

به نام خداوند خورشید و ماه |
که دل را به نامش خرد داد راه |



لقمه



مهر و ماه

تیزهوشان

۱۰۰ نکته

ریاضی نهم

هندسه



نیما نام آوری، حامد فرضعلی بیک


جلد ۲



مقدمه مدیر گروه

سرعت ... شتاب ... مینیمال شدن ...
اینها شاخصه‌های دنیای امروزند. در این دنیای پرسرعت،
گاهی لازم است ما هم با قطار زمان همراه شویم.
این کتاب، یک گردآوری و جمع‌بندی هوشمندانه، سریع،
مختصر و مناسب برای دانش‌آموزان کوشای پایه نهم
است. از ویژگی‌های این کتاب می‌توان به کوچک
بودن، طبقه‌بندی آگاهانه و بیان همه نکات مهم
و کلیدی نهم در کمترین فضای ممکن اشاره کرد.
کتاب‌های لقمه گروه ریاضی پایه نهم در دو جلد
حساب و هندسه تألیف شده‌اند که در این حرکت
پرشتاب، مکمل و همراه شما هستند.
و اما در این کتاب چه می‌بینید؟

نمایشگر سرفصل‌های اصلی کتاب که شامل
 تعدادی  هستند.

بیانگر بخش‌های اصلی هر سرفصل که بنا بر مفاهیم
مشترک، چند  در آنها قرار گرفته است.




هریک از اینها یک نکته از ۱۰۰ نکته اصلی کتاب است که در آن به آموزش همراه با مثال پرداخته ایم.

در هر  چه خبر است؟

 زیرنکته

 نکته تر به عنوان زیرنکته مهم تر

 مثال

 تعدادی پرسش چهارگزینه‌ای با چیدمان آسان به دشوار که در پاسخ‌نامه انتهای کتاب، پاسخ تشریحی آنها را آورده ایم. کتاب‌های **لقمه** را می‌توانید هنگام لقمه گرفتن، در سرویس مدرسه، در مترو و اتوبوس، در زنگ‌های تفریح و هر جای دیگری همراه داشته باشید و به اندازه وقتتان از آنها استفاده کنید.

و اما مؤلفان این کتاب، دو دوست، دو یار، دو مکمل و دو متمم! نیما و حامد عزیز هر دو استثنایی‌اند؛ شگفتا که این کتاب دوگانه‌ای است که در آن دویی نیست.

به یقین، تجربه و ذوق تألیف هر دو بزرگوار به سینرژی منجر شده است که از جمع جبری توانمندی هر یک بیشتر است. امید که شما هم از کتاب لذت ببرید.

خلاصه: ما فیل هوا کردیم! هر چی نکته هندسه تو نهمه، یه کتاب کردیم! (بقیه‌اش را می‌تونید پشت جلد کتاب بخونید!)

قربون صفاتون

بهنام بناپور



فهرست



فصل اوّل: استدلال و اثبات در هندسه

- | | | |
|----|--------------------|---|
| ۱۲ | اصول اولیه استدلال | 🔑 |
| ۲۰ | نامساوی هندسی | 🔑 |
| ۳۱ | هم‌نهشتی | 🔑 |
| ۴۰ | مفاهیم اولیه تشابه | 🔑 |
| ۴۸ | تالس | 🔑 |
| ۶۲ | تشابه مثلث‌ها | 🔑 |
| ۷۱ | اشکال خودمتشابه | 🔑 |
| ۷۸ | روابط طولی | 🔑 |
| ۸۷ | مثلث و انواع آن | 🔑 |
| ۹۳ | زاویه در مثلث | 🔑 |



اجزای فرعی مثلث

۹۹



فیثاغورس

۱۰۹



فاصله نقطه دلخواه از ضلع‌های مثلث

۱۲۰



دایره‌های محاطی و محیطی مثلث

۱۲۴



فصل دوم: حجم و مساحت



حجم‌های منشوری

۱۳۲



مکعب مستطیل

۱۴۰



مکعب

۱۴۹



استوانه

۱۵۸



حجم‌های هرمی

۱۶۵



مخروط

۱۷۶



حجم‌های کروی

۱۹۵



حجم‌های محیطی و محاطی

۲۰۴



پاسخ‌نامه

۲۱۳

استدلال و اثبات در هندسه

از تالس بیاموزیم رسم استدلال را! مردی که هیچ چیز را به راحتی نمی‌پذیرفت و اصرار داشت بر اثبات و استدلال. به یاری او و هم‌فکرانش، هندسه، جانی دوباره گرفت، هم‌نهشتی‌ها پدید آمد، خواص مثلث‌ها و چندضلعی‌ها شکل گرفت، اصول تشابه ظاهر شد و بعد... فیثاغورس! او نیز به فرض، حکم و قضیه ایمانی راسخ داشت؛ و ما نیز فرزندان خلف تفکر آنانیم. مردان راه سخت و مستحکم استدلال.



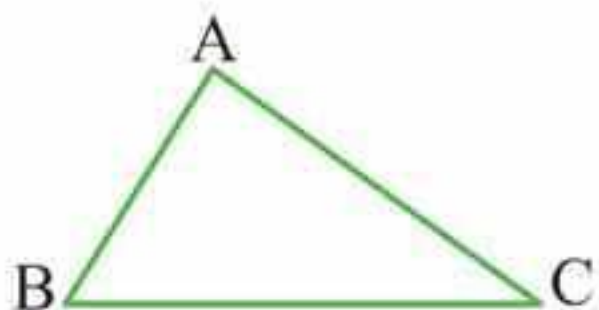
نامساوی هندسی



نامساوی زاویه برتر - ضلع برتر

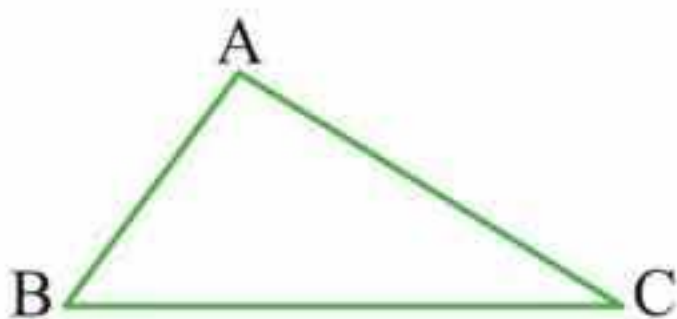
۳

● نامساوی زاویه برتر: اگر دو زاویه از مثلثی نابرابر باشند، ضلع روبه روی زاویه بزرگ تر، بزرگ تر از ضلع روبه روی زاویه کوچک تر است.



$$\hat{B} > \hat{C} \Rightarrow \overline{AC} > \overline{AB}$$

● نامساوی ضلع برتر: اگر دو ضلع از مثلثی نابرابر باشند، زاویه روبه روی ضلع بزرگ تر، بزرگ تر از زاویه روبه روی ضلع کوچک تر است.



$$\overline{AC} > \overline{AB} \Rightarrow \hat{B} > \hat{C}$$

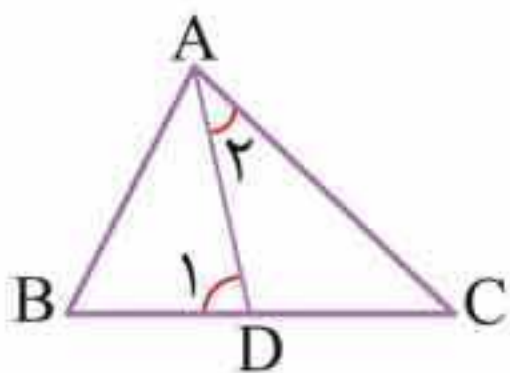
♦ **مثال:** اگر در مثلث ABC طول نیمساز زاویه A برابر با ضلع AB

باشد، کدام یک از گزینه های زیر درست است؟

- | | |
|-------------------------|--------------------------|
| (۱) $\hat{B} = \hat{C}$ | (۲) $\hat{B} > \hat{C}$ |
| (۳) $\hat{B} < \hat{C}$ | (۴) $2\hat{B} = \hat{C}$ |

پاسخ گزینه «۲» برای بررسی درستی گزینه ها

شکل مقابل را رسم می کنیم:



D_1 زاویه خارجی مثلث ADC است؛ بنابراین:

$$\widehat{D}_1 = \widehat{C} + \widehat{A}_2 \Rightarrow \widehat{D}_1 > \widehat{C}$$

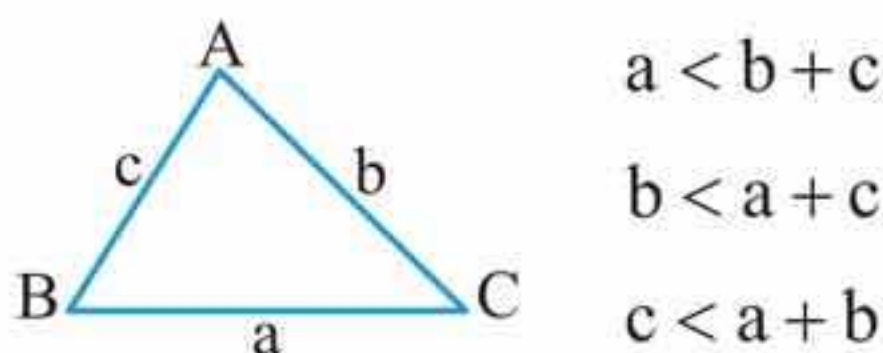
$$\overline{AB} = \overline{AD} \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{D}_1 \rightarrow \widehat{B} > \widehat{C}$$

پس فقط گزینه ۲ درست است.

قضیه نامساوی مثلث (قضیه حمار)

۴

در هر مثلث طول هر ضلع از مجموع طول دو ضلع دیگر کوچک تر است:



$$a < b + c$$

$$b < a + c$$

$$c < a + b$$

بنابراین در هر مثلث طول هر ضلع از قدر مطلق تفاضل دو ضلع دیگر بزرگ تر و از مجموع دو ضلع دیگر کوچک تر است:

$$|b - c| < a < |b + c|$$

مثال ۱: اگر اندازه سه ضلع مثلثی ۳، $3m - 2$ و ۴ باشد، حدود تغییرات m کدام است؟

$$1 < m < 4 \quad (2)$$

$$1 < m < 3 \quad (1)$$

$$1 \leq m \leq 3 \quad (4)$$

$$3 < m < 9 \quad (3)$$

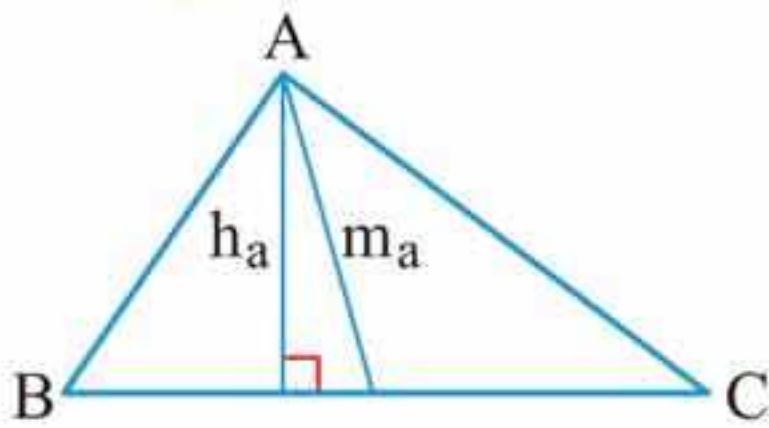
پاسخ گزینه «۱»

$$4 - 3 < 3m - 2 < 4 + 3 \Rightarrow 1 < 3m - 2 < 7$$

$$\Rightarrow 3 < 3m < 9 \Rightarrow 1 < m < 3$$

پاسخ گزینه «۲»

طبق نکته گفته شده داریم:



$$\left. \begin{array}{l} h_a \leq m_a \\ h_b \leq m_b \\ h_c \leq m_c \end{array} \right\} \xrightarrow{+} h_a + h_b + h_c \leq m_a + m_b + m_c \Rightarrow H \leq M$$

همچنین داریم:

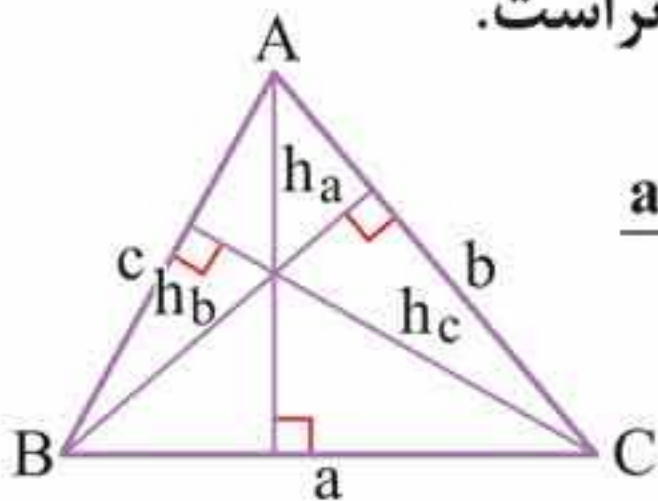
$$\left. \begin{array}{l} m_a < \frac{b+c}{2} \\ m_b < \frac{a+c}{2} \\ m_c < \frac{a+b}{2} \end{array} \right\} \xrightarrow{+} m_a + m_b + m_c < a+b+c \Rightarrow M < 2P$$

بنابراین با توجه به رابطه‌های بالا داریم:

$$\left. \begin{array}{l} H \leq M \\ M < 2P \end{array} \right\} \Rightarrow H \leq M < 2P$$

نکته‌تر: مجموع طول ارتفاع‌های هر مثلث از نصف محیط

مثلث، بزرگ‌تر و از محیط مثلث، کوچک‌تر است.



$$\frac{a+b+c}{2} < h_a + h_b + h_c < a+b+c$$

مثال ۳: اندازه محیط مثلثی 40° است. محدوده مجموع طول سه ارتفاع این مثلث را بیابید.

پاسخ $P < h_a + h_b + h_c < 2P \Rightarrow 20 < h_a + h_b + h_c < 40$

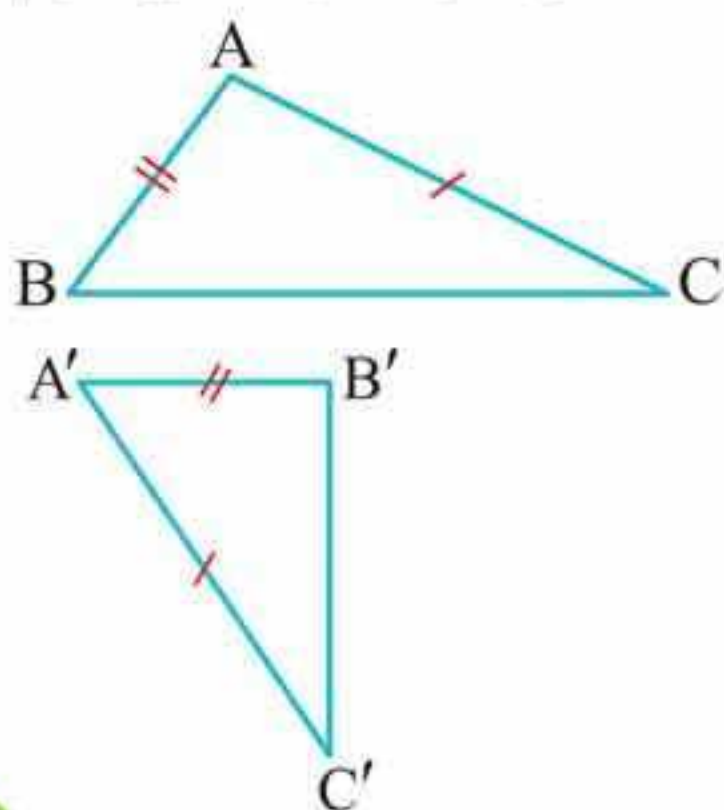
نکته‌تر: اگر h_a ، h_b و h_c ارتفاع‌های یک مثلث باشند، آنگاه با سه پاره خط به طول‌های $\frac{1}{h_a}$ ، $\frac{1}{h_b}$ و $\frac{1}{h_c}$ می‌توان یک مثلث ساخت؛ بنابراین معکوس طول ارتفاع‌ها باید در نامساوی مثلث صدق کند:

$$\left| \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c} \right| < \frac{1}{h_a} < \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$$

نامساوی لولا (قیچی)

۶

● اگر دو ضلع از مثلثی با دو ضلع از مثلث دیگر نظیربه نظیر مساوی باشد و زاویه بین این دو ضلع در مثلث اول، بزرگ‌تر از زاویه بین دو ضلع نظیر از مثلث دوم باشد، آنگاه ضلع سوم از مثلث اول، بزرگ‌تر از ضلع سوم از مثلث دوم است.



$$\left. \begin{array}{l} \overline{AB} = \overline{A'B'} \\ \overline{AC} = \overline{A'C'} \\ \hat{A}' > \hat{A} \end{array} \right\} \Rightarrow \overline{B'C'} > \overline{BC}$$

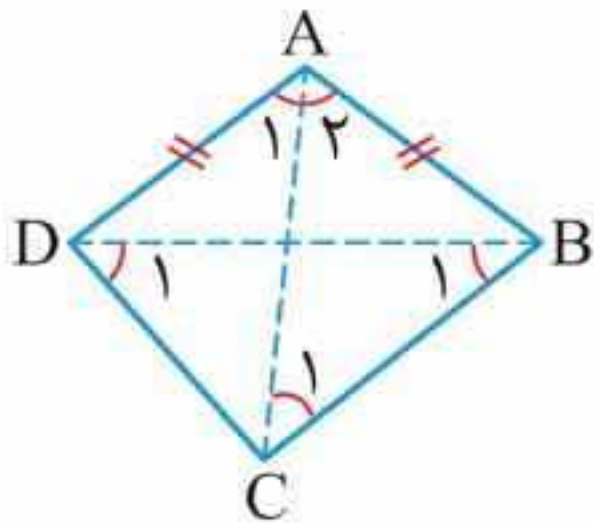
پرسش‌های چهارگزینه‌ای



۶. سه پاره خط به طول‌های $x+7$ ، $4(x-1)$ و $6x$ ضلع‌های یک مثلث هستند. محدوده x کدام است؟

$$\begin{array}{ll} \frac{11}{9} < x < 3 & (۱) \\ \frac{5}{3} < x < 3 & (۲) \\ 2 < x < 3 & (۳) \\ \frac{11}{9} < x < 4 & (۴) \end{array}$$

۷. اگر در چهارضلعی $ABCD$ ، $\overline{AB} = \overline{AD}$ و $\overline{BC} > \overline{CD}$ ، کدام رابطه درست نیست؟



$$\begin{array}{l} \widehat{C}_1 > \widehat{A}_1 \quad (۱) \\ \widehat{A}_2 > \widehat{A}_1 \quad (۲) \\ \widehat{D}_1 > \widehat{B}_1 \quad (۳) \\ \widehat{D} > \widehat{B} \quad (۴) \end{array}$$

۸. با طول‌های داده شده در کدام گزینه می‌توان یک مثلث رسم کرد؟
($x, y > 0$)

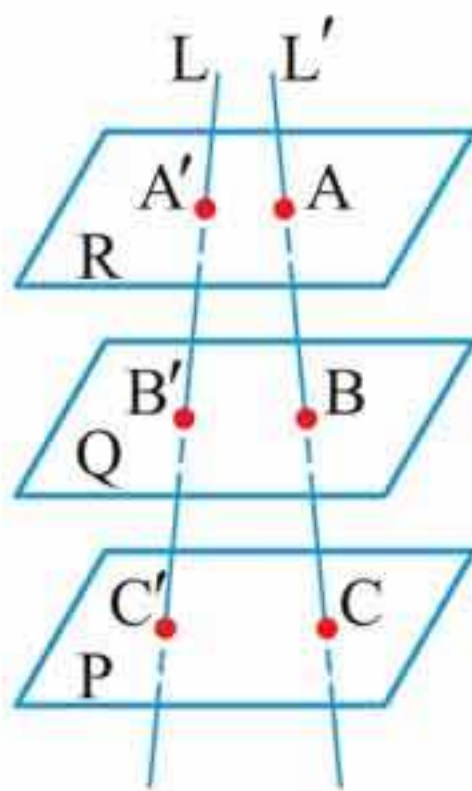
$$\begin{array}{l} x+y \text{ و } y+1, x+1 \quad (۱) \\ 2x^2 + 3x + 1 \text{ و } (x+1)^2, x^2 \quad (۲) \\ x+y+1 \text{ و } x \cdot y \quad (۳) \\ 3x \text{ و } x-2, 2x \quad (۴) \end{array}$$



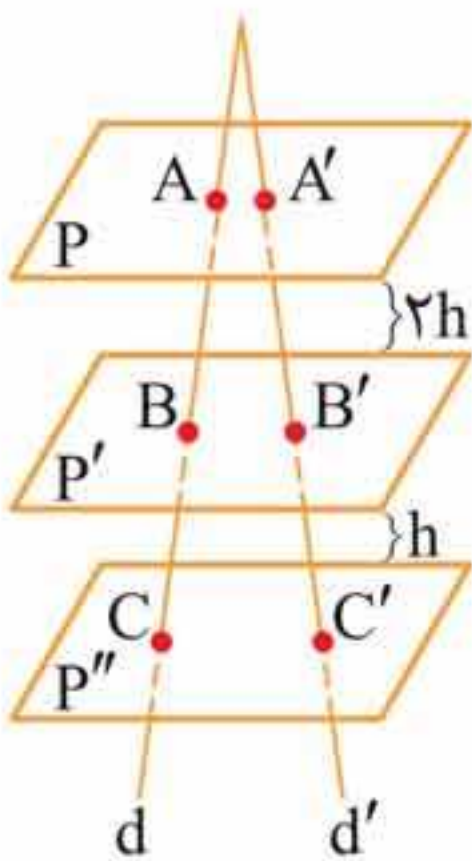
تالس در فضا

۱۳

● صفحه‌های موازی روی دو خط که آنها را قطع می‌کنند، پاره‌خط‌هایی متناسب را ایجاد می‌کنند؛ یعنی اگر P, Q, R سه صفحه موازی باشند و دو خط L و L' این دو صفحه را به ترتیب در نقطه‌های A, B, C و A', B', C' قطع کند، آنگاه:



$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$$



مثال: دو خط متقاطع d و d' سه صفحه موازی P, P', P'' را قطع کرده‌اند. اگر فاصله دو صفحه P و P' دو برابر فاصله دو صفحه P' و P'' و $3\overline{AC} = 4\overline{A'B'} = 24$ ، آنگاه $\overline{BC} + \overline{B'C'}$ کدام است؟

۶ (۲)	$\frac{17}{3}$ (۱)
۵ (۴)	$\frac{19}{3}$ (۳)

پاسخ گزینه «۱» طبق نکته قبل داریم:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} = \frac{2h}{h} \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{6}{\overline{B'C'}} = 2 \Rightarrow \overline{B'C'} = 3$$

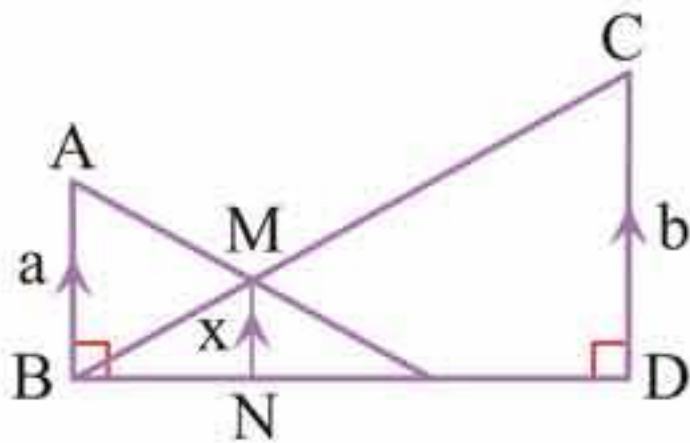
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = 2 \xrightarrow{\text{ترکیب در صورت}} \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = 3 \xrightarrow{\overline{AC}=8} \overline{BC} = \frac{8}{3}$$

$$\overline{BC} + \overline{B'C'} = \frac{8}{3} + 3 = \frac{17}{3}$$

تالس در شکل‌هایی با بیش از ۲ خط موازی

۱۴

در شکل زیر همواره داریم:



$$\frac{1}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

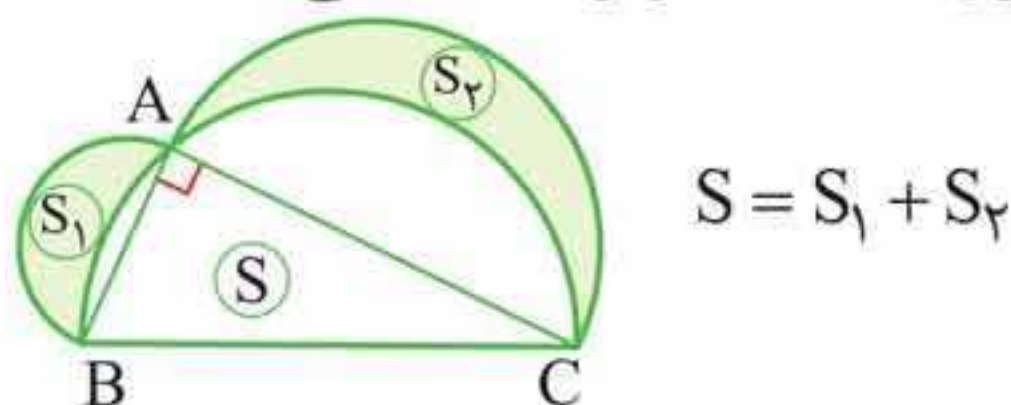
اثبات رابطه بالا به صورت زیر است:

$$\left. \begin{array}{l} MN \parallel AB \Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{\overline{ND}}{\overline{BD}} \\ MN \parallel CD \Rightarrow \frac{x}{b} = \frac{\overline{BN}}{\overline{BD}} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{x}{a} + \frac{x}{b} = \frac{\overline{ND} + \overline{BN}}{\overline{BD}} = 1$$

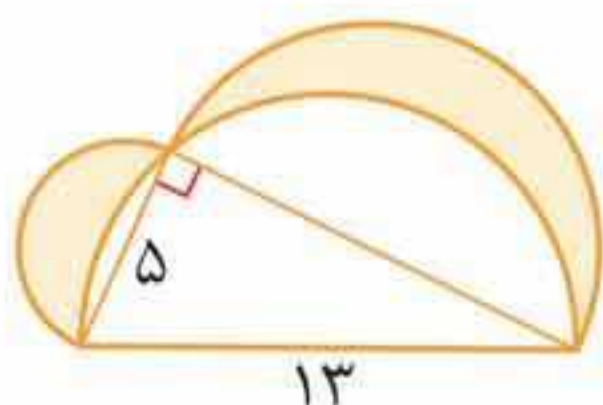
$$\Rightarrow x \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = 1 \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{x}$$

مساحت هلالین بقراط

● مجموع مساحت‌های دو هلال مشخص شده روی شکل زیر با مساحت مثلث قائم‌الزاویه ABC برابر است؛ یعنی:



ضلع‌های BC ، AC و AB در شکل بالا قطرهای نیم‌دایره‌های رسم شده هستند.



◆ **مثال ۵:** در مثلث قائم‌الزاویه مقابل سه نیم‌دایره به قطر ضلع‌ها رسم شده است. مساحت ناحیه رنگی را بیابید.

پاسخ

$$\text{ضلع سوم مثلث قائم‌الزاویه: } x^2 = 169 - 25 \Rightarrow x^2 = 144 \\ \Rightarrow x = 12$$

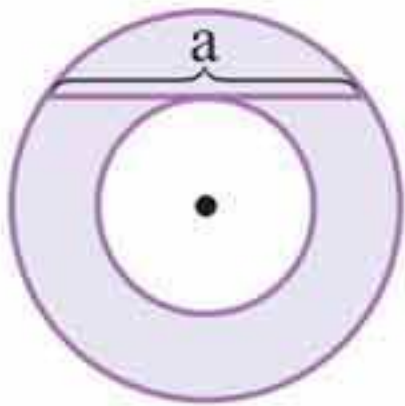
بنابراین مساحت مثلث قائم‌الزاویه برابر است با:

$$S = \frac{12 \times 5}{2} = 30$$

با توجه به نکته بالا مساحت ناحیه رنگی با مساحت مثلث قائم‌الزاویه برابر است؛ پس:

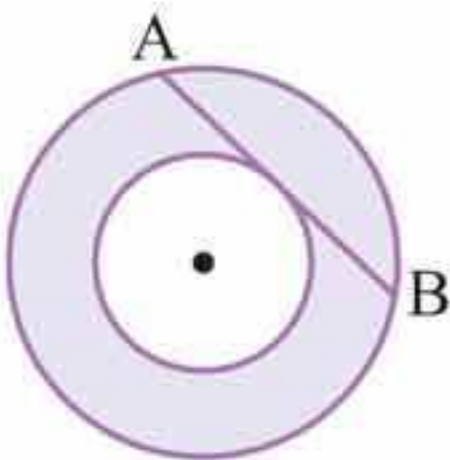
$$S_{\text{رنگی}} = 30$$

🔍 **نکته‌تر:** هرگاه وتری به اندازه a از یک دایره بردایره‌ای هم‌مرکز و کوچک‌تر از دایره اول مماس شده باشد، مساحت فضای بین دو دایره برابر است با:



$$S = \pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4} a^2$$

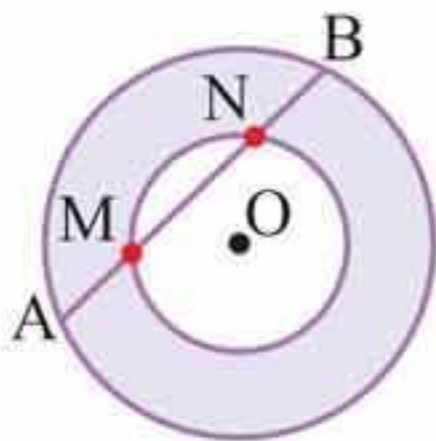
مثال ۶: دو دایره نشان داده شده در شکل زیر هم مرکزند. وتر AB از دایره بزرگ تر بر دایره کوچک تر مماس و طولش برابر ۱۶ است. مساحت ناحیه رنگی را بیابید.



$$S_{\text{رنگی}} = \frac{\pi}{4} \times 16^2 = 64\pi$$

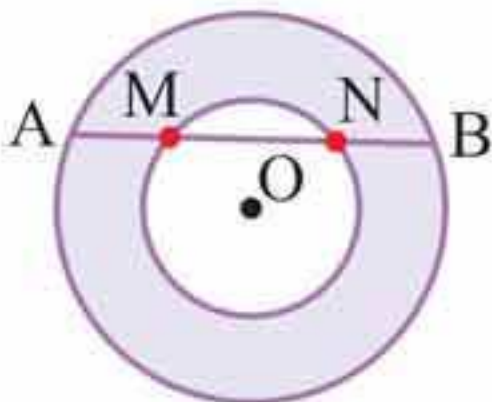
پاسخ

نکته تر: اگر مانند شکل زیر دو دایره هم مرکز با شعاع های غیریکسان، وتر مشترکی داشته باشند، مساحت قسمت محصور بین دو دایره از رابطه زیر به دست می آید:



$$S = \frac{\pi}{4} (\overline{AB}^2 - \overline{MN}^2)$$

مثال ۷: مساحت ناحیه رنگی بین دو دایره هم مرکز زیر با وترهای $\overline{AB} = 20$ و $\overline{MN} = 16$ سانتی متر را بیابید.



$$S = \frac{\pi}{4} (20^2 - 16^2) = 36\pi$$

پاسخ

فصل دوم

حجم و مساحت

بُعد سوم ما را فرا گرفته است. نمی‌توانیم به طول و عرض بیندیشیم و ارتفاع را از یاد ببریم. زندگی بدون ارتفاع، گنجایش هیچ چیز را ندارد! باور کنید...

معماران با بعد سوم معمار شدند و از طراحان سبقت گرفتند. باید معمار بود که قدر مکعب، استوانه، مخروط و هرم را دریافت و آنان را ارج نهاد. چنانچه معماران مصر، قدردان اهرام بودند و ما قدردان مصر؛

و البته که هر حجمی سطحی دارد و مساحتی. هرچه باشد راه بُعد سوم از بُعد دوم می‌گذرد.



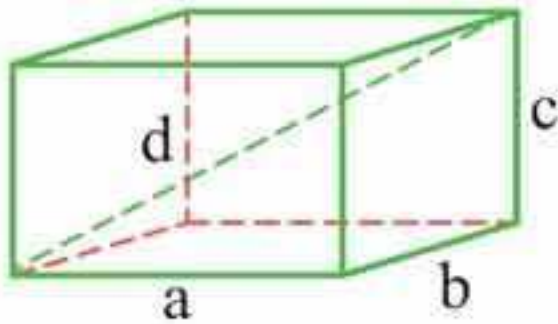
مکعب مستطیل



قطر

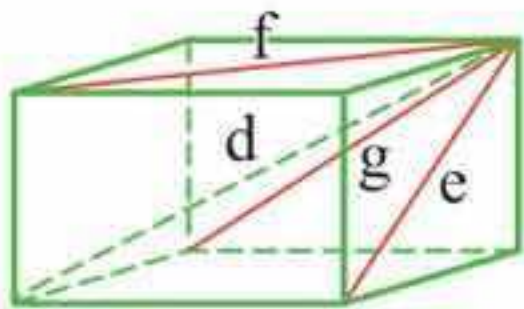
۵۱

● قطر مکعب مستطیل پاره خطی است که دو رأس غیرواقع بر یک صفحه (وجه) را به هم وصل می‌کند و اندازه آن از رابطه زیر به دست می‌آید:



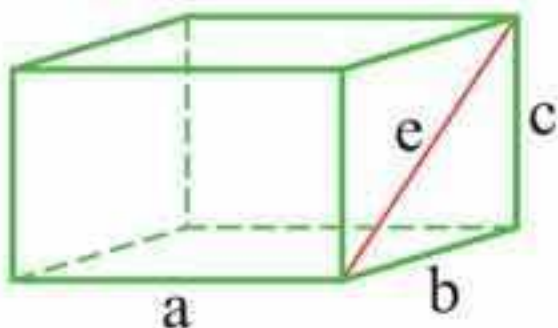
$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

همچنین d (اندازه قطر مکعب مستطیل) را می‌توان بر حسب قطرهای مختلف وجه‌ها نیز محاسبه کرد:



$$d = \sqrt{\frac{e^2 + f^2 + g^2}{2}}$$

🔑 **نکته‌تر:** قطر هر وجه مکعب مستطیل به کمک رابطه فیثاغورس به دست می‌آید؛ برای مثال در شکل زیر داریم:



$$e = \sqrt{c^2 + b^2}$$

🔑 اگر طول یال‌های مکعب مستطیلی n برابر شود، قطر آن نیز n برابر می‌شود.



مثال ۱: اگر قطر و وجه‌های مکعب مستطیلی $\sqrt{2}$ ، $2\sqrt{3}$ و $3\sqrt{2}$ باشد، قطر این مکعب مستطیل چقدر است؟

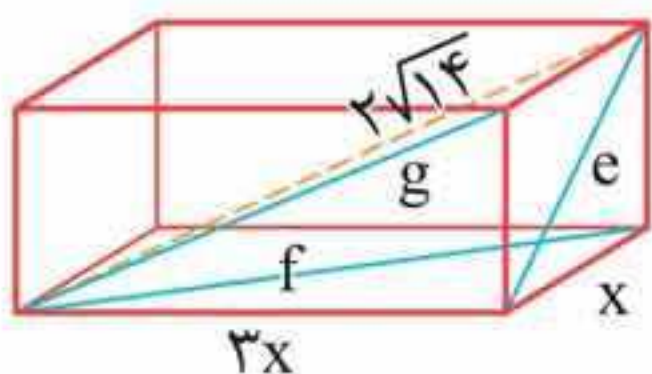
پاسخ

$$d = \sqrt{\frac{(\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{3})^2 + (3\sqrt{2})^2}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{2 + 12 + 18}{2}} = \sqrt{16} = 4$$

مثال ۲: طول یال‌های مکعب مستطیلی به قطر $2\sqrt{14}$ با نخستین سه عدد طبیعی متناسب است. کدام یک از عددهای زیر جزء قطر و وجه‌های این مکعب مستطیل است؟

- (۱) $4\sqrt{2}$ (۲) $2\sqrt{13}$ (۳) $4\sqrt{5}$ (۴) $8\sqrt{3}$



پاسخ گزینه «۲» یال‌ها با عددهای

۱، ۲ و ۳ متناسب‌اند؛ بنابراین آنها را به ترتیب x ، $2x$ و $3x$ در نظر می‌گیریم؛ پس:

$$2\sqrt{14} = \sqrt{x^2 + (2x)^2 + (3x)^2}$$

$$\Rightarrow 56 = x^2 + 4x^2 + 9x^2 \Rightarrow 14x^2 = 56 \Rightarrow x^2 = 4$$

$$\Rightarrow x = 2 \Rightarrow \text{اندازه یال‌ها} = 2, 4, 6$$

حالا قطرهای مکعب مستطیل را محاسبه می‌کنیم:

$$e = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}, f = \sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

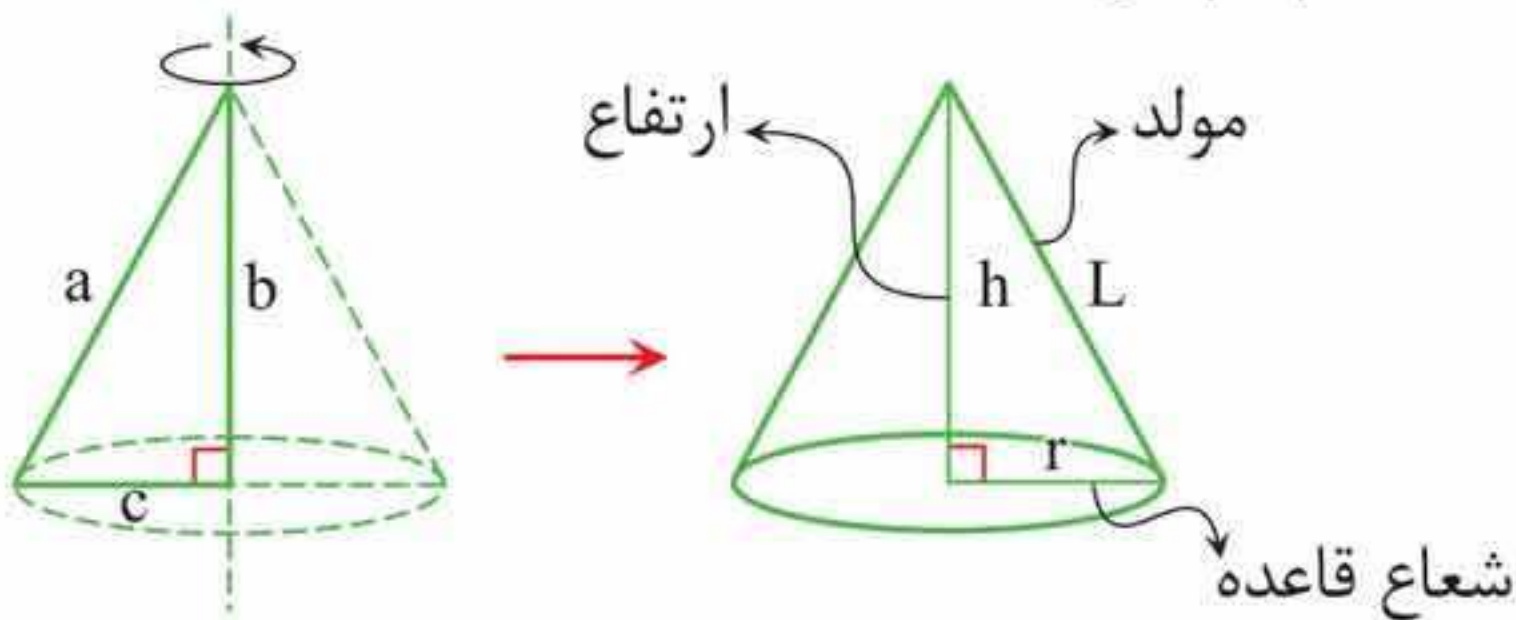
مخروط



تعریف مخروط

۷۴

● اگر مثلث قائم الزاویه‌ای را حول یکی از ضلع‌های قائمه‌اش 360° درجه دوران دهیم، شکل حاصل مخروط قائم نام دارد.



$$r = c, h = b, l = a$$

$$L^2 = h^2 + r^2$$

مثال: مثلث قائم الزاویه‌ای با ضلع‌های قائمه 5 و 12 سانتی‌متر را حول ضلع قائمه بزرگ‌تریک دوران کامل می‌دهیم. مولد مخروط حاصل چند سانتی‌متر است؟

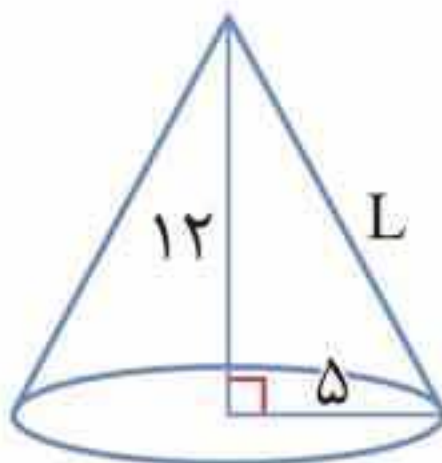
۱۴ (۴)

۱۳ (۳)

۱۷ (۲)

۱۵ (۱)

پاسخ گزینه «۳»



$$L^2 = 12^2 + 5^2 = 169 \Rightarrow L = 13 \text{ cm}$$

مساحت جانبی

۷۵

● مساحت جانبی مخروط قائم (که جزء حجم‌های هرمی منتظم محسوب می‌شود) از رابطه زیر به دست می‌آید:

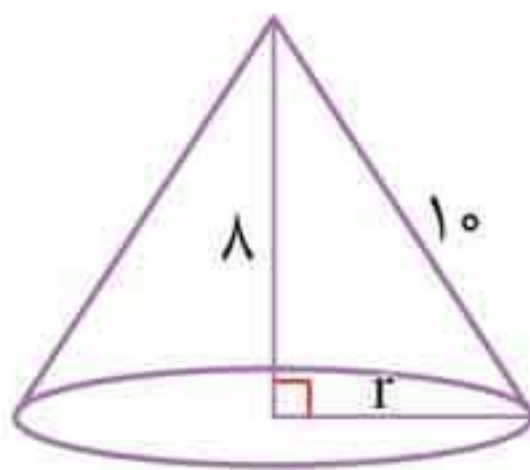
$$S_{\text{جانبی}} = \pi rL$$

(مساحت جانبی همان $\frac{\text{مولد مخروط} \times \text{محیط قاعده}}{2}$ است.)

❖ **مثال:** مثلث قائم‌الزاویه‌ای را که وتر آن ۱۰ سانتی‌متری یکی از ضلع‌های قائمه‌اش ۸ سانتی‌متر است، حول ضلع ۸ سانتی‌متری آن دوران ۳۶۰ درجه‌ای می‌دهیم. مساحت جانبی شکل حاصل چند سانتی‌متر مربع است؟

- (۱) 72π (۲) 36π (۳) 48π (۴) 60π

پاسخ گزینه «۴»



$$r^2 = 10^2 - 8^2 = 100 - 64 = 36 \Rightarrow r = 6 \text{ cm}$$

$$S_{\text{جانبی}} = \pi rL = \pi \times 6 \times 10 = 60\pi \text{ cm}^2$$

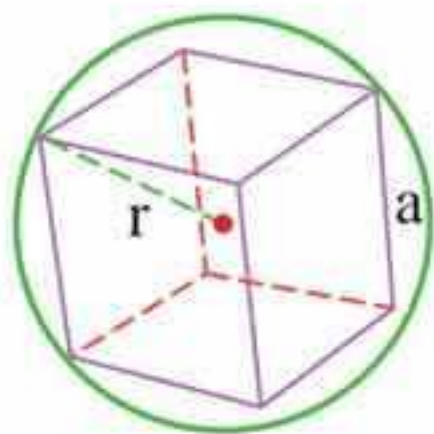
حجم‌های محیطی و محاطی



کره محیط بر مکعب

۹۵

● اگر کره‌ای بر یک مکعب محیط شود (همه رأس‌های



مکعب روی سطح داخلی کره قرار گیرد)، قطر کره بر قطر مکعب منطبق می‌شود؛ در این حالت می‌گوییم مکعب درون کره محاط شده است.

اگر شعاع کره را r و یال مکعب را a در نظر بگیریم، داریم: $r = \frac{\sqrt{3}}{2} a$

مثال: در کره‌ای به شعاع ۲۱ سانتی‌متر، یک مکعب محاط شده

است. نسبت حجم مکعب به حجم کره کدام است؟ ($\pi \simeq 3$)

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \quad (۴) \quad \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad (۳) \quad \frac{\sqrt{3}}{9} \quad (۲) \quad \frac{2\sqrt{3}}{9} \quad (۱)$$

پاسخ گزینه «۱»

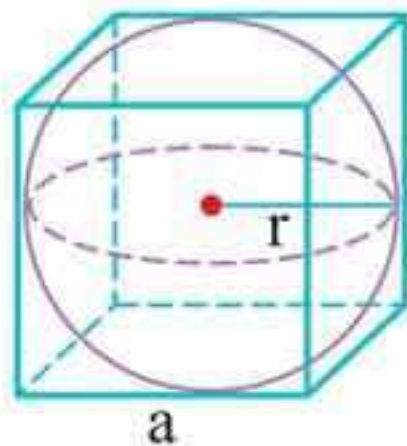
$$a \text{ یال مکعب به یال کره: } \sqrt{3}a = 42 \Rightarrow a = \frac{42 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = 14\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$\frac{V_{\text{مکعب}}}{V_{\text{کره}}} = \frac{(14\sqrt{3})^3}{\frac{4}{3} \times 3 \times 21^3} = \frac{14^3 \times \sqrt{3}^3}{21^3} = \frac{14 \times 14 \times 14 \times 3 \times \sqrt{3}}{21 \times 21 \times 21 \times 3} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

مکعب محیط بر کره

۹۶

● اگر مکعبی بر یک کره محیط شود (همهٔ وجه‌های



مکعب بر سطح کره مماس شود)، قطر کره با یال مکعب برابر است؛ در این حالت می‌گوییم کره درون مکعب محاط شده است.

اگر شعاع کره را r و یال مکعب را a در نظر بگیریم، داریم: $r = \frac{a}{2}$

❖ **مثال:** مکعبی به قطر $\sqrt{12}$ سانتی‌متر بر یک کره محیط شده است. حجم کره چند لیتر است؟ ($\pi \simeq 3$)

۴ (۱) ۳۲ (۲) ۰/۰۳۲ (۳) ۰/۰۰۴ (۴)

پاسخ گزینه «۴»

$$\sqrt{3}a = \sqrt{12} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = 2\text{cm} \Rightarrow r = 1\text{cm}$$

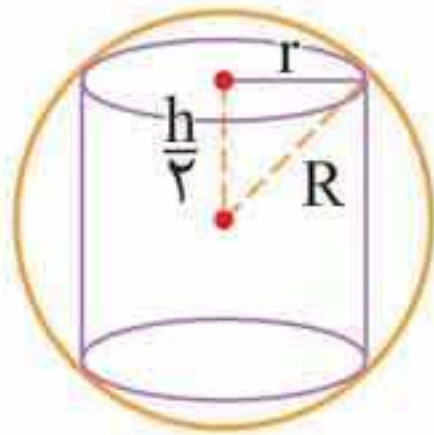
$$\Rightarrow V_{\text{کره}} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3} \times 3 \times 1^3 = 4\text{cm}^3 = 0/004\text{lit}$$

📌 **نکته‌تر:** اندازهٔ شعاع کرهٔ محیط بر یک مکعب، $\sqrt{3}$ برابر اندازهٔ شعاع کرهٔ محاط در همان مکعب است؛ همچنین اندازهٔ ضلع مکعب محیط بر یک کره، $\sqrt{3}$ برابر اندازهٔ ضلع مکعب محاط در همان کره است.

کره محیط بر استوانه

۹۷

● اگر کره‌ای به شعاع R بر یک استوانه به شعاع قاعده r و ارتفاع h محیط شود، طبق رابطه فیثاغورس داریم:



$$R^2 = r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2$$

در این حالت می‌گوییم استوانه درون کره محاط شده است.

مثال: کره‌ای به قطر ۱۰ سانتی‌متر بر یک استوانه به شعاع ۳ سانتی‌متر محیط شده است. حجم استوانه چند سانتی‌متر مکعب است؟

$$۴۸\pi \quad (۲)$$

$$۳۶\pi \quad (۱)$$

$$۵۴\pi \quad (۴)$$

$$۷۲\pi \quad (۳)$$

پاسخ گزینه «۳»

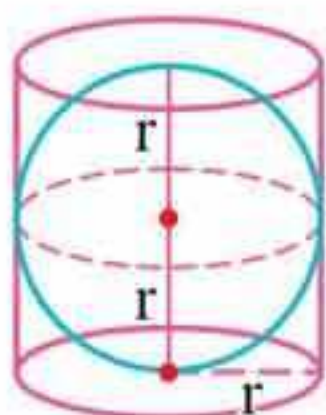
$$R^2 = r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 \Rightarrow ۵^2 = ۳^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{h}{2}\right)^2 = ۱۶ \Rightarrow \frac{h}{2} = ۴$$

$$\Rightarrow h = ۸\text{cm} \Rightarrow V_{\text{استوانه}} = \pi r^2 h = \pi \times ۳^2 \times ۸ = ۷۲\pi$$

استوانه محیط بر کره

۹۸

● اگر استوانه‌ای بر یک کره محیط شود، قطر کره با قطر



قاعده استوانه و ارتفاع استوانه برابر است؛ در این حالت می‌گوییم کره درون استوانه محاط شده است و حجم کره، $\frac{2}{3}$ حجم استوانه است.

❖ **مثال:** کره‌ای به شعاع ۶ سانتی‌متر درون یک استوانه محاط شده

است. حجم استوانه بر حسب سی‌سی کدام است؟

- ۱) 54π ۲) 52π ۳) 50π ۴) 46π

پاسخ گزینه «۱»

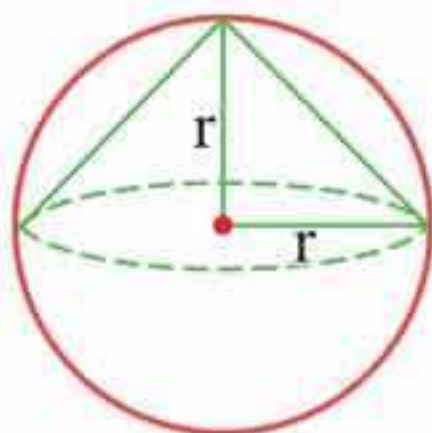
$$\text{استوانه: } \begin{cases} r = 3 \text{ cm} \\ h = 6 \text{ cm} \end{cases} \Rightarrow V_{\text{استوانه}} = \pi r^2 h = \pi \times 3^2 \times 6$$

$$= 54\pi \text{ cm}^3 \text{ (cc)}$$

نیم‌کره محیط بر مخروط

۹۹

● اگر نیم‌کره بر یک مخروط قائم محیط شود، شعاع



نیم‌کره با شعاع قاعده مخروط و ارتفاع آن برابر است؛ در این حالت می‌گوییم مخروط قائم درون نیم‌کره محاط شده است.

پاسخ نامه



دایره را حداکثر در دو نقطه قطع کند؛ بنابراین حداکثر ۴ نقطه با خاصیت مطلوب یافت می‌شود.

۶. گزینه «ا» باید مجموع طول هر دو ضلع از طول ضلع سوم بزرگ‌تر باشد:

$$4x - 4 + x + 7 > 6x \Rightarrow -x > -3 \Rightarrow x < 3$$

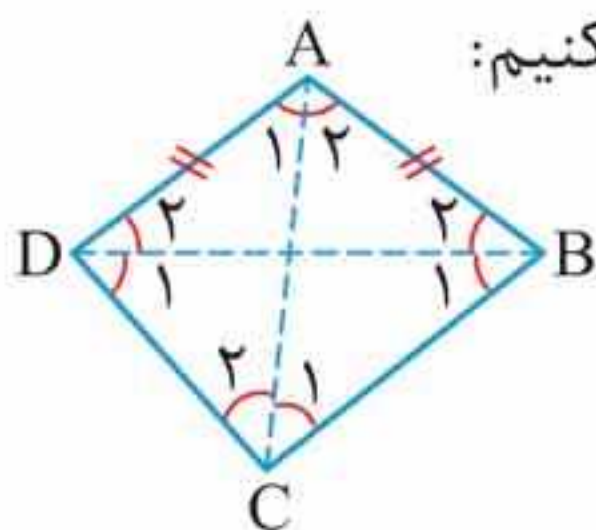
$$4x - 4 + 6x > x + 7 \Rightarrow 9x > 11 \Rightarrow x > \frac{11}{9}$$

$$x + 7 + 6x > 4x - 4 \Rightarrow 3x > -11 \Rightarrow x > -\frac{11}{3}$$

همچنین باید x بزرگ‌تر از صفر ($x > 0$) باشد؛ بنابراین با

اشتراک محدوده‌های به دست آمده داریم: $\frac{11}{9} < x < 3$

۷. گزینه «ا» سایر گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:



$$\triangle ABC, \triangle ADC : \begin{cases} \overline{AC} = \overline{AC} \\ \overline{AD} = \overline{AB} \\ \overline{BC} > \overline{DC} \end{cases}$$

عکس قضیه لولا $\rightarrow \hat{A}_2 > \hat{A}_1$

گزینه ۳: $\triangle BCD: \frac{\overline{BC} > \overline{CD}}{\text{قضیه زاویه برتر}} \rightarrow \widehat{D}_1 > \widehat{B}_1$

گزینه ۴: $\left. \begin{array}{l} \triangle ADB: \widehat{D}_2 = \widehat{B}_2 \\ \widehat{D}_1 > \widehat{B}_1 \end{array} \right\} \xrightarrow{+} \underbrace{\widehat{D}_1 + \widehat{D}_2}_{\widehat{D}} > \underbrace{\widehat{B}_1 + \widehat{B}_2}_{\widehat{B}} \Rightarrow \widehat{D} > \widehat{B}$

۸. گزینه «ا» باید مجموع طول دو ضلع از طول ضلع سوم بزرگ تر باشد؛ بنابراین گزینه ها را بررسی می کنیم:

گزینه ۱: $\begin{cases} x+1+y+1 > x+y \Rightarrow x+y+2 > x+y \\ x+1+x+y > y+1 \Rightarrow 2x+y+1 > y+1 \\ y+1+x+y > x+1 \Rightarrow 2y+x+1 > x+1 \end{cases} \quad \checkmark$

گزینه ۲: $x^2 + x^2 + 2x + 1 \not> 2x^2 + 3x + 1 \quad \times$

گزینه ۳: $x + y \not> x + y + 1 \quad \times$

گزینه ۴: $x - 2 + 2x \not> 3x \quad \times$

۹. گزینه «ب» طبق نامساوی مثلثی داریم

$$\left. \begin{array}{l} 7-5 < a < 7+5 \Rightarrow 2 < a < 12 \\ a \geq 8 \end{array} \right\} \Rightarrow 8 \leq a < 12$$

همان طور که می دانیم:

محیط مثلث < مجموع سه میانه مثلث < (محیط مثلث) $\frac{3}{4}$

$$\text{محیط ماکزیمم} = 12 + 7 + 5 = 24$$

$$\text{محیط مینیمم} = 8 + 7 + 5 = 20$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4}(20) < m_a + m_b + m_c < 24$$

فقط ۱۹ در این محدوده قرار دارد.

۱۰. گزینه «۴» طبق قضیه نامساوی ضلع برتر در هر مثلث، زاویه روبه روی ضلع بزرگتر، از زاویه روبه روی ضلع کوچکتر، بزرگتر است؛ بنابراین:

$$c - a > 0 \Rightarrow c > a \xrightarrow{+c} c + c > a + c$$

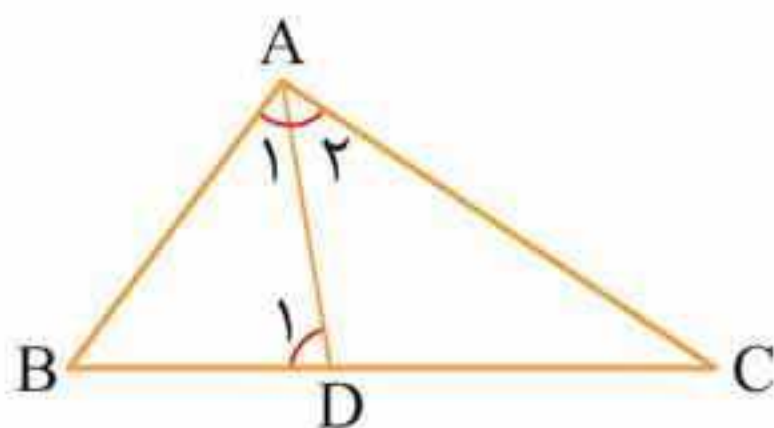
$$\xrightarrow{a+c=2b} 2c > 2b \Rightarrow c > b \Rightarrow \hat{C} > \hat{B} \quad (1)$$

$$c > a \xrightarrow{+a} a + c > a + a$$

$$\xrightarrow{a+c=2b} 2b > 2a \Rightarrow b > a \Rightarrow \hat{B} > \hat{A} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \hat{C} > \hat{B} > \hat{A}$$

۱۱. گزینه «۱»



$$\triangle ADC \text{ (زاویه خارجی } ADC) \quad \hat{D}_1 = \hat{A}_2 + \hat{C} \Rightarrow \hat{D}_1 > \hat{A}_2$$

$$\xrightarrow{\hat{A}_1 = \hat{A}_2} \hat{D}_1 > \hat{A}_1 \xrightarrow[\text{در مثلث } ABC]{\text{قضیه زاویه برتر}} \overline{AB} > \overline{BD}$$

۱۲. گزینه «۲» برای اینکه m_a ، m_b و m_c میانه‌های مثلث ABC باشند، باید در نامساوی مثلثی صدق کنند؛ بنابراین: