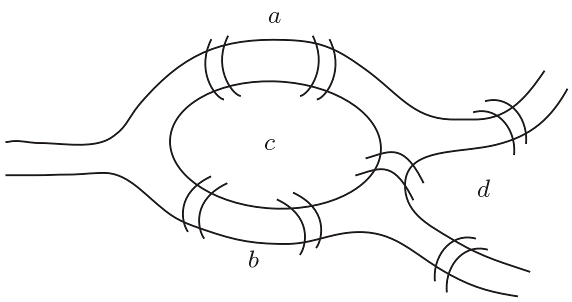
فصل ۱

آشنایی با گراف

در این فصل، با مطالبی که در فصل‌های آینده با آنها روبه‌رو خواهید شد آشنا می‌شویم. واژه‌های سیاه‌شده در این فصل، در فصل‌های بعد تعریف خواهند شد و در این فصل تنها به توصیف آنها می‌پردازیم.

۱-۱ گراف چیست؟

در کنیگسبرگ، یکی از شهرهای پروس شرقی سابق، رودخانه‌ای به‌نام پرِگل از میان شهر می‌گذشت. در سده‌ی ۱۸ام هفت پل دو منطقه‌ی c و d میانِ رودخانه و دو ساحل a و b را به هم متصل می‌کردند (شکل ۱-۱).



شکل ۱-۱ پل کنیگسبرگ

مردم در گردش‌هایشان به دور شهر با این پرسش مواجه شدند:

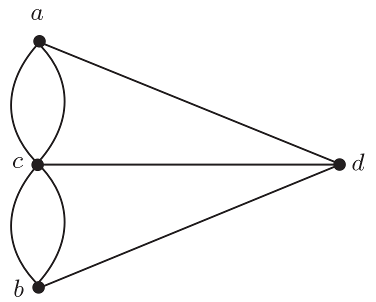
> آیا می‌توان از یکی از ناحیه‌ها شروع به حرکت کرد و از هر یک از هفت پل دقیقاً یک‌بار گذشت و به نقطه‌ی آغازین بازگشت؟

هیچ‌کس نتوانست به این پرسش پاسخ دهد، و مردم شهر بر این باور بودند که چنین پیاده‌روی‌ای وجود ندارد.

در سال ۱۷۳۶، اویلر، ریاضی‌دان بزرگ سویسی، با انتشار مقاله‌ای نشان داد نمی‌توان یک پیاده‌روی به صورت گفته‌شده را برنامه‌ریزی کرد. این نخستین‌بار بود که عدم وجود چنین پیاده‌روی‌ای به صورت ریاضی ثابت شد.

هر یک از منطقه‌های a، b، c، و d را با یک دایره‌ی توپر یا نقطه، و هر پل را با یک کمان یا خط میان دو نقطه‌ی متناظر نشان می‌دهیم. به این ترتیب نمودار شکل ۱-۲ به دست می‌آید. اکنون پرسش به این صورت مطرح می‌شود:

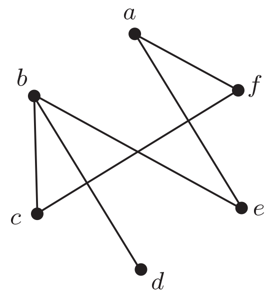
> آیا با آغاز از یکی از نقطه‌های a، b، c، و d در شکل ۱-۲، می‌توان با پیمایش دقیقاً یک‌بار هر خط، به نقطه‌ی آغازین بازگشت؟



شکل ۱-۲ گراف پل کنیگسبرگ

به نمودار شکل ۱-۲ **گراف** می‌گوییم. هر نقطه در گراف را یک **رأس** یا **گره**، و هر خط را یک **یال** می‌نامیم.

برای مثالی دیگر افراد a، b، c، d، e، و f را در نظر بگیرید. a با e و f دوست است. b با c، d، و e دوست است. c نیز جز b، با f نیز دوست است. اگر برای هر یک از این افراد یک نقطه در صفحه در نظر بگیریم و هر دو نفری را که با هم دوست هستند با یک خط به هم متصل کنیم، نمودار شکل ۱-۳ به دست می‌آید.

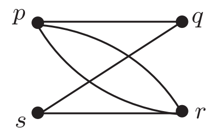


شکل ۱-۳ گراف دوست‌ها

نمودار شکل ۱-۳ یک گراف است. a، b، c، d، e، و f رأس‌های آن و خط‌های میان رأس‌ها یال‌های آن هستند. با توجه به گراف شکل ۱-۳ به‌عنوان مثال به‌آسانی می‌توان دریافت که f دارای ۲ دوست، و d دارای تنها ۱ دوست است. در این حالت می‌گوییم f **درجه‌ی** ۲، و d درجه‌ی ۱ دارد.

۱-۲ توصیف چند نوع گراف

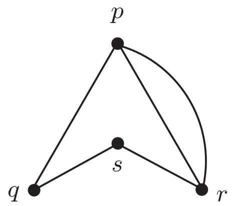
چهار تیم فوتبال به‌نام‌های p، q، r، و s در یک دوره مسابقه‌ی رفت‌وبرگشت شرکت کرده‌اند. پس، هر تیم باید ۲ بازی با هر یک از ۳ تیم دیگر انجام دهد. فرض کنید تیم‌های p و q یک، تیم‌های p و r دو، تیم‌های q و s یک، و تیم‌های r و s یک بازی خود را انجام داده‌اند، و بازی دیگری انجام نشده است. اگر هر یک از تیم‌ها را با یک نقطه در صفحه نشان دهیم، و برای هر بازی میان دو تیم، یک خط میان نقطه‌های متناظر رسم کنیم گراف شکل ۱-۴ به‌دست می‌آید.



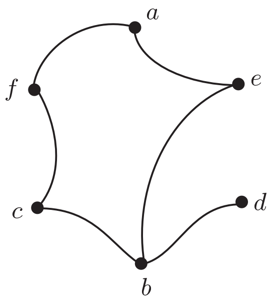
شکل ۱-۴

با توجه به اینکه هر تیم باید ۶ بازی انجام دهد، از روی گراف شکل ۱-۴ به‌آسانی می‌بینیم که باید تیم p، ۳ بازی دیگر، تیم q، ۴ بازی دیگر، تیم r، ۳ بازی دیگر، و تیم s، ۴ بازی دیگر انجام دهند.

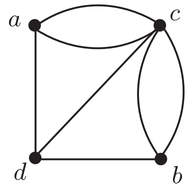
نمودار شکل‌های ۱-۲، ۱-۳، و ۱-۴ یکتا نیستند. به‌عنوان مثال این گراف‌ها را می‌توانیم به‌ترتیب به‌صورت نشان داده‌شده در شکل‌های ۱-۵، ۱-۶، و ۱-۷ رسم کنیم.



شکل ۱-۷



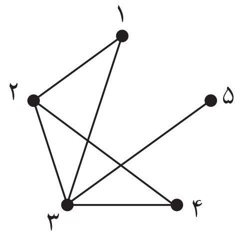
شکل ۱-۶



شکل ۱-۵

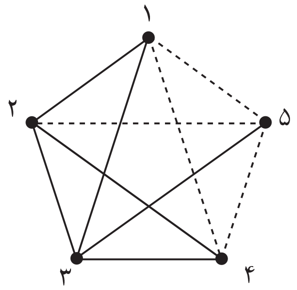
به دو گراف نشان داده‌شده در شکل‌های ۱-۲ و ۱-۵، شکل‌های ۱-۳ و ۱-۶، و شکل‌های ۱-۴ و ۱-۷ گراف‌های یکسان می‌گوییم. در شکل‌های ۱-۳ و ۱-۴ گراف‌ها به‌گونه‌ای رسم شده‌اند که یال‌ها هم در رأس‌ها و هم در نقاط دیگر برخورد دارند، اما در شکل‌های ۱-۶ و ۱-۷ همین گراف‌ها به‌گونه‌ای رسم شده‌اند که یال‌ها فقط در رأس‌ها با هم برخورد دارند. به گرافی که بتوان آن را به‌گونه‌ای رسم کرد که هیچ دو یالی جز در رأس‌ها برخورد نداشته باشند، گراف **هامنی** یا **مسطح** می‌گوییم.

۵ نفر با هم به یک گردش چند روزه رفتند. قرار شد هر روز دو نفرشان مسئولیت آماده کردن غذا را بر عهده گیرند به طوری که هیچ دو نفری بیش از یک‌بار با هم مسئول آماده کردن غذا نباشند. گردش ۶ روز طول کشید، و نفرهای ۱ و ۲، ۳ و ۵، ۲ و ۴، ۱ و ۳، ۳ و ۴، و ۲ و ۳ در هر یک از این روزها، به ترتیب، غذا را آماده کردند. با در نظر گرفتن یک رأس برای هر نفر و یک یال میان هر دو نفری که با هم در یک روز غذا را آماده کرده‌اند، گراف شکل ۱–۸ به دست می‌آید.

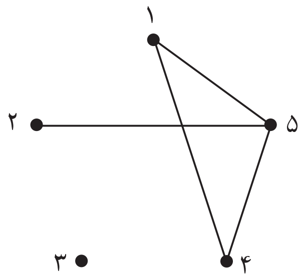


شکل ۱–۸

گردش چند روز دیگر ممکن بود ادامه یابد؟ برای رسیدن به پاسخ باید بررسی کنیم چند دوتایی دیگر از افراد ممکن است وجود داشته باشند. اگر هر دو رأس گراف ۱–۸ را، که به هم متصل نشده‌اند، با یال‌های خط‌چین به هم متصل کنیم، گراف شکل ۱–۹ به دست می‌آید. تعداد خط‌چین‌ها تعداد روزهای اضافی را نشان می‌دهد. در شکل ۱–۱۰ تنها دوتایی‌هایی را که ممکن است در ادامه مسئولیت آماده کردن غذا را بر عهده گیرند، نشان داده شده‌اند.



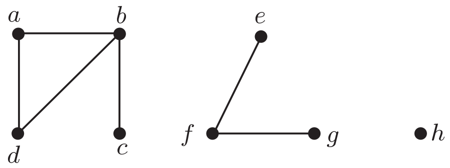
شکل ۱–۹



شکل ۱–۱۰

در گراف شکل ۱–۹، هر دو رأس با یک یال به هم متصل شده‌اند. به گرافی که در آن هر دو رأس با یک یال به هم متصل شده‌اند، **گراف کامل** می‌گوییم. گراف شکل ۱–۱۰ گرافی است که از متصل کردن هر دو رأسی، که در گراف ۱–۸ به هم متصل نیستند، به دست آمده است. گراف شکل ۱–۱۰ **مکمل** گراف شکل ۱–۸ است. به این گراف‌ها گراف‌های **مکمل** می‌گوییم.

شش پرواز بین شهرهای a و b، a و d، b و c، b و d، e و f، f و g انجام می‌شود، و هیچ پروازی به شهر h انجام نمی‌شود. گراف شکل ۱-۱۱ این وضعیت را نشان می‌دهد.



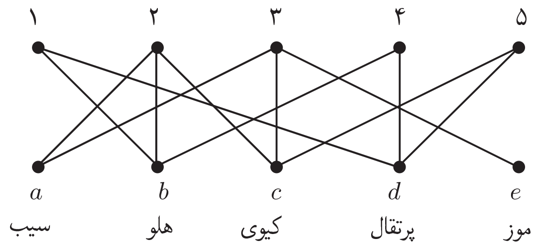
شکل ۱-۱۱

همان‌طور که مشاهده می‌کنیم، مسافرت بین شهرهای a، b، c و d از هر شهری به شهر دیگر و همچنین بین شهرهای e، f، و g از هر شهری به شهر دیگر امکان‌پذیر است. ولی، با توجه به پروازهای گفته شده، مسافرت از شهر b به شهر e امکان‌پذیر نیست.

اگر با پیمودن یال‌ها از یک رأس در یک گراف به یک رأس دیگر برویم **گشتی** از رأس اول به رأس دوم انجام داده‌ایم. به گرافی که با پیمودن یال‌ها از هر رأس بتوانیم به هر رأس دیگر برویم، یک گراف **همبند** می‌گوییم. به بیان دیگر یک گراف همبند یک گراف یک‌تکه است. به عنوان مثال گراف شکل ۱-۸ همبند، ولی گراف شکل ۱-۱۱ ناهمبند است.

پنج میوه‌ی سیب، هلو، کیوی، پرتقال، و موز موجودند. پنج پسر هر یک میوه‌ای را انتخاب می‌کند. اولی مایل است هلو یا پرتقال، دومی سیب، هلو، یا کیوی، سومی سیب، کیوی، یا موز، چهارمی هلو یا پرتقال، و پنجمی کیوی یا پرتقال را انتخاب کند.

پنج میوه را به ترتیب با a، b، c، d، و e، و پنج پسر را به ترتیب ۱، ۲، ۳، ۴، و ۵ می‌نامیم. با مشخص کردن رأس‌هایی برای میوه‌ها و پسرها، هر میوه‌ی دلخواه هر پسر را با یک یال به او متصل می‌کنیم. به این ترتیب گراف شکل ۱-۱۲ به دست می‌آید.

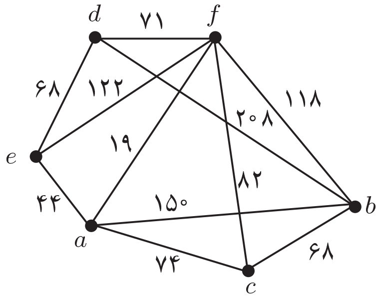


شکل ۱-۱۲

در گراف شکل ۱-۱۲، هیچ دوتایی از رأس‌های ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و نیز هیچ دوتایی از رأس‌های

a، b، c، d، و e مجاور نیستند. در واقع رأس‌های گراف به دو بخش به‌گونه‌ای تقسیم شده‌اند که همه‌ی یال‌های میان رأس‌ها از دو دسته‌اند. به چنین گرافی **گراف دوبخشی** می‌گوییم.

شهرهای a، b، c، d، e، و f را در نظر می‌گیریم، که به صورت شکل ۱-۱۳ جاده‌هایی میان آنها وجود دارند. روی هر جاده عددی نوشته شده است که نمایانگر مسافت جاده‌ی میان دو شهر است. به چنین گرافی **گراف وزن‌دار** می‌گوییم.

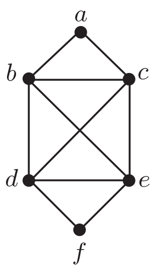


شکل ۱-۱۳

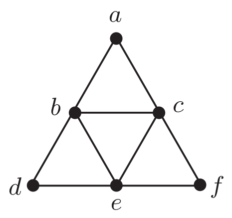
از روی گراف شکل ۱-۱۳ می‌توان دید که **طول** کوتاه‌ترین **مسیر** میان b و e برابر ۱۸۱ است، که مسیر $bfae$ است.

تمرین‌های بخش ۱-۲

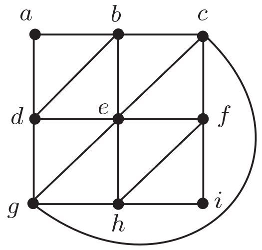
۱. در نمودار شکل زیر، نقطه‌ها بیانگر میدان‌ها، و خط‌ها بیانگر خیابان‌های شهر هستند. بکوشید مسیری بیابید که از همه‌ی خیابان‌ها دقیقاً یک‌بار بگذرد، و در پایان به همان نقطه‌ی آغازین باز گردد.



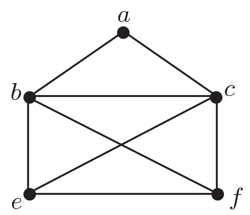
۲. در نمودار شکل صفحه‌ی بعد، بکوشید مسیری بیابید که از هر خط دقیقاً یک‌بار بگذرد.



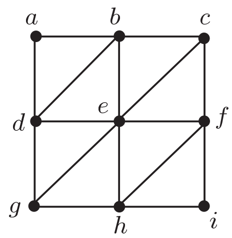
۳. در نمودار شکل زیر، بکوشید مسیری بیابید که از هر خط دقیقاً یک‌بار بگذرد.



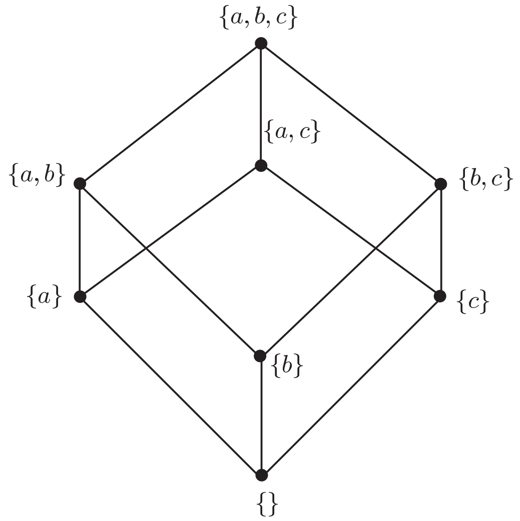
۴. در نمودار شکل زیر، بکوشید مسیری بیابید که از هر خط دقیقاً یک‌بار بگذرد.



۵. در نمودار شکل زیر، بکوشید مسیری بیابید که از هر خط دقیقاً یک‌بار بگذرد.



۶. شبکه‌ی زیرمجموعه‌های یک مجموعه به‌صورت زیر به‌دست می‌آید. دو زیرمجموعه را در نظر می‌گیریم، اگر یکی از آنها با حذف یکی از عضوهای دیگری به‌دست بیاید، آنها را با خط به هم وصل می‌کنیم. (برای مثال، شبکه‌ی زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی سه‌عضوی $\{a, b, c\}$ مانند شکل بالای صفحه‌ی بعد است.)



شبکه‌ی زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی $\{a,b,c,d\}$ را رسم کنید.

۷. در شبکه‌ی زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی ۴ عضوی تعداد خط‌های رسم‌شده میان زیرمجموعه‌ها چندتاست؟

۸. تعداد خط‌های رسم‌شده در شبکه‌ی زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی ۶ عضوی چندتاست؟

*۹. تعداد خط‌های شبکه‌ی زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی nعضوی چندتاست؟

۱۰. الف) نشان دهید تنها یک مولکول با فرمول $C_۳H_۸$ وجود دارد.

ب) نشان دهید تعداد مولکول‌ها با فرمول $C_۴H_{۱۰}$ دوتاست.

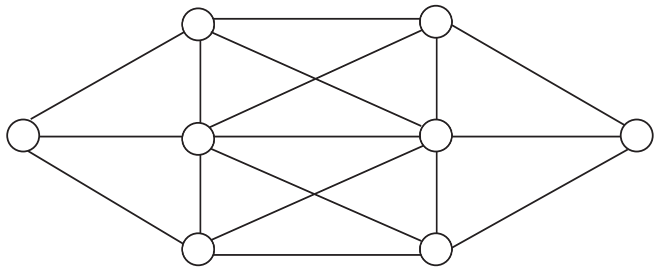
۱۱. چند مولکول با فرمول $C_۵H_{۱۲}$ وجود دارد؟

۱۲. نشان دهید هیچ مولکولی با فرمول C_nH_t وجود ندارد که در آن t فرد باشد.

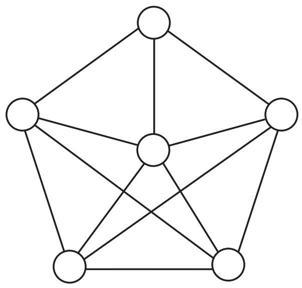
۱۳. آلکان مولکولی است که از کربن و هیدروژن تشکیل شده است، همه‌ی پیوندها در آن یگانه‌اند، و هیچ حلقه‌ی کربنی‌ای در آن وجود ندارد. در ایزومری از آلکان که کربن‌ها در آن به‌صورت یک زنجیر پشت‌سرهم قرارگرفته‌اند، چه رابطه‌ای میان تعداد هیدروژن‌ها و تعداد کربن‌ها برقرار است؟

۱۴. در شبکه‌ی جاده‌های یک ایالت، هر شهر دقیقاً به ۳ شهر دیگر جاده‌ای مستقیم دارد. آیا ممکن است با بستن یکی از این جاده‌ها ارتباط میان برخی از شهرها با برخی از شهرهای دیگر قطع شود؟

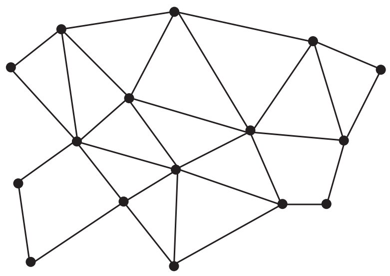
*۱۵. می‌خواهیم حرف‌های A، B، C، D، E، F، G، و H را به‌گونه‌ای در دایره‌های شکل زیر قرار دهیم که در هر دو دایره‌ای که با یک خط به هم متصل‌اند، دو حرف از نظر الفبایی متوالی نباشند. به چند روش می‌توانیم این کار را انجام دهیم؟



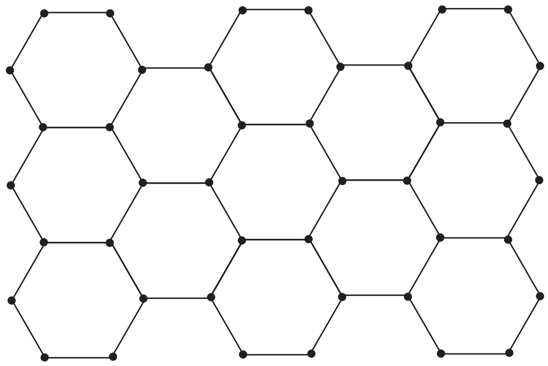
*۱۶. عددهای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، و ۶ را در هر یک از دایره‌های شکل زیر به‌گونه‌ای قرار دهید که مجموع تفاضل عددهای نوشته‌شده در هر دو دایره، که به هم متصل‌اند، کمینه شود.



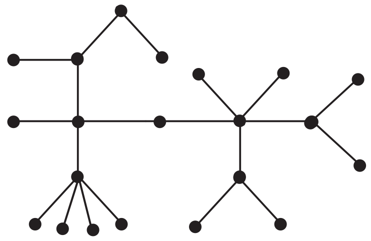
*۱۷. نموداری متشکل از تعدادی نقطه و خط داریم. خط‌ها دوتایی‌هایی از نقطه‌ها را به هم وصل می‌کنند. در این نمودار درجه‌ی یک نقطه را تعداد خط‌های متصل به آن نقطه تعریف می‌کنیم. در نمودار شکل زیر، به هر نقطه عددی برابر با مجموع درجه‌ی نقطه‌های متصل به آن را نسبت می‌دهیم، و مجموع این عددها را محاسبه می‌کنیم. فرض کنید این مجموع برابر $S_۱$ است. اکنون، روی هر خط که دو نقطه را به هم متصل می‌کند، یک نقطه رسم می‌کنیم. در نمودار جدید به دست آمده، به هر نقطه عددی برابر با مجموع درجه‌ی نقطه‌های متصل به آن را نسبت می‌دهیم، و مجموع این عددها را محاسبه می‌کنیم. فرض کنید این مجموع برابر $S_۲$ شود. $S_۲ - S_۱$ چند است؟



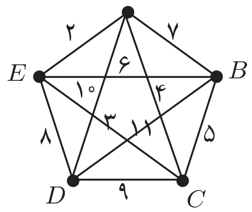
*۱۸. در شبکه‌ی نشان داده‌شده در شکل زیر می‌خواهیم از یکی از دایره‌های توپر شروع به حرکت کنیم و با حرکت روی خط‌های شبکه، از هر یک از دایره‌های توپر دیگر دقیقاً یک‌بار بگذریم و به دایره‌ی آغازین بازگردیم. آیا انجام چنین گشتی امکان‌پذیر است؟



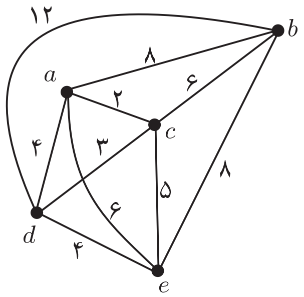
*۱۹. نقشه‌ی چند شهر و جاده‌های میان آنها مانند شکل زیر است. طول همه‌ی جاده‌های میان شهرها یکسان است. قرار است یکی از شهرها به‌عنوان مرکز تعیین شود به‌گونه‌ای که مجموع مسافت‌های همه‌ی شهرها تا شهر مرکز کمینه باشد. شهر مرکز باید کدام شهر در نظر گرفته شود؟



۲۰. نگهبان باغ‌وحشی به بزهای کوهی سرکشی می‌کند، او قصد دارد به خرس‌ها، شترها، ببرها، و فیل‌ها نیز سرکشی کند. در شکل زیر، مکان‌های نگهداری این حیوان‌ها، به‌ترتیب، با A، B، C، D، و E نشان داده شده‌اند، و فاصله‌ی هر دو مکان نگهداری نیز روی خط متصل‌کننده‌ی آن دو نوشته شده است. بکوشید کوتاه‌ترین مسیری را که نگهبان می‌تواند انتخاب کند تا همه‌ی سرکشی‌ها را انجام دهد و به مکان آغازین A بازگردد، بیابید.

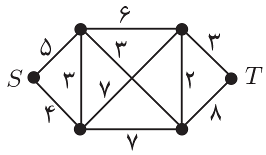


۲۱. در شکل زیر کوتاه‌ترین مسیر آغازشونده از b و پایان‌یابنده به e را بیابید که از همه‌ی نقطه‌ها دقیقاً یک‌بار بگذرد.



۲۲. در شکل «تمرین قبلی» کوتاه‌ترین مسیر آغازشونده از a و پایان‌یابنده به e را بیابید که از همه‌ی نقطه‌ها دقیقاً یک‌بار بگذرد.

۲۳. در شبکه‌ی نشان داده‌شده در شکل زیر کوتاه‌ترین مسیر از S به T را پیدا کنید.



۲۴. مارپیچ همپتن‌کورت ریختی به‌صورت نشان داده‌شده در شکل زیر دارد. تعداد مسیرها از مرکز مارپیچ به بیرون آن چندتاست؟