ریاضی سال اول

# فصل اول

## اعداد و نمادها

درسنامه‌ی ۱

برای مطالعه

### اعداد طبیعی، اعداد صحیح و اعداد گویا

**اعداد طبیعی ($\mathbb{N}$):** عددهای ۱،۲،۳،... که از آن‌ها برای شمارش اشیاء استفاده می‌شود، عددهای طبیعی نام دارند. با داشتن یک مقیاس به عنوان واحد از شمارش برای اندازه‌گیری می‌توان استفاده کرد.

**نکته:**

۱ مجموع دو عدد طبیعی فرد یا دو عدد طبیعی زوج، یک عدد طبیعی زوج است و مجموع یک عدد طبیعی فرد و یک عدد طبیعی زوج، عددی فرد می‌باشد.

۲ حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی فرد، فرد است. اما حاصل‌ضرب هر عدد زوج در هر عدد طبیعی (زوج یا فرد)، عددی طبیعی و زوج می‌باشد.

**اعداد صحیح ($\mathbb{Z}$):** با انتخاب نقطه‌ای روی یک خط افقی به عنوان مبدأ و تقسیم نیم‌خط راست به پاره‌خط‌هایی به طول واحد، یک محور اعداد می‌توان ساخت به طوری‌که مبدأ را متناظر با عدد صفر و نقاط ایجاد شده توسط پاره‌خط‌ها را به ترتیب از چپ به راست متناظر با اعداد طبیعی ۱،۲،۳،... در نظر می‌گیریم. حال اگر قرینه‌ی هر عدد طبیعی مانند a را نسبت به مبدأ با a- نمایش دهیم، در این صورت فاصله‌ی نقطه‌ی نمایش عدد طبیعی a و قرینه‌اش a- تا مبدأ برابر است. به این ترتیب مجموعه‌ی اعداد طبیعی به همراه قرینه‌هایشان و عدد صفر را اعداد صحیح می‌نامند.

**تذکر:** قرینه‌ی اعداد طبیعی را اعداد صحیح منفی می‌نامند و اعداد صحیح نامنفی (اعداد طبیعی به همراه صفر) را اعداد حسابی ($\mathbb{W}$) می‌گویند.

**نکته:**

۱ قرینه‌ی هر عدد صحیح، عددی صحیح می‌باشد و مجموع هر عدد صحیح با قرینه‌اش، برابر صفر است.

۲ حاصل‌ضرب هر دو عدد صحیح مثبت یا هر دو عدد صحیح منفی مثبت است، اما حاصل‌ضرب یک عدد صحیح مثبت در یک عدد صحیح منفی، عددی صحیح و منفی است.

**اعداد گویا ($\mathbb{Q}$):** اگر روی محور اعداد هر پاره‌خط به ابتدای مبدأ و انتهای یک عدد صحیح به چند قسمت مساوی تقسیم گردد، نقاط تازه‌ای به‌دست می‌آیند که متناظر با اعداد گویا می‌باشند که به شکل یک کسر نوشته می‌شوند.

**نکته:**

۱ اعداد گویا در واقع از تقسیم یک عدد صحیح بر یک عدد طبیعی به‌دست می‌آیند.

۲ هر عدد طبیعی، یک عدد صحیح و هر عدد صحیح، یک عدد گویا (با مخرج ۱) است.

۳ هر عدد گویا را به بی‌شمار شکل می‌توان نشان داد، به‌طور مثال: $\frac{۱}{۳}=\frac{۲}{۶}=\frac{۳}{۹}=\cdots$

**مقایسه‌ی اعداد گویا:** برای مقایسه‌ی دو عدد گویا، پس از هم مخرج کردن آن‌ها (به شکل یک عدد طبیعی)، عددی را به عنوان عدد بزرگ‌تر معرفی کنیم که صورت آن بزرگ‌تر باشد. توجه کنید که بین دو عدد صحیح منفی، عددی بزرگ‌تر است که قرینه‌اش از قرینه‌ی عدد دیگر کوچک‌تر باشد. (به مبدأ نزدیک‌تر باشد.)

$a<b<0 \rightleftarrows -a>-b>0$

**مثال:** اعداد گویای $-\frac{۱}{۳}$، $\frac{۵}{۷}$، $-\frac{۳}{۵}$، $\frac{۳}{۴}$ را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

**پاسخ:** *ابتدا اعداد گویای منفی و سپس اعداد گویای مثبت را با هم مقایسه می‌کنیم:*

۱ $\begin{cases}\frac{-۱}{۳}=\frac{-۵}{۱۵}\\ \frac{-۳}{۵}=\frac{-۹}{۱۵}\end{cases} \xrightarrow[-۵>-۹]{۵<۹} -\frac{۵}{۱۵}>-\frac{۹}{۱۵} \Rightarrow -\frac{۱}{۳}>-\frac{۳}{۵}$

۲ $\begin{cases}\frac{۵}{۷}=\frac{۲۰}{۲۸}\\ \frac{۳}{۴}=\frac{۲۱}{۲۸}\end{cases} \xrightarrow{۲۱>۲۰} \frac{۲۱}{۲۸}>\frac{۲۰}{۲۸} \Rightarrow \frac{۳}{۴}>\frac{۵}{۷}$

۱ و ۲ $\Rightarrow \frac{-۳}{۵}<\frac{-۱}{۳}<\frac{۵}{۷}<\frac{۳}{۴}$

**اعمال ریاضی روی اعداد گویا:** ۱) برای جمع و تفریق دو عدد گویا ابتدا آن‌ها را هم مخرج می‌کنیم، سپس صورت‌ها را با هم جمع یا تفریق کرده و بر یکی از مخرج‌ها تقسیم می‌کنیم.

**نتیجه:** مجموع و تفاضل دو عدد گویا عددی گویا است.

۲) برای ضرب دو عدد گویا کافی است، صورت‌ها را در هم و مخرج‌ها را نیز در هم ضرب کنیم. اما برای تقسیم دو عدد گویا عدد اول را در معکوس عدد (ناصفر) دوم ضرب می‌کنیم.

(معکوس عدد گویای $\frac{a}{b}$ $(a, b \neq ۰)$ برابر با $\frac{b}{a}$ است که داریم: $\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = ۱$ )

**نتیجه:** حاصل‌ضرب هر دو عدد گویا و حاصل تقسیم هر عدد گویا بر هر عدد گویای مخالف صفر، عددی گویا است.

۳) برای محاسبه‌ی یک عبارت ریاضی که شامل جمع، تفریق، ضرب و تقسیم است، اولاً عملیات‌های داخل پرانتز در اولویت‌اند، ثانیاً به‌ترتیب از چپ به راست ابتدا اعمال ضرب و تقسیم و سپس اعمال جمع و تفریق را انجام می‌دهیم.

**به‌دست آوردن اعداد گویای بین دو عدد گویا:** برای به‌دست آوردن یک یا چند عدد گویا بین دو عدد گویا بهتر است بدانید که:

۱) میانگین دو عدد گویا همواره بین آن‌ها قرار دارد:

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{\frac{a}{b} + \frac{c}{d}}{۲} < \frac{c}{d}$$

۲) عدد گویای $\frac{a+c}{b+d}$ بین دو عدد گویای $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ قرار دارد:

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

۳) اگر دو عدد گویا مخرج مساوی داشته باشند، هر عدد گویایی که صورت‌اش عددی بین صورت‌های دو عدد گویا باشد، بین آن‌ها قرار دارد:

$$\frac{a}{b} < \frac{a+n}{b} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+۱}{b} < \frac{a+۲}{b} < \dots < \frac{a+(n-۱)}{b} < \frac{a+n}{b}$$

**سؤال:** *دانش‌پژوه (فورشید فرهار)*: اگه بعد از هم‌مخرج کردن کسرها صورت‌ها دو عدد متوالی باشن، اون وقت چه‌طوری بینشون اعداد گویا بنویسیم؟

**پاسخ:** *آفرین سؤال فوبی پرسیدی. این نکته رو یادت باشه:*

**نکته:** اگر بخواهیم بین دو عدد گویای هم‌مخرج با صورت‌های متوالی، n عدد گویای دیگر بنویسیم، کافی است صورت و مخرج را در $(n+۱)$ ضرب کنیم.

**مثال: سه عدد گویا بین اعداد گویای $\frac{۳}{۷}$ و $\frac{۲}{۵}$ بنویسید.**

**پاسخ:** *ابتدا مفرج اعداد داده شده را مساوی می‌کنیم:*

$$\frac{۲}{۵} = \frac{۱۴}{۳۵} \ , \ \frac{۳}{۷} = \frac{۱۵}{۳۵}$$

*سپس صورت و مفرج اعداد گویای داده شده را در $۴ = ۱ + ۳$ ضرب می‌کنیم، داریم:*

$$\begin{cases} \frac{۲}{۵} = \frac{۱۴ \times ۴}{۳۵ \times ۴} = \frac{۵۶}{۱۴۰} \\ \frac{۳}{۷} = \frac{۱۵ \times ۴}{۳۵ \times ۴} = \frac{۶۰}{۱۴۰} \end{cases} \Rightarrow \frac{۲}{۵} = \frac{۵۶}{۱۴۰} < \underbrace{\frac{۵۷}{۱۴۰} < \frac{۵۸}{۱۴۰} < \frac{۵۹}{۱۴۰}}_{\text{سه عدد گویای مورد نظر}} < \frac{۶۰}{۱۴۰} = \frac{۳}{۷}$$

**نتیجه:** بین دو عدد گویا بی‌شمار عدد گویای دیگر موجود است.

**۱- تعداد اعداد طبیعی فرد بزرگ‌تر از ۲۷۸ و کوچک‌تر از ۳۱۲ کدام است؟**

۱) ۱۶ ۲) ۱۷ ۳) ۱۸ ۴) ۱۹

**۲- چند مستطیل با ابعاد طبیعی و مساحت ۷۲ متر مربع وجود دارد؟**

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

**۳- اگر نقطه‌ی A روی محور اعداد متناظر با عدد ۲ و فاصله‌اش با نقطه‌ی B که در سمت چپ آن قرار دارد، ۳ باشد، طول پاره‌خط BC چه‌قدر است؟ ( C قرینه‌ی نقطه‌ی B نسبت به مبدأ است.)**

۱) ۱۰ ۲) ۵ ۳) ۲ ۴) ۱

**۴- فاصله‌ی دو عدد ۲a و ۶ − a تا مبدأ با هم برابر است. مقدار a کدام است؟**

۱) ۲ ۲) ۲− ۳) ۳ ۴) ۳−

**۵- کدام عدد کوچک‌تر است؟**

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۲}{۳}$ ۳) $-\frac{۳}{۵}$ ۴) $-\frac{۵}{۷}$

**۶- حاصل $\frac{۲۳}{۲۳۱}-\frac{۵}{۴۲}$ کدام است؟** (سراسری فنی‌حرفه‌ای ۸۷)

۱) $\frac{۷}{۱۴۳}$ ۲) $\frac{۳}{۱۵۴}$ ۳) $\frac{۹}{۱۴۷}$ ۴) $\frac{۷}{۱۵۴}$

**۷- حاصل عبارت $\dfrac{(۲\frac{۴}{۳})\div(-۳\frac{۱}{۳})}{(-\frac{۷}{۴}+\frac{۳}{۵})\div\frac{۲۳}{۲۰}}$ کدام است؟**

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

**۸- به ازای چه مقدار a، عدد گویای $\frac{a}{۲۰}$ بین $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۲}{۵}$ قرار می‌گیرد؟** (آزاد فنی‌حرفه‌ای ۸۳)

۱) ۱۱ ۲) ۹ ۳) ۷ ۴) ۳

**۹- به منظور معرفی تنها سه عدد گویا بین $\frac{۱}{۵}$ و $\frac{۱}{۳}$، پس از به‌دست آوردن کوچک‌ترین مخرج مساوی برای آن‌ها، صورت و مخرج هر کسر در کدام عدد باید ضرب شود؟** (آزاد ۹۱)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

**۱۰- کسر $\frac{p}{q}$ برابر کسر $\frac{۴۹۵}{۱۱۵۵}$ می‌باشد. اگر p و q اعداد طبیعی باشند، کوچک‌ترین مقدار $p+q$ چه‌قدر است؟**

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

**۱۱- مبلغ ۵۴ میلیون تومان را به نسبت $\frac{۱}{۶}$، $\frac{۱}{۳}$ و $\frac{۱}{۲}$ تقسیم کرده‌ایم. تفاوت بیشترین سهم از کم‌ترین سهم چند میلیون تومان است؟** (سراسری فنی‌حرفه‌ای ۷۸)

۱) ۱۵ ۲) ۱۶ ۳) ۱۷ ۴) ۱۸

درسنامه‌ی ۲

## نمایش اعشاری و اعداد اعشاری

برای نوشتن اعداد طبیعی از دستگاه ده‌دهی استفاده می‌کنیم که این شیوه از نمایش اعداد طبیعی را نمایش اعشاری آن‌ها می‌نامند. به‌طور مثال:

$$۱۴۷۲=\underbrace{۱\times۱۰^{۳}}_{\text{مرتبه هزارگان}}+\underbrace{۴\times۱۰^{۲}}_{\text{مرتبه صدگان}}+\underbrace{۷\times۱۰}_{\text{مرتبه دهگان}}+\underbrace{۲\times۱}_{\text{مرتبه یکان}}$$

**سؤال:** *دانش‌پژوه (نیره فرابخشی)*: اگه عدد ما کوچک‌تر از ۱ بود، اونو چه طوری نمایش بدیم؟

**پاسخ:** *سؤال خوبیه! برای این اعداد، ارزش‌های مکانی به اندازه‌ی $\frac{۱}{۱۰}$، $\frac{۱}{۱۰^{۲}}$، $\frac{۱}{۱۰^{۳}}$ و ... رو در نظر می‌گیریم. مثلاً عدد ۴/۰۵ رو به صورت زیر نشون میدیم:*

$$۴/۰۵=\underbrace{۴}_{\text{مرتبه یکان}}+\underbrace{۰}_{\text{مرتبه }\frac{۱}{۱۰}}\times\frac{۱}{۱۰}+\underbrace{۵}_{\text{مرتبه }\frac{۱}{۱۰۰}}\times\frac{۱}{۱۰^{۲}}=\frac{۴\times۱۰۰+۰\times۱۰+۵}{۱۰۰}=\frac{۴۰۵}{۱۰۰}$$

برخی از اعداد گویای مثبت را می‌توان به‌صورت مجموع یک عدد صحیح و یک کسر که مخرج آن توانی از ۱۰ است، نمایش داد. این اعداد گویا و قرینه‌ی آن‌ها را **اعداد اعشاری** می‌نامند.

**نکته:** مجموع، تفاضل و حاصل‌ضرب هر دو عدد اعشاری، همواره عددی اعشاری است، اما حاصل تقسیم دو عدد اعشاری ممکن است اعشاری باشد یا نباشد. به‌طور مثال حاصل $۰/۷۵=۰/۸\div\frac{۳}{۵}$ عددی اعشاری است ولی حاصل $۰/۷\div\frac{۳}{۵}$ عددی اعشاری نیست.

**سؤال:** *دانش‌پژوه (گلسا جهانگیری)*: ببخشید چرا ...$۰/۷\div\frac{۳}{۵}=۰/۸۵۷$ اعشاری نیست؟ ممیز که داره!

**پاسخ:** *کی گفته هر عددی که ممیز داشته باشه، عدد اعشاریه؟ اگه ارقام بعد از ممیز یه جایی تموم بشه، بله عدد اعشاریه و گویا هم هست، اما اگه تموم نشه، اعشاری نیست. در واقع باید بگیم هر عدد اعشاری یک عدد گویا هست اما هر عدد گویا لزوماً اعشاری نیست.*

در یک عدد اعشاری مثبت، عدد حسابی قبل از ممیز را قسمت صحیح آن عدد اعشاری نامیده و با قرار دادن صفر به جای قسمت صحیح، عدد اعشاری ساخته شده را قسمت اعشاری آن عدد می‌نامند. مثلاً ۲۷۵ قسمت صحیح و ۰/۳۸۲۲ قسمت اعشاری عدد ۲۷۵/۳۸۲۲ هستند.

**نکته:** عددهای طبیعی هم اعداد اعشاری‌اند که قسمت اعشاری آن‌ها صفر است.

**تذکر:** صفرهایی که در سمت راست قسمت اعشاری قرار می‌گیرند را می‌توان حذف کرد. به طور مثال دو عدد ۰/۱۷ و ۰/۱۷۰ با هم مساوی هستند.

**مقایسه‌ی اعداد اعشاری:** برای مقایسه‌ی اعداد اعشاری مثبت با قسمت‌های صحیح مساوی، رقم‌های بعد از ممیز را به ترتیب از چپ به راست مقایسه می‌کنیم، هر کدام که بزرگ‌تر بود، آن عدد بزرگ‌تر است.

به‌طور مثال در دو عدد ۰/۳۵و ۰/۳۶ اولین رقم بعد از ممیز در آن‌ها مساوی است، پس رقم بعدی را مقایسه می‌کنیم. چون $6 > 5$، پس:

$۰/۳۶ \boxed{>} ۰/۳۵$

**جمع و تفریق اعداد اعشاری:** در جمع و تفریق اعداد اعشاری، آن‌ها را طوری زیر هم می‌نویسیم که ممیزهایشان زیر هم قرار گیرد و سپس طبق قواعد جمع و تفریق عددهای طبیعی و حفظ ممیز در جای خود، آن‌ها را جمع و تفریق می‌کنیم. به طور مثال:

$$\begin{array}{r} ۲/۳۲۴۰۸ \\ +۲۰۹/۷۰۹ \\ \hline ۲۱۲/۰۳۳۰۸ \end{array}$$

**ضرب و تقسیم اعداد اعشاری:** برای ضرب دو عدد اعشاری، ابتدا با نادیده گرفتن ممیزهایشان آن‌ها را در هم ضرب می‌کنیم. سپس در عدد حاصل، به اندازه‌ی مجموع تعداد ارقام بعد از ممیز آن‌ها، رقم‌های سمت راست را بعد از ممیز قرار می‌دهیم. به طور مثال:

$$\begin{array}{r} ۴۱/۳۰۲ \\ \times\ ۳/۴۱۸۹ \\ \hline ۱۴۱/۲۰۷۴۰۷۸ \end{array}$$

در تقسیم اعداد اعشاری، ابتدا آن‌ها را به صورت کسر می‌نویسیم و سپس با معکوس کردن کسر دوم، تقسیم را به ضرب تبدیل می‌کنیم. به طور مثال:

$$۱۲ \div ۱/۲ = \frac{۱۲}{۱} \div \frac{۱۲}{۱۰} = \frac{۱۲}{۱} \times \frac{۱۰}{۱۲} = ۱۰$$

**ضرب و تقسیم یک عدد اعشاری در ۱۰، $۱۰^۲$، $۱۰^۳$ و ... :** وقتی یک عدد اعشاری را در توانی از ۱۰ ضرب می‌کنیم، به اندازه‌ی توان ۱۰، یعنی۱، ۲، ۳ و ... ، ممیز را به جلو، یعنی سمت راست عدد می‌بریم. به طور مثال داریم:

$$\underset{\text{۲ رقم به جلو}}{\underrightarrow{۱۲/۵۷۸}} \times ۱۰^۲ = ۱۲۵۷/۸$$

در هنگام تقسیم، به اندازه‌ی توان ۱۰، ممیز را به عقب، یعنی سمت چپ عدد می‌بریم. به طور مثال:

$$\underset{\text{۳ رقم به عقب}}{\underleftarrow{۳۸/۷۴}} \div ۱۰^۳ = ۰/۰۳۸۷۴$$

**۱۲- قسمت صحیح و اعشاری حاصل $۳/۲ \times ۰/۰۵۲$ به ترتیب از راست به چپ، در کدام‌یک از گزینه‌های زیر آمده است؟**

۱) صفر و ۰/۱۶۶۴ ۲) ۱ و ۰/۶۶۴ ۳) صفر و ۰/۰۱۶۶۴ ۴) ۱ و ۰/۱۶۶۴

**۱۳- حاصل عبارت $(۳/۲۶ \times ۰/۰۲) - (۱۰ \div ۳/۸)$ برابر کدام است؟**

۱) ۱/۱۷۳۶ ۲) ۰/۳۱۴۸ ۳) ۰/۴۴۵۲ ۴) ۱/۰۷۳۶

**۱۴- حاصل عبارت $۵ - ۳ \div ۲ \times ۴/۲۹۳$ کدام است؟**

۱) ۲/۸۶۲- ۲) ۳/۸۶۲- ۳) ۲/۱۳۸- ۴) ۳/۱۳۸-

**۱۵- کدام‌یک از اعداد زیر از بقیه بزرگ‌تر است؟**

۱) $۸/۷ \times ۱۰^۲$ ۲) $۹۰/۱ \times ۱۰$ ۳) ۸۷۰ ۴) $۰/۹ \times ۱۰۰$

**۱۶- یک ظرف آب به ظرفیت ۲۰۰ سانتی‌متر مکعب که ۱۸۰ سانتی‌متر مکعب آب درون آن است را در مقابل آفتاب قرار داده‌ایم. اگر ۱۵٪ حجم آب آن بخار شود، آب باقی‌مانده چند درصد حجم ظرف را اشغال کرده است؟**

۱) ۷۰ ۲) ۷۶/۵ ۳) ۸۳ ۴) ۸۹/۵

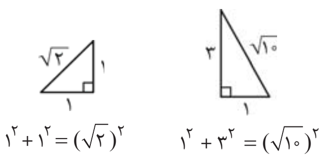
درسنامه‌ی ۳

## اعداد حقیقی

بر روی محور اعداد، اعدادی وجود دارند که نمی‌توان آن‌ها را به شکل تقسیم عددی صحیح بر عددی طبیعی نشان داد، یعنی این اعداد گویا نیستند. چنین اعدادی را **اعداد گنگ** می‌نامند، مانند $\sqrt{۲}$ و $\pi$.

**نکته:** تمام اعداد رادیکالی که عدد زیر رادیکال آن‌ها مربع کامل هیچ عددی نیست، جزء عددهای گنگ‌اند، مثل $\sqrt{۱۵}$ .

عددهای گویا و گنگ را با هم **اعداد حقیقی** می‌گویند و آن را با $\mathbb{R}$ نشان می‌دهند.

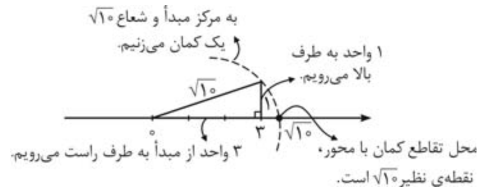


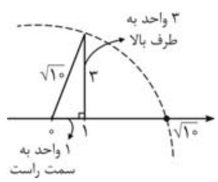

مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی روبه‌رو را که در آن‌ها یکی از اضلاع قائمه ۱ و دیگری بزرگ‌تر مساوی ۱ می‌باشد، درنظر بگیرید. می‌دانیم که در هر مثلث قائم الزاویه با استفاده از رابطه‌ی فیثاغورس می‌توان طول ضلع یا وتر آن را به دست آورد.

حال با استفاده از این خاصیت می‌توانیم نقاط نظیر برخی از اعداد گنگ مانند $\sqrt{۲}$، $\sqrt{۱۰}$ و... را روی محور نشان دهیم.

**مثال: عدد $\sqrt{۱۰}$ را روی محور نشان دهید.**

پاسخ: *برای نشان دادن عدد $\sqrt{۱۰}$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:*




**سؤال:** *دانش‌پژوه (کریم شاکری)*: اجازه! ما این طوری $\sqrt{۱۰}$ رو روی محور نشون دادیم، درسته؟

پاسخ: *آفرین! بله، روش شما هم کاملاً درسته.*

**نکته:**

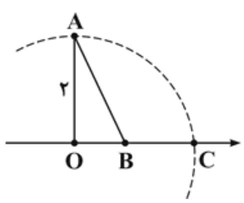
۱ حاصل‌جمع یا تفریق یک عدد گویا با یک عدد گنگ همواره عددی گنگ است.

۲ مجموع و تفاضل دو عدد گنگ، ممکن است گنگ ($-۲\sqrt{۲} + \sqrt{۲} = -\sqrt{۲}$) و یا گویا ($۱ = \sqrt{۲} + ۱ - \sqrt{۲}$) باشد.

۳ حاصل‌ضرب و تقسیم دو عدد گنگ، ممکن است گنگ ($\sqrt{۲} \times \sqrt{۳} = \sqrt{۶}$) و یا گویا ($۲\sqrt{۲} \times \sqrt{۲} = ۴$) باشد.

۴ حاصل‌ضرب یک عدد گنگ در یک عدد گویای غیرصفر، همواره عددی گنگ است.

**تذکر:** برای نشان دادن اعداد گنگی که از جمع یا تفریق یک عدد گویای غیرصفر با یک عدد گنگ حاصل شده‌اند، کافی است به جای رسم کمان به مرکز مبدأ، به مرکز آن عدد گویا کمان رسم کنیم.




**مثال: اگر در شکل مقابل، نقطه‌ی B متناظر با عدد ۱ روی محور اعداد باشد و به مرکز B و شعاع AB کمانی رسم کنیم تا محور را در نقطه‌ی C قطع کند، C متناظر با چه عددی است؟ ( $OA = ۲$ و O مبدأ است.)**

پاسخ: مثلث AOB *قائم‌الزاویه است، پس طبق قضیه‌ی فیثاغورس داریم:*

$$AB^۲ = OA^۲ + OB^۲ = ۲^۲ + ۱^۲ = ۴ + ۱ = ۵ \Rightarrow AB = \sqrt{۵}$$

*پس کمان به مرکز B و شعاع $\sqrt{۵}$ محور را در $۱+\sqrt{۵}$ و $۱-\sqrt{۵}$ قطع می‌کند که اولی در سمت راست B و دومی در سمت چپ B است. چون مطابق شکل، C در سمت راست B است، پس $۱+\sqrt{۵}$ را نشان می‌دهد.*

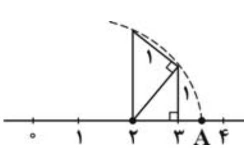
**۱۷- بین ۳/۱۴ و π چند عدد گویا وجود دارد؟**

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

**۱۸- کدام‌یک از اعداد زیر، روی محور اعداد در سمت چپ اعداد دیگر قرار می‌گیرد؟**

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt{۲} - \frac{۱}{۲}$ ۳) $-۱ + \sqrt{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

**۱۹- در شکل مقابل، عدد متناظر با نقطه‌ی A کدام است؟**




۱) $۱ + \sqrt{۳}$ ۲) $۲ + \sqrt{۲}$

۳) $۲ + \sqrt{۳}$ ۴) $۳ + \sqrt{۲}$

**۲۰- چند مثلث قائم‌الزاویه وجود دارد که طول یک ضلع آن $\sqrt{۵}$ و طول دو ضلع دیگر آن اعداد طبیعی باشند؟**

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

درسنامه‌ی ۴

## تقریب‌های اعشاری اعداد حقیقی

می‌دانیم برخی اعداد حقیقی را می‌توان به‌صورت عددهای اعشاری نشان داد، ولی برخی دیگر مانند $\frac{۳}{۱۴}$ و $\sqrt{۳}$ و $\pi$ و ...۱/۰ را نمی‌توان به این شکل نمایش داد. برای این دسته‌ی دوم از اعداد حقیقی می‌توان تقریب‌هایی اعشاری به‌دست آورد. هرچه تعداد ارقام بعد از ممیز در این تقریب‌ها بیشتر باشد، تقریب به عدد حقیقی مورد نظر نزدیک‌تر و دقت تقریب بالاتر است. این نوع تقریب را تقریب زدن به روش **قطع کردن** می‌گویند.

به‌طور مثال، برای به‌دست آوردن تقریب اعشاری عدد حقیقی $\frac{۳}{۱۴}$ تا ۴ رقم اعشار،۳ را بر ۱۴ تقسیم می‌کنیم. حاصل ...۰/۲۱۴۲۸۵۷ است که با توجه به آن تقریب اعشاری $\frac{۳}{۱۴}$ تا ۴ رقم اعشار ۰/۲۱۴۲ می‌شود.

**نکته:**

۱ تقریب اعشاری که به روش قطع کردن به‌دست آید، همیشه از عدد حقیقی مورد نظر کوچک‌تر است.

۲ اگر به آخرین رقم تقریب اعشاری ۱ واحد اضافه کنیم، عدد حاصل از عدد حقیقی مورد نظر بزرگ‌تر خواهد بود.

مثلاً اگر $x = ۳/۲۳۴۶$ باشد، تقریب اعشاری آن تا ۱ رقم اعشار ۳/۲ است و $۳/۲ < x < ۳/۳$.

**۲۱- حاصل تقریبی $\frac{\sqrt{۶۵} + \left(\frac{۶}{\sqrt{۱۵}} - \frac{۱}{۲}\right)^۲}{\sqrt{۱۰}}$ برابر کدام است؟**

۱) ۲　　۲) ۳　　۳) $\sqrt{۵}$　　۴) $\sqrt{۳}$

**۲۲- اگر بدانیم $۳/۷۱ > x > ۳/۷۰۹۸$، کدام گزینه درباره‌ی تقریب $x$ به روش قطع کردن صحیح است؟**

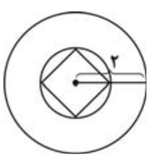
۱) تقریب عدد $x$ حداکثر تا ۴ رقم اعشار ممکن است.　　۲) تقریب عدد $x$ حداکثر تا ۳ رقم اعشار ممکن است.

۳) تقریب عدد $x$ تا ۲ رقم اعشار برابر ۳/۷۱ است.　　۴) تقریب عدد $x$ تا ۱ رقم اعشار برابر ۳ است.

**۲۳- هواپیمایی در هر ۴۹۰ کیلومتر، ۳۹ لیتر سوخت مصرف می‌کند. میزان مصرف سوخت این هواپیما در هر کیلومتر تا چهار رقم اعشار چند لیتر است؟**

۱) ۰/۰۷۵۹　　۲) ۰/۷۰۹۵　　۳) ۰/۰۷۹۵　　۴) ۰/۰۷۹۶

**۲۴- در شکل روبه‌رو که شعاع دایره‌ی کوچک‌تر نصف شعاع دایره‌ی بزرگ‌تر است، مساحت مربع که قطرش همان قطر دایره‌ی کوچک است، تقریباً چند درصد مساحت دایره‌ی بزرگ است؟ (دو دایره هم‌مرکزند.)**




۱) ۱۵/۹　　۲) ۶/۳۶　　۳) ۱/۵۹　　۴) ۶۳/۶

درسنامه‌ی ۵

## قدرمطلق

فاصله‌ی نقطه‌ی نظیر یک عدد حقیقی روی محور اعداد تا مبدأ را قدرمطلق آن عدد حقیقی می‌گوییم و برای عدد حقیقی $m$، قدرمطلق آن را با نماد $|m|$ نشان می‌دهیم. به طور مثال فاصله‌ی نقاط نظیر دو عدد $\frac{۱}{۲}$ و $\left(-\frac{۱}{۲}\right)$ تا مبدأ برابر $\frac{۱}{۲}$است، پس قدرمطلق هر دو عدد $\frac{۱}{۲}$ و $\left(-\frac{۱}{۲}\right)$برابر $\frac{۱}{۲}$ می‌باشد.

**نکته:**

۱ از آن‌جا که قدرمطلق اعداد حقیقی از جنس فاصله است، پس قدرمطلق همیشه نامنفی می‌باشد.

۲ قدرمطلق اعداد حقیقی مثبت با خودشان برابر است.

۳ قدرمطلق اعداد حقیقی منفی، برابر با قرینه‌ی آن‌ها است.

۴ قدرمطلق عدد صفر، برابر با صفر است.

۵ قدرمطلق هر عدد حقیقی با قدرمطلق قرینه‌اش برابر است. ($|a| = |-a|$)

**مثال: $|۱-\sqrt{۲}|$ و $|\sqrt{۳}-۱|$ را بدون استفاده از نماد قدرمطلق بنویسید.**

پاسخ: *از بحث تقریب‌های اعشاری اعداد حقیقی می‌دانیم که $۱ < \sqrt{۲}$ و $۱ < \sqrt{۳}$. پس:*

$$\sqrt{۲} - ۱ > ۰ \Rightarrow |\sqrt{۲} - ۱| = \sqrt{۲} - ۱ \quad , \quad \sqrt{۳} - ۱ > ۰ \Rightarrow ۱ - \sqrt{۳} < ۰ \Rightarrow |۱ - \sqrt{۳}| = -(۱ - \sqrt{۳}) = \sqrt{۳} - ۱$$

**نکته:** فاصله‌ی عدد $a$ و عدد $b$ روی محور اعداد، برابر $|b-a|$ یا $|a-b|$ است.

**۲۵- فاصله‌ی نقطه‌ی متناظر با کدام عدد روی محور اعداد به مبدأ نزدیک‌تر است؟**

۱) $-\sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) $-۱+\sqrt{۲}$ ۴) $-\sqrt{۳}+۱$

**۲۶- خلاصه شده‌ی عبارت $|۲-\sqrt{۳}|-\sqrt{۳}\,|۱-\sqrt{۳}|$ کدام است؟** (سراسری ۸۸)

۱) $-۲$ ۲) $-۱$ ۳) ۱ ۴) $۵-۲\sqrt{۳}$

**۲۷- حاصل عبارت $|۴-\sqrt{۲۰}|-۲|\sqrt{۵}-۳|$ برابر کدام است؟**

۱) $-۲$ ۲) ۲ ۳) $۲\sqrt{۵}-۲$ ۴) $۴\sqrt{۵}-۱۰$

درسنامه‌ی ۶

## نمادها و زبان ریاضی

برای آسان‌تر صحبت کردن در ریاضیات از نمادها استفاده می‌کنیم. مثلاً وقتی می‌خواهیم از عدد دلخواهی در ریاضی صحبت کنیم، از یکی از حروف انگلیسی مانند $a$، $x$، $y$ و... به عنوان نماد آن عدد استفاده می‌کنیم. یعنی وقتی می‌نویسیم «برای هر عدد حقیقی $a$ داریم $a^۲=۰$ یا $a^۲>۰$»، در واقع به زبان ریاضی گفته‌ایم: «مجذور هر عدد حقیقی، عددی نامنفی است.»

**تذکر:** ضرب یک عدد در خودش را مربع یا مجذور آن عدد می‌نامند.

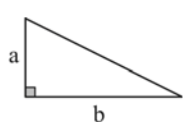
**مثال: جمله‌ی «مجموع هر عدد حقیقی با قرینه‌اش برابر صفر است.» را به زبان ریاضی بنویسید.**

**پاسخ:** *اگر $a$ عددی حقیقی باشد، داریم:* $a+(-a)=۰$

### نمایش هندسی برای عبارات ریاضی

گاهی با استفاده از شکل‌های هندسی، می‌توان عبارت‌های ریاضی را به دست‌آورد.

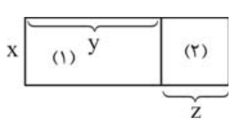
**مثال: یک نمایش هندسی مناسب برای عبارت ریاضی $\frac{۱}{۲}ab$ ارائه کنید.**




**پاسخ:** *نمایش هندسی مناسب برای این عبارت ریاضی، می‌تواند مثلث قائم‌الزاویه‌ای به اضلاع قائمه‌ی $a$ و $b$ باشد که مساحت آن $\frac{۱}{۲}ab$ خواهد بود. شکل مقابل نشان‌دهنده‌ی این نمایش هندسی است:*

$\frac{۱}{۲}ab=$ مساحت مثلث $\Longrightarrow$ مساحت مثلث $=\frac{۱}{۲}\times$ قاعده $\times$ ارتفاع

**نکته:** به تساوی $x(y+z)=xy+xz$، **پخش کردن عمل ضرب روی عمل جمع** می‌گویند. اما اگر سمت راست تساوی را داشته باشیم و از آن به سمت چپ تساوی برسیم، یعنی داشته باشیم $xy+xz=x(y+z)$، به این عمل **فاکتورگیری** می‌گوییم. در این‌جا از عامل $x$ فاکتور گرفته‌ایم. نمایش هندسی $x(y+z)=xy+xz$ به صورت مقابل است و داریم:




مساحت کل $=$ مساحت مستطیل (۱) $+$ مساحت مستطیل (۲) $\Longrightarrow x(y+z)=xy+xz$

**۲۸- نمایش فارسی کدام یک از جملات ریاضی زیر نادرست است؟**

۱) $a^۲+۱\geq ۲a$: مربع هر عدد به اضافه‌ی ۱، از دو برابر آن عدد کوچک‌تر نیست.

۲) $x^۲\geq ۰$: مجذور هر عدد حقیقی، مثبت است.

۳) $|x|=|-x|$: فاصله‌ی هر نقطه از مبدأ، برابر فاصله‌ی قرینه‌ی آن نقطه از مبدأ است.

۴) $\sqrt{a^۲}=|a|$: جذر مربع هر عدد، با قدرمطلق آن عدد برابر است.

**۲۹- معکوس تفاضل دو عدد حقیقی متمایز و تفاضل معکوس دو عدد حقیقی غیرصفر به‌ترتیب کدام‌اند؟ $(x,y\neq ۰)$**

۱) $\frac{۱}{x-y}$ ، $\frac{۱}{x}-\frac{۱}{y}$ ۲) $\frac{۱}{x}-\frac{۱}{y}$ ، $\frac{۱}{x-y}$ ۳) $\frac{۱}{x}-\frac{۱}{y}$ ، $x-\frac{۱}{y}$ ۴) $\frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}$ ، $\frac{۱}{x}-\frac{۱}{y}$

**۳۰- جمله‌ی «تفاضل مجموع مربعات دو عدد از مربع تفاضل آن‌ها مساوی است با قرینه‌ی دو برابر حاصل‌ضربشان» را چگونه نمایش می‌دهند؟**

۱) $(x^۲+y^۲)-(x-y)^۲=-۲xy$ ۲) $(x-y)^۲-(x^۲-y^۲)=-۲xy$

۳) $(x^۲-y^۲)-(x+y)^۲=-۲xy$ ۴) $(x-y)^۲-(x^۲+y^۲)=-۲xy$

**۳۱- حاصل $xy+۲x^۲y+۳xy^۲$ کدام است؟**

۱) $x^۲y(۱+۲x+۳y)$ ۲) $xy(۱+۲x+۳y)$ ۳) $xy(۲x+۳y)$ ۴) $x^۲y(۲x+۳y)$

# پاسخ‌های تشریحی

**۱- (۲)** اعداد طبیعی بزرگ‌تر از ۲۷۸ و کوچک‌تر از ۳۱۲ عبارت‌اند از: ۳۱۱، ۳۱۰، ...، ۲۸۱، ۲۸۰، ۲۷۹

برای شمارش اعداد فرد از میان این اعداد با شروع از عدد ۲۷۹ می‌بینیم که به ازای هر عدد فرد یک عدد زوج بعد از آن وجود دارد. تنها برای عدد ۳۱۱ هیچ عدد زوجی بعد از آن موجود نیست. بنابراین تعداد اعداد فرد درمیان این اعداد یکی بیشتر از تعداد اعداد زوج است. از طرفی تعداد کل این اعداد برابر است با: $۳۱۱ - ۲۷۹ + ۱ = ۳۳$

پس در اعداد بالا ۱۷ عدد طبیعی فرد و ۱۶ عدد طبیعی زوج وجود دارد.

**سؤال:** *دانش‌پژوه (میترا داوودی)*؛ می‌شه توضیح بدین که چه طوری تعداد اعداد طبیعی بزرگ‌تر از ۲۷۸ و کوچک‌تر از ۳۱۲ رو به‌دست آوردین؟

**پاسخ:** *من از این نکته استفاده کردم:*

> **نکته:** اگر $m$ و $n$ دو عدد صحیح باشند به‌طوری‌که $m > n$، آن‌گاه تعداد اعداد صحیح از $n$ تا $m$ (با احتساب خود $n$ و $m$) برابر است با $m - n + ۱$.

**۲- (۲)** مساحت هر مستطیل برابر است با حاصل‌ضرب طول و عرض آن. از آن‌جا که طبق فرض مسئله ابعاد مستطیل اعداد طبیعی هستند، بنابراین ما به دنبال تعداد حالت‌هایی هستیم که بتوان عدد ۷۲ را به‌صورت حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی نوشت:

$$۷۲ = ۱ \times ۷۲ = ۲ \times ۳۶ = ۳ \times ۲۴ = ۴ \times ۱۸ = ۶ \times ۱۲ = ۸ \times ۹$$

می‌بینیم که عدد ۷۲ را به شش صورت مختلف می‌توان به شکل حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی نوشت. پس ۶ مستطیل با این شرایط وجود دارد.

**سؤال:** *دانش‌پژوه (یوسف قهرمان)*؛ چرا $۱۸ \times ۴$ یا $۱۲ \times ۶$ رو جزء حالت‌ها در نظر نگرفتین؟

**پاسخ:** *این جا $۱۸ \times ۴$ با $۴ \times ۱۸$ هیچ فرقی نمی‌کنه. جابه‌جایی عددهای مربوط به طول و عرض مستطیل، یه مستطیل جدید ایجاد نمی‌کنه که بابا!*

**سؤال:** *دانش‌پژوه (سعید خوشبخت)*؛ چه نیازی بود توی صورت مسأله بگه مستطیل با ابعاد طبیعی؟ مگه اعداد دیگه‌ای هم وجود دارن که ضربشون بشه ۷۲؟

**پاسخ:** *آره، بچه جون! بی‌شمار عدد حقیقی وجود دارن که ضربشون می‌شه ۷۲. مثلاً $۴۸ \times ۱/۵$، $۷۲۰ \times ۰/۱$، $۱۴/۴ \times ۵$ و ... .*

**۳- (۳)** نقطه‌ی $A$ متناظر با عدد ۲ روی محور است. دقت کنید که دو نقطه وجود دارند که از $A$ به فاصله‌ی ۳ هستند: یکی در سمت راست $A$ و دیگری در سمت چپ آن. برای رسیدن به نقطه‌ای که در سمت راست $A$ و به فاصله‌ی ۳ از آن قرار دارد باید از $A$، ۳ واحد به سمت راست حرکت کنیم که به نقطه‌ی $۲ + ۳ = ۵$ می‌رسیم. و برای رسیدن به نقطه‌ای که در سمت چپ $A$ به فاصله‌ی ۳ از آن قرار دارد باید از $A$، ۳ واحد به سمت چپ حرکت کنیم که به نقطه‌ی $۲ - ۳ = -۱$ می‌رسیم که همان $B$ است. پس $C$ که قرینه‌ی $B$ است متناظر با $-(-۱) = +۱$ می‌باشد. در این‌صورت فاصله‌ی $B$ تا $C$ که همان طول پاره‌خط $BC$ است برابر خواهد بود با: $+۱ - (-۱) = ۱ + ۱ = ۲$. یا با استفاده از نکته‌ی زیر داریم:

> **نکته:** اگر قرینه‌ی نقطه‌ی $A$ نسبت به مبدأ $O$ نقطه‌ی $B$ باشد، طول پاره‌خط $AB$ دو برابر طول پاره‌خط $AO$ و نیز دو برابر طول پاره‌خط $OB$ است، یعنی $AB = ۲AO = ۲BO$.

حال با توجه به نکته‌ی ذکر شده، چون فاصله‌ی نقطه‌ی $B$ تا مبدأ برابر ۱ است، پس فاصله‌ی $B$ تا قرینه‌اش برابر $۲ \times ۱ = ۲$ خواهد بود.

**۴- (۱)** برای آن‌که فاصله‌ی این دو عدد تا مبدأ با هم برابر باشد، باید یا بر هم منطبق بوده و یا قرینه‌ی یک‌دیگر باشند. پس:

اگر بر هم منطبق باشند. $\Rightarrow a - ۶ = ۲a \Rightarrow -a = ۶ \Rightarrow a = -۶$

اگر قرینه‌ی یک‌دیگر باشند. $\Rightarrow a - ۶ = -۲a \Rightarrow a + ۲a = ۶ \Rightarrow ۳a = ۶ \Rightarrow a = \frac{۶}{۳} \Rightarrow a = ۲$

فقط $a = ۲$ در گزینه‌ها وجود دارد.

**۵- (۴)** **روش اول:** بین $-\frac{۱}{۲}$ و $-\frac{۲}{۳}$ پس از هم‌مخرج کردن دو عدد داریم:

$$-\frac{۱}{۲}=-\frac{۱\times۳}{۲\times۳}=-\frac{۳}{۶} \quad , \quad -\frac{۲}{۳}=-\frac{۲\times۲}{۳\times۲}=-\frac{۴}{۶}$$

ازآن‌جا که $-\frac{۳}{۶}>-\frac{۴}{۶}$ ($-۳>-۴$)، پس $-\frac{۱}{۲}>-\frac{۲}{۳}$. حال $-\frac{۲}{۳}$ را با $-\frac{۳}{۵}$ مقایسه می‌کنیم:

$$-\frac{۲}{۳}=-\frac{۲\times۵}{۳\times۵}=-\frac{۱۰}{۱۵} \quad , \quad -\frac{۳}{۵}=-\frac{۳\times۳}{۵\times۳}=-\frac{۹}{۱۵}$$

پس $-\frac{۳}{۵}>-\frac{۲}{۳}$ ($-۹>-۱۰$). حال $-\frac{۲}{۳}$ را با $-\frac{۵}{۷}$ مقایسه می‌کنیم:

$$-\frac{۲}{۳}=-\frac{۲\times۷}{۳\times۷}=-\frac{۱۴}{۲۱} \quad , \quad -\frac{۵}{۷}=\frac{۵\times۳}{۷\times۳}=-\frac{۱۵}{۲۱}$$

پس $-\frac{۲}{۳}>-\frac{۵}{۷}$ ($-۱۴>-۱۵$). بنابراین $-\frac{۵}{۷}$ از بقیه‌ی عددها کوچک‌تر است.

**روش دوم:** هر چهار عدد را هم‌مخرج می‌کنیم. بنابراین عددها عبارت‌اند از:

$$-\frac{۱}{۲}=-\frac{۱\times۳\times۵\times۷}{۲\times۳\times۵\times۷}=-\frac{۱۰۵}{۲۱۰} \quad , \quad -\frac{۲}{۳}=-\frac{۲\times۲\times۵\times۷}{۳\times۲\times۵\times۷}=-\frac{۱۴۰}{۲۱۰}$$

$$-\frac{۳}{۵}=-\frac{۳\times۲\times۳\times۷}{۵\times۲\times۳\times۷}=-\frac{۱۲۶}{۲۱۰} \quad , \quad -\frac{۵}{۷}=\frac{۵\times۲\times۳\times۵}{۷\times۲\times۳\times۵}=-\frac{۱۵۰}{۲۱۰}$$

از آن‌جا که $-\frac{۱۵۰}{۲۱۰}$ از بقیه‌ی عددهای به‌دست‌آمده کوچک‌تر است ($-۱۰۵>-۱۲۶>-۱۴۰>-۱۵۰$)، پس $-\frac{۵}{۷}$ از بقیه‌ی عددها کوچک‌تر می‌باشد.

**۶- (۲)**

$$\frac{۵}{۴۲}-\frac{۲۳}{۲۳۱}=\frac{۵۵-۴۶}{۴۶۲}=\frac{۹}{۴۶۲}=\frac{۳}{۱۵۴}$$

**۷- (۱)**

> **یادآوری:** مجموع یک عدد طبیعی و یک عدد گویای مثبت (کوچک‌تر از ۱) را به شکل $a\frac{b}{c}$ نیز نشان می‌دهند که در آن $a$ عدد طبیعی و $\frac{b}{c}$ عدد گویای مثبت (کم‌تر از ۱) است. این شکل نمایش را کسر مرکب (عدد مخلوط) می‌گویند. مثلاً:
>
> $$۳\frac{۴}{۹}=۳+\frac{۴}{۹}=\frac{۹\times۳+۴}{۹}=\frac{۳۱}{۹}$$

$$\begin{cases} \left.\begin{array}{l} ۲\frac{۴}{۳}=\frac{۱۰}{۳} \\ -۳\frac{۱}{۳}=-\frac{۱۰}{۳} \end{array}\right\} \Rightarrow \left(۲\frac{۴}{۳}\right)\div\left(-۳\frac{۱}{۳}\right)=\frac{۱۰}{۳}\div\left(-\frac{۱۰}{۳}\right)=-۱ \\ -\frac{۷}{۴}+\frac{۳}{۵}=\frac{-۳۵+۱۲}{۲۰}=-\frac{۲۳}{۲۰} \Rightarrow \left(-\frac{۷}{۴}+\frac{۳}{۵}\right)\div\frac{۲۳}{۲۰}=-\frac{۲۳}{۲۰}\div\frac{۲۳}{۲۰}=-۱ \end{cases} \Rightarrow \text{حاصل عبارت}=\frac{-۱}{-۱}=۱$$

**۸- (۲)** **روش اول:** هر دو کسر $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۲}{۵}$ را به کسرهایی با مخرج ۲۰ تبدیل می‌کنیم:

$$\frac{۱}{۲}=\frac{۱\times۱۰}{۲\times۱۰}=\frac{۱۰}{۲۰} \quad , \quad \frac{۲}{۵}=\frac{۲\times۴}{۵\times۴}=\frac{۸}{۲۰}$$

در بین گزینه‌ها تنها اگر $a=۹$ باشد، $\frac{۲}{۵}=\frac{۸}{۲۰}<\frac{a}{۲۰}<\frac{۱۰}{۲۰}=\frac{۱}{۲}$ خواهد بود.

**روش دوم:** اگر میانگین دو عدد $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۲}{۵}$ را به‌دست آوریم، داریم:

$$\frac{\frac{۱}{۲}+\frac{۲}{۵}}{۲}=\frac{\frac{۵+۴}{۱۰}}{۲}=\frac{\frac{۹}{۱۰}}{۲}=\frac{۹}{۲۰}$$

می‌دانیم میانگین دو عدد همواره بین آن دو قرار دارد، پس چون مخرج این کسر با کسر $\frac{a}{۲۰}$ مساوی است، می‌توان گفت که $a=۹$ می‌باشد.

**۹- (۱)** پس از هم مخرج کردن کسرها، کافی است صورت و مخرج را در ۲ ضرب کنیم، داریم:

$$\begin{cases} \frac{۱}{۳}=\frac{۵\times۲}{۱۵\times۲}=\frac{۱۰}{۳۰} \\ \frac{۱}{۵}=\frac{۳\times۲}{۱۵\times۲}=\frac{۶}{۳۰} \end{cases} \Rightarrow \frac{۶}{۳۰}<\overbrace{\frac{۷}{۳۰}<\frac{۸}{۳۰}<\frac{۹}{۳۰}}^{\text{۳ عدد گویا}}<\frac{۱۰}{۳۰}$$

**۱۰- (۱)** باید صورت و مخرج $\frac{۴۹۵}{۱۱۵۵}$ را تا جایی که ممکن است ساده کنیم:

$$\frac{۴۹۵}{۱۱۵۵}=\frac{۴۹۵\div۵}{۱۱۵۵\div۵}=\frac{۹۹}{۲۳۱}=\frac{۹۹\div۱۱}{۲۳۱\div۱۱}=\frac{۹}{۲۱}=\frac{۹\div۳}{۲۱\div۳}=\frac{۳}{۷}$$

بنابراین $\frac{p}{q}=\frac{۴۹۵}{۱۱۵۵}=\frac{۳}{۷}$ است. چون $\frac{۳}{۷}$ دیگر ساده شدنی نیست، پس کوچک‌ترین مقدار $p+q$ برابر $۳+۷=۱۰$ است.

**۱۱- (۴)** **روش اول:** هر سهم را به‌دست می‌آوریم: $۵۴\times\frac{۱}{۲}=۲۷$ میلیون و $۵۴\times\frac{۱}{۳}=۱۸$ میلیون و $۵۴\times\frac{۱}{۶}=۹$ میلیون

پس تفاوت بیشترین و کم‌ترین سهم برابر است با:

$۲۷-۹=۱۸$

**روش دوم:** بیشترین سهم مربوط به نسبت $\frac{۱}{۲}$ و کم‌ترین سهم مربوط به نسبت $\frac{۱}{۶}$ است. پس ابتدا تفاضل این دو نسبت را به دست آورده و سپس نسبت حاصل را در ۵۴ ضرب کرده تا مقدار آن به دست آید:

$$\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۶}=\frac{۳-۱}{۶}=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow\frac{۱}{۳}\times۵۴=۱۸ \text{ میلیون}$$

**۱۲- (۱)** ابتدا ضرب اعشاری داده شده را محاسبه می‌کنیم. برای این کار عدد ۳۲ را در ۵۲ ضرب می‌کنیم و در پایان برای جواب به دست آمده ۴ رقم اعشار در نظر می‌گیریم:

$۳/۲\times۰/۰۵۲=۰/۱۶۶۴$

پس قسمت صحیح عدد برابر با صفر و قسمت اعشاری آن برابر با ۰/۱۶۶۴ است.

**۱۳- (۲)** $(۳/۸\div۱۰)-(۰/۰۲\times۳/۲۶)=(۰/۳۸)-(۰/۰۶۵۲)=۰/۳۱۴۸$

**۱۴- (۳)** حتماً دقت کنید که عملیات ضرب و عملیات تقسیم بر جمع و تفریق تقدم دارند:

$$۴/۲۹۳\times۲\div۳-۵=((۴/۲۹۳\times۲)\div۳)-۵=(۸/۵۸۶\div۳)-۵=۲/۸۶۲-۵=-۲/۱۳۸$$

**۱۵- (۲)** ابتدا توان‌های ۱۰ را در اعداد اعشاری ضرب می‌کنیم:

گزینه‌ی (۱): $۸/۷\times۱۰^۲=۸۷۰/۰=۸۷۰$

گزینه‌ی (۲): $۹۰/۱\times۱۰=۹۰۱/۰=۹۰۱$

گزینه‌ی (۴): $۰/۹\times۱۰۰=۹۰/۰=۹۰$

حال واضح است که از بین همه‌ی گزینه‌ها، عدد گزینه‌ی (۲) از همه بزرگ‌تر است. در واقع عدد گزینه‌های (۱) و (۳) برابر هستند و عدد گزینه‌ی (۴) از همه کوچک‌تر است.

**۱۶- (۲)**

حجم آب درون ظرف = ۱۸۰ سانتی‌متر مکعب $\xrightarrow[\text{شده است.}]{\text{۱۵٪ آب بخار}}$ حجم آب بخار شده $=۱۸۰\times۱۵٪=۱۸۰\times\frac{۱۵}{۱۰۰}=\frac{۲۷۰۰}{۱۰۰}=۲۷$ سانتی‌متر مکعب

بنابراین $۱۸۰-۲۷=۱۵۳$ سانتی‌مترمکعب آب درون ظرف باقی‌مانده که چون حجم ظرف ۲۰۰ سانتی‌مترمکعب است، پس $\frac{۱۵۳}{۲۰۰}$ حجم ظرف را آب اشغال کرده است. این میزان برابر $\frac{۱۵۳}{۲۰۰}\times۱۰۰=\frac{۱۵۳}{۲}=۷۶/۵$ درصد حجم ظرف است.

**سؤال:** *دانش‌پژوه (نوید فوبرو)*: این معنیش اینه که تو هر ۱۰۰ سانتی‌متر مکعب از حجم ظرف، ۷۶/۵ سانتی‌متر مکعب آب هست؟

پاسخ: *رفیقاً معنیش همینه!*

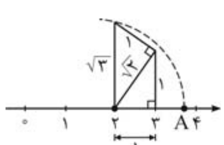
**۱۷- (۴)** $\pi$ با تقریب چهار رقم اعشار برابر است با ۳/۱۴۱۵، یعنی $۳/۱۴<۳/۱۴۱۵<\pi$. بین ۳/۱۴ و ۳/۱۴۱۵ که دو عدد گویا هستند، بی‌شمار عدد گویا وجود دارد. پس بین ۳/۱۴ و $\pi$ نیز بی‌شمار عدد گویا وجود دارد.

**۱۸- (۳)** $\sqrt{۲}$ و $\frac{۳}{۲}$ از ۱ بزرگ‌ترند. ضمن این‌که $-۱+\sqrt{۲}<\sqrt{۲}-\frac{۱}{۲}<\sqrt{۲}$ است. پس $-۱+\sqrt{۲}$ از همه‌ی اعداد دیگر کوچک‌تر است و این به این معنی است که در سمت چپ همه‌ی آن‌ها قرار می‌گیرد.

**سؤال:** *دانش‌پژوه (بهرام چلچله)*: از کجا بدونیم $\sqrt{۲}$ از ۱ بزرگ‌تره؟

پاسخ: *خب معلومه چون ۲ از ۱ بزرگتره، $\sqrt{۲}$ هم از $\sqrt{۱}$ بزرگ‌تره، همین‌طور از $\sqrt{۴}$ کوچک‌تره، یعنی $\sqrt{۱}<\sqrt{۲}<\sqrt{۴}$. نتیجه این میشه که $۱<\sqrt{۲}<۲$.*

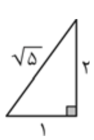
**۱۹- (۳)** به کمک قضیه‌ی فیثاغورس، طول دو وتر را به دست می‌آوریم:




$\Rightarrow A=۲+\sqrt{۳}$

**۲۰- (۳)** اگر $\sqrt{۵}$ طول وتر مثلث قائم‌الزاویه باشد، آن‌گاه:

مجموع مجذورهای دو ضلع مجاور زاویه‌ی قائمه $=۵=(\sqrt{۵})^۲$




چون طول دو ضلع مجاور زاویه‌ی قائمه باید عددهایی طبیعی باشند، باید دید عدد ۵ را به چند صورت می‌توان به شکل مجموع مجذورهای دو عدد طبیعی نوشت. این کار فقط به‌صورت $۲^۲+۱^۲=۵=(\sqrt{۵})^۲$ ممکن است. پس یکی از این مثلث‌ها به اضلاع ۱، ۲ و $\sqrt{۵}$ است که مطابق شکل مقابل رسم می‌شود: