار مثبت عرض B چقدر است؟**

حل: خط مورد نظر موازی نیمساز ربع دوم، یعنی $y=-x$ است؛ پس شیب آن -1 می‌باشد: $ax+y+5=0\rightarrow m=\frac{-a}{1}=-1\rightarrow a=1$

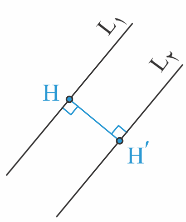
معادلهٔ خط : $x+y+5=0$

نقطهٔ B روی محور عرض‌هاست؛ پس مختصات آن به صورت $(0,b)$ می‌باشد. فاصلهٔ B از خط، $4\sqrt{2}$ است:

$$\frac{|0+b+5|}{\sqrt{1^2+1^2}}=4\sqrt{2}\rightarrow\frac{|b+5|}{\sqrt{2}}=4\sqrt{2}\rightarrow|b+5|=8\qquad\begin{cases}b+5=-8\rightarrow b=-13\\ b+5=8\rightarrow b=3\end{cases}$$

از ما مقدار مثبت را خواسته؛ پس $b=3$ قبول است.

۷- فاصلهٔ دو خط موازی



فاصلهٔ دو خط موازی، یعنی طول پاره‌خطی که بر هر دو عمود است، مثلاً در شکل مقابل فاصلهٔ L_1 و L_2 برابر با طول HH' است:

فرض کنید می‌خواهیم فاصلهٔ دو خط $5x-12y+8=0$ و $-10x+24y+1=0$ را به دست آوریم. *(تمرین کتاب درسی)*

روش حل این است که یک نقطهٔ دلخواه روی یکی از خطوط در نظر می‌گیریم و فاصلهٔ آن نقطه تا خط دیگر را به دست می‌آوریم.

نقطهٔ دلخواه $(\frac{1}{10},0)$ روی خط $-10x+24y+1=0$ است. فاصلهٔ آن تا خط $5x-12y+8=0$ می‌شود:

$$\frac{|5(\frac{1}{10})-12(0)+8|}{\sqrt{25+144}}=\frac{\frac{17}{2}}{13}=\frac{17}{26}$$

پس فاصلهٔ دو خط $\frac{17}{26}$ است.

حالا اگر مراحل بالا را برای دو خط $L_1:ax+by+c=0$ و $L_2:ax+by+c'=0$ انجام دهیم، فاصلهٔ آنها می‌شود:

$$d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

دقت دارید که چون L_1 و L_2 موازی هستند، پس ضرایب x و y در آنها یکی است.

مثال: فاصلهٔ دو خط موازی $۶y=-۸x-۴$ و $۴x+۳y-۱۹=۰$ را به دست آورید.

حل: برای استفاده از رابطهٔ $\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$ اول باید فرم ضرایب x و y در دو معادلهٔ خط یکسان شوند:

$$۴x+۳y-۱۹=۰ \xrightarrow{\times ۲} ۸x+۶y-۳۸=۰$$

$$۸x+۶y+۴=۰$$

$$\text{فاصلهٔ دو خط} = \frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}} = \frac{|-۳۸-۴|}{\sqrt{۸^۲+۶^۲}} = \frac{۴۲}{\sqrt{۱۰۰}} = \frac{۴۲}{۱۰} = ۴/۲$$

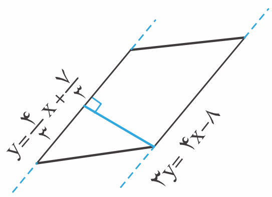
مثال: اگر دو ضلع متوازی‌الاضلاعی بر دو خط $y=\frac{۴}{۳}x+\frac{۷}{۳}$ و $۳y=۴x-۸$ قرار داشته باشند، مساحت متوازی‌الاضلاع حتماً مضربی از کدام عدد است؟

۱) ۲ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) ۳

حل: شیب خط‌ها را به دست می‌آوریم:

$$y=\frac{۴}{۳}x+\frac{۷}{۳} \Rightarrow \text{شیب} = \frac{+۴}{۳} \quad \text{و} \quad ۳y=۴x-۸ \Rightarrow \text{شیب} = \frac{+۴}{۳}$$

شیب‌ها یکی است؛ پس دو خط موازی هستند، یعنی این دو معادلهٔ خط مربوط به دو ضلع روبه‌رو در متوازی‌الاضلاع می‌باشند. شکل تقریباً به این صورت است:



فاصلهٔ دو خط برابر با ارتفاع متوازی‌الاضلاع است: $۳y-۴x-۷=۰ \;,\; ۳y-۴x+۸=۰$

$$\text{ارتفاع} = \frac{|-۷-۸|}{\sqrt{۳^۲+۴^۲}} = \frac{۱۵}{\sqrt{۲۵}} = \frac{۱۵}{۵} = ۳$$

با توجه به اینکه مساحت متوازی‌الاضلاع حاصل‌ضرب ارتفاع و قاعده است؛ پس عدد مساحت حتماً مضربی از عدد ۳ خواهد بود و گزینهٔ (۴) درست است.

مثال: مقدار a در معادلات خطوط $d:(a-۲)x+y=۲$ و $\Delta:(a-۲)x+y=-۱$ چه مقدار باید باشد تا فاصلهٔ این دو خط بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) مقدار a تأثیری ندارد.

حل: فاصلهٔ d و Δ را از رابطهٔ $\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$ به دست می‌آوریم:

$$\Delta:(a-۲)x+y+۱=۰ \qquad d:(a-۲)x+y-۲=۰$$

$$\text{فاصله}: \frac{|-۲-۱|}{\sqrt{(a-۲)^۲+۱^۲}} = \frac{|-۳|}{\sqrt{a^۲-۴a+۴+۱}} = \frac{۳}{\sqrt{a^۲-۴a+۵}}$$

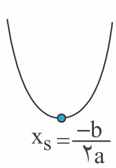
قرار است این کسر بیشترین مقدار را داشته باشد؛ پس باید مخرج کسر کوچک‌ترین عدد ممکن باشد. خیلی راحت گزینه‌ها را امتحان می‌کنیم.

$$\text{گزینهٔ (۱)}: a=۰ \quad \text{و} \quad \text{فاصله} = \frac{۳}{\sqrt{۰-۰+۵}} = \frac{۳}{\sqrt{۵}}$$

$$\text{گزینهٔ (۲)}: a=۲ \quad \text{و} \quad \text{فاصله} = \frac{۳}{\sqrt{۴-۸+۵}} = \frac{۳}{۱} = ۳$$

$$\text{گزینهٔ (۳)}: a=۳ \quad \text{و} \quad \text{فاصله} = \frac{۳}{\sqrt{۹-۱۲+۵}} = \frac{۳}{\sqrt{۲}}$$

پس به ازای $a=۲$، کسر بیشترین مقدار را دارد. حالا اگر سؤال تستی نبود چه کار می‌کردیم؟! زیر رادیکال یک عبارت درجهٔ ۲ داریم که ضریب $a^۲$ در آن مثبت است؛ پس نمودار آن یک سهمی رو به بالاست؛ بنابراین رأس این سهمی کمترین مقدار یا همان min است که برای به دست آوردن آن، اول طول رأس سهمی را به دست آورده و سپس در عبارت جایگذاری می‌کنیم:



$$x_S = \frac{-b}{۲a} = \frac{-(-۴)}{۲} = ۲$$

$$\text{کمترین مقدار} = (۲)^۲-۴(۲)+۵ = ۴-۸+۵ = ۱$$