



# جبر و معادله

## فصل اول (۲۰ پیمانه)

### پیمانه‌های ۱ تا ۲۰

درخت دانش

با درخت دانش، گام به گام پیشرفت خود را ارزیابی کنید.

**گام اول:** میزان تسلط خود را با رنگ مشخص کنید.  
**آبی:** مسلطم.  
**سبز:** نسبتاً مسلطم.  
**زرد:** مسلط نیستم.  
**گام‌های بعدی:** اگر در گام اول دانش خود را در حد رنگ زرد ارزیابی کردید اما در نوبت‌های بعدی پیشرفت کردید، می‌توانید خانه‌های سبز یا آبی را رنگ کنید. هرگاه به رنگ‌ها نگاه کنید متوجه می‌شوید در کدام قسمت‌ها نیاز به تمرین بیشتر دارید.

### جبر و معادله

#### ۲۰ پیمانه

۱۳ پیمانه‌ی ۲۰ سوالی  
 ۴ پیمانه‌ی ۱۰ سوالی  
 ۲ پیمانه‌ی ۲۰ و ۱۰ سوالی ویژه‌ی برترها  
 ۱ پیمانه‌ی ۲۰ سوالی آزمون جمع‌بندی

#### ۳۵۰ سوال شناسنامه‌دار

سوال ۱۴۳

از آزمون‌های کانون

۱۰۶ سوال طراحی شده

از کتاب درسی  
 این سوال‌ها برای پوشش مطالب کتاب درسی طراحی شده‌اند.

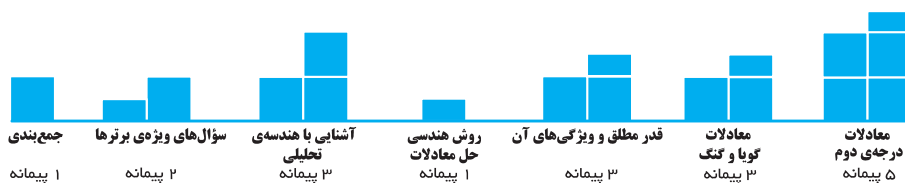
۱۰۱ سوال

از کنکورهای سراسری

کتاب درسی  
 حسابان ۱: فصل اول، صفحه‌های ۲ تا ۳۶

تعداد تست

تعداد تست	موضوع	آبی	سبز	زرد
۲۰	مجموع جملات دنباله‌ی حسابی	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۰	مجموع جملات دنباله‌ی هندسی	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۰+۱۰	روابط بین ضرایب و ریشه‌ها و تشکیل معادله با P و S	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۰	معادلات قابل تبدیل به معادله‌ی درجه‌ی دوم	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۰+۲۰	صفرهای تابع درجه ۲ و نمودار سهمی	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۰+۱۰	معادلات شامل عبارات گویا	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۰	معادلات شامل عبارات گنگ	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۰	مفهوم قدرمطلق و ویژگی‌های آن	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۰	رسم نمودار توابع قدرمطلق	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۰	معادلات قدرمطلق	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۰	روش هندسی حل معادلات	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۰	فاصله‌ی بین دو نقطه و وضعیت دو خط نسبت به هم	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۰	مختصات نقطه‌ی وسط یک پاره‌خط	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۰	فاصله‌ی یک نقطه از یک خط	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۰+۱۰	سؤال‌های ویژه‌ی برترها	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۰	آزمون جمع‌بندی پایان فصل	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



### فصل اول

۲۰ پیمانه

مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی ۲ پیمانه  
 معادلات درجه‌ی دوم ۵ پیمانه  
 معادلات گویا و گنگ ۳ پیمانه  
 قدر مطلق و ویژگی‌های آن ۳ پیمانه  
 روش هندسی حل معادلات ۱ پیمانه  
 آشنایی با هندسه‌ی تحلیلی ۳ پیمانه  
 سؤال‌های ویژه‌ی برترها ۲ پیمانه  
 جمع‌بندی ۱ پیمانه

درسنامه — مجموعه جملات دنباله‌ی حسابی

مجموع اعداد طبیعی از ۱ تا  $n$  ◀ اگر بخواهیم مجموع اعداد طبیعی از ۱ تا  $n$  را که با  $S_n$  نمایش می‌دهیم محاسبه کنیم، کافی است این مجموع را یک بار از اول به آخر و بار دیگر از آخر به اول نوشته و با هم جمع کنیم.

$$\begin{array}{r}
 S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n \\
 + \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \quad \downarrow \quad \downarrow \\
 S_n = n + (n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1 \\
 \hline
 2S_n = \underbrace{(n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) + (n+1)}_{n \text{ مرتبه}} \Rightarrow 2S_n = n(n+1) \Rightarrow S_n = \frac{n(n+1)}{2}
 \end{array}$$

به فرمول‌های زیر توجه کنید:

(۱)  $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$  مجموع اعداد طبیعی متوالی از ۱ تا  $n$

(۲)  $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$  مجموع اعداد طبیعی فرد متوالی از ۱ تا  $2n-1$

(۳)  $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n+1)$  مجموع اعداد طبیعی زوج متوالی از ۲ تا  $2n$

نست ◀ حاصل  $S = 10^2 - 9^2 + 8^2 - 7^2 + \dots + 2^2 - 1^2$  کدام است؟

- (۱) ۶۵ (۲) ۵۵ (۳) ۱۱۰ (۴) ۱۳۰

پاسخ ◀ گزینه‌ی «۲» با استفاده از اتحاد مزدوج داریم:

$$\begin{aligned}
 S &= 10^2 - 9^2 + 8^2 - 7^2 + \dots + 2^2 - 1^2 = \frac{(10-9)(10+9)}{1} + \frac{(8-7)(8+7)}{1} + \dots + \frac{(2-1)(2+1)}{1} \\
 \Rightarrow S &= 10 + 9 + 8 + 7 + \dots + 2 + 1 \xrightarrow{\text{مجموع اعداد طبیعی از ۱ تا ۱۰}} S = \frac{10(10+1)}{2} = \frac{10 \times 11}{2} = 55
 \end{aligned}$$

مجموع جملات دنباله‌ی حسابی ◀ همانند روشی که در تعیین مجموع اعداد طبیعی از ۱ تا  $n$  بکار بردیم، می‌توانیم مجموع  $n$  جمله‌ی اول یک دنباله‌ی حسابی را بیابیم. در یک دنباله‌ی حسابی، با جمله‌ی اول  $a_1$  و قدر نسبت  $d$  و جمله‌ی عمومی  $a_n$ ، مجموع  $n$  جمله‌ی اول با  $S_n$  نمایش داده می‌شود و می‌نویسیم:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

مجموع این جملات از رابطه‌های زیر به‌دست می‌آید.

$$(1) S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \quad (2) S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

مثال: مجموع  $40$  جمله‌ی اول دنباله‌ی حسابی  $\dots, 15, 11, 7, 3$  را بیابید.

حل: جمله‌ی اول دنباله  $a_1 = 3$  و قدر نسبت  $d = 7 - 3 = 4$  است، بنابراین وقتی  $n = 40$  است، با استفاده از رابطه‌ی (۱)،  $S_{40}$  را می‌یابیم:

$$S_{40} = \frac{40}{2}(2 \times 3 + (40-1) \times 4) = 20(6 + 156) = 3240$$

نست ◀ چند جمله‌ی اول دنباله‌ی حسابی  $\dots, 9, 7, 5$  را با هم جمع کنیم تا حاصل مجموع،  $572$  باشد؟

- (۱) ۲۲ (۲) ۲۶ (۳) ۲۴ (۴) ۱۸

پاسخ ◀ گزینه‌ی «۱» در سؤال از ما خواسته شده  $n$  ای را بیابیم که به ازای آن  $S_n = 572$  باشد. از آنجایی که  $a_1 = 5$  و  $d = 7 - 5 = 2$ ، پس با

$$572 = \frac{n}{2}(2 \times 5 + (n-1) \times 2) \Rightarrow n(n+4) = 572$$

استفاده از فرمول (۱) خواهیم داشت:

$$\Rightarrow n^2 + 4n - 572 = 0 \xrightarrow{\text{اتحاد یک جمله‌ی مشترک}} (n-22)(n+26) = 0 \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} n = 22$$

**تست** مجموع همهی عددهای دو رقمی مضرب ۵ کدام است؟

- ۸۸۰ (۱)      ۹۲۵ (۲)      ۹۴۵ (۳)      ۹۰۰ (۴)

**پاسخ** گزینهی «۳» اولین عدد دو رقمی و مضرب ۵، برابر  $a_1 = 10$  و آخرین عدد  $a_n = 95$  است. تعداد این اعداد را به صورت زیر می‌یابیم:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \xrightarrow[a_1=10]{a_n=95} 95 = 10 + (n-1) \times 5 \Rightarrow n = 18$$

$$S_{18} = \frac{18}{2}(10+95) = 945$$

بنابراین مجموع اعداد دو رقمی مضرب ۵ برابر است با:

**نکته** می‌توان نشان داد که مجموع  $n$  جمله‌ی اول یک دنباله‌ی حسابی، یک چندجمله‌ای از درجه‌ی دوم بر حسب  $n$  (فاقد عدد ثابت)، به شکل  $S_n = an^2 + bn$  است. در این صورت قدر نسبت برابر  $d = 2a$  (دو برابر ضریب  $n^2$ ) و جمله‌ی اول برابر  $a_1 = S_1$  است.

**تست** مجموع  $n$  جمله‌ی اول یک دنباله‌ی حسابی از رابطه‌ی  $S_n = 3n^2 - 2n$  به دست می‌آید، اختلاف جمله‌ی اول و قدر نسبت کدام است؟

- ۱ (۱)      ۲ (۲)      ۳ (۳)      ۵ (۴)

**پاسخ** گزینهی «۴» به ازای  $n = 1$  در رابطه، جمله‌ی اول برابر  $S_1 = a_1 = 3 - 2 = 1$  است. همچنین قدر نسبت برابر  $d = 2 \times 3 = 6$  است، بنابراین اختلاف جمله‌ی اول و قدر نسبت برابر  $d - a_1 = 6 - 1 = 5$  است.

**رابطه‌ی بین  $S_n$  و  $S_{n-1}$  با  $a_n$**  اگر مجموع  $n$  جمله‌ی اول یک دنباله‌ی حسابی داده شده باشد، آنگاه جمله‌ی عمومی دنباله از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n \quad \xrightarrow{\text{تفاضل}} \quad S_n - S_{n-1} = a_n$$

$$S_{n-1} = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}$$

توجه کنید که با در اختیار داشتن  $a_n$  می‌توانیم جمله‌ی اول، قدر نسبت یا هر جمله‌ای از دنباله را بیابیم.

**تست** در یک دنباله‌ی حسابی، مجموع  $n$  جمله‌ی اول از رابطه‌ی  $S_n = \frac{n^2}{3}$  به دست می‌آید. جمله‌ی عمومی دنباله کدام است؟

- $\frac{1}{3}(2n-1)$  (۱)       $\frac{n}{3}$  (۲)       $\frac{1}{3}(4n-3)$  (۳)       $\frac{2n}{3}-1$  (۴)

**پاسخ** گزینهی «۱»  $a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{n^2}{3} - \frac{(n-1)^2}{3} = \frac{1}{3}(n^2 - (n-1)^2) = \frac{1}{3}(n - (n-1))(n + (n-1)) = \frac{1}{3}(2n-1)$

**نکته** در یک دنباله‌ی حسابی، مجموع جملات با شروع از جمله‌ی  $m$  ام و ختم به جمله‌ی  $n$  ام برابر است با:

$$a_m + a_{m+1} + \dots + a_n = S_n - S_{m-1}$$

۲۰  
تست

## پیمانه‌ی ۱



مجموع اعداد طبیعی از ۱ تا  $n$       تیپ ۱      صفحه‌های ۲ و ۳ و تمرین‌های صفحه‌ی ۶ حسابان ۱

۱. مجموع همهی اعداد موجود در جدول ضرب  $10 \times 10$  چقدر است؟

- ۵۰۵۰ (۱)      ۵۵۰۰ (۲)      ۳۰۲۵ (۳)      ۶۰۵۰ (۴)

۲. جواب معادله‌ی  $\frac{1+3+5+\dots+(2n-1)}{2+4+6+\dots+2n} = \frac{115}{116}$  ، کدام است؟

- ۱۱۰ (۱)      ۱۱۵ (۲)      ۱۱۶ (۳)      ۲۳۱ (۴)

۳. اگر  $S_1 = 2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 49^2$  و  $S_2 = 1^2 + 3^2 + \dots + 49^2$ ، در این صورت  $S_1 - S_2$  کدام است؟

- ۱۲۲۵ (۱)      ۱۷۲۵ (۲)      ۱۲۷۵ (۳)      ۱۲۵۷ (۴)

۴. بر محیط دایره‌ای ۳۱ نقطه‌ی متمایز قرار دارد. از هر نقطه به نقاط دیگر وصل می‌کنیم. تعداد کل وترهای متمایز کدام است؟

- ۴۸۰ (۱)      ۴۶۵ (۲)      ۹۶۱ (۳)      ۹۰۰ (۴)

۵. اعداد طبیعی فرد را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد جملات در هر دسته، برابر شماره‌ی آن دسته باشد، ... (۱، ۳)، (۵، ۷)، (۹، ۱۱)، ...

مجموع دو جمله‌ی اول و آخر دسته‌ی سی‌ام، کدام است؟

- ۱۷۰۰ (۱)      ۱۷۵۰ (۲)      ۱۸۰۰ (۳)      ۱۸۵۰ (۴)



۶. اعداد  $\frac{5}{2}, \dots, y, x, 1$ ، چهار جمله‌ی اول یک دنباله‌ی حسابی‌اند. مجموع پانزده جمله‌ی اول این دنباله کدام است؟

(حسابان ۱- صفحه‌ی ۳- مشابه مثال) (سراسری ریاضی خارج از کشور - ۸۶)

۵۷ (۱) ۶۲/۵ (۲) ۶۷/۵ (۳) ۶۸ (۴)

۷. در یک دنباله‌ی حسابی، جمله‌ی پنجم برابر ۳ و هر جمله از جمله‌ی ماقبل خود به اندازه‌ی  $\frac{1}{4}$  کم‌تر است. مجموع ۱۰ جمله‌ی اول آن کدام است؟

(حسابان ۱- صفحه‌ی ۳- مکمل مثال) (سراسری تجربی - ۸۲)

۲۲/۵ (۱) ۲۵ (۲) ۲۷/۵ (۳) ۳۰ (۴)

۸. در یک دنباله‌ی حسابی، جمله‌ی  $n$ ام به صورت  $a_n = \frac{3}{2}n - 5$  است. مجموع ۱۵ جمله‌ی اول این دنباله، کدام است؟

(حسابان ۱- صفحه‌ی ۴- کار در کلاس- مرتبط با ۱) (سراسری تجربی - ۸۹)

۹۰ (۱) ۱۰۵ (۲) ۱۲۰ (۳) ۱۳۵ (۴)

۹. در یک دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی اول  $a$ ، اگر یک واحد به قدر نسبت جملات افزوده شود، آنگاه به مجموع ۲۰ جمله‌ی اول چقدر افزوده خواهد شد؟

(حسابان ۱- صفحه‌ی ۳- فعالیت- مرتبط با ۱) (سراسری ریاضی - ۸۳)

۱۶۰ (۱) ۱۷۰ (۲) ۱۸۰ (۳) ۱۹۰ (۴)

۱۰. اگر به جمله‌ی اول یک دنباله‌ی حسابی ۲ واحد بیفزاییم، چه قدر از قدر نسبت آن کم کنیم تا مجموع ۱۰ جمله‌ی اول آن ثابت بماند؟

(حسابان ۱- صفحه‌ی ۳- فعالیت- مرتبط با ۱) (آزمون کانون - ۵ آبان ۹۶)

$\frac{2}{9}$  (۱)  $\frac{2}{10}$  (۲)  $\frac{4}{9}$  (۳)  $\frac{4}{10}$  (۴)

۱۱. مجموع  $n$  جمله‌ی اول از یک دنباله‌ی حسابی به صورت  $S_n = \frac{n(n-15)}{6}$  است. در این دنباله مجموع جملات با شروع از جمله‌ی هفتم و ختم به

جمله‌ی هجدهم، کدام است؟ (حسابان ۱- صفحه‌ی ۴- کار در کلاس- مرتبط با ۱) (سراسری ریاضی خارج از کشور - ۹۰)

۹ (۱)  $\frac{29}{3}$  (۲)  $\frac{49}{3}$  (۳) ۱۸ (۴)

۱۲. در یک دنباله‌ی حسابی، جمله‌ی هفتم نصف جمله‌ی سوم است. مجموع چند جمله‌ی اول از این دنباله، صفر است؟

(حسابان ۱- صفحه‌ی ۶- مکمل تمرین ۱) (سراسری تجربی خارج از کشور - ۸۸)

۱۸ (۱) ۱۹ (۲) ۲۰ (۳) ۲۱ (۴)

۱۳. در دنباله‌ی حسابی  $\dots, 5, 8, 11$  حداقل چند جمله‌ی آن را باید جمع کنیم تا حاصل از ۵۰۰ بیشتر شود؟

(حسابان ۱- صفحه‌ی ۶- مشابه تمرین ۱)

۱۵ (۱) ۱۸ (۲) ۲۱ (۳) ۲۴ (۴)

۱۴. مجموع تمام اعداد طبیعی بخش‌پذیر بر ۶ بین دو عدد ۱۰۰ و ۲۰۰ کدام است؟

(حسابان ۱- صفحه‌ی ۴- مکمل تمرین ۲) (سراسری تجربی - ۸۱)

۲۴۲۰ (۱) ۲۴۵۰ (۲) ۲۵۲۰ (۳) ۲۵۵۰ (۴)

۱۵. مجموع اعداد طبیعی دو رقمی که باقی‌مانده‌ی تقسیم آن‌ها بر ۴ برابر ۱ باشد، کدام است؟

(حسابان ۱- صفحه‌ی ۶- مشابه تمرین ۲)

۱۴۵۲ (۱) ۱۱۳۲ (۲) ۱۳۵۲ (۳) ۱۲۱۰ (۴)

۱۶. اعداد طبیعی را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم که آخرین جمله‌ی هر دسته، مجذور کامل باشد:  $\dots, (9, 8, 7, 6, 5), (4, 3, 2), (1)$

(حسابان ۱- صفحه‌ی ۴- کار در کلاس- مرتبط با ۱) (سراسری ریاضی خارج از کشور - ۸۴)

۱۶۹۱ (۱) ۱۷۱۰ (۲) ۱۷۲۹ (۳) ۱۷۴۸ (۴)

۱۷. در بیست جمله‌ی اول از یک دنباله‌ی حسابی، مجموع جملات ردیف فرد ۱۳۵ و مجموع جملات ردیف زوج ۱۵۰ می‌باشد، جمله‌ی اول کدام است؟

(حسابان ۱- صفحه‌ی ۶- تمرین ۴) (سراسری تجربی خارج از کشور - ۸۵)

۱ (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴)

۱۸. در یک دنباله‌ی حسابی مجموع بیست جمله‌ی اول، سه برابر مجموع دوازده جمله‌ی اول آن است. اگر جمله‌ی سوم برابر ۶ باشد، جمله‌ی دهم

کدام است؟ (حسابان ۱- صفحه‌ی ۳- مرتبط با مثال) (سراسری ریاضی - ۹۰)

۳۲ (۱) ۳۴ (۲) ۳۶ (۳) ۳۸ (۴)

۱۹. در یک دنباله‌ی حسابی، مجموع ۵ جمله‌ی اول،  $\frac{1}{3}$  مجموع پنج جمله‌ی بعدی است. جمله‌ی دوم چند برابر جمله‌ی اول است؟

(حسابان ۱- صفحه‌ی ۳- فعالیت- مرتبط با ۱) (سراسری تجربی خارج از کشور - ۹۱)

$\frac{3}{2}$  (۱)  $\frac{5}{2}$  (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۲۰. اگر جمله‌ی عمومی یک دنباله‌ی حسابی به صورت  $a_n = 2n + 1$  باشد، آنگاه مجموع پنج جمله‌ی سوم این دنباله کدام است؟

(حسابان ۱- صفحه‌ی ۴- کار در کلاس- مرتبط با ۱) (آزمون کانون - ۲۱ مهر ۹۶)

۱۳۵ (۱) ۲۵۵ (۲) ۱۲۰ (۳) ۳۵ (۴)

مجموع جملات دنباله هندسی  $\leftarrow$  دنباله هندسی با جمله اول  $a_1$  و قدر نسبت  $q$  را در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم مجموع  $n$  جمله اول این دنباله را که با  $S_n$  نمایش می‌دهیم، پیدا کنیم. جملات این دنباله به صورت زیر است:

$$a_1, a_1q, a_1q^2, \dots, a_1q^{n-1}$$

که در آن  $a_n = a_1q^{n-1}$ . مجموع  $n$  جمله اول این دنباله برابر است با:

$$(1) S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \dots + a_1q^{n-1}$$

$$(2) qS_n = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \dots + a_1q^{n-1} + a_1q^n$$

با ضرب طرفین رابطه (1) در  $q \neq 1$  داریم:

$$(1) - (2) : S_n - qS_n = a_1 - a_1q^n \Rightarrow (1-q)S_n = a_1(1-q^n) \Rightarrow S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}, q \neq 1$$

مثال: مجموع چند جمله اول دنباله هندسی  $\dots, 32, -16, 8$  برابر 1368 است؟

حل: در دنباله داده شده، جمله اول  $a_1 = 8$  و قدر نسبت  $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{-16}{8} = -2$  است. با توجه به اینکه  $S_n = 1368$  است، پس:

$$S_n = \frac{8(1-(-2)^n)}{1-(-2)} = 1368 \Rightarrow 8(1-(-2)^n) = 1368 \times 3 \Rightarrow 1-(-2)^n = 513 \Rightarrow (-2)^n = -512 = (-2)^9 \Rightarrow n = 9$$

مثال: حاصل عبارت  $x + x^2 + x^3 + \dots + x^{10}$  را به ازای  $x = \sqrt{2}$  بیابید.

حل: مجموع داده شده، یک دنباله هندسی با جمله اول  $a_1 = x$  و قدر نسبت  $q = \frac{x^2}{x} = x$  است و تعداد جملات  $10$  تا است، پس:

$$S_{10} = \frac{x(1-x^{10})}{1-x} = \frac{\sqrt{2}(1-(\sqrt{2})^{10})}{1-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(1-2^5)}{1-\sqrt{2}} = \frac{-31\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$$

مثال: با محاسبه  $S = a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + 1$  به کمک مجموع جملات دنباله هندسی نشان دهید:

$$a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1)$$

حل: با ضرب طرفین تساوی داده شده در  $a$  خواهیم داشت:

$$\begin{cases} aS = a^n + a^{n-1} + \dots + a \\ S = a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + 1 \end{cases} \xrightarrow{aS-S} aS - S = a^n - 1 \Rightarrow S = \frac{a^n - 1}{a - 1}$$

$$\Rightarrow \frac{a^n - 1}{a - 1} = a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + 1 \Rightarrow a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + 1)$$

به اتحادهای زیر توجه کنید:

$$(1) a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1) \quad (n \text{ عدد طبیعی})$$

$$(2) a^n + 1 = (a+1)(a^{n-1} - a^{n-2} + \dots - a + 1) \quad (n \text{ عدد طبیعی و فرد})$$

رابطه بین  $S_n$  و  $S_{2n}$  در دنباله هندسی  $\leftarrow$  در یک دنباله هندسی با جمله اول  $a_1$  و قدر نسبت  $q$ ، رابطه بین  $S_{2n}$  (مجموع  $2n$  جمله اول) و  $S_n$  (مجموع  $n$  جمله اول) دنباله به صورت زیر است:

$$\frac{S_{2n}}{S_n} = 1 + q^n$$

مثال: در یک دنباله هندسی با قدر نسبت 2، مجموع شش جمله اول چند برابر مجموع سه جمله اول است؟

حل:

$$\frac{S_6}{S_3} = 1 + q^3 \Rightarrow \frac{S_6}{S_3} = 1 + 2^3 = 9 \Rightarrow S_6 = 9S_3$$



مجموع جملات دنباله‌ی هندسی

تیپ ۳

صفحه‌های ۴ تا ۶ حسابان ۱

۲۱. در یک دنباله‌ی هندسی افزایشی به صورت ... ,  $b$  ,  $9$  ,  $a$  ,  $4$  , مجموع شش جمله‌ی اول کدام است؟

(حسابان ۱ - صفحه‌ی ۵ - مکمل کار در کلاس) (سراسری ریاضی خارج از کشور - ۸۹)

$81\frac{3}{8}$ (۱)	$81\frac{3}{8}$ (۲)	$82\frac{3}{8}$ (۳)	$83\frac{1}{8}$ (۴)
---------------------	---------------------	---------------------	---------------------

۲۲. در یک دنباله‌ی هندسی، مجموع جملات اول و سوم برابر ۱ و مجموع چهار جمله‌ی اول آن ۳ می‌باشد. مجموع شش جمله‌ی اول کدام است؟

(حسابان ۱ - صفحه‌ی ۵ - مکمل کار در کلاس) (سراسری ریاضی - ۸۸)

$10/8$ (۱)	$11/2$ (۲)	$12/6$ (۳)	$13/4$ (۴)
------------	------------	------------	------------

۲۳. اگر مجموع  $n$  جمله‌ی اول دنباله‌ی ... ,  $(1+2+2^2+\dots+2^{n-1})$  , ... ,  $(1+2)$  ,  $1$  را با  $S_n$  نمایش دهیم، آن‌گاه  $S_9$  کدام است؟

(حسابان ۱ - صفحه‌ی ۵ - فعالیت - مرتبط با نتیجه‌ی ۲ - ب) (آزمون کانون - ۱۹ آبان ۹۶)

$512$ (۱)	$503$ (۲)	$1015$ (۳)	$1013$ (۴)
-----------	-----------	------------	------------

۲۴. جمله‌ی عمومی یک دنباله به صورت  $a_n = 3 \times 2^{n+1}$  است. حداقل چند جمله‌ی اول از این دنباله را جمع کنیم تا حاصل از ۹۶۰۰۰ بیش تر شود؟

(حسابان ۱ - صفحه‌ی ۶ - مشابه تمرین ۵) (آزمون کانون - ۱۹ آبان ۹۶)

$12$ (۱)	$13$ (۲)	$14$ (۳)	$15$ (۴)
----------	----------	----------	----------

(حسابان ۱ - صفحه‌ی ۵ - مکمل کار در کلاس) (آزمون کانون - ۹۰)

۲۵. حاصل  $S_n = 9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{99\dots9}_n$  کدام است؟

$\frac{10^{n+1}-10}{9} - n$ (۱)	$\frac{10^{n+1}-10}{9} - n$ (۲)	$\frac{10^{n+1}-10}{9} + n$ (۳)	$\frac{10^{n-1}-10}{9} - n$ (۴)
---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------

۲۶. مجموع یازده جمله‌ی اول یک دنباله‌ی حسابی با مجموع چهار جمله‌ی اول یک دنباله‌ی هندسی برابر است. اگر قدرنسبت دنباله‌ی هندسی ۴/۵ و مجموع جملات سوم و نهم دنباله‌ی حسابی ۸۵ باشد، جمله‌ی اول دنباله‌ی هندسی کدام است؟

(حسابان ۱ - صفحه‌های ۳ و ۵ - ترکیبی) (آزمون کانون - ۵ آذر ۹۶)

$4$ (۱)	$5$ (۲)	$2$ (۳)	$3$ (۴)
---------	---------	---------	---------

۲۷. حاصل  $A = (1+x+x^2+\dots+x^8)(1-x+x^2-\dots+x^8)$  به ازای  $x = \sqrt{2}$  کدام است؟

(حسابان ۱ - صفحه‌ی ۶ - مشابه تمرین ۷) (سراسری ریاضی - ۸۲)

$507$ (۱)	$511$ (۲)	$512$ (۳)	$516$ (۴)
-----------	-----------	-----------	-----------

(حسابان ۱ - صفحه‌ی ۶ - نتیجه‌ی تمرین ۷)

۲۸. اگر  $(1+a^8)(1+a^4)(1+a^2)(1+a) = 1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1}$  ،  $n$  کدام است؟

$8$ (۱)	$16$ (۲)	$32$ (۳)	$64$ (۴)
---------	----------	----------	----------

(حسابان ۱ - صفحه‌ی ۶ - نتیجه‌ی تمرین ۷) (سراسری ریاضی - ۹۳)

۲۹. حاصل عبارت  $\frac{t^{11}+t^{10}+t^9+\dots+t+1}{t^9+t^6+t^3+1}$  ، به ازای  $t = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$  کدام است؟

$2$ (۱)	$3$ (۲)	$4$ (۳)	$5$ (۴)
---------	---------	---------	---------

(حسابان ۱ - صفحه‌ی ۶ - نتیجه‌ی تمرین ۷) (سراسری ریاضی خارج از کشور - ۹۳)

۳۰. حاصل عبارت  $\frac{t^8-t^7+t^6-\dots-t+1}{t^6-t^3+1}$  ، به ازای  $t = \frac{1+\sqrt{17}}{2}$  کدام است؟

$3$ (۱)	$4$ (۲)	$5$ (۳)	$6$ (۴)
---------	---------	---------	---------

۳۱. در یک دنباله‌ی هندسی که جملات آن روند افزایشی دارند، مجموع دوازده جمله‌ی اول ۲۷۳ برابر مجموع چهار جمله‌ی اول است. جمله‌ی پنجم چند برابر جمله‌ی دوم است؟

(حسابان ۱ - صفحه‌ی ۵ - فعالیت - مرتبط با ۲ - ب) (آزمون کانون - ۲۱ مهر ۹۶)

$8$ (۱)	$10$ (۲)	$16$ (۳)	$4$ (۴)
---------	----------	----------	---------

۳۲. تعداد جملات یک دنباله‌ی هندسی عدد زوج است. اگر مجموع تمام جملات آن ۳ برابر مجموع جملات با ردیف فرد باشد، قدر نسبت آن کدام است؟

(حسابان ۱ - صفحه‌ی ۵ - فعالیت - نتیجه‌ی ۲ - ب) (سراسری ریاضی - ۹۴)

$\frac{1}{3}$ (۱)	$\frac{1}{2}$ (۲)	$2$ (۳)	$3$ (۴)
-------------------	-------------------	---------	---------

۳۳. در یک دنباله هندسی با قدر نسبت  $q$  که تعداد جملات آن زوج است، حاصل تقسیم مجموع جملات ردیف زوج بر مجموع جملات ردیف فرد، همواره کدام است؟ ( $q \neq 1$ ) (۱۳)

(حسابان ۱- صفحه ۵- فعالیت- نتیجه ۲-ب) (آزمون کانون- ۲۱ آبان ۹۵)

(۱)  $q^2$  (۲)  $q$  (۳)  $\frac{1}{q^2}$  (۴)  $\frac{1}{q}$

۳۴. بین دو عدد ۲ و  $16\sqrt{2}$ ، شش عدد چنان درج شده‌اند که هشت عدد حاصل، دنباله هندسی تشکیل داده‌اند. مجموع این هشت عدد کدام است؟ (۱۴)

(حسابان ۱- صفحه ۵- فعالیت- نتیجه ۲-ب) (سراسری ریاضی خارج از کشور - ۸۸)

(۱)  $30(\sqrt{2} + 2)$  (۲)  $48\sqrt{2}$  (۳)  $30(\sqrt{2} + 1)$  (۴)  $36(\sqrt{2} + 1)$

۳۵. برای محافظت از تابش‌های مضر مواد رادیواکتیو لایه‌های محافظی ساخته شده است که شدت تابش‌ها پس از عبور از آنها نصف می‌شود. حداقل چند لایه باید استفاده کنیم تا شدت تابش ۹۹ درصد کاهش یابد؟ (۱۵)

(حسابان ۱- صفحه ۵- مشابه مثال)

(۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

۳۶. دایره‌ای رنگ نشده به شعاع واحد مفروض است. در مرحله اول نصف آن و در مرحله بعد نصف قسمت باقی‌مانده‌ی آن و به همین ترتیب قسمت‌های باقیمانده را رنگ می‌کنیم. در پایان مرحله هفتم، در مجموع چه کسری از دایره رنگ شده است؟ (۱۶)

(حسابان ۱- صفحه ۶- مشابه تمرین ۶)

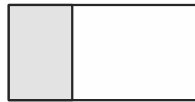
(۱)  $1 - \frac{1}{2^6}$  (۲)  $1 - \frac{1}{2^7}$  (۳)  $\frac{1}{2^6}$  (۴)  $\frac{1}{2^7}$

۳۷. مستطیلی در نظر می‌گیریم که طول و عرض آن به ترتیب ۲ و ۱ سانتی‌متر باشد. در داخل آن مجدداً مستطیلی در نظر می‌گیریم که نسبت طول به عرض آن ۲ باشد و در داخل مستطیل پدید آمده این عمل را مجدداً تکرار می‌کنیم. مجموع محیط‌های مستطیل‌ها تا مرحله ششم، چند برابر محیط مستطیل اول است؟ (۱۷)

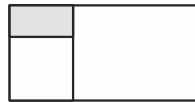
(حسابان ۱- صفحه ۶- مشابه کار در کلاس)



مرحله (۱)



مرحله (۲)



مرحله (۳)

(۱)  $\frac{31}{8}$  (۲)  $\frac{63}{32}$  (۳)  $\frac{31}{4}$  (۴)  $\frac{3}{2}$

رابطه‌ی بین  $S_n$  و  $S_{2n}$  در دنباله هندسی تیب ۴ صفحه‌های ۴ تا ۶ حسابان ۱

۳۸. در یک دنباله هندسی، مجموع سه جمله اول ۱۳۶ و مجموع شش جمله اول آن ۱۵۳ است. جمله اول، چند برابر جمله پنجم است؟ (۱۸)

(حسابان ۱- صفحه ۵- فعالیت- مرتبط با ۲-ب) (سراسری ریاضی- ۸۹)

(۱)  $\frac{81}{16}$  (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۱۶

۳۹. در یک دنباله هندسی مجموع هشت جمله اول  $\frac{5}{4}$  مجموع چهار جمله اول آن است. جمله هفتم چند برابر جمله اول است؟ (۱۹)

(حسابان ۱- صفحه ۵- فعالیت- مرتبط با ۲-ب) (سراسری ریاضی - ۸۵)

(۱)  $\frac{1}{16}$  (۲)  $\frac{1}{8}$  (۳)  $\frac{5}{32}$  (۴)  $\frac{1}{4}$

۴۰. در دنباله هندسی  $\sqrt{2}, \sqrt[6]{32}, \dots$ ، مجموع شش جمله دوم چند برابر مجموع شش جمله اول است؟ (۲۰)

(حسابان ۱- صفحه ۵- فعالیت- مرتبط با ۲-ب) (آزمون کانون - ۹۱)

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

## درسنامه

## روابط بین ضرایب و ریشه‌ها و تشکیل معادله با S و P

مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله  $\leftarrow$  اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های یک معادله‌ی درجهی دوم باشند، آنگاه:

$$(x - \alpha)(x - \beta) = 0 \Rightarrow x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0 \quad (1)$$

از طرفی در معادله‌ی درجهی دوم  $ax^2 + bx + c = 0$  با ریشه‌های  $\alpha$  و  $\beta$ ، با تقسیم طرفین معادله بر  $a \neq 0$ ، معادله‌ی زیر حاصل می‌شود:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \xrightarrow{(1)} \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \text{ و } \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

اگر  $x'$  و  $x''$  ریشه‌های معادله‌ی درجهی دوم  $ax^2 + bx + c = 0$  باشند، آنگاه:

$$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \quad (\text{مجموع ریشه‌ها}) \quad P = \alpha\beta = \frac{c}{a} \quad (\text{حاصل ضرب ریشه‌ها})$$

مثال: مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های حقیقی معادله‌ی  $x^2 - 5x - 3 = 0$  را بدون حل آن بیابید.

حل: توجه کنید که  $\Delta = (-5)^2 - 4(-3) = 37 > 0$ ، بنابراین:

$$S = -\frac{b}{a} = -\frac{-5}{1} = 5 \quad \text{و} \quad P = \frac{c}{a} = \frac{-3}{1} = -3$$

روابط متقارن و نامتقارن بین ریشه‌های معادله: رابطه‌هایی که در آن‌ها با تعویض جای متغیرها، تغییری نمی‌کنند را متقارن می‌نامیم، به‌عنوان مثال

$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \quad \text{رابطه‌ای متقارن و} \quad \alpha + 2\beta = 3 \quad \text{رابطه‌ای نامتقارن است. در تست‌هایی که رابطه‌ی جبری بین دو ریشه داده شده، دو حالت خواهیم داشت:}$$

الف) رابطه‌ی داده شده متقارن باشد: در این حالت از اتحادهای جبری استفاده کرده و رابطه را بر حسب S و P می‌نویسیم.

تست) اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله‌ی  $2x^2 - 5x - 1 = 0$  باشند، حاصل  $\alpha^2 + \beta^2$  کدام است؟

$$\frac{27}{4} \quad (4) \quad \frac{15}{4} \quad (3) \quad \frac{29}{4} \quad (2) \quad \frac{17}{4} \quad (1)$$

پاسخ) گزینه‌ی «۲» با استفاده از اتحاد  $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$  خواهیم داشت:

$$\alpha^2 + \beta^2 = \underbrace{(\alpha + \beta)^2}_S - 2\underbrace{\alpha\beta}_P = S^2 - 2P = \left(-\frac{-5}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{25}{4} + 1 = \frac{29}{4}$$

اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله‌ی درجهی دوم  $ax^2 + bx + c = 0$  باشند، آنگاه:

$$(1) \alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P \quad (2) \alpha^3 + \beta^3 = S^3 - 3PS \quad (3) \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{S + 2\sqrt{P}} \quad (4) |\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

مثال: اگر ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم  $x^2 + bx + 2 = 0$ ، دو عدد صحیح متوالی باشند، b را بیابید.

حل: ریشه‌ها را  $\alpha$  و  $\alpha + 1$  در نظر می‌گیریم، بنابراین:

$$\alpha + 1 - \alpha = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} \Rightarrow 1 = \frac{\sqrt{b^2 - 8}}{1} \Rightarrow b^2 - 8 = 1 \Rightarrow b^2 = 9 \Rightarrow b = \pm 3$$

ب) رابطه‌ی داده شده متقارن نباشد: در این حالت معمولاً با استفاده از S یا P، یک ریشه‌ی معادله را یافته و با صدق دادن این ریشه در خود معادله، مجهول خواسته شده را می‌یابیم.

تست) در معادله‌ی  $2x^2 - 10x + a = 0$ ، یک ریشه از دو برابر ریشه‌ی دیگر، یک واحد بیشتر است. a کدام است؟

$$\frac{88}{3} \quad (4) \quad \frac{44}{9} \quad (3) \quad \frac{83}{7} \quad (2) \quad \frac{88}{9} \quad (1)$$

پاسخ) گزینه‌ی «۱» اگر ریشه‌ها را  $\alpha$  و  $\beta$  بنامیم، آنگاه  $\alpha = 2\beta + 1$ . با افزودن  $\beta$  به طرفین این رابطه خواهیم داشت:

$$\alpha + \beta = 2\beta + 1 \xrightarrow{\alpha + \beta = 10} 10 = 3\beta + 1 \Rightarrow \beta = \frac{9}{3} = 3$$



ریشه‌ی معادله در خود معادله صدق می‌کند، با قرار دادن  $\frac{4}{3}$  در معادله  $a$  را می‌یابیم:

$$2\left(\frac{4}{3}\right)^2 - 1 \cdot \left(\frac{4}{3}\right) + a = 0 \Rightarrow \frac{32}{9} - \frac{40}{3} + a = 0 \Rightarrow a = \frac{88}{9}$$

**تست** اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله‌ی  $x^2 - 4x - 2 = 0$  باشند، آنگاه حاصل عبارت  $\alpha^2 - 5\alpha - \beta$  کدام است؟

۱ (۱)      ۲ (۲)      ۳ (-۲)      ۴ (-۱)

**پاسخ** گزینه‌ی «۳»

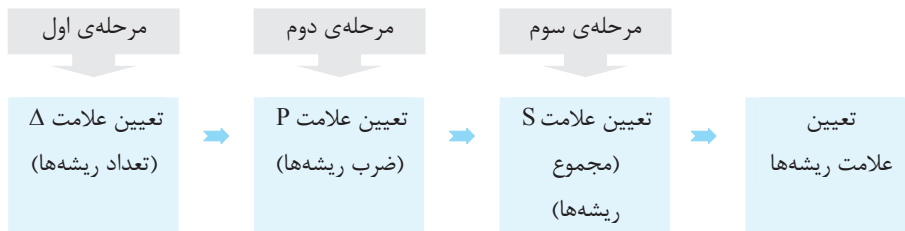
$$x^2 - 4x - 2 = 0 \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{-(-4)}{1} = 4$$

$\alpha$  ریشه‌ی معادله است، پس در خود معادله صدق می‌کند:

$$x^2 - 4x - 2 = 0 \Rightarrow \alpha^2 - 4\alpha - 2 = 0 \Rightarrow \alpha^2 = 4\alpha + 2$$

$$\xrightarrow{\alpha^2 = 4\alpha + 2} \alpha^2 - 5\alpha - \beta = 4\alpha + 2 - 5\alpha - \beta = -(\alpha + \beta) + 2 = -4 + 2 = -2$$

**۲** تعداد و علامت ریشه‌های معادله: با استفاده از  $P$ ،  $S$  و  $\Delta$  ی معادله‌ی درجه‌ی دوم  $ax^2 + bx + c = 0$  می‌توان تعداد و علامت ریشه‌های معادله را یافت. برای این منظور مراحل زیر را انجام می‌دهیم:



● **مثال:** بدون حل معادله، در مورد تعداد و علامت ریشه‌های معادله‌ی  $2x^2 - 7x + 1 = 0$  نظر دهید.

○ **حل:**  $\Delta = (-7)^2 - 4(2)(1) = 41 > 0$ ، پس معادله دو ریشه‌ی حقیقی دارد، از طرفی  $P = \frac{c}{a} = \frac{1}{2} > 0$ ، پس هر دو ریشه هم‌علامت هستند. همچنین

$$S = \frac{-b}{a} = \frac{7}{2} > 0$$

بنابراین هر دو ریشه مثبت‌اند.

**تست** معادله‌ی  $x^2 - (\sqrt{3} + 1)x + \sqrt{2} = 0$  .....  
 (۱) دو ریشه‌ی حقیقی و مثبت دارد.  
 (۲) دو ریشه‌ی حقیقی و منفی دارد.  
 (۳) دو ریشه‌ی حقیقی و مختلف‌العلامت دارد.  
 (۴) ریشه‌ی حقیقی ندارد.

**پاسخ** گزینه‌ی «۱» دلتای معادله را به‌دست می‌آوریم:

$$x^2 - (\sqrt{3} + 1)x + \sqrt{2} = 0 \Rightarrow \Delta = (-(\sqrt{3} + 1))^2 - 4\sqrt{2} = 4 + 2\sqrt{3} - 4\sqrt{2} > 0$$

از آنجا که  $\Delta > 0$  است پس معادله دو ریشه‌ی حقیقی دارد. از طرفی  $P = \frac{c}{a} = \sqrt{2} > 0$  و  $S = \frac{-b}{a} = \sqrt{3} + 1 > 0$ ، چون حاصلضرب و مجموع ریشه‌ها مثبت است، پس هر دو ریشه مثبت‌اند.

در معادله‌ی درجه‌ی دوم  $ax^2 + bx + c = 0$ :

- (الف) اگر  $ac < 0$  باشد، آنگاه معادله دارای دو ریشه‌ی حقیقی مختلف‌العلامت است. (توجه کنید که با این شرط  $\Delta > 0$  است).  
 (ب) اگر  $b = 0$  و  $\Delta > 0$ ، آنگاه معادله دارای دو ریشه‌ی حقیقی و قرینه‌ی هم است.  
 (پ) اگر  $a = c$  و  $\Delta > 0$ ، آنگاه معادله دارای دو ریشه‌ی حقیقی و عکس هم است.

**تست** معادله‌ی  $(k^2 + 1) - (2k^2 + 3)x + 2x^2 = 0$ ، به ازای هر مقدار حقیقی  $k$  .....  
 (۱) دو ریشه‌ی حقیقی و مثبت دارد.  
 (۲) دو ریشه‌ی حقیقی و منفی دارد.  
 (۳) دو ریشه‌ی حقیقی و مختلف‌العلامت دارد.  
 (۴) ریشه‌ی حقیقی ندارد.

**پاسخ** گزینه‌ی «۳» از آنجایی که  $ac = -2(k^2 + 1) < 0$ ، پس معادله به ازای هر مقدار حقیقی  $k$  دارای دو ریشه‌ی حقیقی مختلف‌العلامت است.



**تست** به ازای کدام مقدار  $m$ ، معادله‌ی درجه‌ی دوم  $(m^2 + 1)x^2 + (m^2 - 1)x + m^2 + 3m - 2 = 0$  دارای دو ریشه‌ی حقیقی و قرینه است؟

- (۱) فقط ۱
- (۲) فقط -۱
- (۳) هیچ مقداری
- (۴) ۱ و -۱

**پاسخ** گزینه‌ی «۲» دو ریشه قرینه‌اند، پس مجموع آن‌ها صفر است، یعنی  $x' + x'' = \frac{-b}{a} = 0$ ، بنابراین باید  $b = 0$  و  $\Delta > 0$  باشد، در نتیجه

$m^2 - 1 = 0$  پس  $m = 1$  یا  $m = -1$ . حال با جایگذاری مقادیر  $m$  در معادله،  $\Delta$  را بررسی می‌کنیم:

(غ ق ق) ریشه‌ی حقیقی ندارد.  $m = 1 \Rightarrow 2x^2 + 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 0 - 16 < 0$

(ق ق ق)  $m = -1 \Rightarrow 2x^2 - 4 = 0 \Rightarrow \Delta = 0 + 32 > 0$

❑ **تشکیل معادله به کمک S و P** ◀ معادله‌ی درجه‌ی دوم  $ax^2 + bx + c = 0$  با ریشه‌های حقیقی  $x'$  و  $x''$  را می‌توان بر حسب S و P به

صورت  $x^2 - Sx + P = 0$  نوشت، که در آن  $S = \frac{-b}{a}$  (مجموع ریشه‌ها) و  $P = \frac{c}{a}$  (حاصل ضرب ریشه‌ها) است.

● **مثال:** معادله‌ی درجه‌ی دومی تشکیل دهید که ریشه‌هایش  $3 - 2\sqrt{2}$  و  $3 + 2\sqrt{2}$  باشند.

○ **حل:**  $S = x_1 + x_2 = (3 - 2\sqrt{2}) + (3 + 2\sqrt{2}) = 6$  و  $P = x_1 x_2 = (3 - 2\sqrt{2})(3 + 2\sqrt{2}) = 9 - 8 = 1$

بنابراین  $S = 6$  و  $P = 1$ ، پس:

$$x^2 - Sx + P = 0 \xrightarrow{S=6, P=1} x^2 - 6x + 1 = 0$$

**تست** اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله‌ی  $2x^2 - 3x + 1 = 0$  و  $\alpha > \beta$  باشند، آنگاه معادله‌ای که ریشه‌هایش  $5\alpha$  و  $4\beta$  باشد، کدام است؟

- (۱)  $x^2 - 15x + 9 = 0$
- (۲)  $x^2 + 7x + 10 = 0$
- (۳)  $x^2 - 7x + 10 = 0$
- (۴)  $x^2 + 15x + 9 = 0$

**پاسخ** گزینه‌ی «۳» چون مجموع ضرایب صفر است، پس ریشه‌ها  $x' = 1$  و  $x'' = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$  هستند. چون  $\alpha > \beta$  پس  $\alpha = 1$  و  $\beta = \frac{1}{2}$  است. پس

$5\alpha = 5$  و  $4\beta = 2$  است و خواهیم داشت:

$$S = x_1 + x_2 = 5 + 2 = 7 \quad \text{و} \quad P = x_1 x_2 = 5 \times 2 = 10$$

بنابراین معادله‌ی مطلوب  $x^2 - 7x + 10 = 0$  است.

🔍 در بعضی از تست‌ها، ریشه‌های یک معادله بر حسب ریشه‌های معادله‌ی دیگر داده می‌شود، در این حالت، مجموع  $(S')$  و حاصل ضرب  $(P')$  ریشه‌های معادله‌ی جدید را یافته و معادله‌ی  $x^2 - S'x + P' = 0$  را تشکیل می‌دهیم.

**تست** اگر ریشه‌های معادله‌ی  $x^2 + ax + b = 0$  مربع ریشه‌های معادله‌ی  $x^2 - 3x + 1 = 0$  باشند،  $2a + b$  کدام است؟

- (۱) -۱۲
- (۲) ۱۲
- (۳) -۱۳
- (۴) ۱۳

**پاسخ** گزینه‌ی «۳» فرض می‌کنیم ریشه‌های معادله‌ی  $x^2 - 3x + 1 = 0$  برابر  $\alpha$  و  $\beta$  باشند، در این صورت ریشه‌های معادله‌ی جدید  $\alpha^2$  و  $\beta^2$  خواهند بود و داریم:

$$S = \alpha + \beta = 3, \quad P = \alpha\beta = 1$$

$$\begin{cases} S' = \alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P = 3^2 - 2 \times 1 = 7 \\ P' = \alpha^2 \beta^2 = (\alpha\beta)^2 = P^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 7x + 1 = 0$$

بنابراین  $a = -7$  و  $b = 1$  و در نتیجه  $2a + b = -14 + 1 = -13$ .

**نکته** اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم  $ax^2 + bx + c = 0$  باشند و بخواهیم معادله‌ی درجه‌ی دومی تشکیل دهیم که ریشه‌هایش: الف- قرینه‌ی ریشه‌های معادله‌ی بالا باشد، کافی است علامت  $b$  را قرینه کنیم. ب- عکس ریشه‌های معادله‌ی بالا باشد، کافی است جای  $a$  و  $c$  را عوض کنیم. پ- عکس و قرینه‌ی ریشه‌های معادله‌ی بالا باشد، کافی است جای  $a$  و  $c$  را عوض کرده و علامت  $b$  را قرینه کنیم.



## روابط بین ضرایب و ریشه‌های معادله

تیپ ۵

صفحه‌های ۷ تا ۹ و تمرین‌های صفحه‌های ۱۵ و ۱۶ حسابان ۱

۴۱. به ازای یک مقدار  $m$ ، ریشه‌های معادله‌ی  $2x^2 + 3mx + 2m + 6 = 0$ ، معکوس یکدیگرند. مجموع این دو ریشه کدام است؟

(حسابان ۱ - صفحه ۸ - مکمل مثال) (سراسری انسانی خارج از کشور - ۹۵)

- (۱)  $-1/5$  (۲)  $1/5$  (۳)  $2$  (۴)  $3$

۴۲. در معادله‌ی  $2x^2 + (2k-1)x - k = 0$ ، به ازای کدام مقدار  $k$  مجموع معکوس هر دو ریشه برابر  $\frac{1}{3}$  است؟

(حسابان ۱ - صفحه ۸ - مکمل مثال) (سراسری تجربی - ۷۷)

- (۱)  $-4$  (۲)  $-3$  (۳)  $3$  (۴)  $4$

۴۳. به ازای کدام مقدار  $m$  عدد  $\frac{1}{8}$  واسطه‌ی حسابی بین دو ریشه‌ی حقیقی معادله‌ی  $(m^2 - 4)x^2 - 3x + m = 0$  است؟

(حسابان ۱ - صفحه ۸ - مکمل مثال) (سراسری ریاضی - ۸۴)

- (۱)  $3$  (۲)  $-3$  (۳)  $4$  (۴)  $-4$

۴۴. به ازای کدام مقدار  $m$ ، عدد  $\sqrt{2}$  واسطه‌ی هندسی بین ریشه‌های حقیقی معادله‌ی  $mx^2 - 5x + m^2 - 3 = 0$  است؟

(حسابان ۱ - صفحه ۸ - مکمل مثال) (سراسری ریاضی خارج از کشور - ۸۴)

- (۱)  $1$  (۲)  $-1$  (۳)  $3$  (۴)  $-3$

۴۵. به ازای کدام مقدار  $m$ ، مجموع مربعات ریشه‌های حقیقی معادله‌ی  $mx^2 - (m+3)x + 5 = 0$  برابر ۶ می‌باشد؟

(حسابان ۱ - صفحه ۸ - فعالیت - نتیجه ۳) (سراسری تجربی - ۹۳)

- (۱)  $-\frac{9}{5}$  (۲)  $1$  (۳)  $-\frac{9}{5}$  و  $1$  (۴)  $\frac{9}{5}$  و  $-1$

۴۶. اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله‌ی  $4x^2 - 12x + 1 = 0$  باشند، مقدار  $\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}}$  چقدر است؟

(حسابان ۱ - صفحه ۸ - فعالیت - نتیجه ۳) (سراسری ریاضی خارج از کشور - ۸۵)

- (۱)  $2$  (۲)  $3$  (۳)  $4$  (۴)  $6$

۴۷. اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله‌ی  $2x^2 - (m+2)x + \frac{1}{8} = 0$  باشند و  $\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta} = 2$  باشد، آنگاه  $m$  کدام است؟

(حسابان ۱ - صفحه ۸ - فعالیت - نتیجه ۳) (آزمون کانون - ۱۹ آبان ۹۶)

- (۱)  $3$  (۲)  $4$  (۳)  $7$  (۴) به ازای هیچ مقدار  $m$

۴۸. اگر  $a + 3b + 9c = 0$ ، آن‌گاه یکی از جواب‌های معادله‌ی درجه دوم  $ax^2 + bx + c = 0$  همواره کدام است؟

(حسابان ۱ - صفحه ۸ - فعالیت - نتیجه ۳) (آزمون کانون - ۲۲ آبان ۹۴)

- (۱)  $\frac{-b}{3a}$  (۲)  $\frac{c}{3a}$  (۳)  $\frac{3c}{a}$  (۴)  $\frac{-2b}{a}$

۴۹. اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های حقیقی معادله‌ی  $x^2 - 2x - 2 = 0$  باشند، حاصل  $\alpha^2 - \alpha + \beta$  کدام است؟

(حسابان ۱ - صفحه ۸ - فعالیت - نتیجه ۳) (آزمون کانون - ۱۸ آبان ۹۷)

- (۱)  $2$  (۲) صفر (۳)  $4$  (۴)  $-2$

۵۰. در معادله‌ی  $3x^2 - 15x + m = 0$ ، اگر یکی از ریشه‌ها ۲ واحد از ریشه‌ی دیگر بیشتر باشد،  $m$  کدام است؟

(حسابان ۱ - صفحه ۱۵ - مشابه تمرین ۱-ب) (سراسری ریاضی - ۸۲)

- (۱)  $\frac{59}{5}$  (۲)  $\frac{63}{5}$  (۳)  $\frac{59}{4}$  (۴)  $\frac{63}{4}$

۵۱. به ازای کدام مقدار  $k$  در معادله‌ی درجه دوم  $2x^2 - x + k = 0$  بین ریشه‌ها رابطه‌ی  $3 = x_1 + 2x_2$  برقرار است؟

(حسابان ۱ - صفحه ۱۵ - مشابه تمرین ۱-ب) (سراسری تجربی - ۷۶)

- (۱)  $-12$  (۲)  $-10$  (۳)  $8$  (۴)  $6$



۵۲. در معادله‌ی درجه‌ی دوم  $2x^2 + ax + 9 = 0$ ، یک ریشه دو برابر ریشه‌ی دیگر است، مجموع دو ریشه‌ی مثبت کدام است؟

(حسابان ۱ - صفحه ۱۵ - مشابه تمرین ۱-ب) (سراسری تجربی خارج از کشور - ۸۴)

- ۳/۵ (۱)
- ۴ (۲)
- ۴/۵ (۳)
- ۵ (۴)

۵۳. در معادله‌ی  $3x^2 - 17x + m = 0$  یک ریشه از سه برابر ریشه‌ی دیگر ۳ واحد بیشتر است.  $m$  کدام است؟

(حسابان ۱ - صفحه ۱۵ - مشابه تمرین ۱-ب) (سراسری ریاضی - ۸۷)

- ۹ (۱)
- ۱۰ (۲)
- ۱۲ (۳)
- ۱۵ (۴)

۵۴. در معادله‌ی  $x^2 - 8x + m = 0$  یک ریشه از نصف ریشه‌ی دیگر ۵ واحد بیشتر است.  $m$  کدام است؟

(حسابان ۱ - صفحه ۱۵ - مشابه تمرین ۱-ب) (سراسری ریاضی خارج از کشور - ۹۱)

- ۱۰ (۱)
- ۱۲ (۲)
- ۱۴ (۳)
- ۱۵ (۴)

تعداد و علامت ریشه‌های معادله

تیپ ۶

صفحه‌های ۷ تا ۹ و تمرین‌های صفحه‌های ۱۵ و ۱۶ حسابان ۱

۵۵. اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله‌ی  $x^2 - 2x + 4 - 2m = 0$  باشند، به‌ازای کدام مقادیر  $m$  نقطه‌ی  $A(\alpha, \beta)$  در ناحیه‌ی اول یا سوم است؟

(حسابان ۱ - صفحه ۸ - فعالیت - مرتبط با ۲) (آزمون کانون - ۶ مرداد ۹۶)

- ۳/۲ < m (۱)
- ۳/۲ ≤ m < ۲ (۲)
- m > ۲ (۳)
- m < ۲ (۴)

۵۶. کدام معادله‌ی زیر به ازای هر مقدار حقیقی  $a$  دارای دو ریشه‌ی حقیقی و مختلف‌العلامت است؟

(حسابان ۱ - صفحه ۸ - فعالیت - مرتبط با ۲)

- (۱)  $x^2 + (a^2 + 1)x + a = 0$
- (۲)  $x^2 + ax - (a^2 + 1) = 0$
- (۳)  $x^2 + a(a^2 + 1)x + 1 = 0$
- (۴)  $(a^2 + 1)x^2 + x - a = 0$

۵۷. اگر ریشه‌های حقیقی معادله‌ی  $x^2 - 3x + 2a - 1 = 0$  هم‌علامت باشند،  $a$  کدام عدد زیر نمی‌تواند باشد؟

(حسابان ۱ - صفحه ۸ - فعالیت - مرتبط با ۳)

- ۱ (۱)
- ۱/۵ (۲)
- √۲ (۳)
- √۵ (۴)

۵۸. به ازای کدام مقدار  $m$ ، معادله‌ی  $x^2 + (m-1)x + m + 1 = 0$  دارای ریشه‌ی مضاعف منفی است؟

(حسابان ۱ - صفحه ۸ - فعالیت - مرتبط با ۳)

- (۱)  $3 \pm \sqrt{12}$
- (۲)  $3 + \sqrt{12}$
- (۳)  $3 + \sqrt{3}$
- (۴) مقداری برای  $m$  وجود ندارد.

۵۹. به ازای کدام مقدار  $m$  ریشه‌های حقیقی معادله‌ی  $mx^2 + 3x + m^2 = 2$  معکوس یکدیگرند؟

(حسابان ۱ - صفحه ۸ - فعالیت - مرتبط با ۲) (سراسری تجربی خارج از کشور - ۹۰)

- ۲ (۱)
- ۱ (۲)
- ۱ (۳)
- ۲ (۴)

۶۰. به ازای چند مقدار  $a$  ریشه‌های حقیقی معادله‌ی  $x^2 + a^2x + 1 = a(x+2)$  قرینه‌ی یکدیگرند؟

(حسابان ۱ - صفحه ۸ - فعالیت - مرتبط با ۲)

- (۱) یک مقدار
- (۲) دو مقدار
- (۳) بی‌شمار
- (۴) هیچ مقداری

تشکیل معادله‌ی درجه‌ی دوم با S و P

تیپ ۷

صفحه ۹ و تمرین‌های صفحه‌های ۱۵ و ۱۶ حسابان ۱

۶۱. معادله‌ی درجه دومی که ریشه‌هایش  $2 + \sqrt{4-a}$  و  $2 - \sqrt{4-a}$  باشد، کدام است؟

(حسابان ۱ - صفحه ۹ - مشابه کار در کلاس) (سراسری ریاضی - ۶۸)

- (۱)  $x^2 - 4x + a = 0$
- (۲)  $x^2 + ax - 4 = 0$
- (۳)  $x^2 + 4x - a = 0$
- (۴)  $x^2 - ax + 4 = 0$

۶۲. اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله‌ی  $x^2 - x - 1 = 0$  باشند، معادله‌ی درجه دومی که ریشه‌هایش  $\alpha^2 + \alpha\beta$  و  $\beta^2 + \alpha\beta$  باشد، کدام است؟

(حسابان ۱ - صفحه ۹ - فعالیت - نتیجه ۲)

- (۱)  $x^2 + x - 1 = 0$
- (۲)  $x^2 - x - 1 = 0$
- (۳)  $2x^2 - x - 1 = 0$
- (۴)  $2x^2 + x - 1 = 0$

۶۳. اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله‌ی  $x(5x+3) = 2$  باشند، به ازای کدام مقدار  $k$  مجموعه جواب‌های معادله‌ی  $4x^2 - kx + 25 = 0$  به صورت  $\left\{ \frac{1}{\alpha^2}, \frac{1}{\beta^2} \right\}$  است؟

(حسابان ۱ - صفحه ۹ - فعالیت - نتیجه ۲) (سراسری ریاضی - ۹۰)

- ۲۷ (۱)
- ۲۸ (۲)
- ۲۹ (۳)
- ۳۱ (۴)

۶۴. اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله‌ی  $3x^2 - 4x + 6 = 0$  باشند، مجموعه جواب‌های کدام معادله به صورت  $\{3\alpha - 1, 3\beta - 1\}$  است؟

(حسابان ۱ - صفحه ۹ - فعالیت - نتیجه ۲) (آزمون کانون - ۱۹ آبان ۹۶)

- (۱)  $x^2 - 2x - 4 = 0$
- (۲)  $x^2 - 6x - 13 = 0$
- (۳)  $x^2 + 6x - 13 = 0$
- (۴)  $x^2 + 2x - 4 = 0$

۶۵. اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله‌ی  $4x^2 - 5x - 1 = 0$  باشند، ریشه‌های کدام معادله به صورت  $\left\{ \frac{1}{\alpha} + 1, \frac{1}{\beta} + 1 \right\}$  است؟

(حسابان ۱ - صفحه ۹ - فعالیت - نتیجه ۲) (آزمون کانون - ۳ آذر ۹۶)

$$x^2 - 3x - 8 = 0 \quad (۴) \quad x^2 + 3x - 8 = 0 \quad (۳) \quad x^2 - 3x + 8 = 0 \quad (۲) \quad x^2 + 3x + 8 = 0 \quad (۱)$$

۶۶. اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم  $2x^2 + (c+2)x + 8 = 0$  باشد، آن‌گاه ریشه‌های معادله‌ی  $x^2 + bx + c = 0$  به صورت  $\sqrt{\alpha\beta}$  و  $2\sqrt{\alpha\beta}$  خواهد بود. حاصل  $\alpha + \beta$  کدام است؟

(حسابان ۱ - صفحه ۹ - فعالیت - نتیجه ۲) (آزمون کانون - ۱۹ آبان ۹۶)

$$-4 \quad (۴) \quad 4 \quad (۳) \quad 5 \quad (۲) \quad -5 \quad (۱)$$

۶۷. اگر هر یک از ریشه‌های معادله‌ی  $3x^2 + ax + b = 0$ ، دو برابر معکوس هر ریشه از معادله‌ی  $4x^2 - 7x + 3 = 0$  باشد،  $a$  کدام است؟

(حسابان ۱ - صفحه ۹ - فعالیت - نتیجه ۲) (سراسری تجربی - ۸۶)

$$-6 \quad (۴) \quad -8 \quad (۳) \quad -12 \quad (۲) \quad -14 \quad (۱)$$

۶۸. ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم  $x^2 + ax + b = 0$ ، یک واحد از ریشه‌های معادله‌ی  $3x^2 + 7x + 1 = 0$  بیش‌تر است،  $b$  کدام است؟

(حسابان ۱ - صفحه ۹ - فعالیت - نتیجه ۲) (سراسری تجربی - ۸۷)

$$\frac{4}{3} \quad (۴) \quad \frac{2}{3} \quad (۳) \quad -1 \quad (۲) \quad -2 \quad (۱)$$

۶۹. ریشه‌های کدام معادله، از معکوس ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم  $2x^2 - 3x - 1 = 0$ ، یک واحد کمتر است؟

(حسابان ۱ - صفحه ۹ - فعالیت - نتیجه ۲) (سراسری تجربی - ۹۴)

$$x^2 + 5x + 2 = 0 \quad (۴) \quad x^2 - 5x + 2 = 0 \quad (۳) \quad x^2 + 3x + 1 = 0 \quad (۲) \quad x^2 - 3x + 1 = 0 \quad (۱)$$

۷۰. ریشه‌های معادله‌ی  $3x^2 + ax + b = 0$ ، از ریشه‌های معادله‌ی  $3x^2 - 4x - 1 = 0$  یک واحد بیشتر است،  $b$  کدام است؟

(حسابان ۱ - صفحه ۹ - فعالیت - نتیجه ۲) (سراسری تجربی خارج کشور - ۸۶)

$$6 \quad (۴) \quad 4 \quad (۳) \quad 2 \quad (۲) \quad -5 \quad (۱)$$

## درس‌نامه

### معادلات قابل تبدیل به معادله‌ی درجه‌ی دوم

**روش تجزیه و تقسیم** ◀ برای حل یک معادله‌ی چندجمله‌ای  $P(x) = 0$ ، می‌توانیم با دسته‌بندی مناسب و فاکتورگیری، معادله را به حاصلضرب عامل‌ها تجزیه کرده، هر کدام از عامل‌ها را برابر صفر قرار داده و ریشه‌های معادله را بیابیم.

● مثال: معادله‌ی  $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$  را حل کنید.

○ حل:  $x^3 - x^2 - x + 1 = 0 \Rightarrow x^2(x-1) - (x-1) = 0 \Rightarrow (x-1)(x^2-1) = 0$

$\Rightarrow (x+1)(x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1$  (ریشه‌ی مضاعف) و  $x = -1$  (ریشه‌ی ساده)

اگر مجموع ضرایب معادله صفر باشد، آنگاه  $x=1$  یک ریشه‌ی معادله خواهد بود. با تقسیم معادله بر  $x-1$  و یافتن خارج قسمت، می‌توانیم ریشه‌های دیگر را بیابیم.

● مثال: ریشه‌های معادله‌ی  $f(x) = x^3 - 5x + 4 = 0$  را بیابید.

○ حل: مجموع ضرایب معادله صفر است، پس یک ریشه‌ی معادله  $x=1$  است. با تقسیم  $f$  بر  $x-1$ ، ریشه‌های دیگر را می‌یابیم.

$$\begin{array}{r} x^3 - 5x + 4 \\ -(x^3 - x^2) \\ \hline x^2 - 5x + 4 \\ -(x^2 - x) \\ \hline -4x + 4 \\ -(-4x + 4) \\ \hline 0 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} x-1 \\ x^2+x-4 \end{array} \right.$$

$$f(x) = (x-1)(x^2+x-4) = 0$$

$$\begin{cases} x-1=0 \\ x^2+x-4=0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

پس معادله، سه ریشه‌ی ساده دارد.

به طور کلی اگر  $x=a$ ، یک ریشه‌ی معادله‌ی  $P(x) = 0$  باشد، آنگاه  $x-a$  یک عامل ضربی معادله است و با تقسیم  $P(x)$  بر  $x-a$  می‌توان سایر ریشه‌ها را (در صورت وجود) یافت.

روش تغییر متغیر ◀ در حل بعضی از معادلات، می‌توانیم با انتخاب یک متغیر جدید، معادله را به یکی از انواع معادلاتی که شناخته شده هستند (اغلب درجه‌ی دوم)، تبدیل کرده و معادله‌ی به‌دست آمده بر حسب متغیر جدید را حل کنیم و با رجوع به تغییر متغیر صورت گرفته، ریشه‌های معادله‌ی اولیه را بیابیم.

**توجه** ۴۴ برای حل معادلات به شکل کلی  $ax^{2n} + bx^n + c = 0$  (n عددی طبیعی) که در آن a، b و c ضرایب ثابت هستند، با فرض  $x^n = t$ ، معادله‌ی  $at^2 + bt + c = 0$  حاصل می‌شود. با حل این معادله و در نظر گرفتن شرایط محدودکننده‌ی احتمالی t، می‌توان جواب‌های معادله‌ی اصلی را یافت.

● **مثال:** معادله‌ی  $2x^4 - x^2 - 3 = 0$  را حل کنید.

○ حل: با فرض  $x^2 = t \geq 0$ ، معادله‌ی  $2t^2 - t - 3 = 0$  حاصل می‌شود. با حل این معادله خواهیم داشت:

$$2t^2 - t - 3 = 0 \xrightarrow{a+c=b} t_1 = -1, t_2 = \frac{3}{2} \rightarrow \begin{cases} x^2 = -1 & \text{غ ق ق} \\ x^2 = \frac{3}{2} \Rightarrow x_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}, x_2 = -\sqrt{\frac{3}{2}} \end{cases}$$

● **مثال:** تعداد و علامت ریشه‌های معادله‌ی  $x^4 - 4x^2 - 7 = 0$  را بدون حل آن بیابید.

○ حل: با انتخاب  $x^2 = t \geq 0$ ، معادله‌ی  $t^2 - 4t - 7 = 0$  حاصل می‌شود. در این معادله:

$$\Delta = 16 - 4(-7) = 16 + 28 > 0 \quad \text{و} \quad \frac{c}{a} = -7 < 0 \quad (\text{دو ریشه‌ی مختلف‌العلامت})$$

پس معادله برحسب t، دارای دو ریشه‌ی مختلف‌العلامت است، یعنی یک ریشه‌ی مثبت ( $t_1$ ) و یک ریشه‌ی منفی ( $t_2$ ). از آنجایی که  $x^2 = t \geq 0$ ، فقط مقدار مثبت t برای  $x^2$  قابل قبول است. بنابراین معادله دارای دو ریشه‌ی حقیقی و قرینه ( $x = \pm\sqrt{t_1}$ ) است.



## پیمانه‌ی ۵



### روش تجزیه و تقسیم در حل معادلات

تیپ ۸

صفحه‌ی ۱۳ و تمرین‌های صفحه‌های ۱۵ و ۱۶ حسابان ۱

(حسابان ۱ - صفحه‌ی ۱۳ - مشابه مثال) (سراسری ریاضی - ۸۳)

۷۱. ریشه‌های حقیقی معادله‌ی  $x^3 - 2x + 1 = 0$  چگونه‌اند؟

- ۱) ریشه‌ی مضاعف مثبت - یک ریشه‌ی منفی  
۲) ریشه‌ی مضاعف منفی - یک ریشه‌ی مثبت  
۳) یک ریشه‌ی مثبت - دو ریشه‌ی منفی  
۴) دو ریشه‌ی مثبت - یک ریشه‌ی منفی

۷۲. به ازای کدام مقادیر a، معادله‌ی  $x^3 + (a-1)x^2 + (4-a)x = 4$  دارای سه ریشه‌ی حقیقی متمایز مثبت است؟

(حسابان ۱ - صفحه‌ی ۱۳ - مکمل کار در کلاس) (سراسری تجربی خارج از کشور - ۹۴)

- ۱)  $a < -4$       ۲)  $a > -4$       ۳)  $a < 4$       ۴)  $a > 4$

۷۳. اگر یکی از ریشه‌های معادله‌ی  $x(ax^2 - x - 5) = 2$  برابر ۲ باشد، مجموع دو ریشه‌ی دیگر آن کدام است؟

(حسابان ۱ - صفحه‌ی ۱۳ - مشابه کار در کلاس) (سراسری ریاضی خارج از کشور - ۸۷)

- ۱) -۲      ۲)  $-\frac{3}{2}$       ۳)  $\frac{1}{2}$       ۴)  $\frac{3}{2}$

(حسابان ۱ - صفحه‌ی ۱۳ - مشابه مثال)

۷۴. اگر  $x = 2$ ، یک ریشه‌ی معادله‌ی  $x^3 + 2x^2 - 3x - 10 = 0$  باشد، آنگاه این معادله دارای:

- ۱) دو ریشه‌ی مثبت و یک ریشه‌ی منفی است.  
۲) دو ریشه‌ی منفی و یک ریشه‌ی مثبت است.  
۳) تنها یک ریشه‌ی مثبت است.  
۴) سه ریشه‌ی مثبت است.

۷۵. اگر مجموع مربعات ریشه‌های حقیقی معادله‌ی  $(2x - a)(x - 2x^2) + 5x^3 = 0$  برابر ۴ باشد، a کدام است؟

(حسابان ۱ - صفحه‌ی ۱۳ - مکمل کار در کلاس)

- ۱) صفر      ۲) -۱      ۳) ۲      ۴) -۲

۷۶. منحنی به معادله  $y = (x-1)(x^2 - ax + a)$  محور  $x$  را فقط در یک نقطه قطع می‌کند. مجموعه‌ی مقادیر  $a$  به کدام صورت است؟ (۶)

(حسابان ۱ - صفحه‌ی ۱۳ - مکمل کار در کلاس) (سراسری ریاضی - ۸۳)

(۱)  $-4 < a < 0$  (۲)  $0 < a < 2$  (۳)  $0 < a < 4$  (۴)  $a > 4$

۷۷. یک تخته سه‌لایی برای ساخت یک جعبه‌ی مکعب مستطیلی به حجم ۱۸۰ متر مکعب استفاده می‌شود، اگر طول این مکعب مستطیل ۹ متر از ارتفاع آن بیشتر و عرض آن ۴ متر از ارتفاع کمتر باشد، ارتفاع مکعب مستطیل چند متر است؟ (۷)

(حسابان ۱ - صفحه‌ی ۱۶ - مکمل تمرین ۹)

(۱) ۲ (۲) ۱۵ (۳) ۹ (۴) ۶

روش تغییر متغیر برای حل معادله

تیپ ۹

صفحه‌ی ۱۳ و تمرین‌های صفحه‌های ۱۵ و ۱۶ حسابان ۱

۷۸. تعداد جواب‌های حقیقی معادله‌ی  $x^4 + 10x^2 + 9 = 0$  کدام است؟ (۸)

(حسابان ۱ - صفحه‌ی ۱۵ - مشابه تمرین ۵-الف) (سراسری انسانی خارج از کشور - ۹۲)

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۴

۷۹. کدام معادله‌ی زیر ریشه‌ی حقیقی ندارد؟ (۹)

(حسابان ۱ - صفحه‌ی ۱۵ - مشابه تمرین ۵-الف)

(۱)  $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$  (۲)  $x^4 - 2x^2 + 3 = 0$  (۳)  $x^4 - 8x^2 + 1 = 0$  (۴)  $2x^4 - x^2 - 1 = 0$

۸۰. تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = x^4 - 4x^2 - 5$ ، در چند نقطه به طول مثبت محور  $x$  ها را قطع می‌کند؟ (۱۰)

(حسابان ۱ - صفحه‌ی ۱۵ - مشابه تمرین ۵-الف)

(۱) سه (۲) دو (۳) یک (۴) هیچ

۸۱. مجموع ریشه‌های معادله‌ی  $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$  کدام است؟ (۱۱)

(حسابان ۱ - صفحه‌ی ۱۵ - مشابه تمرین ۵-الف)

(۱) -۱ (۲) ۲ (۳) -۳ (۴) صفر

۸۲. معادله‌ی  $x^4 - 9x^2 + 1 = 0$  ..... (۱۲)

(حسابان ۱ - صفحه‌ی ۱۵ - مشابه تمرین ۵-الف)

(۱) چهار ریشه‌ی حقیقی و دو به دو قرینه دارد. (۲) دو ریشه‌ی حقیقی و قرینه دارد. (۳) ریشه‌ی حقیقی ندارد. (۴) فقط دو ریشه‌ی مثبت دارد.

۸۳. برای معادله‌ی  $ax^4 + bx^2 + c = 0$  ( $a \neq 0$ )، کدام گزینه برای وجود ریشه‌ها ممکن نیست؟ (۱۳)

(حسابان ۱ - صفحه‌ی ۱۵ - مکمل تمرین ۵-الف)

(۱) چهار ریشه‌ی حقیقی داشته باشد. (۲) فقط سه ریشه‌ی حقیقی داشته باشد. (۳) فقط یک ریشه‌ی حقیقی داشته باشد. (۴) فقط دو ریشه‌ی حقیقی و هم‌علامت داشته باشد.

۸۴. اگر معادله‌ی  $x^4 - (m+2)x^2 + m + 5 = 0$  دارای ۴ ریشه‌ی حقیقی متمایز باشد، مجموعه‌ی مقادیر  $m$  به کدام صورت است؟ (۱۴)

(حسابان ۱ - صفحه‌ی ۱۵ - مکمل تمرین ۵-الف) (سراسری تجربی - ۸۵)

(۱)  $m < -4$  (۲)  $m > 4$  (۳)  $-4 < m < 4$  (۴)  $4 < m < 9$

۸۵. مجموعه مقادیر  $a$  کدام باشد تا معادله‌ی  $x^4 + (3a+1)x^2 + (a^2-1) = 0$  دارای دو جواب قرینه باشد؟ (۱۵)

(حسابان ۱ - صفحه‌ی ۱۵ - مکمل تمرین ۵-الف) (آزمون کانون - ۷ آبان ۹۵)

(۱)  $\{-\frac{1}{3}\}$  (۲)  $\{a \in \mathbb{R} \mid -1 < a < 1\}$  (۳)  $\{a \in \mathbb{R} \mid a < -1 \cup a > 1\}$  (۴)  $\emptyset$

۸۶. حاصل ضرب ریشه‌های معادله‌ی  $2x^6 - 7x^3 + 5 = 0$  کدام است؟ (۱۶)

(حسابان ۱ - صفحه‌های ۸ و ۱۵ - ترکیبی)

(۱) ۱ (۲)  $\sqrt{\frac{5}{2}}$  (۳)  $-\sqrt{\frac{5}{2}}$  (۴) صفر

۸۷. اگر  $\alpha$  و  $\beta$  جواب‌های معادله‌ی  $\frac{1}{2}x^6 - 3x^3 - 4 = 0$  باشند، آنگاه حاصل  $\alpha^3 + \beta^3 + \alpha\beta$  کدام است؟ (۱۷)

(حسابان ۱ - صفحه‌های ۸ و ۱۵ - ترکیبی)

(۱) ۵ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۸۸. معادله‌ی  $(x^2 - 2)^2 - 9x^2 + 32 = 0$  چند ریشه‌ی حقیقی دارد؟ (۱۸)

(حسابان ۱ - صفحه‌ی ۱۵ - مشابه تمرین ۵) (آزمون کانون - ۱۹ آبان ۹۶)

(۱) صفر (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۸۹. مجموع ریشه‌های حقیقی معادله‌ی  $(x^2 + x)^2 - 18(x^2 + x) + 72 = 0$ ، کدام است؟ (۱۹)

(حسابان ۱ - صفحه‌ی ۱۵ - مشابه تمرین ۵-پ) (سراسری تجربی - ۹۰)

(۱) -۴ (۲) -۲ (۳) ۲ (۴) ۴

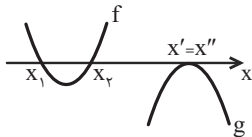
۹۰. کدام معادله، تعداد جواب‌های کم‌تری نسبت به معادله‌ی بقیه‌ها دارد؟ (۲۰)

(حسابان ۱ - صفحه‌ی ۱۵ - مکمل تمرین ۵) (آزمون کانون - ۱۹ آبان ۹۶)

(۱)  $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$  (۲)  $x^4 + 8x^2 + 7 = 0$  (۳)  $4x^6 + 1 = 5x^3$  (۴)  $(x^2 + x)^2 - 14(x^2 + x) + 24 = 0$

❖ **یادآوری** ▶ هر معادله به شکل  $y = ax^2 + bx + c$  که در آن  $a \neq 0$  است را یک **تابع درجه ۲** و نمودار آن را سهمی می‌نامیم. در جدول زیر دو شکل از آن و ویژگی‌هایشان را که در سال گذشته خوانده‌اید، ببینید:

معادله	مختصات رأس	محور تقارن	ماکزیمم (می‌نیمم)
$y = a(x - x_S)^2 + y_S$	$S(x_S, y_S)$	$x = x_S$	$y_S$
$y = ax^2 + bx + c$	$S\left(\frac{-b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$	$x = \frac{-b}{2a}$	$f\left(\frac{-b}{2a}\right) = -\frac{\Delta}{4a}$



❖ **صفرهای تابع درجه ۲** ▶ در تابع با ضابطه‌ی  $y = f(x)$  نقاط برخورد نمودار تابع با محور  $x$  ها را صفرهای تابع می‌نامیم. به عبارت دیگر این نقاط، ریشه‌های معادله‌ی  $f(x) = 0$  هستند. به طریق مشابه در تابع درجه ۲، صفرهای تابع، ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم  $ax^2 + bx + c = 0$  هستند.

اگر نمودار تابع درجه ۲، محور  $x$  ها را در دو نقطه به طول‌های  $x_1$  و  $x_2$  قطع کند، آنگاه معادله‌ی آن را به صورت  $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$  در نظر می‌گیریم. به جدول زیر توجه کنید:

معادله	مختصات رأس	محور تقارن	ماکزیمم (می‌نیمم)
$y = a(x - x_1)(x - x_2)$	$S\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)\right)$	$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$	$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$

● **مثال:** صفرهای تابع  $f(x) = 3x^2 + 5x + 2$  را بیابید.

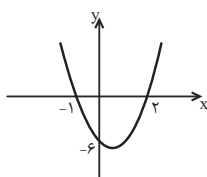
○ **حل:** باید ریشه‌های معادله‌ی  $3x^2 + 5x + 2 = 0$  را پیدا کنیم. از آنجایی که  $a + c = b$ ، پس یک ریشه‌ی معادله  $x' = -1$  و ریشه‌ی دیگر  $x'' = -\frac{2}{3}$  است. بنابراین صفرهای تابع  $-1$  و  $-\frac{2}{3}$  هستند.

**نست** در سهمی به معادله‌ی  $f(x) = -4(x + 7)(x - 5)$ ، کدام گزینه نادرست است؟

- (۱) دهانه‌ی سهمی رو به پایین است.  
 (۲) معادله‌ی محور تقارن آن  $x = -1$  است.  
 (۳) ماکزیمم آن ۱۴۴ است.  
 (۴) رأس آن  $S(-2, 144)$  است.

**پاسخ** گزینه‌ی «۴» در این سهمی داریم:

دهانه رو به پایین و ماکزیمم‌دار  $a = -4 < 0$   
 طول رأس:  $x_S = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-7 + 5}{2} = -1$   
 ماکزیمم تابع:  $f(-1) = -4(-6)(-6) = 144$   
 رأس سهمی:  $S(-1, 144)$



**نست** نمودار تابع درجه‌ی دومی به شکل زیر است. در این تابع، عرض نقطه‌ای به طول ۳ واقع بر آن کدام است؟

- (۱) ۳  
 (۲) ۱۲  
 (۳) ۵  
 (۴) ۶

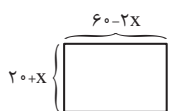
**پاسخ** گزینه‌ی «۲» معادله‌ی سهمی را به صورت  $f(x) = a(x - 2)(x + 1)$  در نظر می‌گیریم. از طرفی عرض از مبدأ تابع  $-6$  است، یعنی  $f(0) = a(0 - 2)(0 + 1) = -6 \Rightarrow a = 3$

بنابراین  $f(x) = 3(x - 2)(x + 1)$ ، برای یافتن عرض نقطه‌ی  $x = 3$  کافی است  $f(3)$  را بیابیم.

$$f(x) = 3(x - 2)(x + 1) \Rightarrow y_0 = f(3) = 3(3 - 2)(3 + 1) = 12$$

**نست** مستطیلی‌هایی با ابعاد متفاوت را در نظر بگیرید. باریک‌ترین آن‌ها با عرض  $20^\circ$  و طول  $60^\circ$  سانتی‌متر است. به ازای هر یک سانتی‌متر که به عرض آن افزوده شود  $2$  سانتی‌متر از طول آن کم می‌شود، بیش‌ترین مساحت بین این مستطیل‌ها بر حسب سانتی‌متر مربع کدام است؟

- (۱)  $2750^\circ$   
 (۲)  $2500^\circ$   
 (۳)  $1500^\circ$   
 (۴)  $1250^\circ$



**پاسخ** گزینه‌ی «۴» هر  $1$  واحد که به عرض اضافه شود،  $2$  واحد از طول کم می‌شود. پس اگر  $x$  واحد به عرض اضافه شود،  $2x$  واحد از طول آن کم می‌شود و مساحت  $S(x) = (20 + x)(60 - 2x)$  یا  $S(x) = 2(20 + x)(30 - x)$  خواهد شد.

بنابراین بیش‌ترین مقدار مساحت به ازای  $x = \frac{-20 + 30}{2} = 5$ ، به دست می‌آید، در نتیجه:

$$S(5) = 2(20 + 5)(30 - 5) = 2 \times 25 \times 25 = 1250 \text{ سانتی‌متر مربع}$$



۱ وضعیت نمودار با محور  $x$  ها: دیدیم که صفرهای تابع درجه ۲، محل (های) تلاقی تابع با محور  $x$  ها هستند. بسته به اینکه  $\Delta > 0$ ،  $\Delta = 0$  یا  $\Delta < 0$  باشد، نمودار سهمی (تابع درجه‌ی دوم) محور  $x$  ها را به ترتیب در دو نقطه قطع می‌کند، در یک نقطه مماس است یا اصلاً قطع نمی‌کند.

(۱) $\Delta > 0$	(۲) $\Delta = 0$	(۳) $\Delta < 0$
نمودار محور $x$ ها را در دو نقطه قطع می‌کند.	نمودار بر محور $x$ ها مماس است.	نمودار محور $x$ ها را قطع نمی‌کند.

با توجه به وضعیت نمودار با محور  $x$  ها، در سهمی  $y = ax^2 + bx + c$ :

(الف) اگر نمودار همواره بالای محور  $x$  ها باشد،  $a > 0$  و  $\Delta < 0$ . (ب) اگر نمودار همواره پایین محور  $x$  ها باشد،  $a < 0$  و  $\Delta < 0$ .

(پ) اگر نمودار از بالا بر محور  $x$  ها مماس باشد،  $a > 0$  و  $\Delta = 0$ . (ت) اگر نمودار از پایین بر محور  $x$  ها مماس باشد،  $a < 0$  و  $\Delta = 0$ .

**نست** به ازای چه حدودی از  $m$ ، نمودار تابع  $f(x) = mx^2 + 2x + 2$  همواره بالای محور  $x$  هاست؟

(۱)  $0 < m < \frac{1}{4}$       (۲)  $m < \frac{1}{4}$       (۳)  $m > \frac{1}{4}$       (۴) هیچ مقداری

**پاسخ** گزینه‌ی «۳» برای آنکه نمودار سهمی همواره بالای محور  $x$  ها باشد، باید  $m > 0$  (ضریب  $x^2$ ) و  $\Delta = 4 - 8m < 0$ ، که از آن نتیجه می‌شود،  $m > \frac{1}{4}$ . مجموعه جواب، اشتراک دو شرط است که  $m > \frac{1}{4}$  خواهد بود.

۲ علامت صفرهای احتمالی: با تعیین علامت  $\Delta$ ،  $S$  و  $P$  می‌توان علامت صفرهای احتمالی تابع درجه‌ی دوم  $f(x)$  (ریشه‌های احتمالی معادله‌ی  $f(x) = 0$ ) را یافت.

● مثال: علامت صفرهای توابع زیر را بیابید.

(۱) $f(x) = x^2 - 6x + 4$	(۲) $f(x) = 4x^2 - 3x - 2$
$\Delta = 36 - 4(4)(1) > 0$ . دو ریشه‌ی حقیقی دارد.	$\Delta = 9 - 4(4)(-2) > 0$ . دو ریشه‌ی حقیقی دارد.
$P = \frac{c}{a} = 4 > 0$ . دو ریشه هم‌علامتند.	$P = \frac{c}{a} = \frac{-2}{4} < 0$ . دو ریشه مختلف‌العلامت‌اند.
$S = -\frac{b}{a} = 6 > 0$ . هر دو ریشه مثبت‌اند.	$S = -\frac{b}{a} = -\frac{-3}{4} > 0$ . ریشه‌ی مثبت از قدرمطلق ریشه‌ی منفی بزرگتر است.

● مثال: در تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ، علامت ضرایب معادله را به‌گونه‌ای معلوم کنید که:

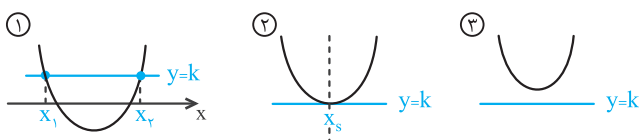
(الف) سهمی محور  $x$  ها را در دو نقطه به طول‌های مثبت قطع کند.

(ب) سهمی محور  $x$  ها را در دو نقطه به طول‌های منفی قطع کند.

○ حل: وقتی سهمی محور  $x$  ها را در دو نقطه قطع می‌کند، آنگاه  $\Delta > 0$ . در صورتی که هر دو ریشه مثبت باشند، آنگاه مجموع و حاصل‌ضرب آن‌ها مثبت است، به‌طریق مشابه وقتی دو ریشه منفی‌اند، آنگاه مجموع ریشه‌ها منفی و حاصل‌ضرب آن‌ها مثبت است. به شکل‌های زیر توجه کنید.

صفرهای تابع دو نقطه به طول‌های مثبت است. ( $\Delta > 0$ , $S > 0$ , $P > 0$ )		صفرهای تابع دو نقطه به طول‌های منفی است. ( $\Delta > 0$ , $S < 0$ , $P > 0$ )	
$S = -\frac{b}{a} > 0 \xrightarrow{a > 0} b < 0$	$S = -\frac{b}{a} > 0 \xrightarrow{a < 0} b > 0$	$S = -\frac{b}{a} < 0 \xrightarrow{a > 0} b > 0$	$S = -\frac{b}{a} < 0 \xrightarrow{a < 0} b < 0$
$P = \frac{c}{a} > 0 \xrightarrow{a > 0} c > 0$	$P = \frac{c}{a} > 0 \xrightarrow{a < 0} c < 0$	$P = \frac{c}{a} > 0 \xrightarrow{a > 0} c > 0$	$P = \frac{c}{a} > 0 \xrightarrow{a < 0} c < 0$

۳ وضعیت خط  $y = k$  با سهمی: در شکل‌های زیر سه وضعیت خط  $y = k$  با سهمی مشخص شده است:



الف) در شکل ۱، خط  $y = k$  سهمی را در دو نقطه به طول‌های  $x_1$  و  $x_2$  قطع می‌کند. معادله‌ی تلاقی خط و سهمی دو ریشه دارد و  $\Delta$  ی آن مثبت است. در این حالت اختلاف صفرهای معادله‌ی تلاقی  $|x_2 - x_1|$  است.

ب) در شکل ۲، خط  $y = k$  بر سهمی در نقطه به طول  $x_3$  مماس است، معادله‌ی تلاقی خط و سهمی یک ریشه‌ی مضاعف دارد و  $\Delta$  ی آن صفر است. در این حالت  $k$  عرض رأس سهمی است.

پ) در شکل ۳، خط  $y = k$  سهمی را قطع نمی‌کند و معادله‌ی تلاقی آن‌ها ریشه ندارد و  $\Delta$  ی آن منفی است.

**تست** در سهمی به معادله‌ی  $y = x^2 - 4x + a + 1$  اختلاف صفرهای تابع برابر ۲ است، عرض از مبدأ سهمی کدام است؟

- ۱)  $-2$       ۲)  $2$       ۳)  $-3$       ۴)  $3$

**پاسخ** گزینه‌ی «۴» اختلاف صفرها ۲ است. با توجه به اینکه محور تقارن  $x = -\frac{-4}{2} = 2$  است، پس ریشه‌ها یکی کمتر و یکی بیشتر از طول رأس سهمی‌اند، یعنی  $\alpha = 3$  و  $\beta = 1$ ، پس معادله‌ی سهمی به صورت  $y = (x-1)(x-3) = x^2 - 4x + 3$  است که عرض از مبدأ آن ۳ است.

**تست** کدام خط زیر، سهمی  $y = 4(x+2)(3-2x)$  را قطع نمی‌کند؟

- ۱)  $y = 25$       ۲)  $y = 10\sqrt{3}$       ۳)  $y = 24/5$       ۴)  $y = 24 - \sqrt{2}$

**پاسخ** گزینه‌ی «۱» ضریب  $x^2$  منفی است، پس سهمی ماکزیم‌دار است. مطابق شکل فرضی روبه‌رو، خط افقی  $y = k$  سهمی ماکزیم‌دار را به ازای هر مقدار  $k$  بزرگتر از عرض رأس سهمی قطع نمی‌کند. بنابراین کافی است عرض ماکزیم تابع را بیابیم.



$$y = f(x) = 4(x+2)(3-2x)$$

صفرهای تابع،  $-2$  و  $\frac{3}{2}$  هستند، پس طول رأس برابر  $x_S = \frac{-2 + \frac{3}{2}}{2} = \frac{-1}{4}$  است. با قرار دادن این طول در تابع، عرض ماکزیم به دست می‌آید:

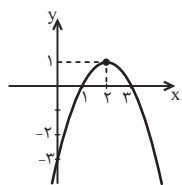
$$f\left(\frac{-1}{4}\right) = 4\left(\frac{-1}{4} + 2\right)\left(3 - 2\left(\frac{-1}{4}\right)\right) = \frac{49}{2} = 24.5$$

بنابراین باید  $k > 24.5$  باشد، از میان خطوط داده شده تنها  $y = 25$  نمودار را قطع نمی‌کند.

**توجه** تعیین وضعیت خط  $y = ax + b$  با سهمی نیز همانند قبل است.

■ **نمودار سهمی** در سال دهم با روش‌های رسم نمودار سهمی آشنا شدید. معمولاً با در اختیار داشتن محور تقارن، رأس، عرض از مبدأ و محل تلاقی نمودار با محور  $x$  ها (دو نقطه‌ی کمکی) می‌توان نمودار سهمی را رسم نمود.

● **مثال:** نمودار سهمی به معادله‌ی  $y = -x^2 + 4x - 3$  را رسم کنید.



○ **حل:** محور تقارن سهمی  $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2(-1)} = 2$  است، با قرار دادن طول رأس در معادله، عرض رأس را می‌یابیم:

$$S(2, -(-2)^2 + 4(2) - 3) = (2, 1) \Rightarrow S(2, 1)$$

طول‌های محل تلاقی نمودار با محور  $x$  ها از حل معادله‌ی  $-x^2 + 4x - 3 = 0$ ، برابر  $x = 1$  و  $x = 3$  است و نمودار تابع به شکل روبه‌روست.

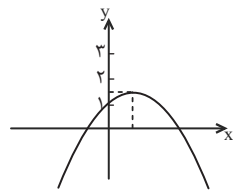
■ **شناخت متقابل ضابطه و نمودار** در تست‌ها معمولاً با دو حالت زیر روبه‌رو هستیم.

۱ **شناخت علامت ضرایب معادله وقتی نمودار داده شده:** در تعیین علامت ضرایب معادله‌ی  $y = ax^2 + bx + c$ ، وقتی نمودار داده شده است، به ترتیب زیر عمل کنید:

الف) **تعیین علامت  $a$ :** اگر دهانه‌ی سهمی رو به بالا باشد، آنگاه  $a > 0$  و اگر دهانه‌ی سهمی رو به پایین باشد، آنگاه  $a < 0$  است.

ب) **تعیین علامت  $c$ :** اگر عرض از مبدأ نمودار مثبت باشد، آنگاه  $c > 0$  و اگر عرض از مبدأ نمودار منفی باشد، آنگاه  $c < 0$  است.

پ) **تعیین علامت  $b$ :** اگر طول رأس  $(x = \frac{-b}{2a})$  مثبت باشد،  $a$  و  $b$  مختلف‌العلامت‌اند و اگر طول رأس منفی باشد،  $a$  و  $b$  هم‌علامت‌اند.



**تست** کدام معادله‌ی زیر، می‌تواند مربوط به نمودار شکل مقابل باشد؟

$$\begin{aligned} (1) \quad y &= 2x^2 - x + 1 & (2) \quad y &= -\frac{1}{3}x^2 + x - 4 \\ (3) \quad y &= -\frac{1}{3}x^2 - x + 1 & (4) \quad y &= -\frac{1}{3}x^2 + x + 1 \end{aligned}$$

**پاسخ** گزینه‌ی «۴» دهانه‌ی سهمی رو به پایین است، پس  $a < 0$ . بنابراین گزینه‌ی ۱ حذف می‌شود. از طرفی عرض از مبدأ نمودار مثبت است، پس گزینه‌ی ۲ نیز که عرض از مبدأ آن منفی است حذف می‌شود. طول رأس سهمی مثبت است، در گزینه‌ی ۳، طول رأس،  $x_S = \frac{-b}{2a} = -1 < 0$  و در گزینه‌ی ۴، طول رأس  $x_S = \frac{-b}{2a} = 1 > 0$  است، پس گزینه‌ی ۴ درست است.

**۲** تعیین وضعیت نمودار با نواحی مختصاتی: برای بررسی وضعیت سهمی به معادله‌ی  $y = ax^2 + bx + c$  با نواحی مختصاتی، ابتدا شکلی مطلوب از شرایط داده شده رسم کرده و سپس با توجه به نمودار رسم شده، علامت ضرایب معادله را می‌بایم. به حالت‌های  $a$  و  $\Delta$  در زیر توجه کنید: الف) علامت  $a$  و نواحی مختصاتی: بسته به این که  $a$  مثبت یا منفی باشد، نمودار به دو ناحیه ختم می‌شود:

$a > 0$	$a < 0$
ختم شونده به نواحی اول و دوم	ختم شونده به نواحی سوم و چهارم

**تست** نمودار کدامیک از توابع با معادله‌ی زیر، ختم شونده به ناحیه‌ی سوم و چهارم با طول رأس منفی است؟

$$y = 2x^2 - x - 5 \quad (1) \quad y = -2x^2 + x - 5 \quad (2) \quad y = -2x^2 - x - 5 \quad (3) \quad y = 2x^2 - x - 5 \quad (4)$$

**پاسخ** گزینه‌ی «۳» باید ضریب  $x^2$  منفی باشد. پس یکی از دو گزینه‌ی ۲ یا ۳ می‌توانند درست باشند. طول رأس گزینه‌ی ۳ منفی است، پس گزینه‌ی ۳ درست است.

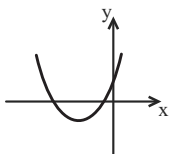
ب) علامت  $\Delta$  و نواحی مختصاتی: اگر  $\Delta$  مثبت باشد، نمودار از ۳ یا ۴ ناحیه و اگر  $\Delta$  منفی یا صفر باشد، نمودار از دو ناحیه عبور می‌کند.

$\Delta > 0$				$\Delta \leq 0$	
از چهار ناحیه عبور می‌کند. بنابراین: $ac < 0$		از ۳ ناحیه عبور می‌کند.		$a > 0, \Delta \leq 0$ از ناحیه‌ی اول و دوم عبور می‌کند.	$a < 0, \Delta \leq 0$ از ناحیه‌ی سوم و چهارم عبور می‌کند.

**تست** اگر نمودار تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = 2x^2 + x + a - 1$  فقط از ناحیه‌ی چهارم و مبدأ عبور نکند،  $a$  کدام عدد می‌تواند باشد؟

$$\frac{19}{16} \quad (1) \quad 1 \quad (2) \quad \frac{17}{16} \quad (3) \quad \frac{9}{8}$$

**پاسخ** گزینه‌ی «۲» شکل مطلوب به صورت زیر است، بنابراین باید عرض از مبدأ نمودار مثبت و طول رأس نیز منفی باشند و نمودار محور  $x$  ها را در دو نقطه قطع کند.



$$(1) \quad f(0) = a - 1 > 0 \Rightarrow a > 1 \quad (*)$$

$$(2) \quad x_S = -\frac{1}{2(2)} < 0$$

همواره برقرار است.

$$(3) \quad f(x) = 0 \text{ دو ریشه داشته باشد} \Rightarrow \Delta > 0 \Rightarrow 1^2 - 4(2)(a-1) > 0 \Rightarrow 1 - 8(a-1) > 0 \Rightarrow a - 1 < \frac{1}{8} \Rightarrow a < \frac{9}{8} \quad (*) \Rightarrow 1 < a < \frac{9}{8}$$

بنابراین  $1 < a < \frac{9}{8}$  یا  $\frac{17}{16} < a < \frac{9 \times 2}{8 \times 2} = \frac{18}{16}$  است، پس  $a$  می‌تواند برابر  $\frac{17}{16}$  باشد.



ماکزیمم (می‌نیمم)، رأس و محور تقارن سهمی

تیب ۱۰

صفحه‌های ۱۰ تا ۱۲ و تمرین‌های صفحه‌های ۱۵ و ۱۶ حسابان ۱

۹۱. اگر بیش‌ترین مقدار تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = (K+3)x^2 - 4x + K$  برابر صفر باشد، مقدار  $K$  کدام است؟

(حسابان ۱ - صفحه‌ی ۱۶ - مشابه تمرین ۷) (سراسری ریاضی - ۸۳)

- (۱) -۴ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۴

۹۲. تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = x^2 + ax + 4$  می‌نیممی برابر ۳ دارد،  $a$  کدام است؟

(حسابان ۱ - صفحه‌ی ۱۶ - مشابه تمرین ۷) (سراسری ریاضی - ۷۸)

- (۲)  $\pm 4$  (۱)  $\pm 3$  (۲)  $\pm 2$  (۳)  $\pm 1$  (۴)  $\pm 1$

۹۳. بیشترین مقدار تفاضل  $\frac{1}{9}$  مربع عددی، از ۶ برابر آن عدد، کدام است؟

(حسابان ۱ - صفحه‌ی ۱۶ - مشابه تمرین ۷) (سراسری انسانی - ۹۴)

- (۳) ۵۴ (۱) ۶۳ (۲) ۷۲ (۳) ۸۱ (۴) ۸۱

۹۴. به ازای کدام مقدار  $a$ ، نقطه‌ی می‌نیمم نمودار تابع با ضابطه‌ی  $y = ax^2 - 2\sqrt{2}x + a$  بر روی خط  $y = 1$  واقع است؟

(حسابان ۱ - صفحه‌ی ۱۶ - مرتبط با تمرین ۷) (سراسری ریاضی - ۷۷)

- (۴) -۱ (۱)  $\frac{1}{2}$  (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۲

۹۵. خط به معادله‌ی  $y = -\frac{5}{2}x + a$  محور تقارن منحنی تابع با ضابطه‌ی  $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + a$  را بر روی خود منحنی قطع می‌کند.  $a$  کدام است؟

(حسابان ۱ - صفحه‌ی ۱۶ - مرتبط با تمرین ۷) (سراسری تجربی - ۷۴)

- (۵) -۲ (۱) -۱ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۲

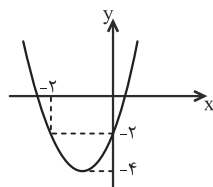
۹۶. سهمی  $y = 2x^2 + bx + 6$  بر قسمت منفی محور  $x$  ها مماس است. معادله‌ی محور تقارن آن کدام است؟

(حسابان ۱ - صفحه‌ی ۱۲ - کار در کلاس - مرتبط با ۱) (آزمون کانون - ۱۸ آبان ۹۷)

- (۶)  $x = -\sqrt{3}$  (۱)  $x = \sqrt{3}$  (۲)  $x = 2\sqrt{3}$  (۳)  $x = -4\sqrt{3}$  (۴)

۹۷. با توجه به شکل زیر که مربوط به تابع درجه‌ی دوم  $f$  است، حاصل ضرب ریشه‌های معادله‌ی  $f(x) = 0$  کدام است؟

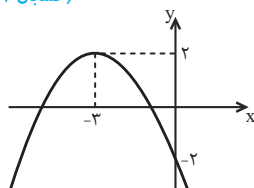
(حسابان ۱ - صفحه‌ی ۱۶ - مرتبط با تمرین ۷) (آزمون کانون - ۴ آبان ۹۷)



- (۷) -۲ (۱) -۱ (۲)  $-\frac{2}{3}$  (۳)  $-\frac{3}{2}$  (۴)

۹۸. نمودار تابع  $f(x) = a(3x+b)^2 - c$  به صورت زیر است، حاصل  $9ab + c$  کدام است؟

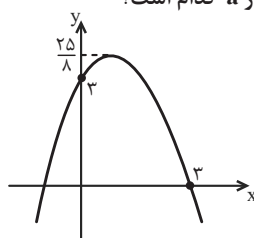
(حسابان ۱ - صفحه‌ی ۱۶ - مرتبط با تمرین ۷) (آزمون کانون - ۵ آبان ۹۶)



- (۸) -۲ (۱) -۴ (۲) -۶ (۳) -۸ (۴)

۹۹. شکل زیر، نمودار تابع  $f(x) = ax^2 + bx + c$  است. مقدار  $a$  کدام است؟

(حسابان ۱ - صفحه‌ی ۱۶ - مرتبط با تمرین ۷) (آزمون کانون - ۱۹ آبان ۹۶)



- (۹)  $-\frac{1}{9}$  (۱)  $-\frac{2}{9}$  (۲)  $-\frac{2}{5}$  (۳)  $-\frac{1}{2}$  (۴)

۱۰۰ دو سهمی با محور تقارن یکسان و غیر متقاطع با هم با معادلات  $f(x) = -x^2 + ax - 1$  و  $g(x) = 2x^2 + bx + 3$  مفروضند. اگر فاصله‌ی رأس‌های دو سهمی از یکدیگر ۱ واحد باشد،  $ab$  کدام است؟

(حسابان ۱ - صفحه‌ی ۱۶ - مرتبط با تمرین ۷) (آزمون کانون - ۲ آذر ۹۷)

- (۱) ۸ (۲) -۸ (۳) ۲۴ (۴) -۲۴

صفحه‌های ۱۰ تا ۱۲ و تمرین‌های صفحه‌های ۱۵ و ۱۶ حسابان ۱ تیپ ۱۱

صفرهای تابع درجه ۲

۱۰۱ رأس سهمی به معادله‌ی  $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$  و محل‌های تلاقی آن با محور  $x$  ها، رئوس مثلثی هستند. مساحت مثلث چند واحد مربع است؟

(حسابان ۱ - صفحه‌ی ۱۵ - مرتبط با تمرین ۲)

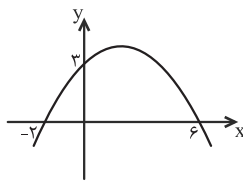
- (۱)  $\frac{1}{9}$  (۲)  $\frac{1}{6}$  (۳)  $\frac{1}{3}$  (۴) ۱

۱۰۲ صفرهای تابع به معادله‌ی  $f(x) = -2(x+m)(x-2)$  نسبت به خط  $x = -1$  متقارن هستند. حاصل ضرب صفرهای تابع  $f$  کدام است؟

(حسابان ۱ - صفحه‌ی ۱۱ - مرتبط با مثال ۱)

- (۱) ۸ (۲) -۸ (۳) -۱۲ (۴) ۱۲

۱۰۳ بیش‌ترین مقدار  $y$  در سهمی شکل زیر کدام است؟



- (۱) ۴ (۲)  $\frac{7}{2}$  (۳) ۵ (۴)  $\frac{9}{2}$

۱۰۴ کدام خط زیر، سهمی به معادله‌ی  $f(x) = 3(2x+1)(5-2x)$  را قطع می‌کند؟

(حسابان ۱ - صفحه‌ی ۱۶ - مرتبط با تمرین ۷)

- (۱)  $y = 29$  (۲)  $y = 44$  (۳)  $y = 20\sqrt{2}$  (۴)  $y = 10\sqrt{2}$

۱۰۵ ماکزیمم تابع درجه دوم به معادله‌ی  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ، برابر ۱۸ و اختلاف صفرهای تابع ۶ است.  $a$  کدام است؟

(حسابان ۱ - صفحه‌ی ۱۱ - مرتبط با مثال ۲)

- (۱) -۲ (۲) ۲ (۳) -۴ (۴) ۴

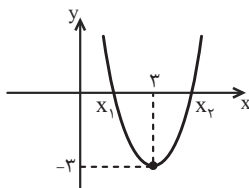
۱۰۶ نمودار سهمی به معادله‌ی  $y = ax^2 + bx + c$ ، محور  $x$  ها را با طول‌های  $(-1)$  و ۳ و محور  $y$  ها را با عرض ۶ قطع می‌کند. فاصله‌ی رأس این سهمی از محور  $x$  ها کدام است؟

(حسابان ۱ - صفحه‌ی ۱۱ - مرتبط با مثال ۱) (آزمون کانون - ۱۰ آبان ۹۲)

- (۱) ۸ (۲) ۱۰ (۳) ۱۲ (۴) ۱۴

۱۰۷ نمودار تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ، با شرط  $|a| = 1$  به شکل زیر است.  $x_1 + 2x_2$  کدام است؟

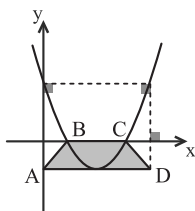
(حسابان ۱ - صفحه‌ی ۱۶ - مشابه تمرین ۷)



- (۱)  $3 + \sqrt{3}$  (۲)  $9 - \sqrt{3}$  (۳)  $3 - \sqrt{3}$  (۴)  $9 + \sqrt{3}$

۱۰۸ در شکل زیر، سهمی رسم شده مربوط به نمودار تابع به معادله‌ی  $y = 2x^2 - 12x + 16$  است. اگر پاره خط افقی  $AD$  بر رأس سهمی مماس باشد، مساحت ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین  $ABCD$  کدام است؟

(حسابان ۱ - صفحه‌ی ۱۱ - مرتبط با مثال ۲) (آزمون کانون - ۴ اسفند ۹۶)



- (۱) ۴ (۲) ۸ (۳) ۱۶ (۴) ۲۴

۱۰۹ در یک کارگاه تولیدی، یکی از کارگران متعهد شده است که در پایان هر هفته ۸۰ قطعه با دستمزد هر قطعه ۴۵۰ تومان تحویل دهد. به ازای هر قطعه‌ی اضافه بر تعهد، مبلغ ۵ تومان از دستمزد هر قطعه‌ی تحویلی کسر می‌شود. بیشترین دستمزد هفته‌ی آن کدام است؟

(حسابان ۱ - صفحه‌ی ۱۵ - مشابه تمرین ۳) (سراسری انسانی - ۹۳)

- (۱) ۳۶۰۷۵ (۲) ۳۶۱۲۵ (۳) ۳۶۱۷۵ (۴) ۳۶۲۲۵



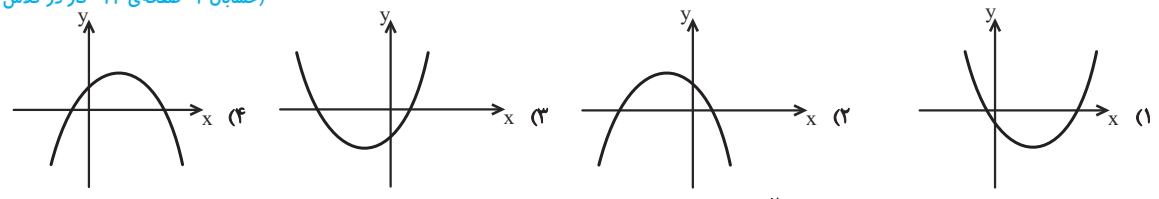
۱۱۰ در یک زمین گلخانه‌ای، اگر با فاصله‌ی یکسان، ۴۰ بوته‌ی گوجه‌فرنگی کاشته شود به طور متوسط از هر بوته ۸ کیلو محصول به دست می‌آید. به ازای هر بوته‌ی اضافی که کاشته شود به مقدار  $\frac{1}{8}$  کیلو از میانگین محصول بوته‌ها کاسته می‌شود. در این صورت بیشترین محصول برداشتی کدام است؟  
 (حسابان ۱- صفحه ۱۵- مرتبط با تمرین ۳) (سراسری انسانی خارج از کشور- ۸۹)

۳۳۶ (۱)      ۳۳۸ (۲)      ۳۴۰ (۳)      ۳۴۲ (۴)

تعداد و علامت صفرهای احتمالی      تیپ ۱۲      صفحه‌های ۱۰ تا ۱۲ حسابان ۱

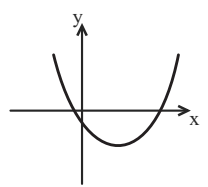
۱۱۱ شکل‌های زیر، نمودار تابع درجه‌ی دوم  $f(x) = ax^2 + bx + c$  هستند. در کدام یک از آنها  $a > 0$  و  $b > 0$  است؟

(حسابان ۱- صفحه ۱۲- کار در کلاس- مرتبط با ۲)



۱۱۲ شکل زیر، نمودار تابع درجه‌ی دوم  $f(x) = ax^2 + bx + c$  است. کدام گزینه‌ی زیر همواره درست است؟

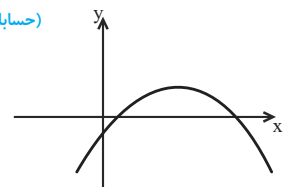
(حسابان ۱- صفحه ۱۲- کار در کلاس- مشابه ۲)



- (۱)  $a + b > 0$
- (۲)  $a + b < 0$
- (۳)  $b + c > 0$
- (۴)  $b + c < 0$

۱۱۳ نمودار سهمی  $y = mx^2 + 8x - 2$  به صورت زیر است.  $m$  چند مقدار صحیح می‌تواند داشته باشد؟

(حسابان ۱- صفحه ۱۲- کار در کلاس- مرتبط با ۱- الف) (آزمون کانون- ۱۰ آبان ۹۲)



- (۱) ۷
- (۲) ۸
- (۳) ۹
- (۴) ۱۰

۱۱۴ در یک سهمی، رأس به مختصات  $(-7, 3)$  است و سهمی محور  $x$  ها را در دو نقطه، یکی به طول مثبت و دیگری به طول منفی قطع می‌کند، اگر معادله‌ی سهمی به صورت  $y = ax^2 + bx + c$  باشد، آنگاه از میان  $a$ ،  $b$  و  $c$ ، کدام یک باید مثبت باشند؟

(حسابان ۱- صفحه ۱۲- کار در کلاس- مکمل ۲)

- (۱) فقط  $a$
- (۲) فقط  $b$
- (۳) فقط  $c$
- (۴)  $a$  و  $b$

۱۱۵ اگر منحنی به معادله‌ی  $y = 2x^2 - 4x + m - 3$ ، محور  $x$  ها را در دو نقطه به طول‌های مثبت قطع کند، آنگاه مجموعه مقادیر  $m$  به کدام صورت است؟

(حسابان ۱- صفحه ۱۲- کار در کلاس- مکمل ۲) (سراسری ریاضی- ۸۷)

- (۱)  $m > 3$
- (۲)  $3 < m < 4$
- (۳)  $3 < m < 5$
- (۴)  $4 < m < 5$

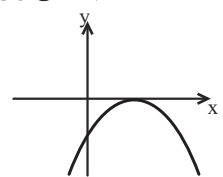
۱۱۶ به ازای کدام مجموعه مقادیر  $m$ ، منحنی به معادله‌ی  $y = (m-2)x^2 - 2(m+1)x + 12$ ، محور  $x$  ها را در دو نقطه به طول‌های منفی، قطع می‌کند؟

(حسابان ۱- صفحه ۱۲- کار در کلاس- مکمل ۲) (سراسری ریاضی- ۹۵)

- (۱)  $m > 2$
- (۲)  $-1 < m < 2$
- (۳) هر مقدار  $m$
- (۴) هیچ مقدار  $m$

۱۱۷ شکل زیر، نمودار تابع درجه‌ی دوم  $f(x) = ax^2 + bx - 1$  است. کدام دوتایی برای  $(a, b)$  قابل قبول است؟

(حسابان ۱- صفحه ۱۲- کار در کلاس- مشابه ۲)



- (۱)  $(1, -2)$
- (۲)  $(-2, -1)$
- (۳)  $(-1, 4)$
- (۴)  $(-1, 2)$

۱۱۸ به ازای کدام مقدار  $m$ ، نمودار تابع با ضابطه‌ی  $y = (m-2)x^2 - 3x + m + 2$  بالای محور  $x$  ها و مماس بر آن است؟

(حسابان ۱- صفحه ۱۲- کار در کلاس- مکمل ۲) (سراسری ریاضی- ۸۲)

- (۱)  $-3$
- (۲)  $-\frac{5}{2}$
- (۳)  $\frac{5}{2}$
- (۴)  $3$

۱۱۹ به ازای کدام مقدار یا مقادیر  $m$  تابع می‌نیم‌دار  $y = mx^2 + (3-m)x + 1$  در نقطه به طول مثبت بر محور  $x$  ها مماس است؟

(حسابان ۱- صفحه ۱۲- کار در کلاس- مکمل ۲)

- (۱) ۸
- (۲) ۱ و ۹
- (۳) فقط ۹
- (۴) فقط ۱