

(سراسری تجربی - ۹۴)

★ ۱۷۰۶. اگر  $\tan \beta = \frac{1}{4}$  و  $\alpha - \beta = \frac{\pi}{4}$  باشند، مقدار  $\sin 2\alpha$  کدام است؟

- ۰/۸ (۴)      ۰/۷۵ (۳)      ۰/۶ (۲)      ۰/۴۵ (۱)

(سراسری ریاضی خارج از کشور - ۸۸)

★ ۱۷۰۷. اگر  $\tan(\frac{\pi}{4} - \alpha) = \frac{1}{5}$  باشد،  $\tan 2\alpha$  چقدر است؟

- ۲/۵ (۴)      ۲/۴ (۳)      ۱/۸ (۲)      ۱/۵ (۱)

(سراسری تجربی خارج از کشور - ۹۳)

★ ۱۷۰۸. اگر  $\tan \alpha = 2$  و  $\tan \beta = \frac{1}{3}$  باشد، مقدار  $\tan(\alpha - \beta)$  کدام است؟

- ۳ (۴)       $\frac{1}{2}$  (۳)      -۲ (۲)      -۳ (۱)

★ ۱۷۰۹. ساده شده عبارت  $\sin(\frac{\pi}{4} - \alpha) \cos(\frac{\pi}{4} + \alpha)$  کدام است؟

- $1 - \sin 2\alpha$  (۴)       $1 + \sin 2\alpha$  (۳)       $\cos 2\alpha$  (۲)       $\cos \alpha - \sin \alpha$  (۱)

(سراسری تجربی - ۹۳)

★ ۱۷۱۰. اگر  $\cos(x + \frac{\pi}{3}) + \cos(x - \frac{\pi}{3}) = \frac{2}{3}$  باشد، مقدار  $\cos 2x$  کدام است؟

- $\frac{2}{9}$  (۴)       $\frac{1}{9}$  (۳)       $-\frac{1}{9}$  (۲)       $-\frac{2}{9}$  (۱)

(سراسری ریاضی - ۹۶)

★ ۱۷۱۱. حاصل  $\frac{1}{\sin 15^\circ} - \frac{1}{\cos 15^\circ}$  کدام است؟

- $2\sqrt{3}$  (۴)       $2\sqrt{2}$  (۳)       $\sqrt{6}$  (۲)      ۲ (۱)

★ ۱۷۱۲. اگر  $\sin x (\cos x - \sin x) = -1$  باشد، آن گاه  $\cos(2x - \frac{\pi}{4})$  چقدر است؟

- $\frac{\sqrt{2}}{2}$  (۴)      صفر (۳)      ۳ (۲)       $-\frac{\sqrt{2}}{2}$  (۱)

★ ۱۷۱۳. اگر  $\sin x \cos x = \frac{1}{18}$  باشد، حاصل  $\cos(x + \frac{\pi}{4})$  کدام است؟

- $\frac{2}{3}$  (۴)       $\frac{1}{3}$  (۳)       $\frac{2}{5}$  (۲)       $\frac{1}{5}$  (۱)

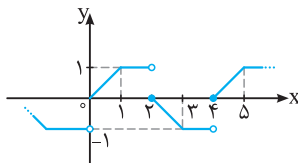
★ ۱۷۱۴. در صورتی که  $\tan(\alpha + 15^\circ) = \frac{1}{4}$ ، حاصل  $\cot(60^\circ - 2\alpha)$  کدام است؟

- $\frac{5}{3}$  (۴)       $\frac{3}{5}$  (۳)       $\frac{15}{8}$  (۲)       $\frac{8}{15}$  (۱)

### قسمت ششم: تناوب و توابع مثلثاتی

(ابتدا درس مربوط به این قسمت را در جلد آموزش مطالعه نمایید.)

#### دوره تناوب و تابع متناوب

★ ۱۷۱۵. دوره تناوب تابع  $f$  که نمودار آن به صورت مقابل می باشد، کدام است؟

- ۲ (۲)      ۱ (۱)  
۴ (۴)      ۳ (۳)

★ ۱۷۱۶. تابع متناوب  $f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x & 1 < x \leq 2 \end{cases}$  را که دوره تناوب آن ۲ است، در نظر بگیرید. مساحت ناحیه محصور به منحنی  $f$  و

(سراسری تجربی خارج از کشور - ۱۴۰۰)

محور  $x$  ها در بازه  $[-0.75, 3.25]$ ، کدام است؟

- ۴ (۴)       $3/5$  (۳)      ۳ (۲)      ۲ (۱)

★ ۱۷۱۷. دوره تناوب تابع با ضابطه  $f(x) = 5 \cos(\sqrt{2}x) - 3$  کدام است؟

- $\sqrt{2}\pi$  (۴)       $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$  (۳)       $\frac{2\pi}{5}$  (۲)       $2\pi$  (۱)

★ ۱۷۱۸. دوره تناوب تابع با ضابطه  $y = -\pi \sin(\frac{1}{4}(x-2))$  کدام است؟

- ۲ (۴)       $4\pi$  (۳)       $2\pi$  (۲)       $\pi$  (۱)

★ ۱۷۱۹. نمودار تابع  $f(x) = 4 - 3 \sin(\frac{\pi}{6} - \frac{b\pi x}{3})$  در هر بازه به طول  $\frac{2}{3}$  تکرار می شود. مقدار مثبت  $b$  کدام است؟

- ۱۲ (۴)      ۹ (۳)      ۶ (۲)      ۲ (۱)

★ ۱۷۲۰. دوره تناوب تابع  $y = \cos((2x+1)\pi)$  سه برابر دوره تناوب تابع  $y = \sin((ax+\delta)\pi)$  است.  $a$  کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) ۶ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۴

★ ۱۷۲۱. دوره تناوب تابع  $y = a \sin(\frac{\pi}{4} - bx)$  برابر  $\pi$  است. اگر نمودار این تابع از نقطه  $(\frac{\pi}{4}, 3)$  بگذرد، محور عرض‌ها را در کدام نقطه قطع می‌کند؟

- (۱) صفر (۲) -۳ (۳) ۳ (۴) -۲

★ ۱۷۲۲. اگر دوره تناوب تابع  $f(x) = \cos x \cos 3x + \sin x \sin 3x$  برابر  $T_1$  و دوره تناوب تابع  $g(x) = \cos x \cos 3x - \sin x \sin 3x$  برابر  $T_2$  باشد، کدام گزینه صحیح است؟

- (۱)  $T_1 = T_2$  (۲)  $T_2 = 2T_1$  (۳)  $T_1 + T_2 = 4\pi$  (۴)  $T_1 = 2T_2$

★ ۱۷۲۳. دوره تناوب تابع با ضابطه  $f(x) = \sin^3 x \cos x - \cos^3 x \sin x$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{\pi}{4}$  (۲)  $\frac{\pi}{2}$  (۳)  $\pi$  (۴)  $2\pi$

★ ۱۷۲۴. دوره تناوب تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{\cos^6 x - \sin^6 x}{\tan x + \cot x}$  کدام است؟

- (۱)  $2\pi$  (۲)  $\pi$  (۳)  $\frac{\pi}{2}$  (۴)  $\frac{\pi}{4}$

★ ۱۷۲۵. دوره تناوب تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{\tan 3x - \tan^3 3x}{(1 + \tan^2 3x)^2}$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{\pi}{6}$  (۲)  $\frac{\pi}{4}$  (۳)  $\frac{\pi}{3}$  (۴)  $\pi$

(برگرفته از کتاب درسی)

★ ۱۷۲۶. دوره تناوب تابع  $y = -\pi + \sqrt{2} \tan 2x$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{2\pi}{3}$  (۲)  $\frac{\pi}{3}$  (۳) ۱ (۴)  $\frac{\sqrt{2}\pi}{2}$

★ ۱۷۲۷. دوره تناوب تابع  $f(x) = \tan 2x - \cot 2x$  کدام است؟

- (۱)  $\pi$  (۲)  $2\pi$  (۳)  $\frac{\pi}{2}$  (۴)  $\frac{\pi}{4}$

(سراسری ریاضی فارغ از کشور - ۹۸)

★ ۱۷۲۸. دوره تناوب تابع با ضابطه  $f(x) = \tan(\pi x) - \cot(\pi x)$ ، کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{2}$  (۲) ۱ (۳) ۲ (۴)  $\pi$

★ ۱۷۲۹. اگر دوره تناوب تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{\tan ax}{1 - \tan^2 ax}$  برابر  $\frac{3}{2}$  باشد، مقدار  $|a|$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{\pi}{3}$  (۲)  $\frac{2\pi}{3}$  (۳) ۳ (۴)  $3\pi$

★ ۱۷۳۰. دوره تناوب تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{\pi}{2}$  (۲)  $\pi$  (۳)  $2\pi$  (۴)  $4\pi$

★ ۱۷۳۱. اگر تابع  $f$  متناوب با دامنه  $\mathbb{R}$  و دوره تناوب آن  $T = 2$  و ضابطه آن در بازه  $[0, 2]$  به صورت  $f(x) = x^2$  باشد،  $f(\frac{7}{4})$  کدام است؟

- (۱)  $5/4$  (۲)  $49/16$  (۳)  $1/21$  (۴)  $1/21$

★ ۱۷۳۲. دوره تناوب اصلی تابع  $f(x) = \tan x \cot x$  کدام است؟

- (۱) متناوب نیست. (۲) هر مقدار مثبت می‌تواند باشد. (۳)  $\frac{\pi}{2}$  (۴)  $\pi$

★ ۱۷۳۳. اگر  $f$  تابعی متناوب با دامنه  $\mathbb{R}$  باشد و به ازای هر  $x \in \mathbb{R}$ ، رابطه  $f(x+2)f(x) = 1$  برقرار است. کدام عدد زیر دوره تناوب تابع  $f$  است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۶

★ ۱۷۳۴. فرض کنید تابع  $f$  به ازای هر  $x \in \mathbb{R}$  نسبت به خطوط  $x = 1$  و  $x = 3$  متقارن باشد. کدام عبارت زیر درست است؟

(سراسری ریاضی فارغ از کشور - ۱۴۰۰)

- (۱)  $f$  تابعی فرد است. (۲)  $f$  تابعی زوج است. (۳)  $f$  تابعی متناوب با دوره تناوب ۲ است. (۴)  $f$  تابعی متناوب با دوره تناوب ۴ است.

## توابع مثلثاتی سینوس و کسینوس

تو این قسمت فقط به حل تستی مربوط به توابع مثلثاتی سینوس و کسینوس می‌پردازیم.

☆ ۱۷۳۵. کدام گزینه درست است؟

(۱)  $\sin 25^\circ$  یک عدد حقیقی است.

(۳)  $\sin 3^\circ = \sin 3^\circ$

☆ ۱۷۳۶. کدام گزینه درست است؟

(۱) توابع  $y = \sin x$  و  $y = \cos x$ ، تنها توابع مثلثاتی هستند.

(۲) توابع  $y = \sin x$  و  $y = \cos x$  متناوب بوده و دوره تناوب آن‌ها برابر  $\pi$  است.

(۳) اگر نمودار  $y = \sin x$  را به اندازه  $\frac{\pi}{4}$  در راستای محور  $x$  ها به سمت چپ منتقل کنیم، نمودار  $y = \cos x$  به دست می‌آید.

(۴) دامنه و برد توابع  $y = \sin x$  و  $y = \cos x$  به ترتیب  $[-1, 1]$  و  $\mathbb{R}$  می‌باشد.

☆ ۱۷۳۷. دامنه تابع  $f(x) = \frac{x-1}{\sin x}$  به کدام صورت است؟

(۱)  $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

(۳)  $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$

☆ ۱۷۳۸. دامنه تابع  $f(x) = \frac{\sin x}{1 - \cos x}$  کدام است؟

(۱)  $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

(۳)  $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

(۲)  $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

(۴)  $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$

(۲)  $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$

(۴)  $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

(سرآزمی ریاضی خارج از کشور- ۸۹)

☆ ۱۷۳۹. در تابع با ضابطه  $f(x) = [x] + [-x] + \sqrt{\sin \pi x - 1}$ ، مقدار  $f(-\frac{1}{4})$  کدام است؟

(۴) تعریف نشده

(۳) صفر

(۲) ۱

(۱) -۱

(سرآزمی ریاضی- ۹۱)

☆ ۱۷۴۰. با کدام ضابطه  $f(x)$ ، همواره تساوی  $|f(x)| = f(x)^{[x]}$  برقرار است؟

(۴)  $\cos 2\pi x$

(۳)  $\sin 2\pi x$

(۲)  $\cos \pi x$

(۱)  $\sin \pi x$

## ماکسیمم و مینیمم توابع سینوسی و کسینوسی

(برگرفته از کتاب درسی)

☆ ۱۷۴۱. اختلاف بیش‌ترین مقدار و کم‌ترین مقدار تابع با ضابطه  $f(x) = \sqrt{3} - \pi \sin(2x-1)$  کدام است؟

(۴)  $\sqrt{3}$

(۳)  $2\sqrt{3}$

(۲)  $2\pi$

(۱) صفر

(برگرفته از کتاب درسی)

☆ ۱۷۴۲. در مورد تابع با ضابطه  $f(x) = 3 \cos(\frac{3\pi}{5}x - \frac{\pi}{4}) + 1$  کدام گزینه نادرست است؟

(۲)  $\min = -4$

(۱)  $\max = 4$

(۴) محور  $y$  ها را در نقطه‌ای با عرض مثبت قطع می‌کند.

(۳)  $T = \frac{10}{3}$

(برگرفته از کتاب درسی)

☆ ۱۷۴۳. اگر در مورد تابع  $f$  بدانیم  $\max = 9$ ،  $\min = 3$  و  $T = 3\pi$ ، ضابطه این تابع کدام می‌تواند باشد؟

(۴)  $y = 6 \cos(\frac{2}{3}x) + 3$

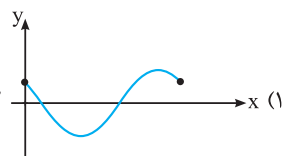
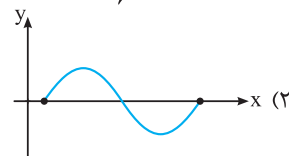
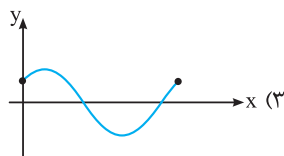
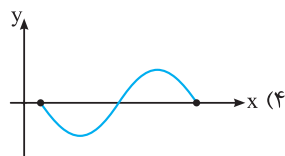
(۳)  $y = 6 - 3 \sin(\frac{2}{3}x)$

(۲)  $y = 3 \cos(\frac{2}{3}x) - 6$

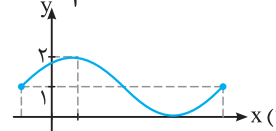
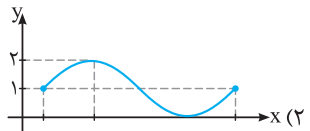
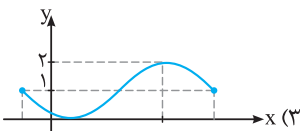
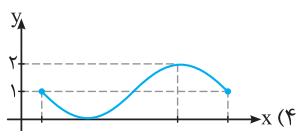
(۱)  $y = 6 \sin(\frac{2}{3}x) + 3$

## نمودار توابع مثلثاتی

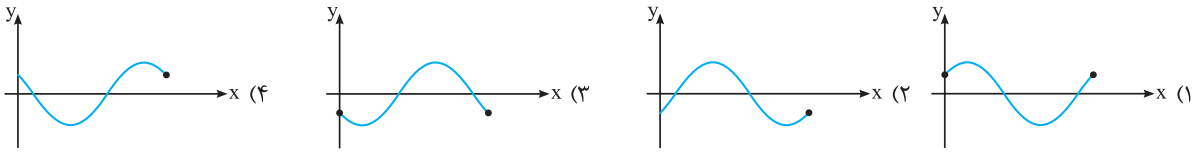
☆ ۱۷۴۴. کدام یک از نمودارهای زیر، بخشی از نمودار تابع  $y = \cos(x - \frac{\pi}{6})$  است؟



☆ ۱۷۴۵. نمودار تابع  $y = \sin(\frac{\pi}{4} + x) + 1$  در یک دوره تناوب چگونه است؟



۱۷۴۶. کدام نمودار زیر، بخشی از نمودار تابع  $y = \sin(\frac{\pi}{3} - x)$  است؟

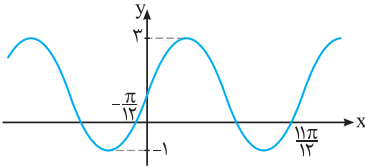


۱۷۴۷. نمودار تابع با ضابطه  $f(x) = -2\sin(x + \frac{\pi}{6})$  در بازه  $[-\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{6}]$  از کدام ناحیه عبور نمی‌کند؟

- (۱) فقط ناحیه چهارم (۲) فقط ناحیه سوم (۳) نواحی سوم و چهارم (۴) فقط ناحیه اول

(برگرفته از کتاب درسی)

۱۷۴۸. نمودار شکل زیر، مربوط به کدام گزینه می‌تواند باشد؟

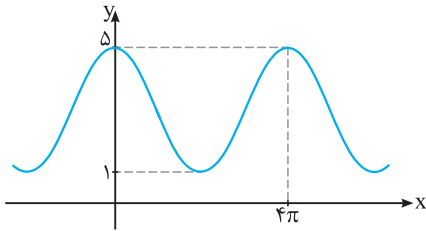


$y = 2\sin(2x) + 1$   
 $y = 2\cos(2x - \frac{\pi}{12}) + 1$

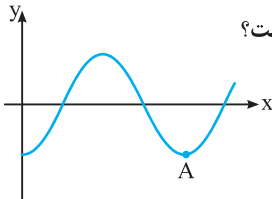
(۱)  $y = 3\sin(\frac{x}{2}) + 1$   
 (۲)  $y = 4\cos(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}) - 1$

(برگرفته از کتاب درسی)

۱۷۴۹. نمودار شکل زیر، مربوط به کدام گزینه می‌تواند باشد؟



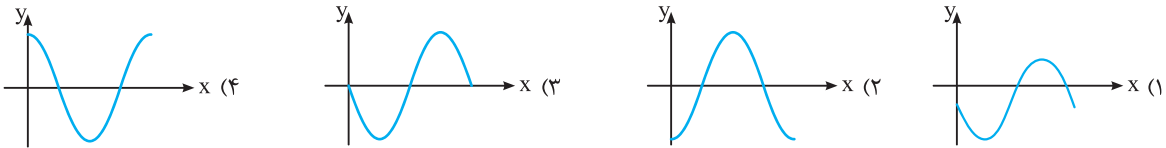
(۱)  $y = 3\cos(\frac{1}{2}x) + 2$   
 (۲)  $y = 2\sin(\frac{2x + 5\pi}{2}) + 3$   
 (۳)  $y = 2\cos(\frac{1}{2}x) + 3$   
 (۴)  $y = 5 - 4\sin(\frac{1}{2}x)$



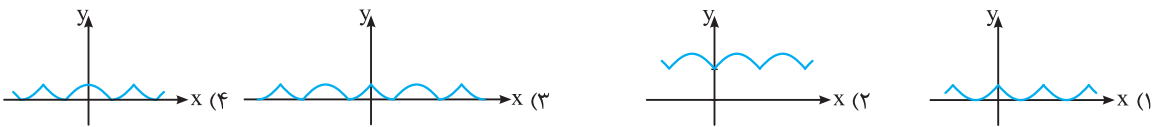
۱۷۵۰. شکل مقابل، قسمتی از نمودار تابع با ضابطه  $f(x) = \sin^2 x - \cos^2 x$  می‌باشد. مختصات نقطه A کدام است؟

- (۱)  $(\pi, -1)$  (۲)  $(2\pi, -1)$   
 (۳)  $(\frac{5\pi}{4}, -1)$  (۴)  $(\frac{5\pi}{4}, -2)$

۱۷۵۱. نمودار تابع با ضابطه  $f(x) = 2 - 4\cos^2 x$  در بازه  $[0, \pi]$  به کدام صورت است؟



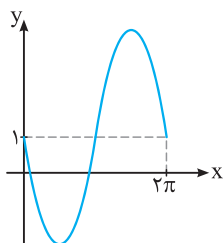
۱۷۵۲. نمودار  $y = |\frac{1}{2} - |\cos x||$  به کدام صورت است؟



کاربرد دوره تناوب و ماکسیمم و مینیمم در حل مسائل

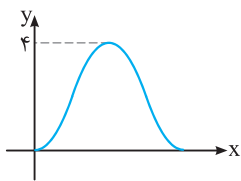
استفاده از دوره تناوب، واسه پیدا کردن پارامتر تو تستایی که نمودار و ضابطه اونو داره می‌شه، یکی از مهم‌ترین مباحثه و تستای زیاری از این مبحث تو کنگور مطرح شده.

۱۷۵۳. شکل مقابل، نمودار تابع  $y = a + 3\sin bx$  در بازه  $[0, 2\pi]$  است. کدام ab است؟



- (۱) ۱  
 (۲) -۱  
 (۳) -۲  
 (۴) -۳

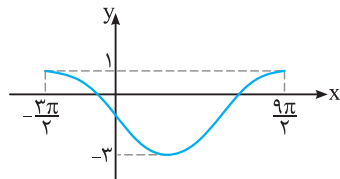
(سراسری ریاضی - ۹۷)



۱۷۵۴★ شکل زیر، نمودار تابع  $f(x) = a + b \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)$  در بازه  $(0, 4)$  است. مقدار  $b$  کدام است؟

- (۱) -۲
- (۲) -۱
- (۳) ۱
- (۴) ۲

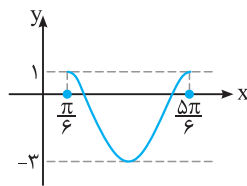
(سراسری تجربی - ۹۹)



۱۷۵۵★ شکل زیر، نمودار تابع  $y = a \sin(bx) + c$  را در یک بازه تناوب، نشان می‌دهد. نسبت  $\frac{a}{b}$ ، کدام است؟

- (۱) -۲
- (۲) -۳
- (۳) -۴
- (۴) -۶

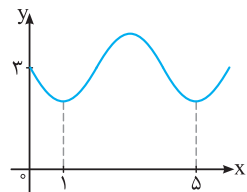
(سراسری تجربی خارج از کشور - ۹۹)



۱۷۵۶★ شکل زیر، نمودار تابع  $y = a \sin(bx) + c$ ، در یک بازه تناوب است. مقادیر  $b$  و  $c$ ، کدام‌اند؟

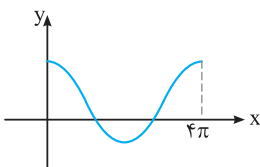
- (۱)  $b = 3, c = -1$
- (۲)  $b = 3, c = -2$
- (۳)  $b = \frac{3}{2}, c = -2$
- (۴)  $b = \frac{3}{2}, c = -1$

(سراسری تجربی - ۹۳)



۱۷۵۷★ شکل زیر قسمتی از نمودار تابع  $y = a + \sin(b\pi x)$  است. مقدار  $y$  در نقطه  $x = \frac{25}{3}$  کدام است؟

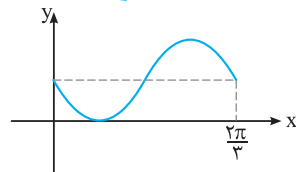
- (۱) ۲
- (۲) ۲/۵
- (۳) ۳
- (۴) ۳/۵



۱۷۵۸★ شکل مقابل قسمتی از نمودار تابع  $y = \frac{1}{3} + 2 \cos(mx)$  است. مقدار تابع در نقطه  $x = \frac{16\pi}{3}$  کدام است؟

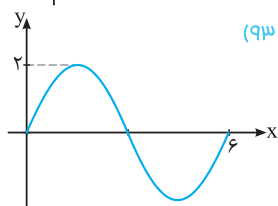
- (سراسری ریاضی - ۹۶)
- (۱)  $-\frac{1}{3}$
  - (۲)  $\frac{1}{3}$
  - (۳) ۱
  - (۴) صفر

(سراسری ریاضی خارج از کشور - ۹۶)



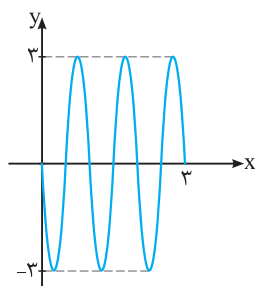
۱۷۵۹★ شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع  $y = 1 - \sin(mx)$  است. مقدار تابع در نقطه  $x = \frac{7\pi}{6}$  کدام است؟

- (۱) صفر
- (۲)  $\frac{1}{2}$
- (۳) ۱
- (۴) ۲



۱۷۶۰★ شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع  $y = a \sin(b\pi x)$  است.  $a + b$  کدام است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور - ۹۳)

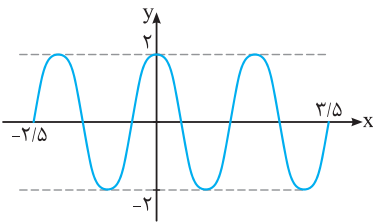
- (۱)  $\frac{4}{3}$
- (۲)  $\frac{5}{3}$
- (۳)  $\frac{7}{3}$
- (۴)  $\frac{1}{3}$



۱۷۶۱★ شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع  $y = a \sin(b\pi x)$  است.  $a \cdot b$  کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور - ۹۲)

- (۱) -۶
- (۲) -۳
- (۳) ۴/۵
- (۴) ۶

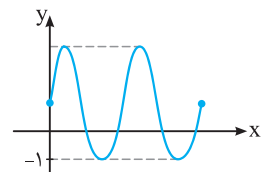
(سراسری ریاضی - ۹۷)



۱۷۶۲★ شکل زیر قسمتی از نمودار تابع  $y = a \sin(\pi(\frac{1}{4} + bx))$  است.  $a, b$  کدام است؟

- ۲ (۱)
- ۲/۵ (۲)
- ۳ (۳)
- ۳/۵ (۴)

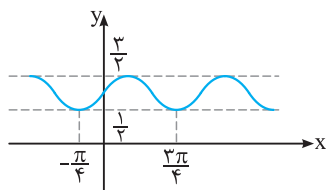
(سراسری ریاضی فارج از کشور - ۹۷)



۱۷۶۳★ شکل زیر، نمودار تابع  $f(x) = 1 + a \sin(b\pi x)$  در بازه  $(0, \frac{4}{3})$  است.  $a + b$  کدام است؟

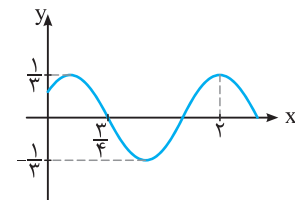
- ۳ (۱)
- ۴ (۲)
- ۵ (۳)
- ۶ (۴)

(سراسری ریاضی - ۹۸)



۱۷۶۴★ شکل زیر، نمودار تابع  $y = 1 + a \sin bx \cos bx$  است.  $a + b$  کدام است؟

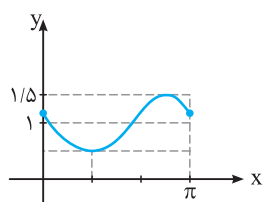
- ۱ (۱)
- ۳/۲ (۲)
- ۲ (۳)
- ۳ (۴)



۱۷۶۵☼ نمودار مقابل بخشی از نمودار تابع  $f(x) = a \cos(bx + c)$  است ( $a, b > 0$ ). مقدار  $c$  کدام است؟

- ۲ (۱)  $\frac{2\pi}{5}$
- ۳ (۲)  $\frac{1}{3}$
- ۴ (۳)  $-\frac{2\pi}{5}$
- ۵ (۴)  $-\frac{1}{3}$

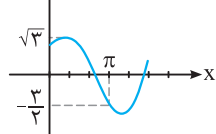
(سراسری ریاضی فارج از کشور - ۹۵)



۱۷۶۶★ شکل زیر قسمتی از نمودار تابع با ضابطه  $y = 1 + a \sin(bx - \frac{\pi}{6})$  است.  $a + b$  کدام است؟

- ۱ (۲)  $\frac{1}{2}$
- ۲ (۴)  $\frac{3}{2}$

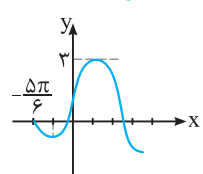
(سراسری تجربی - ۹۸)



۱۷۶۷☼ شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع  $y = a + b \sin(x + \frac{\pi}{3})$  است.  $b$  کدام است؟

- ۳ (۲)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- ۲ (۴)  $\sqrt{3}$

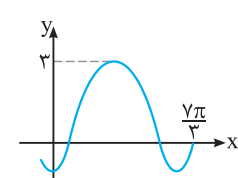
(سراسری تجربی فارج از کشور - ۹۸)



۱۷۶۸★ شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع  $y = a + b \cos(\frac{\pi}{4} - x)$  است. مقدار تابع در  $x = \frac{\pi}{6}$  کدام است؟

- ۱/۵ (۱)
- ۲ (۲)
- ۲/۵ (۳)
- ۱ + sqrt(3) (۴)

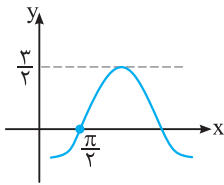
(سراسری تجربی - ۹۹)



۱۷۶۹★ شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع با ضابطه  $y = a + b \sin(\frac{\pi}{4} + x)$  است. مقدار  $b$ ، کدام است؟

- ۲ (۱)
- ۱ (۲)
- ۱ (۳)
- ۲ (۴)

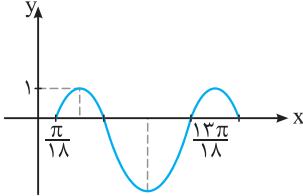
(سراسری تجربی فارع از کشور - ۹۹)



۱۷۷۰☆ شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع با ضابطه  $y = a + b \sin(x + \frac{\pi}{3})$  است. مقدار  $a$ ، کدام است؟

- (۱) -۱
- (۲)  $-\frac{1}{2}$
- (۳)  $\frac{1}{2}$
- (۴) ۱

(سراسری ریاضی - ۹۵)



۱۷۷۱☆ شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع با ضابطه  $y = a - 2 \cos(bx + \frac{\pi}{3})$  است. کدام  $a + b$  است؟

- (۱)  $\frac{1}{2}$
- (۲) ۱
- (۳)  $\frac{3}{2}$
- (۴) ۲

۱۷۷۲☆ می‌دانیم طول روز در هر سال مشابه سال قبل تکرار می‌شود. به طوری‌که از اول فروردین تا اول تابستان طول روزها در حال افزایش و از اول تابستان تا اول زمستان در حال کاهش و دوباره از اول زمستان طول روزها افزایش می‌یابد. اگر  $t = 0$  بیان‌گر روز اول فروردین و  $t = 365$  نشان‌دهنده روز آخر سال باشد (سال را کبیسه می‌گیریم) و تابع  $L(t) = a \sin bt + c$  بیان‌گر طول روز  $t$  ام بر حسب ساعت و همچنین طول اولین روز تیر،  $15/5$  ساعت و طول اولین روز دی ۹ ساعت باشد، طول روز سی‌ویکم اردیبهشت تقریباً چند ساعت

(برگرفته از کتاب درسی)

است؟ ( $\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.85$ )

- (۱)  $13/5$
- (۲) ۱۴
- (۳)  $14/5$
- (۴) ۱۵

حل معادله به روش هندسی

تستای حل معادله به روش هندسی رو قبلاً تو مبث معادلات حل کردی. این‌ها صرفاً چند تست که نسبت مثلثاتی توش به کار رفته رو حل می‌کنی.

۱۷۷۳☆ چند زاویه مانند  $\theta$  در  $[-\pi, 2\pi]$  وجود دارد، به طوری‌که  $\sin \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  باشد؟

- (۱) ۱
- (۲) ۲
- (۳) ۳
- (۴) ۴

۱۷۷۴☆ معادله  $|\sin x| = |\frac{x}{\pi}|$  چند جواب دارد؟

- (۱) ۱
- (۲) ۲
- (۳) ۳
- (۴) بی‌شمار

۱۷۷۵☆ معادله  $\sin x + \cos x = 0$  در  $[-\pi, 2\pi]$  چند جواب دارد؟

- (۱) ۱
- (۲) ۲
- (۳) ۳
- (۴) ۴

۱۷۷۶☆ معادله  $x \cos x = 1$  در بازه  $[0, 2\pi]$  چند جواب دارد؟

- (۱) صفر
- (۲) ۱
- (۳) ۲
- (۴) ۳

۱۷۷۷☆ معادله  $|\log x| + |\cos x| = 1$  چند جواب دارد؟

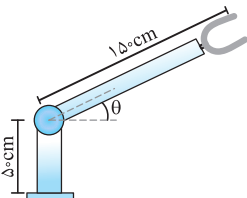
- (۱) ۴
- (۲) ۵
- (۳) ۶
- (۴) ۷

کاربرد توابع مثلثاتی در حل مسائل

تو کتابای درسی به کاربرد توابع مثلثاتی در حل مسئله، خیلی بها داده شده. نمونه‌هایی از مثلا و تمرینای کتاب رو می‌بینی.

۱۷۷۸☆ شکل مقابل یک روبات صنعتی را نشان می‌دهد که در صنایع خودروسازی کاربرد دارد. کدام تابع

زیر، ارتفاع نوک گیره روبات را از سطح زمین بر حسب  $\theta$  مشخص می‌کند؟ (برگرفته از کتاب درسی)



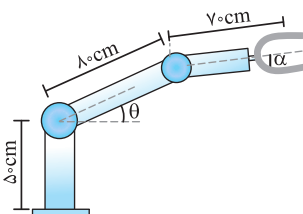
- (۱)  $y = 15 + 15 \sin \theta$
- (۲)  $y = 15 + 15 \cos \theta$
- (۳)  $y = 5 + 15 \sin \theta$
- (۴)  $y = 5 + 15 \cos \theta$

۱۷۷۹☆ شکل روبه‌رو، یک روبات صنعتی را نشان می‌دهد که دارای دو مفصل مکانیکی است. اگر برای

گرفتن یک شیء در ارتفاع ۱۲۵ سانتی‌متری، این روبات مفصل اول خود را در حالت  $\theta = 30^\circ$  قرار

دهد، در این وضعیت  $\alpha$  چند درجه خواهد بود؟ (برگرفته از کتاب درسی)

- (۱) صفر
- (۲) ۳۰
- (۳) ۴۵
- (۴) ۶۰



☆ ۱۷۸۰. یک ساعت دیواری به شعاع ۲۰ سانتی‌متر روی یک دیوار نصب شده است. اگر فاصله عدد ۶ روی محیط ساعت از زمین ۲ متر باشد، فاصله عدد ۵ تا زمین چقدر است؟ ( $\sqrt{3} = 1/7$ )

(۱) ۲ متر و ۱ سانتی‌متر (۲) ۲ متر و ۲ سانتی‌متر (۳) ۲ متر و ۳ سانتی‌متر (۴) ۲ متر و ۴ سانتی‌متر

☆ ۱۷۸۱. مهدی قصد دارد سوار چرخ‌وفلکی به شعاع ۲۰ متر شود که از سطح زمین ۲ متر فاصله دارد. پس از آن که مهدی سوار کابین شماره (۱)

می‌شود و چرخ‌وفلک به اندازه  $120^\circ$  در جهت خلاف عقربه‌های ساعت می‌چرخد، ناگهان چرخ‌وفلک متوقف می‌شود. در این لحظه ارتفاع مهدی از سطح زمین چند متر است؟

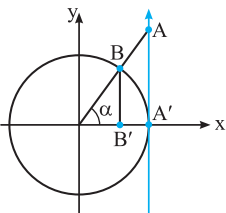
(۱) ۳۸ (۲) ۳۶ (۳) ۳۲ (۴) ۳۰

☆ ۱۷۸۲. چرخ‌وفلکی به شعاع ۱۵ متر، هر ۲ دقیقه یک دور در خلاف جهت عقربه‌های ساعت می‌چرخد. شخصی از سکویی که ارتفاع آن ۳ متر

است، بالا رفته و سوار پایین‌ترین کابین می‌شود. پس از ۲۰ ثانیه این شخص در چه ارتفاعی از زمین قرار دارد؟

(۱) ۹/۵ متر (۲) ۱۰/۵ متر (۳) ۱۱/۵ متر (۴) ۱۲/۵ متر

## تابع تناژانت



☆ ۱۷۸۳. در دایره مثلثاتی مقابل، مقدار عددی  $\frac{AA'}{BB'}$  وقتی  $\alpha = 60^\circ$  باشد، کدام است؟

(۱) ۱/۲ (۲) ۱/۵ (۳) ۲ (۴) ۲/۵

(برگرفته از کتاب درسی)

☆ ۱۷۸۴. چه تعداد از گزاره‌های زیر در مورد تابع  $f(x) = \tan x$  درست است؟

(ب) می‌توان بازه‌ای یافت که در آن نزولی باشد.

(آ) در دامنه‌اش صعودی است.

(ت) در هر بازه که تعریف شده باشد، صعودی است.

(پ) می‌توان بازه‌ای یافت که در آن غیرصعودی باشد.

(ج) تابعی متناوب با دوره تناوب  $\pi$  است.

(ث) برد تابع برابر  $\mathbb{R}$  است.

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

☆ ۱۷۸۵. اگر  $0 < x < \frac{\pi}{8}$ ،  $\tan 2x = \frac{m+1}{m-2}$ ، حدود  $m$  کدام است؟

(۱)  $m > 2$  (۲)  $-1 < m < 2$  (۳)  $m < 0$  (۴)  $-1 < m < \frac{1}{2}$

(برگرفته از کتاب درسی)

☆ ۱۷۸۶. کدام گزینه نادرست است؟

(۲) اگر  $\frac{\pi}{4} < \alpha < \pi$ ، آن‌گاه  $\tan \alpha < \sin \alpha$

(۱) اگر  $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ ، آن‌گاه  $\sin \alpha < \tan \alpha$

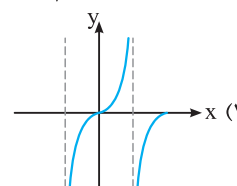
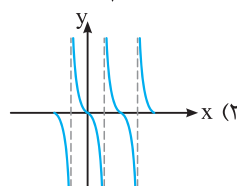
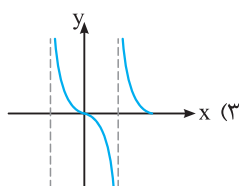
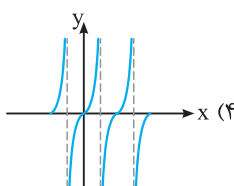
(۴) اگر  $0 < \alpha < \frac{3\pi}{4}$ ، آن‌گاه  $\sin \alpha < \tan \alpha$

(۳) اگر  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{4}$ ، آن‌گاه  $\sin \alpha < \tan \alpha$

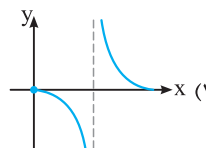
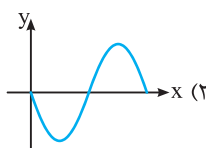
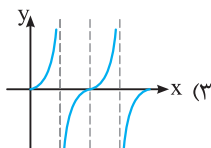
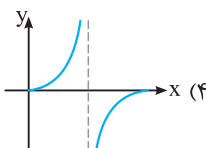
☆ ۱۷۸۷. تابع با ضابطه  $f(x) = \tan 2x$  به ازای چند مقدار  $x$  از بازه  $[-\frac{\pi}{4}, \pi]$  تعریف نمی‌شود؟

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

☆ ۱۷۸۸. نمودار تابع  $f(x) = -\frac{1}{2} \tan 2x$  در بازه  $[-\frac{\pi}{4}, \pi]$  به کدام صورت است؟



☆ ۱۷۸۹. نمودار تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$  در بازه  $[0, 2\pi]$  به کدام صورت است؟





### قسمت هفتم: معادلات مثلثاتی

(ابتدا درس مربوط به این قسمت را در جلد آموزش مطالعه نمایید.)

#### یافتن جواب کلی در معادلات مثلثاتی

☆ ۱۷۹۰. یک جواب کلی معادله  $\sin 3x = \sin 2x$  کدام است؟

$$\begin{array}{llll} (۱) & k\pi & (۲) & \frac{(2k+1)\pi}{3} \\ (۳) & \frac{(2k+1)\pi}{5} & (۴) & \frac{k\pi}{3} \end{array}$$

☆ ۱۷۹۱. جواب کلی معادله  $4 \cos 2x = \sqrt{8}$  کدام است؟

$$\begin{array}{llll} (۱) & 2k\pi \pm \frac{\pi}{4} & (۲) & k\pi \pm \frac{\pi}{4} \\ (۳) & 2k\pi \pm \frac{\pi}{8} & (۴) & k\pi \pm \frac{\pi}{8} \end{array}$$

☆ ۱۷۹۲. جواب کلی معادله  $\tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \tan \Delta x$  کدام است؟

$$\begin{array}{llll} (۱) & k\pi + \frac{\pi}{4} & (۲) & \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{16} \\ (۳) & \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} & (۴) & \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{16} \end{array}$$

☆ ۱۷۹۳. جواب کلی معادله مثلثاتی  $\sin 3x + \sin x = 0$  (که  $k \in \mathbb{Z}$ ) کدام است؟

$$\begin{array}{llll} (۱) & \frac{k\pi}{2} & (۲) & k\pi \\ (۳) & k\pi + \frac{\pi}{2} & (۴) & 2k\pi + \frac{\pi}{2} \end{array}$$

☆ ۱۷۹۴. جواب کلی معادله مثلثاتی  $\cos 3x + \cos x = 0$ ، با شرط  $\cos x \neq 0$  کدام است؟

$$\begin{array}{llll} (۱) & \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} & (۲) & \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8} \\ (۳) & k\pi - \frac{\pi}{4} & (۴) & k\pi + \frac{\pi}{4} \end{array}$$

(سراسری تجربی خارج از کشور - ۹۴ و ۹۸)

☆ ۱۷۹۵. جواب کلی معادله مثلثاتی  $\frac{\sin 3x}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)} = 1$ ، به کدام صورت است؟

$$\begin{array}{llll} (۱) & k\pi + \frac{\pi}{4} & (۲) & 2k\pi \pm \frac{\pi}{4} \\ (۳) & 2k\pi \pm \frac{3\pi}{4} & (۴) & \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \end{array}$$

(سراسری تجربی - ۹۳)

☆ ۱۷۹۶. جواب کلی معادله مثلثاتی  $\frac{\sin 3x + \sin 2x}{1 + \cos x} = 0$  کدام است؟

$$\begin{array}{llll} (۱) & \frac{k\pi}{5} & (۲) & \frac{2k\pi}{5} \\ (۳) & k\pi + \frac{\pi}{5} & (۴) & \frac{(2k+1)\pi}{5} \end{array}$$

(سراسری تجربی خارج از کشور - ۹۷)

☆ ۱۷۹۷. جواب کلی معادله مثلثاتی  $\frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = \sqrt{3}$ ، به کدام صورت است؟

$$\begin{array}{llll} (۱) & \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{6} & (۲) & \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \\ (۳) & k\pi + \frac{\pi}{6} & (۴) & k\pi - \frac{\pi}{6} \end{array}$$

(سراسری تجربی خارج از کشور - ۹۱)

☆ ۱۷۹۸. جواب کلی معادله مثلثاتی  $\frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} = \tan 3x$  به کدام صورت است؟

$$\begin{array}{llll} (۱) & \frac{k\pi}{4} - \frac{\pi}{16} & (۲) & \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{16} \\ (۳) & \frac{k\pi}{4} - \frac{\pi}{8} & (۴) & \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8} \end{array}$$

(سراسری ریاضی خارج از کشور - ۹۴)

☆ ۱۷۹۹. جواب کلی معادله مثلثاتی  $\sin^2 x - \cos^2 x = \sin\left(\frac{3\pi}{4} + x\right)$  به کدام صورت است؟

$$\begin{array}{llll} (۱) & \frac{k\pi}{3} & (۲) & \frac{2k\pi}{3} \\ (۳) & 2k\pi + \frac{\pi}{3} & (۴) & 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \end{array}$$

(سراسری تجربی - ۹۱)

☆ ۱۸۰۰. یکی از جوابهای معادله  $2 \sin^2 x - 3 \sin x - 2 = 0$  کدام است؟

$$\begin{array}{llll} (۱) & \frac{2\pi}{3} & (۲) & \frac{5\pi}{6} \\ (۳) & \frac{7\pi}{6} & (۴) & \frac{4\pi}{3} \end{array}$$

(سراسری تجربی - ۹۵)

☆ ۱۸۰۱. جواب کلی معادله مثلثاتی  $2 \sin^2 x + 3 \cos x = 0$ ، کدام است؟

$$\begin{array}{llll} (۱) & 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} & (۲) & 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \\ (۳) & 2k\pi \pm \frac{5\pi}{6} & (۴) & k\pi - \frac{\pi}{3} \end{array}$$

(سراسری تجربی- ۸۶)

۱۸۰۲. جواب کلی معادله مثلثاتی  $2 \sin^2 x = 3 \cos x$  به کدام صورت است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

$$2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (4) \quad 2k\pi \pm \frac{\pi}{6} \quad (3) \quad k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (2) \quad k\pi \pm \frac{\pi}{6} \quad (1)$$

۱۸۰۳★. جواب‌های معادله مثلثاتی  $\sin(2x - \frac{\pi}{4}) = \cos(x + \frac{\pi}{4})$ ، با شرط  $x \neq k\pi$ ، که در آن  $k$  یک عدد صحیح است، کدام است؟ (سراسری تجربی- ۹۹)

$$\frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \quad (4) \quad \frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \quad (3) \quad \frac{2k\pi}{3} \quad (2) \quad \frac{k\pi}{3} \quad (1)$$

۱۸۰۴. جواب کلی معادله مثلثاتی  $1 = 2 \cos x (\cos x - \sin x)$  به کدام صورت است؟

$$k\pi + \frac{\pi}{8} \quad (4) \quad k\pi - \frac{\pi}{8} \quad (3) \quad \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8} \quad (2) \quad \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8} \quad (1)$$

۱۸۰۵. جواب کلی معادله مثلثاتی  $1 = 2 \sin^2 x - \sin 2x$  کدام است؟

$$k\pi + \frac{\pi}{8} \quad (4) \quad k\pi - \frac{\pi}{8} \quad (3) \quad \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8} \quad (2) \quad \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8} \quad (1)$$

(سراسری ریاضی- ۸۶)

۱۸۰۶★. جواب کلی معادله مثلثاتی  $\frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x} = \sqrt{3}$  به کدام صورت است؟

$$k\pi + \frac{\pi}{3} \quad (4) \quad k\pi + \frac{5\pi}{6} \quad (3) \quad 2k\pi + \frac{\pi}{3} \quad (2) \quad 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \quad (1)$$

(سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۲)

۱۸۰۷. جواب کلی معادله مثلثاتی  $2 \cos 2x = \cot x (4 \sin x + \tan x)$ ، کدام است؟

$$2k\pi \pm \frac{\pi}{6} \quad (4) \quad 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \quad (3) \quad k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (2) \quad k\pi - \frac{\pi}{3} \quad (1)$$

(سراسری تجربی- ۹۴)

۱۸۰۸★. جواب کلی معادله مثلثاتی  $1 = 2 \cos^2 x + 2 \sin x \cos x$ ، به کدام صورت است؟

$$k\pi + \frac{\pi}{8} \quad (4) \quad k\pi - \frac{\pi}{8} \quad (3) \quad \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8} \quad (2) \quad \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8} \quad (1)$$

(سراسری تجربی- ۸۷)

۱۸۰۹. جواب کلی معادله مثلثاتی  $2 \sin(\pi - x) \cdot \cos(\frac{2\pi}{3} + x) + 3 \cot x \cdot \sin(\pi + x) = 0$ ، کدام است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

$$2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \quad (4) \quad 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (3) \quad 2k\pi + \frac{2\pi}{3} \quad (2) \quad 2k\pi + \frac{\pi}{3} \quad (1)$$

(سراسری تجربی- ۹۲)

۱۸۱۰★. جواب کلی معادله مثلثاتی  $\sin^4 x - \cos^4 x = \sin^2 \frac{5\pi}{4}$ ، به کدام صورت است؟

$$k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (4) \quad k\pi \pm \frac{\pi}{6} \quad (3) \quad 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (2) \quad 2k\pi \pm \frac{\pi}{6} \quad (1)$$

(سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۵)

۱۸۱۱. جواب کلی معادله مثلثاتی  $\cos(x + \frac{\pi}{4}) \cos(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{4}$ ، کدام است؟

$$2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (4) \quad 2k\pi \pm \frac{\pi}{6} \quad (3) \quad k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (2) \quad k\pi \pm \frac{\pi}{6} \quad (1)$$

(سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۰)

۱۸۱۲. جواب کلی معادله مثلثاتی  $(\sin x - \tan x) \tan(\frac{3\pi}{4} - x) = \cos \frac{4\pi}{3}$ ، کدام است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

$$2k\pi \pm \frac{\pi}{4} \quad (4) \quad 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (3) \quad k\pi + \frac{\pi}{4} \quad (2) \quad k\pi - \frac{\pi}{4} \quad (1)$$

(سراسری تجربی- ۹۷)

۱۸۱۳★. جواب کلی معادله مثلثاتی  $\tan x \tan 3x = 1$ ، کدام است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

$$\frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8} \quad (4) \quad \frac{k\pi}{2} + \frac{3\pi}{8} \quad (3) \quad \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8} \quad (2) \quad \frac{k\pi}{4} \quad (1)$$

(سراسری تجربی- ۸۹)

۱۸۱۴★. جواب کلی معادله مثلثاتی  $\tan(x + \frac{\pi}{4}) + \tan(x - \frac{\pi}{4}) = 2\sqrt{3}$ ، به کدام صورت است؟

$$k\pi + \frac{\pi}{3} \quad (4) \quad k\pi + \frac{\pi}{6} \quad (3) \quad \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{3} \quad (2) \quad \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \quad (1)$$

(سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۹)

۱۸۱۵. جواب‌های معادله مثلثاتی  $\sin(x + \frac{\pi}{6}) + \cos(x + \frac{\pi}{3}) = \cos 2x$ ، کدام است؟

$$x = \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \quad (2) \quad x = \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \quad (1)$$

$$x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \quad (4) \quad x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \quad (3)$$

(برگرفته از کتاب درسی)

☆۱۸۱۶. یکی از جواب‌های کلی معادله  $\sin x + \cos x = 1$  به کدام صورت است؟

$$k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (۴) \quad 2k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (۳) \quad \frac{k\pi}{2} \quad (۲) \quad k\pi \quad (۱)$$

(سراسری ریاضی-۹۳)

☆۱۸۱۷. جواب کلی معادله مثلثاتی  $2\sqrt{2} \sin x \cos x = \sin x + \cos x$  کدام است؟

$$2k\pi \pm \frac{\pi}{4} \quad (۴) \quad \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \quad (۳) \quad \frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \quad (۲) \quad k\pi + \frac{\pi}{4} \quad (۱)$$

☆۱۸۱۸. در معادله مثلثاتی  $1 = \sqrt{3} \cos x - \sin x$ ، یکی از صورت‌های کلی جواب کدام است؟

$$2k\pi + \frac{\pi}{6} \quad (۴) \quad 2k\pi + \frac{\pi}{3} \quad (۳) \quad 2k\pi + \frac{2\pi}{3} \quad (۲) \quad 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \quad (۱)$$

(سراسری تجربی-۹۶)

☆۱۸۱۹. جواب کلی معادله مثلثاتی  $2 \cos^2 x + \cos 2x = 0$  کدام است؟

$$k\pi \pm \frac{\pi}{6} \quad (۴) \quad k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (۳) \quad 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \quad (۲) \quad 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (۱)$$

☆۱۸۲۰. جواب کلی معادله مثلثاتی  $\sin^2 \frac{5\pi}{6} = \sin(\frac{\pi}{4} + x) \cos(-x)$  کدام است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

$$2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (۴) \quad k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (۳) \quad 2k\pi \pm \frac{\pi}{6} \quad (۲) \quad k\pi \pm \frac{\pi}{6} \quad (۱)$$

☆۱۸۲۱. جواب کلی معادله مثلثاتی  $2 = (1 + \tan^2 x) \cos(\pi + 2x)$  به کدام صورت است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

$$k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (۴) \quad k\pi \pm \frac{\pi}{4} \quad (۳) \quad k\pi + \frac{\pi}{3} \quad (۲) \quad k\pi \pm \frac{\pi}{6} \quad (۱)$$

(سراسری تجربی فارج از کشور-۸۹)

☆۱۸۲۲. جواب کلی معادله مثلثاتی  $-\frac{1}{2} = \cos(x + \frac{\pi}{3}) \cos(x - \frac{\pi}{3})$ ، به کدام صورت است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

$$k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (۴) \quad 2k\pi \pm \frac{\pi}{6} \quad (۳) \quad k\pi + \frac{\pi}{3} \quad (۲) \quad k\pi - \frac{\pi}{3} \quad (۱)$$

☆۱۸۲۳. جواب‌های کلی معادله  $0 = 1 - \cos(\frac{3\pi}{4} - x) + 3 \cos x + 5 \sin x$  به صورت  $x = 2k\pi + \frac{i\pi}{6}$  است. مجموعه مقادیر  $i$  کدام‌اند؟

$$\{1, 5, 7\} \quad (۴) \quad \{5\} \quad (۳) \quad \{1, 7\} \quad (۲) \quad \{1, 5\} \quad (۱)$$

## حالت‌های خاص در معادلات مثلثاتی

☆۱۸۲۴. جواب کلی معادله  $\sin^3 x - \sin x = 0$  به کدام صورت است؟

$$\frac{k\pi}{2} \quad (۴) \quad 2k\pi - \frac{\pi}{2} \quad (۳) \quad k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (۲) \quad k\pi \quad (۱)$$

(سراسری تجربی فارج از کشور-۹۱)

☆۱۸۲۵. نمودار تابع  $y = 3 \sin(\frac{\pi}{4} - 2x)$ ، روی بازه  $[-\pi, \frac{3\pi}{4}]$ ، در چند نقطه محور  $x$  ها را قطع می‌کند؟

$$5 \quad (۴) \quad 4 \quad (۳) \quad 3 \quad (۲) \quad 2 \quad (۱)$$

☆۱۸۲۶. اگر دوره تناوب تابع  $f(x) = a \sin b\pi x$  برابر  $\frac{1}{4}$  باشد، نمودار تابع در بازه  $[0, 1]$  در چند نقطه محور  $x$  ها را قطع می‌کند؟

$$6 \quad (۴) \quad 5 \quad (۳) \quad 4 \quad (۲) \quad 3 \quad (۱)$$

(سراسری تجربی فارج از کشور-۸۶)

☆۱۸۲۷. جواب کلی معادله مثلثاتی  $1 = 2 \tan x \cdot \cos^2 x$  به کدام صورت است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

$$2k\pi + \frac{\pi}{4} \quad (۴) \quad 2k\pi - \frac{\pi}{4} \quad (۳) \quad k\pi + \frac{\pi}{4} \quad (۲) \quad k\pi - \frac{\pi}{4} \quad (۱)$$

(سراسری تجربی-۸۵)

☆۱۸۲۸. جواب کلی معادله مثلثاتی  $1 + \sin(\frac{5\pi}{4} + x) = \sqrt{2} \sin(\frac{\pi}{4} - x)$  کدام است؟

$$2k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (۴) \quad 2k\pi - \frac{\pi}{2} \quad (۳) \quad 2k\pi - \frac{\pi}{4} \quad (۲) \quad k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (۱)$$

(سراسری تجربی فارج از کشور-۸۷)

☆۱۸۲۹. جواب کلی معادله مثلثاتی  $\cos \frac{3\pi}{4} \sin(\pi + x) - \sin^3 x \cos(\pi + x) = \cos \frac{3\pi}{4}$ ، کدام است؟

$$k\pi \pm \frac{\pi}{4} \quad (۴) \quad k\pi + \frac{\pi}{4} \quad (۳) \quad \frac{k\pi}{2} \quad (۲) \quad \frac{k\pi}{4} \quad (۱)$$

(سراسری تجربی-۹۰)

☆۱۸۳۰. جواب کلی معادله  $0 = 1 - 2 \sin(\pi - x) + \sin(\pi + x) \cos(\frac{\pi}{4} + x)$  به کدام صورت است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

$$k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (۴) \quad 2k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (۳) \quad 2k\pi + \frac{\pi}{6} \quad (۲) \quad 2k\pi - \frac{\pi}{2} \quad (۱)$$

(سراسری ریاضی - ۸۷)

۱۸۳۱. جواب کلی معادله مثلثاتی  $\sin \frac{\Delta\pi}{6} + \sin(\frac{\pi}{4} + x) \sin(\pi + x) = 0$  کدام است؟

$$2k\pi + \frac{\pi}{4} \quad (4) \quad 2k\pi \pm \frac{\pi}{4} \quad (3) \quad k\pi - \frac{\pi}{4} \quad (2) \quad k\pi + \frac{\pi}{4} \quad (1)$$

۱۸۳۲. یکی از جوابهای معادله  $\sin 3x \cos x = 1 - \cos 3x \sin x$  کدام است؟

$$\frac{\Delta\pi}{8} \quad (4) \quad \frac{3\pi}{8} \quad (3) \quad \frac{\Delta\pi}{4} \quad (2) \quad \frac{\pi}{4} \quad (1)$$

۱۸۳۳. جواب کلی معادله  $\sin \Delta x (\cos 3x - \sin \Delta x) + \cos \Delta x (\sin 3x - \cos \Delta x) = 0$  کدام است؟

$$\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \quad (4) \quad \frac{k\pi}{8} + \frac{\pi}{16} \quad (3) \quad \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{16} \quad (2) \quad k\pi + \frac{\pi}{4} \quad (1)$$

(سراسری ریاضی - ۹۳)

۱۸۳۴. جواب کلی معادله  $\frac{\sin 3x}{\sin x} = 2 \cos^2 x$  کدام است؟

$$k\pi + \frac{\pi}{4} \quad (4) \quad k\pi - \frac{\pi}{4} \quad (3) \quad \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \quad (2) \quad \frac{k\pi}{2} \quad (1)$$

(سراسری ریاضی - ۹۴)

۱۸۳۵. جواب کلی معادله مثلثاتی  $\sin x \sin 3x = \cos 2x$  کدام است؟

$$\frac{k\pi}{3} \quad (4) \quad k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (3) \quad \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \quad (2) \quad \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \quad (1)$$

۱۸۳۶. تمام جوابهای معادله  $\sin^4 x + \cos^4 x = 1$  کدام است؟

$$2k\pi \quad (4) \quad \frac{(2k+1)\pi}{2} \quad (3) \quad \frac{k\pi}{2} \quad (2) \quad k\pi \quad (1)$$

۱۸۳۷. جوابهای کلی معادله مثلثاتی  $\cos 2x = \sin x$  به صورت  $x = 2k\pi + \frac{i\pi}{6}$  بیان شده است. مجموعه مقادیر  $i$  کدام است؟

$$\{1, 5, 9\} \quad (4) \quad \{1, 4, 7\} \quad (3) \quad \{1, 3, 5\} \quad (2) \quad \{7, 9\} \quad (1)$$

(سراسری ریاضی - ۹۶)

۱۸۳۸. جواب کلی معادله مثلثاتی  $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$  با شرط  $x \neq \frac{k\pi}{4}$  کدام است؟

$$2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \quad (4) \quad 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (3) \quad k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (2) \quad k\pi \pm \frac{\pi}{6} \quad (1)$$

(سراسری ریاضی - ۹۷)

۱۸۳۹. جواب کلی معادله مثلثاتی  $\sin 2x \sin 4x + \sin^2 x = 1$  کدام است؟

$$\frac{k\pi}{6} \quad (4) \quad k\pi - \frac{\pi}{6} \quad (3) \quad (2k+1)\frac{\pi}{6} \quad (2) \quad k\pi + \frac{\pi}{6} \quad (1)$$

(سراسری ریاضی فارغ از کشور - ۹۷)

۱۸۴۰. جواب کلی معادله  $\sin 3x - \sin x + 4 \sin^2 x = 2$ ، با شرط  $x \neq 2k\pi + \frac{\pi}{4}$  کدام است؟

$$k\pi - \frac{\pi}{4} \quad (4) \quad k\pi + \frac{\pi}{4} \quad (3) \quad (2k+1)\frac{\pi}{4} \quad (2) \quad \frac{k\pi}{4} \quad (1)$$

۱۸۴۱. جواب کلی معادله  $3\sqrt{2}(\sin x + \cos x) + \sin 2x + 5 = 0$  کدام است؟

$$2k\pi - \frac{3\pi}{4} \quad (4) \quad k\pi - \frac{\Delta\pi}{4} \quad (3) \quad 2k\pi - \frac{\pi}{4} \quad (2) \quad k\pi + \frac{\pi}{4} \quad (1)$$

## جوابهای معادله مثلثاتی در یک بازه

(سراسری تجربی فارغ از کشور - ۹۲)

۱۸۴۲. مجموع تمام جوابهای معادله مثلثاتی  $\sin \Delta x + \sin 4x = 1 + \cos \pi$  در بازه  $[0, 2\pi]$  کدام است؟

$$11\pi \quad (4) \quad 10\pi \quad (3) \quad 9\pi \quad (2) \quad 8\pi \quad (1)$$

(برگرفته از کتاب درسی)

۱۸۴۳. چند مثلث وجود دارد که طول دو ضلع آن‌ها ۳ و ۴ سانتی‌متر و مساحت آن‌ها ۳ سانتی‌متر مربع باشد؟

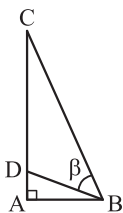
$$4 \text{ بی‌شمار} \quad (4) \quad 2 \quad (3) \quad 1 \quad (2) \quad \text{صفر} \quad (1)$$

۱۸۴۴. یک فوتبالیست، توپ را با سرعت  $60 \text{ km/h}$  به سمت دروازه حریف که در  $36$  متری او قرار گرفته، می‌فرستد. اگر رابطه بین سرعتتوپ  $v$  (بر حسب کیلومتر بر ساعت)، مسافت طی‌شده افقی  $d$  (بر حسب متر) و زاویه حرکت توپ  $\theta$ ، به صورت  $d = \frac{v^2}{50} \sin 2\theta$  باشد،

(برگرفته از کتاب درسی)

زاویه حرکت توپ کدام می‌تواند باشد؟

$$3^\circ \quad (4) \quad 22/5^\circ \quad (3) \quad 15^\circ \quad (2) \quad 1^\circ \quad (1)$$



۱۸۴۵. در شکل مقابل، اگر  $AD = \frac{1}{5}$ ،  $CD = \frac{2}{5}$  و  $AB = 1$  باشد، زاویه  $\beta$  چند درجه است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

- ۷۵ (۱)
- ۶۰ (۲)
- ۴۵ (۳)
- ۳۰ (۴)

۱۸۴۶☆. معادله  $\sin(\pi \cos x) = -1$  در بازه  $[0, 2\pi]$  چند جواب دارد؟

- ۴ (۴)
- ۲ (۳)
- ۱ (۲)
- صفر (۱)

(سراسری تجربی- ۱۴۰۰)

۱۸۴۷☆. تعداد جواب‌های معادله مثلثاتی  $\cos^2(x) - \sin^2(x) \cos(3x) = 1$  در فاصله  $[0, 2\pi]$ ، کدام است؟

- ۶ (۴)
- ۵ (۳)
- ۳ (۲)
- ۱ (۱)

(سراسری تجربی فارغ از کشور- ۱۴۰۰)

۱۸۴۸☆. تعداد جواب‌های معادله مثلثاتی  $\sin^2(x) + 2\cos(3x) = -2$ ، در فاصله  $[-\pi, \pi]$ ، کدام است؟

- ۷ (۴)
- ۵ (۳)
- ۲ (۲)
- ۱ (۱)

۱۸۴۹. معادله  $\sin 2x + \sqrt{2} \cos x = 0$  در بازه  $[-\pi, \pi]$  چند جواب دارد؟

- ۶ (۴)
- ۵ (۳)
- ۴ (۲)
- ۳ (۱)

۱۸۵۰☆. معادله  $\frac{\cos 2x}{\sin x + \cos x} = 1$  در بازه  $[0, 2\pi]$  چند جواب دارد؟

- ۴ (۴)
- ۳ (۳)
- ۲ (۲)
- ۱ (۱)

(سراسری تجربی فارغ از کشور- ۹۹)

۱۸۵۱☆. تعداد جواب‌های معادله مثلثاتی  $4 \sin(3x) \cos(3x) = 1$ ، در بازه  $[0, \frac{\pi}{4}]$ ، کدام است؟

- ۵ (۴)
- ۴ (۳)
- ۳ (۲)
- ۲ (۱)

(سراسری تجربی- ۹۸)

۱۸۵۲☆. مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی  $4 \sin x \sin(\frac{3\pi}{4} - x) = 1$  در بازه  $[0, 2\pi]$  کدام است؟

- $5\pi$  (۴)
- $4\pi$  (۳)
- $3\pi$  (۲)
- $\frac{5\pi}{2}$  (۱)

(سراسری تجربی فارغ از کشور- ۹۶)

۱۸۵۳. مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی  $\sin 2x + \cos(\frac{\pi}{4} - x) = 0$  در بازه  $[0, 2\pi]$  کدام است؟

- $5\pi$  (۴)
- $\frac{9\pi}{2}$  (۳)
- $4\pi$  (۲)
- $\frac{14\pi}{3}$  (۱)

۱۸۵۴☆. معادله  $\tan 2x - \cot(x - \frac{\pi}{4}) = 0$  در بازه  $[0, \pi]$  چند جواب دارد؟

- ۱ (۴)
- ۲ (۳)
- ۳ (۲)
- ۴ (۱)

(سراسری ریاضی- ۹۹)

۱۸۵۵☆. مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی  $\tan(3x) \tan(x) = 1$ ، در بازه  $[\pi, 2\pi]$ ، کدام است؟

- $\frac{11\pi}{2}$  (۴)
- $\frac{9\pi}{2}$  (۳)
- $6\pi$  (۲)
- $5\pi$  (۱)

۱۸۵۶☆. مجموع جواب‌های معادله  $2 \sin^2 x - \cos x - 1 = 0$  در بازه  $[\pi, 2\pi]$  کدام است؟

- $\frac{11\pi}{3}$  (۴)
- $3\pi$  (۳)
- $\frac{10\pi}{3}$  (۲)
- $\frac{8\pi}{3}$  (۱)

۱۸۵۷☆. معادله  $\sin x \cos x = \cos^2 x - \frac{1}{4}$  در بازه  $[0, 2\pi]$  چند جواب دارد؟

- صفر (۴)
- ۲ (۳)
- ۱ (۲)
- ۴ (۱)

۱۸۵۸. معادله  $\sin^3 x \cos x - \cos^3 x \sin x = \frac{1}{4}$  در بازه  $[0, 2\pi]$  چند جواب دارد؟

- ۸ (۴)
- ۴ (۳)
- ۲ (۲)
- صفر (۱)

۱۸۵۹. معادله  $1 + \sin x = \cos^4 x - \sin^4 x$  در بازه  $[0, 2\pi]$  چند ریشه دارد؟

- ۲ (۴)
- ۳ (۳)
- ۴ (۲)
- ۵ (۱)

(سراسری ریاضی- ۹۵)

۱۸۶۰☆. مجموع تمام جواب‌های معادله مثلثاتی  $\sin 4x = \sin^4 x - \cos^4 x$ ، در بازه  $[0, \pi]$ ، برابر کدام است؟

- $\frac{11\pi}{3}$  (۴)
- $\frac{5\pi}{2}$  (۳)
- $\frac{9\pi}{4}$  (۲)
- $\frac{7\pi}{4}$  (۱)

★ ۱۸۶۱. مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی  $\sin^3 x + \cos^3 x = 1 - \frac{1}{4} \sin 2x$ ، در بازه  $[0, 2\pi]$ ، کدام است؟ (سراسری ریاضی-۹۸)

- (۱)  $\frac{5\pi}{2}$  (۲)  $\frac{7\pi}{2}$  (۳)  $2\pi$  (۴)  $3\pi$

★ ۱۸۶۲. مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی  $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{4}$ ، در بازه  $[0, 2\pi]$ ، کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور-۹۸)

- (۱)  $\frac{5\pi}{2}$  (۲)  $3\pi$  (۳)  $\frac{7\pi}{2}$  (۴)  $4\pi$

★ ۱۸۶۳. مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی  $\sin(x + \frac{\pi}{8}) + \cos(x - \frac{3\pi}{8}) = 1$ ، در بازه  $[0, 2\pi]$  برابر کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور-۹۵)

- (۱)  $\frac{3\pi}{4}$  (۲)  $\frac{5\pi}{4}$  (۳)  $\frac{3\pi}{2}$  (۴)  $\frac{7\pi}{4}$

★ ۱۸۶۴. تعداد جواب‌های معادله مثلثاتی  $(1 + \cos(\alpha))(1 + \cos(2\alpha))(1 + \cos(4\alpha)) = \frac{1}{8}$ ، در فاصله  $[0, 2\pi]$  کدام است؟

- (سراسری ریاضی خارج از کشور-۱۴۰۰) (۱) ۷ (۲) ۱۰ (۳) ۱۲ (۴) ۱۵

★ ۱۸۶۵. فرض کنید A مجموعه جواب‌های معادله مثلثاتی  $(1 + \cos(\alpha))(1 + \cos(2\alpha))(1 + \cos(4\alpha)) = \frac{1}{8}$ ، در بازه  $[0, \pi]$  باشد. ماکزیمم عضو

مجموعه A، کدام است؟ (سراسری ریاضی-۱۴۰۰)

- (۱)  $\frac{5}{9}\pi$  (۲)  $\frac{6}{7}\pi$  (۳)  $\frac{7}{9}\pi$  (۴)  $\frac{8}{9}\pi$

★ ۱۸۶۶. مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی  $2 \sin(x) \cos(2x) + \sin(x) = 1$ ، در بازه  $[0, 2\pi]$ ، کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور-۱۴۰۰)

- (۱)  $2\pi$  (۲)  $\frac{5\pi}{2}$  (۳)  $3\pi$  (۴)  $\frac{7\pi}{2}$

★ ۱۸۶۷. در معادله مثلثاتی  $2 \cos^2 x + \cos x = 1$ ، نقاط پایانی تمام جواب‌ها بر دایره مثلثاتی، رأس‌های کدام شکل هندسی است؟

- (۱) مثلث متساوی‌الاضلاع (۲) مثلث قائم‌الزاویه  
(۳) دوزنقه (۴) مستطیل

★ ۱۸۶۸. نقاط پایانی کمان جواب‌های معادله  $1 + \cos x = \frac{\sin x \cos x}{1 - \cos x}$  بر روی دایره مثلثاتی، رأس‌های کدام چندضلعی است؟

- (سراسری ریاضی خارج از کشور-۹۱) (۱) مربع (۲) مستطیل (۳) مثلث قائم‌الزاویه (۴) مثلث متساوی‌الساقین

★ ۱۸۶۹. مجموع جواب‌های معادله  $2 \sin^2(x - \frac{\pi}{8}) + 3 \cos(x - \frac{5\pi}{8}) = 5$ ، در بازه  $[0, 2\pi]$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{3\pi}{4}$  (۲)  $\frac{3\pi}{8}$  (۳)  $\frac{5\pi}{4}$  (۴)  $\frac{5\pi}{8}$

★ ۱۸۷۰. در معادله مثلثاتی  $8 \sin^2 x + k \sin 2x = 1$ ، مجموع جواب‌های متمایز در فاصله  $[0, \pi]$  برابر  $\frac{3\pi}{4}$  است. k کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) -۴ (۳) ۲ (۴) ۴

۱۷۲۵

**یادآوری:**  $\sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$  ,  $\cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$

بنابر نکته فوق داریم:

$$f(x) = \frac{\tan 3x(1 - \tan^2 3x)}{(1 + \tan^2 3x)^2} = \frac{\tan 3x}{1 + \tan^2 3x} \times \frac{1 - \tan^2 3x}{1 + \tan^2 3x}$$

$$= \frac{1}{4} \sin 6x \times \cos 6x = \frac{1}{4} \sin 12x \Rightarrow T = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$$

۱۷۲۶

**نکته:** اگر  $a, b, c, d$  و اعداد حقیقی و  $a \neq 0$  و  $b \neq 0$  باشند، آنگاه دوره تناوب توابع  $y = a \tan^n(bx + c) + d$  و  $y = a \cot^n(bx + c) + d$  برابر  $T = \frac{\pi}{|b|}$  است. ( $n \in \mathbb{N}$ )

$$y = -\pi + \sqrt{2} \tan 3x \Rightarrow T = \frac{\pi}{3}$$

۱۷۲۷

**یادآوری:**  $\cot \alpha - \tan \alpha = 2 \cot 2\alpha$

$$f(x) = \tan 2x - \cot 2x = -2 \cot 4x \Rightarrow T = \frac{\pi}{4}$$

داریم:

۱۷۲۸

ابتدا با استفاده از اتحاد  $\cot \alpha - \tan \alpha = 2 \cot 2\alpha$ ، ضابطه تابع را ساده کرده و سپس دوره تناوب آن را می‌یابیم.

$$f(x) = \tan(\pi x) - \cot(\pi x) = -2 \cot(2\pi x) \Rightarrow T = \frac{\pi}{|2\pi|} = \frac{1}{2}$$

۱۷۲۹

**یادآوری:**  $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$

بنابر یادآوری فوق، داریم:

$$f(x) = \frac{\tan ax}{1 - \tan^2 ax} = \frac{1}{2} \tan 2ax \Rightarrow T = \frac{\pi}{|2a|}$$

$$\xrightarrow{T = \frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{2|a|} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow |a| = \frac{\pi}{3}$$

۱۷۳۰

**یادآوری:**  $\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$

صورت و مخرج کسر را بر  $\cos x$  تقسیم می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{\tan x - 1}{\tan x + 1} \cdot \frac{\tan \frac{\pi}{4} = 1}{1 + \tan x \cdot \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{\tan x - \tan \frac{\pi}{4}}{1 + \tan x \cdot \tan \frac{\pi}{4}} = \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow T = \frac{\pi}{1} = \pi$$

۱۷۱۹

دوره تناوب تابع  $f$  برابر  $\frac{2}{3}$  است. پس:

$$T = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{2\pi}{\left|-\frac{b\pi}{3}\right|} = \frac{2}{3} \xrightarrow{b > 0} \frac{6}{b} = \frac{2}{3} \Rightarrow b = 9$$

۱۷۲۰

$$y = \cos((2x + 1)\pi) = \cos(2\pi x + \pi) \Rightarrow T_1 = \frac{2\pi}{|2\pi|} = 1$$

$$y = \sin((ax + \delta)\pi) = \sin(a\pi x + \delta\pi) \Rightarrow T_2 = \frac{2\pi}{|a\pi|} = \frac{2}{|a|}$$

$$T_1 = 3T_2 \Rightarrow 1 = 3 \times \frac{2}{|a|} \Rightarrow |a| = 6 \Rightarrow a = \pm 6$$

با توجه به گزینه‌ها،  $a = 6$  را می‌پذیریم.

۱۷۲۱

$$y = a \sin\left(\frac{\pi}{2} - bx\right) \Rightarrow y = a \cos bx$$

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = \pi \Rightarrow |b| = 2 \xrightarrow{\cos 2x = \cos(-2x)} y = a \cos 2x$$

$$\xrightarrow{\left(\frac{\pi}{2}, 3\right)} 3 = a \underbrace{\cos \pi}_{-1} \Rightarrow a = -3$$

$$\Rightarrow y = -3 \cos 2x \xrightarrow{x=0} y = -3 \cos 0 = -3$$

۱۷۲۲

**یادآوری:**  $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$   
 $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$

$$f(x) = \cos x \cos 3x + \sin x \sin 3x = \cos(3x - x) = \cos 2x$$

$$\Rightarrow T_1 = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$g(x) = \cos x \cos 3x - \sin x \sin 3x = \cos(3x + x) = \cos 4x$$

$$\Rightarrow T_2 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow T_1 = 2T_2$$

۱۷۲۳

**یادآوری:**  $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$  ,  $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$$f(x) = \sin^3 x \cos x - \cos^3 x \sin x$$

$$= -\sin x \cos x (\cos^2 x - \sin^2 x)$$

$$= -\frac{1}{2} \sin 2x \cos 2x \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{4} \sin 4x \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|4|} = \frac{\pi}{2}$$

۱۷۲۴

**یادآوری:**  $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$  ,  $\tan \alpha + \cot \alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha}$

ابتدا ضابطه تابع را ساده کرده و سپس دوره تناوب آن را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = \frac{\cos^4 x - \sin^4 x}{\tan x + \cot x} = \frac{(\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x)}{\frac{2}{\sin 2x}}$$

$$= \frac{\cos 2x \times 1}{2} = \frac{1}{2} \sin 2x \cos 2x \Rightarrow f(x) = \frac{1}{4} \sin 4x$$

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

۱۷۳۶ ۱ ۲ ۳ ۴

با توجه به رابطه  $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$ ، معلوم می‌شود که اگر نمودار  $y = \sin x$  را  $\frac{\pi}{2}$  واحد در راستای محور  $x$  ها به سمت چپ منتقل کنیم، نمودار  $y = \cos x$  به دست می‌آید.

توابع  $y = \sin x$  و  $y = \cos x$  ساده‌ترین توابع مثلثاتی از بین بی‌شمار تابع مثلثاتی هستند. پس گزینه (۱) نادرست است. هم‌چنین دوره تناوب این توابع برابر  $T = 2\pi$  بوده و لذا گزینه (۲) نادرست است.

دامنه توابع  $y = \sin x$  و  $y = \cos x$  برابر  $\mathbb{R}$  و برد آن‌ها برابر  $[-1, 1]$  است. اما در گزینه (۴) جابه‌جا آمده است. پس این گزینه نیز نادرست است.

۱۷۳۷ ۱ ۲ ۳ ۴

می‌دانیم مقدار  $\sin x$  به ازای  $x = 0, x = \pi, x = 2\pi, x = 3\pi$  و به طور کلی  $x = k\pi$  که در آن  $k \in \mathbb{Z}$ ، برابر صفر می‌شود. پس در تابع  $f(x) = \frac{x-1}{\sin x}$  داریم:

$$\sin x \neq 0 \Rightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

۱۷۳۸ ۱ ۲ ۳ ۴

می‌دانیم مقدار  $\cos x$  به ازای  $x = 2\pi, x = 4\pi$  و به طور کلی  $x = 2k\pi$  که در آن  $k \in \mathbb{Z}$ ، برابر یک می‌شود. پس در تابع  $f(x) = \frac{\sin x}{1 - \cos x}$  داریم:

$$1 - \cos x \neq 0 \Rightarrow \cos x \neq 1 \Rightarrow x \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

۱۷۳۹ ۱ ۲ ۳ ۴

ابتدا دامنه تابع  $f$  را می‌یابیم:

$$\sin \pi x - 1 \geq 0 \Rightarrow \sin \pi x \geq 1 \xrightarrow{\sin \pi x \leq 1} \sin \pi x = 1$$

می‌دانیم مقدار سینوس به ازای زوایای  $\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, \dots$  و به طور کلی  $2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$  برابر ۱ می‌شود. پس:

$$\sin \pi x = 1 \Rightarrow \pi x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 2k + \frac{1}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

واضح است که به ازای هر  $k \in \mathbb{Z}$ ،  $x = 2k + \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$ ، پس  $[x] + [-x] = -1$  بنابراین داریم:

$$f(x) = [x] + [-x] + \sqrt{\sin \pi x - 1} = -1 + 0 \Rightarrow f(x) = -1 \Rightarrow f\left(-\frac{1}{f(x)}\right) = f\left(\frac{1}{-1}\right) = -1$$

۱۷۴۰ ۱ ۲ ۳ ۴

اگر  $0 \leq x < 1$  باشد، آن‌گاه  $[x] = 0$ ، در این صورت رابطه  $|f(x)| = (-1)^{[x]} f(x) = |f(x)|$  به صورت  $f(x) = |f(x)|$  درمی‌آید که نتیجه می‌شود، در بازه  $[0, 1]$ ،  $f(x) \geq 0$  می‌باشد، داریم:

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq \pi x < \pi \\ 0 \leq 2\pi x < 2\pi \end{cases}$$

۱۷۳۱ ۱ ۲ ۳ ۴

**نکته:** اگر  $f$  تابعی متناوب با دوره تناوب  $T$  باشد، برای هر  $n \in \mathbb{N}$  داریم:

$$f(x \pm nT) = f(x)$$

در این تست،  $f$  متناوب و  $T = 2$  است. پس بنا بر نکته فوق می‌توان نوشت:

$$f\left(\frac{7}{8}\right) = f\left(\frac{1}{8} + 3 \times 2\right) = f\left(\frac{1}{8}\right) = \left(\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{1}{64}$$

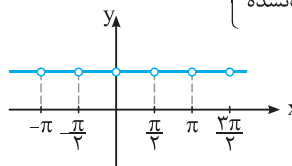
۱۷۳۲ ۱ ۲ ۳ ۴

می‌توان نوشت:

$$f(x) = \tan x \cot x = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{2} \frac{\sin 2x}{\sin 2x} = \frac{\sin 2x}{2 \sin 2x}$$

$$\sin 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}; (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{\sin 2x}{\sin 2x} = \begin{cases} 1 & x \neq \frac{k\pi}{2} \\ \text{تعریف نشده} & x = \frac{k\pi}{2} \end{cases}$$



نمودار تابع  $f$  به صورت مقابل است:

با توجه به نمودار،  $f$  متناوب بوده و  $T = \frac{\pi}{2}$

۱۷۳۳ ۱ ۲ ۳ ۴

در رابطه  $f(x+2)f(x) = 1$ ، به جای  $x$ ،  $x+2$  را قرار می‌دهیم. داریم:

$$f(x+4)f(x+2) = 1 \xrightarrow{f(x+2)f(x)=1} f(x+4)f(x+2) = f(x+2)f(x) \xrightarrow{+f(x+2) \neq 0} f(x+4) = f(x)$$

بنابراین  $T = 4$  دوره تناوب  $f$  است.

۱۷۳۴ ۱ ۲ ۳ ۴

**نکته:** الف) اگر تابع  $f$  متناوب با دوره تناوب  $T$  باشد، آن‌گاه:

$$f(x+T) = f(x)$$

ب) اگر نمودار  $f$  نسبت به خط  $x = \alpha$  متقارن باشد، آن‌گاه:

$$f(x) = f(2\alpha - x)$$

بنا بر فرض، نمودار تابع  $f$  نسبت به خطوط  $x = 1$  و  $x = 3$  متقارن است، پس بنا بر نکته:

$$f(x) = f(2-x) \quad , \quad f(x) = f(6-x)$$

می‌توان نوشت:

$$f(x) = f(6-x) \xrightarrow{x \rightarrow 2-x} f(2-x) = f(6-(2-x))$$

$$f(2-x) = f(4+x) \xrightarrow{f(x)=f(2-x)} f(x) = f(x+4)$$

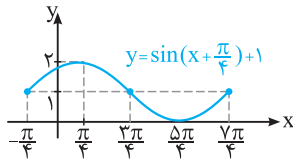
بنابراین تابع  $f$  متناوب با دوره تناوب  $T = 4$  است.

۱۷۳۵ ۱ ۲ ۳ ۴

در گزینه (۱)، دامنه  $y = \sin x$  برابر  $\mathbb{R}$  است. پس برای هر  $x \in \mathbb{R}$  و به خصوص  $x = 25$  تعریف می‌شود. در گزینه (۲)،  $\frac{\pi}{3} > 1$  پس هیچ عددی مثل  $x$  یافت نمی‌شود که  $\cos x = \frac{\pi}{3}$ . در گزینه (۳)، ۳ رادیان تقریباً برابر  $90^\circ$  درجه است و لذا  $\sin 3 \neq \sin 90^\circ$ . در گزینه (۴)،  $\sin x$  یعنی سینوس زاویه‌ای از دایره مثلثاتی که اندازه آن  $x$  رادیان باشد نه  $x$  درجه.



۱ ۲ ۳ ۴ ۱۷۴۵



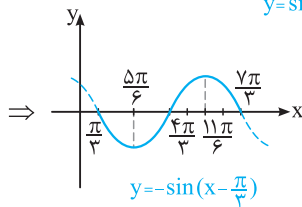
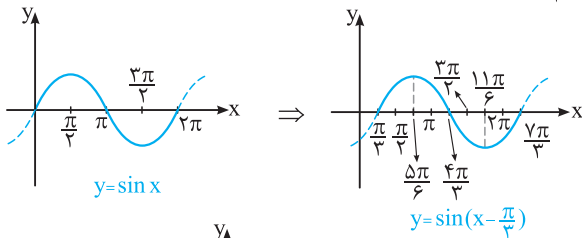
کافی است نمودار  $y = \sin x$  را  $\frac{\pi}{4}$  به چپ و ۱ واحد به بالا انتقال دهیم:

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۷۴۶

می توان نوشت:

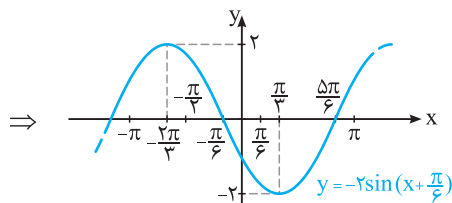
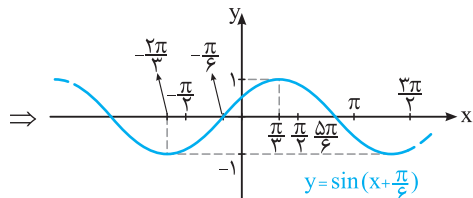
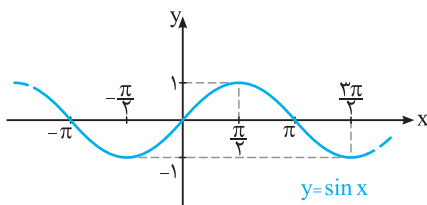
$$\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = -\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

بنابراین برای رسم نمودار  $y = \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = -\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$  ابتدا نمودار  $y = \sin x$  را  $\frac{\pi}{3}$  واحد در راستای محور  $x$  ها به سمت راست منتقل کرده و در نهایت، نمودار حاصل را نسبت به محور  $x$  ها قرینه می کنیم:



۱ ۲ ۳ ۴ ۱۷۴۷

نمودار تابع  $f$  را مرحله به مرحله رسم می کنیم:



با توجه به شکل، نمودار تابع در بازه  $\left[-\frac{7\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$  از ناحیه اول عبور نمی کند.

پس بازه  $[0, \pi]$  برای کمان  $\pi x$  به منزله بازه  $[0, \pi]$  و برای کمان  $2\pi x$  به منزله بازه  $[0, 2\pi]$  می باشد. چون در بازه  $[0, \pi]$ ،  $f(x) \geq 0$ ، پس باید گزینه‌ای را انتخاب کنیم که مقدار تابع در بازه معادل آن نامنفی باشد. در نتیجه فقط گزینه (۱) صحیح است. زیرا سینوس در بازه  $[0, \pi]$  نامنفی است. اما تابع کسینوس در بازه  $[0, \pi]$  می تواند منفی هم باشد و نیز توابع سینوس و کسینوس در بازه  $[0, 2\pi]$  می توانند منفی نیز باشند.

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۷۴۱

**نکته:** به طور کلی در توابع  $y = a \sin(bx + d) + c$

و  $y = a \cos(bx + d) + c$  ( $a, b \neq 0$ ) داریم:

$$\max = |a| + c, \quad \min = -|a| + c$$

هم چنین عدد  $c$  همواره میانگین مقادیر ماکسیمم و مینیمم است. یعنی:

$$c = \frac{\max + \min}{2}$$

در این سؤال،  $a = -\pi$  و  $c = \sqrt{3}$ ، پس بنابر نکته فوق داریم:  
 $\max = |-\pi| + \sqrt{3} = \pi + \sqrt{3}$  ،  $\min = -|-\pi| + \sqrt{3} = \sqrt{3} - \pi$   
 $\Rightarrow \max - \min = (\pi + \sqrt{3}) - (\sqrt{3} - \pi) = 2\pi$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۷۴۲

در این تابع داریم  $a = 3$ ،  $c = 1$  و  $b = \frac{3\pi}{5}$ ، پس:

$$\max = |a| + c = 4, \quad \min = -|a| + c = -3 + 1 = -2$$

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{\left|\frac{3\pi}{5}\right|} = \frac{2\pi}{\frac{3\pi}{5}} = \frac{10}{3}$$

هم چنین:  $f(0) = 3 \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + 1 = 3 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 1 > 0$

پس نمودار تابع، محور  $y$  ها را در نقطه‌ای با عرض مثبت قطع می کند.

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۷۴۳

با توجه به گزینه‌ها، ضابطه تابع مورد نظر می تواند به یکی از صورت‌های  $f(x) = a \sin(bx) + c$  یا  $f(x) = a \cos(bx) + c$  باشد، داریم:

$$c = \frac{\max + \min}{2} = \frac{9 + 3}{2} = 6$$

$$\max = |a| + c \Rightarrow 9 = |a| + 6 \Rightarrow a = \pm 3$$

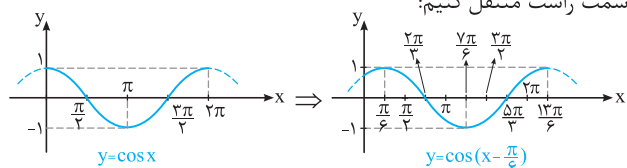
از طرفی دوره تناوب هر یک از توابع مذکور،  $T = \frac{2\pi}{|b|}$  است. پس:

$$T = \frac{2\pi}{|b|} \rightarrow T = 3\pi \rightarrow 3\pi = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = \frac{2}{3} \Rightarrow b = \pm \frac{2}{3}$$

چون نمودار تابع  $f$  را در اختیار نداریم و نیز اطلاعات دیگری در مورد ضابطه آن داده نشده است، در مورد علامت  $a$  و  $b$  چیزی نمی توان گفت. بنابراین با توجه به گزینه‌ها، گزینه (۳) می تواند درست باشد.

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۷۴۴

کافی است نمودار  $y = \cos x$  را  $\frac{\pi}{6}$  واحد در راستای محور  $x$  ها به سمت راست منتقل کنیم:



## فصل ۸ مثلثات

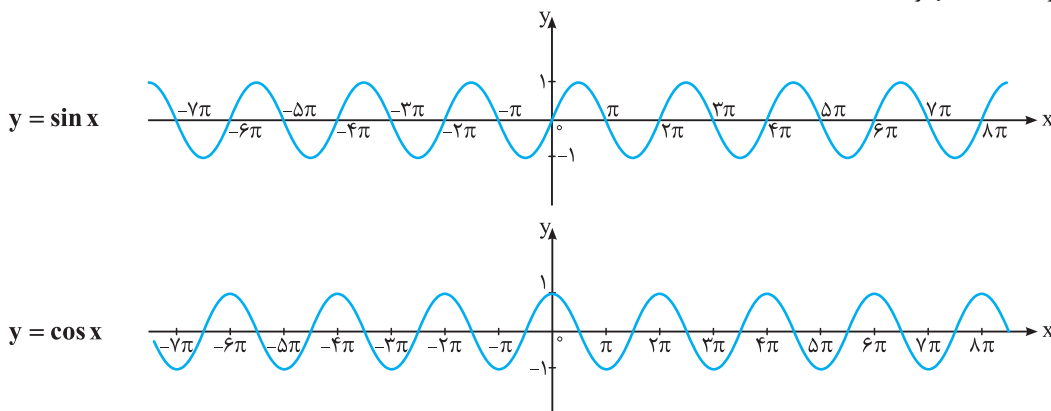
## قسمت ششم: تناوب و توابع مثلثاتی

این قسمت معیونی از حسابان (۱) و (۲) هس. تو این قسمت با مفهوم تابع متناوب و فرمولای دوره تناوب آشنا می‌شیم و یاد می‌گیریم پیوری ماکسیمم و مینیمم توابع مثلثاتی شامل سینوس و کسینوس رو به‌دست بیاریم. آخر سر هم خواص تابع تانژانت و نمودار اون رو مورد بررسی قرار می‌دیم.



## تناوب

برخی از پدیده‌ها خاصیت تکرار شونده‌ی دارند مانند روزهای هفته، ماه‌های سال، حرکت عقربه‌های ساعت، حرکت آونگ، حرکت زمین به دور خورشید و ... به چنین پدیده‌هایی متناوب می‌گوییم خاصیت تکرار شونده‌ی در رفتار بسیاری از توابع و به خصوص توابع مثلثاتی نیز دیده می‌شود. در توابع متناوب، اگر رفتار تابع را در یک دوره تناوب بررسی کنیم، مانند آن است که رفتار تابع را در تمام دامنه آن بررسی کرده‌ایم. به نمودار توابع  $y = \sin x$  و  $y = \cos x$  توجه کنید:



با توجه به نمودارهای فوق، مقادیر توابع  $y = \sin x$  و  $y = \cos x$  برای هر دو نقطه به فاصله  $2\pi$  روی محور  $x$  ها، یکسان است. در واقع اگر  $k$  عددی صحیح باشد، داریم  $\sin(x \pm 2k\pi) = \sin x$  و  $\cos(x \pm 2k\pi) = \cos x$ ، بنابراین اگر تکه‌ای از نمودار این توابع را در یک بازه به طول  $2\pi$  یا  $4\pi$  یا ... داشته باشیم، با تکرار این تکه، می‌توانیم این توابع را رسم نماییم. اکنون به طور دقیق‌تر، به بررسی تابع متناوب و دوره تناوب می‌پردازیم:

## توابع متناوب و دوره تناوب

**تابع متناوب:** تابع  $f$  را متناوب می‌گوییم، هرگاه عدد حقیقی غیر صفر  $c$  موجود باشد که اولاً برای هر  $x \in D_f$ ، مقدار  $x \pm c$  نیز متعلق به دامنه تابع  $f$  باشد و ثانیاً  $f(x \pm c) = f(x)$ . به عدد  $c$  دوره تناوب تابع  $f$  می‌گوییم.

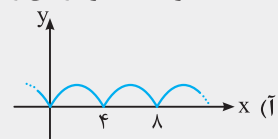
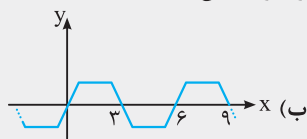
**دوره تناوب اصلی:** به کوچک‌ترین عدد حقیقی و مثبت  $c$  که در تعریف فوق صدق کند، دوره تناوب اصلی و یا به اختصار دوره تناوب تابع  $f$  می‌گوییم و آن را با  $T$  نمایش می‌دهیم.

به طور مثال، تابع  $f(x) = \sin x$  متناوب بوده و  $T = 2\pi$  دوره تناوب آن است، زیرا از آنجایی‌که دامنه تابع  $f(x) = \sin x$  برابر  $\mathbb{R}$  است، پس برای هر  $x \in D_f$ ،  $x \pm 2\pi$  نیز متعلق به  $D_f$  می‌باشد. هم‌چنین داریم:

$$f(x + 2\pi) = \sin(2\pi + x) = \sin x = f(x)$$

بدیهی است که به جای  $c = 2\pi$ ، هر یک از اعداد  $\pm 2\pi$ ،  $\pm 4\pi$ ، و ... را نیز می‌توان قرار داد اما از این میان کوچک‌ترین عدد مثبت همان  $2\pi$  است، پس  $T = 2\pi$  **تعبیر هندسی دوره تناوب:** اگر  $f$  تابعی متناوب با دوره تناوب  $T$  باشد، آن‌گاه نمودار تابع  $f$  در هر بازه به طول  $T$  تکرار می‌شود. به عبارت دیگر، اگر نمودار تابع  $f$  را در یک دوره تناوب مثلاً بازه  $[0, T]$  در اختیار داشته باشیم، با تکرار این قسمت از نمودار  $f$ ، می‌توان نمودار  $f$  را در همه بازه‌ها رسم نمود. در واقع  $T$ ، طول کوچک‌ترین بازه‌ای است که نمودار  $f$  تکرار می‌شود.

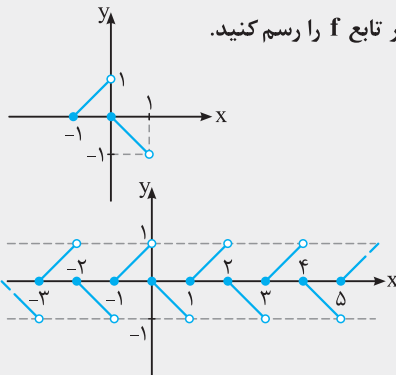
**مثال:** با توجه به نمودارهای زیر، دوره تناوب اصلی تابع مربوط به این نمودارها را تعیین کنید.



(آ) **پاسخ:** طول کوچک‌ترین بازه‌ای که نمودار تابع تکرار می‌شود، ۴ واحد است، پس  $T = 4$

(ب) طول کوچک‌ترین بازه‌ای که نمودار تابع تکرار می‌شود، ۶ واحد است، پس  $T = 6$

**مثال:** اگر قسمتی از نمودار تابع متناوب  $f$  با دوره تناوب  $T = 2$  مطابق شکل مقابل باشد، نمودار تابع  $f$  را رسم کنید.



**پاسخ:** کافی است نمودار داده‌شده در بازه  $[-1, 1]$  را در

بازه‌های  $[1, 3]$ ،  $[3, 5]$ ،  $[5, 7]$  و ... و  $[-3, -1]$  و ... تکرار کنیم:

**نکته** اگر  $a, b, c, d$  اعداد حقیقی و  $a \cdot b \neq 0$  باشند، در این صورت:

$$\begin{cases} y = a \sin(bx + c) + d \\ y = a \cos(bx + c) + d \end{cases} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|b|}, \quad \begin{cases} y = a \tan(bx + c) + d \\ y = a \cot(bx + c) + d \end{cases} \Rightarrow T = \frac{\pi}{|b|}$$

**تذکر:** در نکته فوق، ضرایب  $a, c, d$  تأثیری روی دوره تناوب ندارند. در واقع ضرب یک عدد در تابع متناوب و نیز انتقال تابع متناوب، در دوره تناوب آن تأثیری ندارد ولی در برد تابع مؤثر هستند.

**مثال:** دوره تناوب اصلی توابع زیر را به‌دست آورید.

(پ)  $y = -5 \sin\left(\frac{1}{4}(3-x)\right) + 1$

(ب)  $y = 2 - 3 \cos\left(\frac{\pi}{3}x\right)$

(آ)  $y = \sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)$

(ج)  $y = 7 \cot\left(\frac{\pi}{6} - \frac{2x}{5}\right)$

(ث)  $y = 1 - 5 \tan(2\pi x)$

(ت)  $y = 2 \tan\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{5}x\right)$

**پاسخ:** با استفاده از نکته قبل، دوره تناوب توابع داده‌شده را می‌یابیم:

(پ)  $T = \frac{2\pi}{\left|-\frac{1}{4}\right|} = 8\pi$

(ب)  $T = \frac{2\pi}{\left|\frac{\pi}{3}\right|} = 6$

(آ)  $T = \frac{2\pi}{|3|} = \frac{2\pi}{3}$

(ج)  $T = \frac{\pi}{\left|-\frac{2}{5}\right|} = \frac{5\pi}{2}$

(ث)  $T = \frac{\pi}{|2\pi|} = \frac{1}{2}$

(ت)  $T = \frac{\pi}{\left|-\frac{\pi}{5}\right|} = 5$

**تست:** اگر دوره تناوب تابع  $f(x) = 2 \sin\left(\frac{mx}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$  برابر دوره تناوب تابع  $g(x) = 1 - \cos \frac{x}{4}$  باشد، مقدار منفی  $m$  کدام است؟

(۴) -۶

(۳) -۴

(۲)  $-\frac{3}{2}$

(۱)  $-\frac{2}{3}$

**پاسخ:** دوره تناوب تابع  $f$  برابر  $T_1 = \frac{2\pi}{\left|\frac{m}{3}\right|} = \frac{6\pi}{|m|}$  و دوره تناوب تابع  $g$  برابر  $T_2 = \frac{2\pi}{\left|\frac{1}{4}\right|} = 4\pi$  است. لذا طبق فرض داریم:

گزینه (۲) صحیح است.  $T_1 = T_2 \Rightarrow \frac{6\pi}{|m|} = 4\pi \Rightarrow |m| = \frac{6}{4} \xrightarrow{m < 0} m = -\frac{3}{2}$

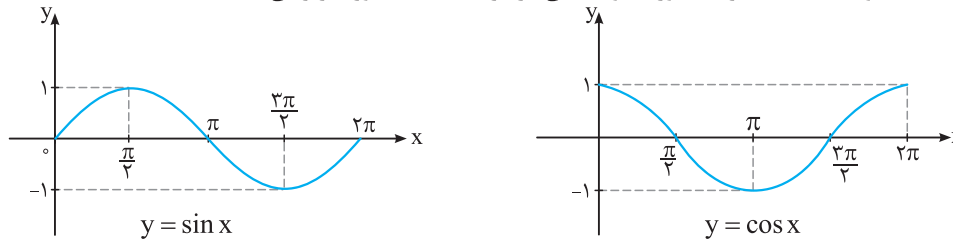
**توابع مثلثاتی**

توابعی که فقط شامل نسبت‌های مثلثاتی با ضرایب حقیقی باشند، توابع مثلثاتی نامیده می‌شوند. به طور مثال، هر یک از توابع  $y = 2 \sin x + 5$  و  $y = \cos 3x$  و  $y = 2 \sin^2 x + 5 \cos 2x - 1$  یک تابع مثلثاتی می‌باشند.

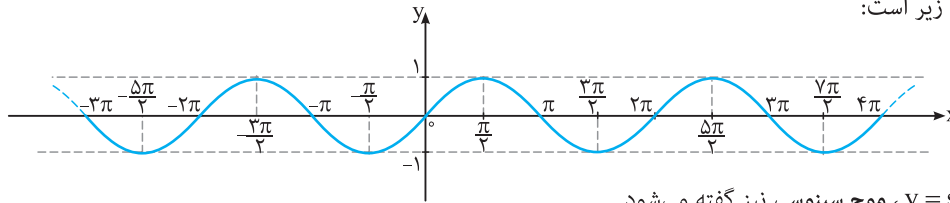
**نکته** توابع  $y = \sin x$  و  $y = \cos x$  ساده‌ترین توابع مثلثاتی می‌باشند. از آنجایی که برای هر عدد حقیقی  $x$ ،  $\sin x$  و  $\cos x$  تعریف می‌شوند، پس دامنه این توابع برابر  $\mathbb{R}$  است و چون مقادیر  $\sin x$  و  $\cos x$  همواره اعدادی در بازه  $[-1, 1]$  می‌باشند، پس بُرد این توابع برابر  $[-1, 1]$  خواهد بود.

### نمودار توابع مثلثاتی $y = \cos x$ ، $y = \sin x$

نمودار توابع مثلثاتی  $y = \sin x$  و  $y = \cos x$  در یک دوره تناوب یعنی در بازه  $[0, 2\pi]$  به صورت زیر می باشد:

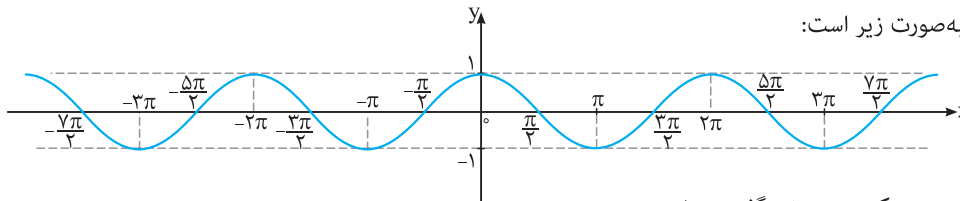


همان طور که گفته شد، تابع  $y = \sin x$  متناوب بوده و دوره تناوب آن  $T = 2\pi$  است. بنابراین اگر نمودار به دست آمده برای  $y = \sin x$  را در بازه هایی به طول  $2\pi$ ، مانند  $[2\pi, 4\pi]$ ،  $[4\pi, 6\pi]$ ، ...،  $[-2\pi, 0]$ ،  $[-4\pi, -2\pi]$ ، ... تکرار کنیم، نمودار تابع  $y = \sin x$  روی  $\mathbb{R}$  رسم می شود. این نمودار به صورت زیر است:



به نمودار  $y = \sin x$ ، موج سینوسی نیز گفته می شود.

مشابه آنچه در مورد  $y = \sin x$  گفته شد، تابع  $y = \cos x$  نیز متناوب بوده و دوره تناوب آن  $T = 2\pi$  است. بنابراین اگر نمودار  $y = \cos x$  را در بازه  $[0, 2\pi]$  را در بازه هایی به طول  $2\pi$ ، مانند  $[2\pi, 4\pi]$ ،  $[4\pi, 6\pi]$ ، ...،  $[-2\pi, 0]$ ،  $[-4\pi, -2\pi]$ ، ... تکرار کنیم، نمودار  $y = \cos x$  روی  $\mathbb{R}$  رسم می شود. این نمودار به صورت زیر است:



به نمودار  $y = \cos x$ ، موج کسینوسی نیز گفته می شود.

### رسم نمودار برخی توابع به کمک نمودارهای $y = \cos x$ ، $y = \sin x$

با استفاده از توابع  $y = \sin x$  و  $y = \cos x$ ، می توان توابع جدیدی ساخت و نمودار آن ها را به کمک نمودار توابع  $y = \sin x$  و  $y = \cos x$  رسم نمود. به مثال زیر توجه کنید:

(برگرفته از کتاب درسی)

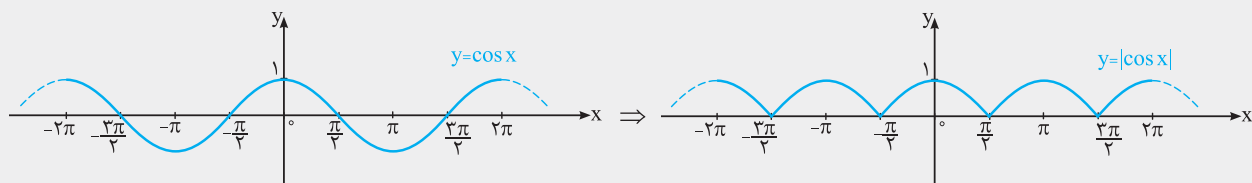
**مثال:** نمودار توابع زیر را رسم کنید.

$$y = -\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \quad (\text{ب})$$

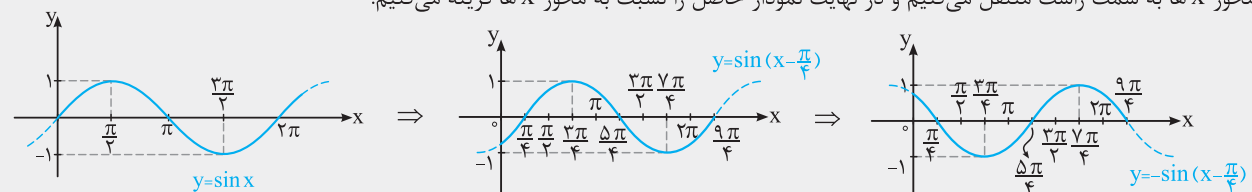
$$y = |\cos x| \quad (\text{آ})$$

**پاسخ:** (آ) برای رسم نمودار تابع  $y = |f(x)|$ ، ابتدا نمودار  $y = f(x)$  را رسم می کنیم و سپس بخش هایی از نمودار تابع  $f$  که زیر محور  $x$  ها قرار

دارد را نسبت به محور  $x$  ها قرینه می کنیم. بنابراین نمودار  $y = |\cos x|$  به صورت زیر رسم می شود:



(ب) با استفاده از انتقال، این نمودار را رسم می کنیم. برای این منظور ابتدا نمودار  $y = \sin x$  را رسم کرده و سپس آن را  $\frac{\pi}{4}$  واحد در راستای محور  $x$  ها به سمت راست منتقل می کنیم و در نهایت نمودار حاصل را نسبت به محور  $x$  ها قرینه می کنیم:



## کاربرد توابع مثلثاتی در حل مسئله

توابع مثلثاتی در بسیاری از علوم به خصوص علم فیزیک کاربرد فراوان دارند. بسیاری از حرکت‌های متناوب مانند حرکت رفت و برگشت آونگ، حرکت دایره‌ای مانند حرکت سیارات، حرکت نوسانی مانند حرکت نوسانی یک فنر یا حرکت موجی یک موج الکترومغناطیسی همه بر حسب توابع مثلثاتی بیان می‌شوند.

**تست:** شکل مقابل، یک روبات صنعتی را که در صنایع خودروسازی کاربرد دارد، نمایش می‌دهد. اگر برای گرفتن یک شیء در ارتفاع ۲۱۹ سانتی‌متری، این روبات مفصل دوم خود را در حالت  $\alpha = -3^\circ$  قرار دهد، زاویه  $\theta$  در این وضعیت چند درجه خواهد بود؟ (برگرفته از کتاب درسی)

(۱)  $30^\circ$  (۲)  $45^\circ$  (۳)  $60^\circ$  (۴)  $90^\circ$

**پاسخ:** شکل ساده‌تری از روبات را رسم می‌کنیم. بنابراین داریم:

$\Delta OAB: \sin \theta = \frac{h}{100} \Rightarrow h = 100 \sin \theta$   
 $\Delta BCD: \sin \alpha = \frac{k}{62} \Rightarrow k = 62 \sin \alpha$   
ارتفاع نوک گیره از زمین:  $y = 200 + h + k \Rightarrow y = 200 + 100 \sin \theta + 62 \sin \alpha$

طبق فرض  $30^\circ$  و  $\alpha = -3^\circ$ ، پس:

$$219 = 200 + 100 \sin \theta + 62 \sin(-3^\circ) \Rightarrow 19 = 100 \sin \theta + 62 \left(-\frac{1}{4}\right) \Rightarrow 19 = 100 \sin \theta - 31 \Rightarrow 100 \sin \theta = 50 \Rightarrow \sin \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 30^\circ$$

یعنی در این وضعیت باید مفصل اول با خط افقی زاویه  $30^\circ$  بسازد. بنابراین گزینه (۱) صحیح است.

ماکسیمم و مینیمم توابع  $y = a \cos(bx) + c$  و  $y = a \sin(bx) + c$ 

می‌دانیم مقادیر ماکسیمم و مینیمم توابع  $f(x) = \sin x$  و  $g(x) = \cos x$  به ترتیب برابر ۱ و -۱ می‌باشند. به کمک نکته زیر، مقادیر ماکسیمم و مینیمم توابع  $y = a \sin(bx) + c$  و  $y = a \cos(bx) + c$ ، به دست می‌آید:

**نکته** به طور کلی در توابع  $y = a \sin(bx) + c$  و  $y = a \cos(bx) + c$  داریم:

$$\max = |a| + c, \quad \min = -|a| + c$$

هم‌چنین عدد  $c$  همواره میانگین مقادیر ماکسیمم و مینیمم است. یعنی:

$$c = \frac{\max + \min}{2}$$

**تذکر** مقادیر ماکسیمم و مینیمم توابع  $y = a \sin(bx + d) + c$  و  $y = a \cos(bx + d) + c$  نیز از روابط فوق به دست می‌آیند.

**مثال:** دوره تناوب و مقادیر ماکسیمم و مینیمم هر یک از توابع زیر را به دست آورید.

(آ)  $y = -2 \sin(3x) + 1$  (ب)  $y = \sqrt{2} - \cos\left(\frac{\pi}{3}x\right)$  (پ)  $y = \pi \sin(2x - 3) - 2$  (ت)  $y = 4 - \frac{3}{5} \cos\left(1 - \frac{2x}{5}\right)$

**پاسخ:** بنابر نکته قبل و این‌که دوره تناوب توابع  $y = a \sin(bx + d) + c$  و  $y = a \cos(bx + d) + c$  برابر  $T = \frac{2\pi}{|b|}$  است، مقادیر خواسته شده را می‌یابیم:

$$T = \frac{2\pi}{|3|} = \frac{2\pi}{3}, \quad \max = |-2| + 1 = 3, \quad \min = -|-2| + 1 = -1 \quad (\text{آ})$$

$$T = \frac{2\pi}{|\frac{\pi}{3}|} = 6, \quad \max = |-1| + \sqrt{2} = \sqrt{2} + 1, \quad \min = -|-1| + \sqrt{2} = \sqrt{2} - 1 \quad (\text{ب})$$

$$T = \frac{2\pi}{|2|} = \pi, \quad \max = |\pi| - 2 = \pi - 2, \quad \min = -|\pi| - 2 = -\pi - 2 \quad (\text{پ})$$

$$T = \frac{2\pi}{|-\frac{2}{5}|} = 5\pi, \quad \max = \left|-\frac{3}{5}\right| + 4 = \frac{3}{5} + 4 = \frac{23}{5}, \quad \min = -\left|-\frac{3}{5}\right| + 4 = -\frac{3}{5} + 4 = \frac{17}{5} \quad (\text{ت})$$

**تست:** ضابطه تابع مثلثاتی که دوره تناوب آن  $T = \frac{\pi}{3}$  و مقادیر ماکسیمم و مینیمم آن برابر  $\max = 2$  و  $\min = -4$  است، کدام می تواند باشد؟

(برگرفته از کتاب درسی)

$$y = 3 \sin(6\pi x - \frac{\pi}{3}) - 1 \quad (4) \quad y = -3 \cos(6x) + 1 \quad (3) \quad y = 3 \cos(1 - 6x) - 1 \quad (2) \quad y = -3 \sin(6x) + 1 \quad (1)$$

**پاسخ:** ضابطه تابع مثلثاتی می تواند به یکی از شکل های  $y = a \sin(bx + d) + c$  یا  $y = a \cos(bx + d) + c$  باشد. می دانیم  $\max = |a| + c$  و  $\min = -|a| + c$  و میانگین مقادیر ماکسیمم و مینیمم است. پس:

$$c = \frac{\max + \min}{2} = \frac{2 + (-4)}{2} = -1$$

$$\max = |a| + c \xrightarrow{c=-1} 2 = |a| - 1 \Rightarrow |a| = 3 \Rightarrow a = \pm 3$$

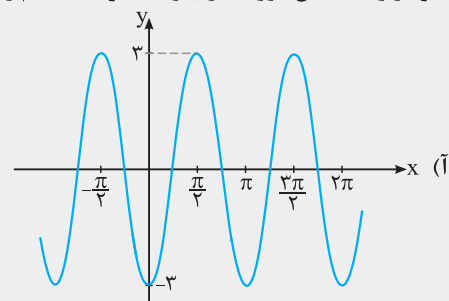
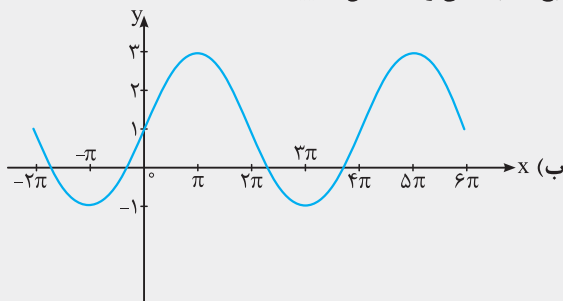
$$T = \frac{2\pi}{|b|} \xrightarrow{T=\frac{\pi}{3}} \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = 6 \Rightarrow b = \pm 6$$

از طرفی:

با اطلاعات سؤال، در مورد مثبت یا منفی بودن  $a$  و  $b$  چیزی نمی دانیم. بنابراین ضابطه تابع مورد نظر به یکی از صورت های  $y = \pm 3 \sin(\pm 6x + d) - 1$  یا  $y = \pm 3 \cos(\pm 6x + d) - 1$  می تواند باشد که با توجه به گزینه ها، گزینه (۲) صحیح است.

**نکته:** آ نمودار تابع به شکل  $y = a \cos(bx) + c$ ، همواره دارای مینیمم یا ماکسیمم روی محور  $y$ ها است. هم چنین اگر تابع روی محور  $y$ ها دارای ماکسیمم باشد،  $a > 0$  و چنانچه روی محور  $y$ ها دارای مینیمم باشد،  $a < 0$  خواهد بود. در مورد علامت  $b$  نمی توان اظهار نظر کرد. (ب) اگر نمودار تابع به شکل  $y = a \sin(bx) + c$ ، در سمت راست محور  $y$ ها و از چپ به راست، ابتدا دارای ماکسیمم و سپس دارای مینیمم باشد، در این صورت  $a$  و  $b$  هم علامت هستند و چنانچه ابتدا دارای مینیمم و سپس دارای ماکسیمم باشد، آن گاه  $a$  و  $b$  مختلف علامه می باشند.

**مثال:** هر یک از نمودارهای داده شده در زیر، مربوط به تابعی با ضابطه  $f(x) = a \sin(bx) + c$  یا  $f(x) = a \cos(bx) + c$  است. با دقت در شکل نمودار و تشخیص دوره تناوب و مقادیر ماکسیمم و مینیمم تابع، ضابطه آن را مشخص نمایید.



**پاسخ:** (آ) با توجه به شکل، نمودار تابع مورد نظر روی محور  $y$ ها دارای مینیمم است، پس مربوط به تابع  $y = a \cos(bx) + c$  می باشد. مقدار ماکسیمم و مینیمم این تابع به ترتیب برابر ۳ و -۳ است. چون مقادیر ماکسیمم و مینیمم به ترتیب برابر  $|a| + c$  و  $-|a| + c$  بوده و  $c$  میانگین این دو مقدار می باشد، پس:

$$c = \frac{\max + \min}{2} = \frac{3 + (-3)}{2} = 0$$

$$\max = |a| + c \Rightarrow 3 = |a| + 0 \Rightarrow |a| = 3$$

با توجه به نمودار، تابع روی محور  $y$ ها دارای مینیمم است، پس طبق نکته قبل  $a = -3$

از سوی دیگر دوره تناوب تابع با توجه به نمودار آن، برابر  $T = \pi$  است. پس:

$$T = \frac{2\pi}{|b|} \xrightarrow{T=\pi} \pi = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = 2$$

واضح است که در این حالت مثبت یا منفی بودن  $b$  تأثیری در ضابطه ندارد (زیرا  $\cos(\alpha) = \cos(-\alpha)$ ) پس می توان گفت  $b = 2$  و لذا ضابطه این نمودار به صورت  $f(x) = -3 \cos 2x$  است.

(ب) نمودار تابع روی محور  $y$ ها ماکسیمم یا مینیمم ندارد، پس این نمودار مربوط به تابع  $y = a \sin(bx) + c$  است.

مقادیر ماکسیمم و مینیمم این تابع به ترتیب برابر ۳ و -۱ است. پس داریم:

$$c = \frac{\max + \min}{2} = \frac{3 + (-1)}{2} \Rightarrow c = 1$$

$$\max = |a| + c \Rightarrow 3 = |a| + 1 \Rightarrow |a| = 2$$

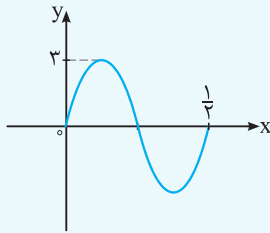
$$T = \frac{2\pi}{|b|} \xrightarrow{T=4\pi} 4\pi = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = \frac{1}{2}$$

از طرفی دوره تناوب این تابع از روی نمودار برابر  $T = 4\pi$  است. پس داریم:

نمودار تابع، در سمت راست محور  $y$ ها، ابتدا دارای ماکسیمم و سپس دارای مینیمم است. پس  $a$  و  $b$  هم علامت هستند. پس  $a = 2$  و  $b = \frac{1}{2}$

با  $a = -2$  و  $b = -\frac{1}{2}$  که در هر دو حالت ضابطه تابع صورت مقابل درمی آید:

$$f(x) = 2 \sin\left(\frac{1}{2}x\right) + 1$$



**تست:** شکل مقابل، نمودار تابع  $f(x) = a \sin(b\pi x) + c$  در یک دوره تناوب

می‌باشد.  $f(\frac{1}{12})$  کدام است؟

(۲)  $\frac{3}{2}$   
(۴)  $\frac{1}{2}$

(۱)  $\frac{3\sqrt{3}}{2}$   
(۳)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$f(0) = 0 \Rightarrow a \sin 0 + c = 0 \Rightarrow c = 0$$

**پاسخ:** نمودار تابع از مبدأ می‌گذرد، پس:

مطابق شکل، نمودار تابع در سمت راست محور  $y$  ها، ابتدا دارای ماکسیمم و سپس دارای مینیمم است. پس  $a$  و  $b$  هم‌علامت‌اند.  $(ab > 0)$ ، هم‌چنین داریم:

$$\max = |a| + c \Rightarrow 3 = |a| + 0 \Rightarrow |a| = 3$$

با توجه به نمودار، دوره تناوب تابع برابر  $\frac{1}{2}$  است. از طرفی دوره تناوب تابع  $f(x) = a \sin(b\pi x) + c$  برابر  $T = \frac{2\pi}{|b\pi|}$  است. پس:

$$\frac{2\pi}{|b\pi|} = \frac{1}{2} \Rightarrow |b| = 4$$

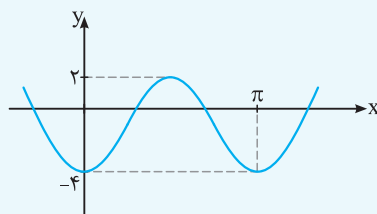
چون  $a$  و  $b$  هم‌علامت بودند، پس یا هر دو مثبت‌اند و یا هر دو منفی. بنابراین دو حالت زیر را داریم:

$$\text{حالت اول: } a = 3, b = 4 \Rightarrow f(x) = 3 \sin 4\pi x$$

$$\text{حالت دوم: } a = -3, b = -4 \Rightarrow f(x) = -3 \sin(-4\pi x) = -3(-\sin 4\pi x) = 3 \sin 4\pi x$$

بنابراین در هر دو حالت به تابع  $f(x) = 3 \sin 4\pi x$  می‌رسیم. در نتیجه:

$$f(\frac{1}{12}) = 3 \sin \frac{4\pi}{12} = 3 \sin \frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \text{گزینه (۱) صحیح است.}$$



**تست:** شکل مقابل نمودار تابع  $f(x) = a \sin(\frac{\pi}{4} + bx) + c$  است. مقدار  $f(\frac{5\pi}{3})$  کدام است؟

(۲)  $-\frac{1}{2}$   
(۴)  $\frac{1}{2}$

(۱)  $-\frac{3}{2}$   
(۳)  $\frac{3}{2}$

$$f(x) = a \sin(\frac{\pi}{4} + bx) + c = a \cos bx + c$$

**پاسخ:** می‌دانیم  $\sin(\frac{\pi}{4} + \alpha) = \cos \alpha$ ، پس:

نمودار کسینوسی روی محور  $y$  ها دارای مینیمم است، پس  $a < 0$ . بنابراین داریم:

$$c = \frac{\max + \min}{2} = \frac{2 + (-4)}{2} = -1$$

$$\max = |a| + c \Rightarrow 2 = |a| - 1 \Rightarrow |a| = 3 \xrightarrow{a < 0} a = -3$$

فاصله دو مینیمم متوالی همان دوره تناوب تابع است. پس:

$$T = \pi \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = \pi \Rightarrow |b| = 2$$

علامت  $b$  در تابع  $f(x) = a \cos(bx) + c$  اهمیتی ندارد. پس:

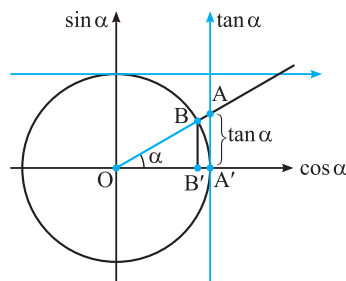
$$f(x) = -3 \cos(2x) - 1 \Rightarrow f(\frac{5\pi}{3}) = -3 \cos(\frac{10\pi}{3}) - 1 = -3 \cos(\frac{9\pi + \pi}{3}) - 1 = -3 \cos(\frac{3\pi}{3} + \frac{\pi}{3}) - 1$$

$$= -3 \cos(\pi + \frac{\pi}{3}) - 1 = -3(-\cos \frac{\pi}{3}) - 1 = 3 \cos \frac{\pi}{3} - 1 = 3 \times \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

ربع سوم

بنابراین گزینه (۴) صحیح است.

### تابع تانژانت



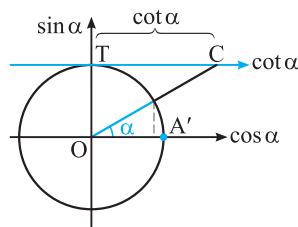
در دایره مثلثاتی مقابل، زاویه  $\alpha$  و نیز محور سینوس‌ها و محور کسینوس‌ها مشخص شده‌اند. حال اگر در نقطه  $A'$  عمودی بر محور  $x$  ها رسم کنیم تا امتداد  $OB$  را در نقطه  $A$  قطع کند، آن‌گاه خط  $AA'$  بر دایره مثلثاتی در نقطه  $A'$  مماس بوده و مقدار  $AA'$  برابر  $\tan \alpha$  است. زیرا داریم:

$$\Delta OBB' : \tan \alpha = \frac{BB'}{OB'} \quad (*)$$

$$\Delta OBB' \sim \Delta OAA' \Rightarrow \frac{BB'}{OB'} = \frac{AA'}{OA'} \xrightarrow{OA'=1} \frac{BB'}{OB'} = AA' \xrightarrow{(*)} \tan \alpha = AA'$$

## محور تانژانت‌ها و محور کتانژانت‌ها

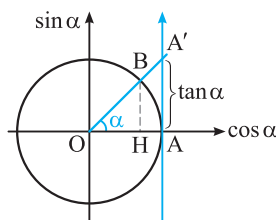
محور عمودی شامل  $AA'$  که در نقطه  $A'$  بر دایره مماس می‌باشد، محور تانژانت‌ها نام دارد. زیرا اندازه جبری محل تقاطع ضلع پایانی زاویه  $\alpha$  با آن محور تا نقطه  $A'$  بیانگر  $\tan \alpha$  است. در واقع در دایره مثلثاتی شکل قبل داریم:



**تذکر:** به طریق مشابه در دایره مثلثاتی مقابل می‌توان ثابت کرد  $\cot \alpha = TC$ . از این رو به محور افقی شامل  $TC$  که در نقطه  $T$  بر دایره مثلثاتی مماس است، محور کتانژانت‌ها می‌گویند.

## مقایسه تانژانت و سینوس

در ربع دوم دایره مثلثاتی، علامت سینوس مثبت و علامت تانژانت منفی است. پس اگر  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$  باشد،  $\tan \alpha < \sin \alpha$ ، همچنین در ربع سوم دایره مثلثاتی، تانژانت مثبت و سینوس منفی بوده و لذا اگر  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$  باشد،  $\sin \alpha < \tan \alpha$ . پس در این دو ربع تکلیف مشخص است. حال می‌خواهیم در ربع‌های اول و چهارم که سینوس و تانژانت هم‌علامت هستند، آن‌ها را مقایسه کنیم.



با توجه به محورهای سینوس و تانژانت، می‌توان سینوس و تانژانت یک زاویه را در ربع‌های اول و چهارم مقایسه نمود. دایره مثلثاتی مقابل را در نظر بگیرید، اگر  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ، آن‌گاه داریم:

$$\sin \alpha = \frac{BH}{OB} \xrightarrow{OB=1} \sin \alpha = BH$$

همچنین  $AA' = \tan \alpha$ . با توجه به شکل بدیهی است که  $BH < AA'$ . پس وقتی  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ، آن‌گاه  $\sin \alpha < \tan \alpha$

$$\sin(-\alpha) < \tan(-\alpha) \Rightarrow -\sin \alpha < -\tan \alpha \Rightarrow \tan \alpha < \sin \alpha$$

حال اگر  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$  باشد، آن‌گاه  $-\alpha < -\frac{\pi}{2}$ ، بنابراین داریم:

بنابراین نکته زیر را داریم:

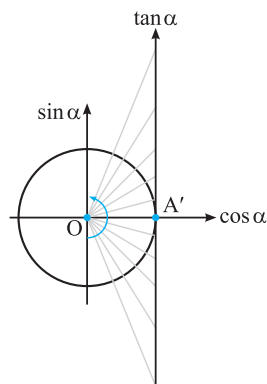
$$\sin \alpha < \tan \alpha$$

**نکته** آ) اگر  $\alpha$  در ربع اول باشد، آن‌گاه:

$$\tan \alpha < \sin \alpha$$

ب) اگر  $\alpha$  در ربع چهارم باشد، آن‌گاه:

## تغییرات تانژانت



با توجه به شکل مقابل، وقتی زاویه  $\alpha$  از  $-\frac{\pi}{2}$  تا  $\frac{\pi}{2}$  تغییر می‌کند، مقدار  $\tan \alpha$  افزایش می‌یابد و روند صعودی را طی می‌کند. در واقع  $\tan \alpha$  در  $-\frac{\pi}{2}$  و  $\frac{\pi}{2}$  تعریف نمی‌شود، اما وقتی زاویه  $\alpha$  (در ناحیه چهارم) نزدیک  $-\frac{\pi}{2}$  است، مقدار تانژانت  $\alpha$  نزدیک  $-\infty$  است، با افزایش  $\alpha$  از  $-\frac{\pi}{2}$  به  $\frac{\pi}{2}$ ، مقدار تانژانت  $\alpha$  نیز رفته رفته افزایش می‌یابد و در نزدیکی  $\frac{\pi}{2}$  (در ناحیه اول) به  $+\infty$  نزدیک می‌شود.

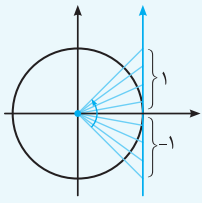
به طریق مشابه مطابق شکل مقابل، وقتی زاویه  $\alpha$  از  $\frac{\pi}{2}$  تا  $\frac{3\pi}{2}$  تغییر می‌کند، باز هم مقدار  $\tan \alpha$  از  $-\infty$  تا  $+\infty$  تغییر می‌کند.

پس نکته زیر را داریم:

$$\text{نکته} \text{ تابع } f(x) = \tan x \text{ در نقاط } x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{3\pi}{2} \text{ و به طور کلی در } x = k\pi + \frac{\pi}{2} \text{ (} k \in \mathbb{Z} \text{)}$$

تعریف نشده است. همچنین در هر یک از بازه‌های  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ،  $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$  و به طور کلی در بازه  $(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2})$  که در آن  $k \in \mathbb{Z}$ ، صعودی اکید است و در این بازه‌ها از  $-\infty$  تا  $+\infty$  افزایش می‌یابد.





**تست:** اگر  $\tan 2\alpha = 2m - 3$  و  $-\frac{\pi}{8} < \alpha < \frac{\pi}{8}$ ، حدود  $m$  کدام است؟

$-2 < m < -1$  (۲)

$-1 < m < 1$  (۱)

$2 < m < 3$  (۴)

$1 < m < 2$  (۳)

**پاسخ:**

$-\frac{\pi}{8} < \alpha < \frac{\pi}{8} \xrightarrow{\times 2} -\frac{\pi}{4} < 2\alpha < \frac{\pi}{4}$

با توجه به دایره مثلثاتی وقتی زاویه  $2\alpha$  از  $-\frac{\pi}{4}$  تا  $\frac{\pi}{4}$  تغییر می‌کند، مقدار  $\tan 2\alpha$  از  $-1$  شروع شده و با یک روند افزایشی به عدد  $1$  نزدیک می‌شود، سپس می‌توان نوشت:

گزینه (۳) درست است.  $-\frac{\pi}{4} < 2\alpha < \frac{\pi}{4} \Rightarrow -1 < \tan 2\alpha < 1 \Rightarrow -1 < 2m - 3 < 1 \Rightarrow 2 < 2m < 4 \Rightarrow 1 < m < 2$

**نمودار تابع  $f(x) = \tan x$**

همان‌طور که گفتیم، تابع  $f(x) = \tan x$  به ازای  $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) تعریف نمی‌شود و در هر بازه که تعریف شده باشد، صعودی اکید است. توجه به این مطلب، می‌توان به کمک نقطه‌یابی، نمودار آن را رسم کرد. برای آشنایی با نمودار  $y = \tan x$  و روش رسم آن، به مثال زیر توجه نمایید:

**مثال:** تابع  $y = \tan x$  را در بازه  $[0, 2\pi]$  در نظر بگیرید. (آ) جدول زیر را کامل کنید. ( $\sqrt{3} \approx 1.7$ ,  $\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.87$ )

$x$ (رادیان)	۰	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$	$2\pi$
$y = \tan x$	۰	۰.۵۷۷												

(ب) نقاط به‌دست آمده در جدول فوق را در دستگاه مختصات مشخص کرده و با توجه به این‌که تابع  $y = \tan x$  در  $x = \frac{\pi}{2}$  و  $x = \frac{3\pi}{2}$  از این بازه تعریف نشده است، تابع  $y = \tan x$  را رسم کنید.

(پ) با توجه به نمودار، تعیین کنید آیا تابع  $y = \tan x$  در بازه  $[0, 2\pi]$  یکنوا است؟

**پاسخ:** (آ)

$x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow y = \tan \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.577$ ,  $x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow y = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \approx 1.732$

$x = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow y = \tan \frac{2\pi}{3} = \tan(\pi - \frac{\pi}{3}) = -\tan \frac{\pi}{3} = -\sqrt{3} \approx -1.732$

$x = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow y = \tan \frac{3\pi}{4} = \tan(\pi - \frac{\pi}{4}) = -\tan \frac{\pi}{4} = -1$

$x = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow y = \tan \frac{5\pi}{6} = \tan(\pi - \frac{\pi}{6}) = -\tan \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \approx -0.577$

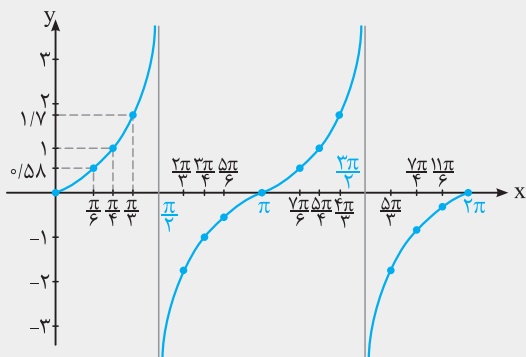
$x = \pi \Rightarrow y = \tan \pi = 0$

به همین ترتیب داریم:

$\tan(\frac{7\pi}{6}) \approx 0.577$ ,  $\tan \frac{5\pi}{4} = 1$ ,  $\tan \frac{4\pi}{3} \approx 1.732$ ,  $\tan \frac{3\pi}{2}$  تعریف نشده است،  $\tan \frac{5\pi}{6} = -1$ ,  $\tan \frac{11\pi}{6} \approx -0.577$ ,  $\tan 2\pi = 0$

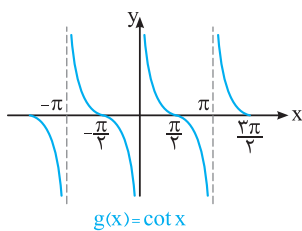
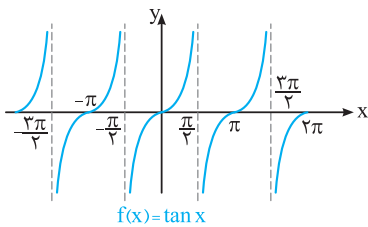
بنابراین جدول داده‌شده به‌صورت زیر تکمیل می‌شود:

$x$ (رادیان)	۰	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$	$2\pi$
$y = \tan x$	۰	۰.۵۷۷	۱	۱.۷۳۲	-۱.۷۳۲	-۱	-۰.۵۷۷	۰	۰.۵۷۷	۱	۱.۷۳۲	-۱.۷۳۲	-۱	-۰.۵۷۷



(ب) با توجه به این‌که تابع  $y = \tan x$  در هر بازه صعودی اکید و در  $x = \frac{\pi}{2}$  و  $x = \frac{3\pi}{2}$  تعریف نشده است، لذا نمودار این تابع به‌صورت مقابل درمی‌آید:

(پ) با توجه به نمودار معلوم می‌شود که تابع  $y = \tan x$  در بازه  $[0, 2\pi]$  غیریکنوا است.



**نکته** با توجه به رابطه  $\tan(x + \pi) = \tan x$

و  $\cot(x + \pi) = \cot x$  معلوم می‌شود که توابع

$f(x) = \tan x$  و  $g(x) = \cot x$  متناوب با دوره

تناوب  $T = \pi$  هستند و نمودار آن‌ها به صورت مقابل است:

با توجه به نمودارهای فوق، داریم:

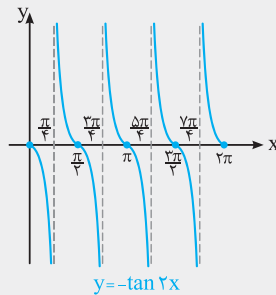
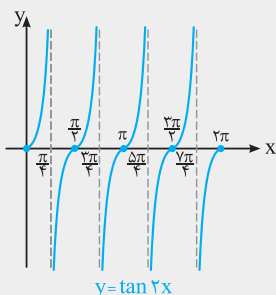
$$f(x) = \tan x \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{k\pi + \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}, R_f = \mathbb{R}, \quad g(x) = \cot x \Rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}, R_g = \mathbb{R}$$

**مثال:** نمودار توابع زیر را در بازه  $[0, 2\pi]$  رسم کنید.

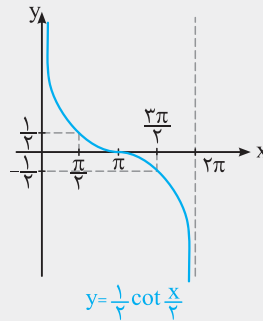
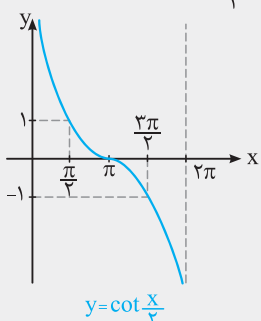
(آ)  $y = -\tan 2x$       (ب)  $y = \frac{1}{\sqrt{3}} \cot \frac{x}{\sqrt{3}}$

**پاسخ:** (آ) ابتدا طول نقاط  $y = \tan x$  را بر ۲ تقسیم می‌کنیم تا نمودار  $y = \tan 2x$  به دست آید و سپس نمودار حاصل را نسبت به محور  $x$  ها

قرینه می‌کنیم.



(ب) ابتدا طول نقاط  $y = \cot x$  را در عدد ۲ ضرب کرده و سپس عرض همه نقاط حاصل را در  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  ضرب می‌کنیم:



**خلاصه فصل هشتم: قسمت ششم: «تناوب و توابع مثلثاتی»**

**توابع متناوب و دوره تناوب**

**تابع متناوب:** تابع  $f$  را متناوب می‌گوییم، هرگاه عدد حقیقی غیرصفر  $C$  موجود باشد که اولاً برای هر  $x \in D_f$  مقدار  $x \pm C$  نیز متعلق به دامنه تابع  $f$  باشد و ثانیاً  $f(x \pm C) = f(x)$ . به عدد  $C$  دوره تناوب تابع  $f$  می‌گوییم.

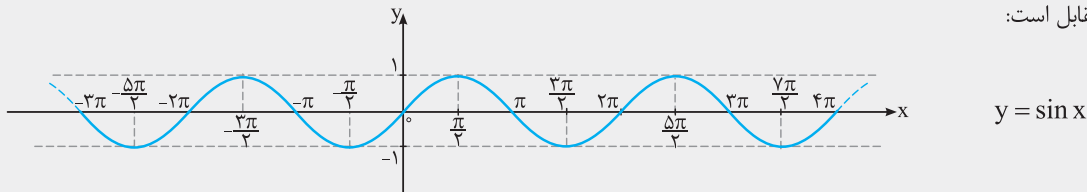
**دوره تناوب اصلی:** به کوچک‌ترین عدد حقیقی و مثبت  $C$  که در تعریف فوق صدق کند، دوره تناوب اصلی و یا به اختصار دوره تناوب تابع  $f$  می‌گوییم و آن را با  $T$  نمایش می‌دهیم.

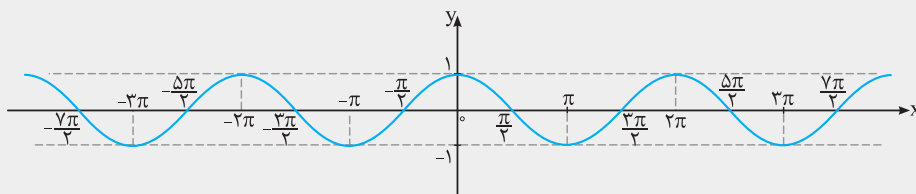
**نکته** اگر  $a, b, c, d$  اعداد حقیقی و  $a \cdot b \neq 0$  باشند، در این صورت:

$$\begin{cases} y = a \sin(bx + c) + d \\ y = a \cos(bx + c) + d \end{cases} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|b|}, \quad \begin{cases} y = a \tan(bx + c) + d \\ y = a \cot(bx + c) + d \end{cases} \Rightarrow T = \frac{\pi}{|b|}$$

نمودار توابع مثلثاتی  $y = \sin x$  و  $y = \cos x$

$y = \sin x$  و  $y = \cos x$ ، ساده‌ترین توابع مثلثاتی هستند. از آنجایی که دوره تناوب این دو تابع برابر  $T = 2\pi$  است، لذا اگر نمودار این توابع در یک بازه به طول  $2\pi$ ، مثلاً بازه  $[0, 2\pi]$  رسم شود، با توجه به مفهوم دوره تناوب، نمودار آن‌ها را می‌توان به طول کامل رسم نمود. نمودار این توابع به صورت مقابل است:





$$y = \cos x$$

به نمودارهای  $y = \sin x$  و  $y = \cos x$  به ترتیب، موج سینوسی و موج کسینوسی هم گفته می‌شود.

### کاربرد توابع مثلثاتی

توابع مثلثاتی در بسیاری از علوم به خصوص علم فیزیک کاربرد فراوان دارند. نمونه‌هایی از این کاربردها که مربوط به روبات‌های صنعتی در صنایع خودروسازی است، در متن درس دیدیم.

**نکته** به طور کلی در توابع  $y = a \sin(bx + d) + c$  و  $y = a \cos(bx + d) + c$  داریم:

$$\max = |a| + c, \quad \min = -|a| + c$$

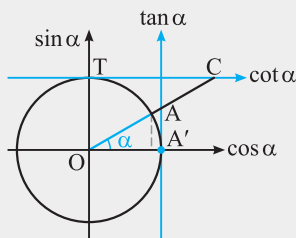
$$c = \frac{\max + \min}{2}$$

هم‌چنین عدد  $c$  همواره میانگین مقادیر ماکسیمم و مینیمم است. یعنی:

**نکته** (آ) نمودار تابع به شکل  $y = a \cos(bx) + c$ ، همواره دارای مینیمم یا ماکسیمم روی محور  $y$ ها است. هم‌چنین اگر تابع روی محور  $y$ ها دارای ماکسیمم باشد،  $a > 0$  و چنان‌چه روی محور  $y$ ها دارای مینیمم باشد،  $a < 0$  خواهد بود. در مورد علامت  $b$  نمی‌توان اظهار نظر کرد.  
(ب) اگر نمودار تابع به شکل  $y = a \sin(bx) + c$ ، در سمت راست محور  $y$ ها و از چپ به راست، ابتدا دارای ماکسیمم و سپس دارای مینیمم باشد، در این صورت  $a$  و  $b$  هم‌علامت هستند و چنان‌چه ابتدا دارای مینیمم و سپس دارای ماکسیمم باشد، آنگاه  $a$  و  $b$  مختلف‌العلامه می‌باشند.

### محور تانژانت‌ها و محور کتانژانت‌ها

به **محور عمودی** شامل  $AA'$  که در نقطه  $A'$  بر دایره مماس می‌باشد، **محور تانژانت‌ها** می‌گویند. زیرا اندازه جبری محل تقاطع ضلع پایانی زاویه  $\alpha$  با آن محور تا نقطه  $A'$  (یعنی  $AA'$ ) بیانگر  $\tan \alpha$  است.



**تذکره** به طریق مشابه در دایره مثلثاتی مقابل می‌توان ثابت کرد  $\cot \alpha = TC$ . از این رو به **محور افقی** شامل  $TC$  که در نقطه  $T$  بر دایره مثلثاتی مماس است، **محور کتانژانت‌ها** می‌گویند.

$$\sin \alpha < \tan \alpha$$

**نکته** (آ) اگر  $\alpha$  در ربع اول باشد، آن‌گاه:

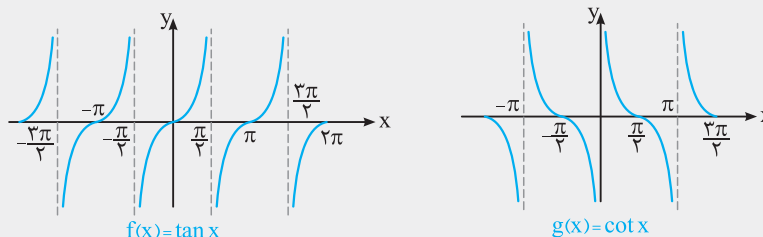
$$\tan \alpha < \sin \alpha$$

(ب) اگر  $\alpha$  در ربع چهارم باشد، آن‌گاه:

**نکته** تابع  $f(x) = \tan x$  در نقاط  $x = \frac{\pi}{2}$ ،  $x = \frac{3\pi}{2}$  و به طور کلی در  $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) تعریف نشده است. هم‌چنین در هر یک

از بازه‌های  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ،  $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$  و به طور کلی در بازه  $(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2})$  که در آن  $k \in \mathbb{Z}$ ، صعودی اکید است و در این بازه‌ها از  $-\infty$  تا  $+\infty$  افزایش می‌یابد.

**نکته** با توجه به رابطه  $\tan(x + \pi) = \tan x$  و  $\cot(x + \pi) = \cot x$  معلوم می‌شود که توابع  $f(x) = \tan x$  و  $g(x) = \cot x$  متناوب با دوره تناوب  $T = \pi$  هستند و نمودار آن‌ها به صورت زیر است:



با توجه به نمودارهای فوق، داریم:

$$f(x) = \tan x \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{k\pi + \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}, R_f = \mathbb{R}, \quad g(x) = \cot x \Rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}, R_g = \mathbb{R}$$