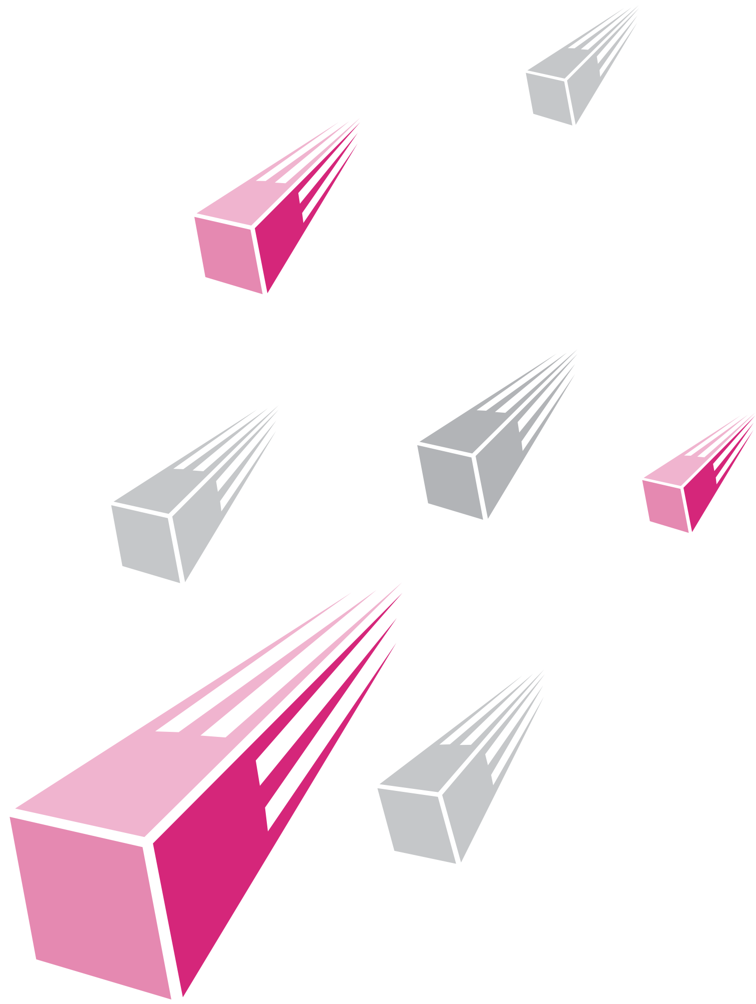


ریاضی ۹ اُم

شهاب

حمیدرضا بیات

مرتضی خمامی ابدی

کیان کریمی خراسانی

پیشگفتار

به نام خداوند جان و خرد
کزین برتر اندیشه برنگذرد

بسیار خرسندیم که مجموعه کتاب‌های «شهاب» را در اختیار دانش‌آموزان عزیز و دبیران گرامی قرار می‌دهیم. این مجموعه در اصل بـرای دانش‌آموزان «مدارس استعدادهای درخشان» تألیف شده است؛ اما استفاده از آن‌ها، به دانش‌آموزان ممتاز سـایر مـدارس کشـور و داوطلبـان شرکت در مسابقات نیز توصیه می‌شود.

از ویژگی‌های «ریاضی ۹ اُم شهاب» می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

- آموزش پیشرفته کتاب درسی با مثال‌های متنوع؛
- تمرین‌های تفکیک شده براساس درس‌های هر فصل؛
- ۵۰ پرسش‌چهارگزینه‌ای برای هر فصل همراه با پاسخ کلیدی در انتهای کتاب؛
- پاسخ‌نامه تشریحی تمام تمرین‌ها و پرسش‌های چهارگزینه‌ای در جلد دوم کتاب؛
- طبقه‌بندی تمرین‌ها به تمرین‌های دشوار (☆) و تمرین‌های خیلی دشوار (☆)

امیدواریم این کتاب مورد توجه دانش‌آموزان عزیز، دبیران گرامی و خانواده‌ها قرار گیرد و در ارتقای سطح علمی دانش‌آموزان مؤثر واقع شود.

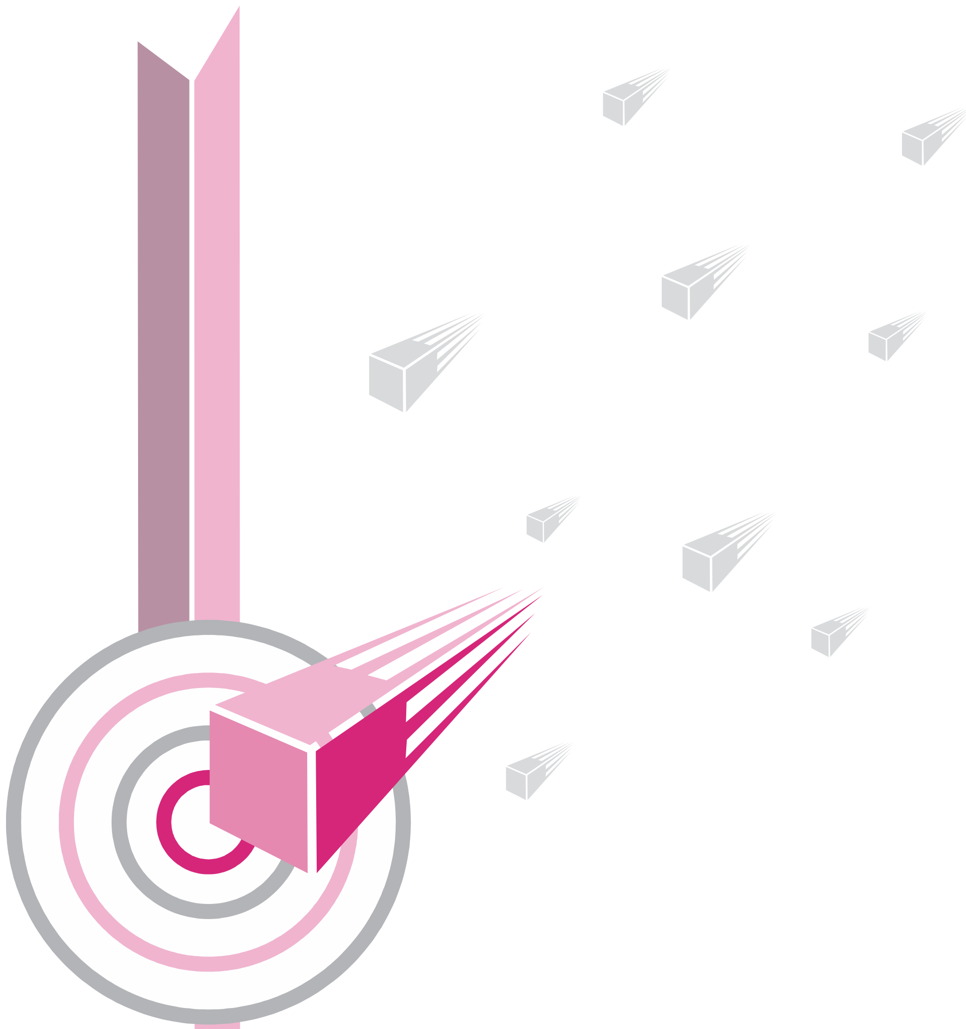
در پایان لازم می‌دانیم از مؤلفان محترم کتاب آقایان: حمیدرضا بیات، مرتضی خمامی‌ابدی و کیان کریمی‌خراسانی که این کتاب را زیر نظر دبیر مجموعه آقای مهندس هادی عزیززاده تألیف کرده‌اند، تشکر کنیم.

هم‌چنین از خانم‌ها حمیده نوروزی و مینا غلام‌احمدی که زحمت حروفچینی و صفحه‌آرایی و ترسیم شکل‌هـا را بـر عهـده داشـته‌انـد، سپاسگزاریم.

انتشارات مبتکران

پست الکترونیک برای آگاهی از نقطه نظرها و پیشنهادها: bayat@mobtakeran.com

فهرست



فصل ۱

مجموعه‌ها

درس اول: معرفی مجموعه‌ها

به گروهی که اعضای آن کاملاً مشخص هستند، یک **مجموعه** می‌گویند. مثلاً استان‌های ایران یک مجموعه است، چون همه اعضای آن مشخص است. مثلاً یزد عضوی از آن است، ولی استانبول عضوی از آن نیست. اعداد طبیعی یک مجموعه است که ۷ عضو آن است و $\frac{۱}{۲}$ عضو آن نیست. ولی غذاهای خوشمزه مجموعه نیست، چون اعضای آن مشخص نیست. فسنجان شاید از نظر تو خوشمزه باشد، ولی من فسنجان دوست ندارم!

یک مجموعه را معمولاً با یکی از حروف بزرگ انگلیسی نشان می‌دهیم. عضو بودن در یک مجموعه را با علامت $\in$ و عضو نبودن را با $\notin$ نشان می‌دهیم. فرض کن مجموعه استان‌های ایران را با A مشخص کرده‌ایم. پس $A\in$ یزد و $A\notin$ استانبول. اگر مجموعهٔ اعداد طبیعی را با B نشان دهیم، $۷\in B$ و $\frac{۱}{۲}\notin B$.

برای نشان دادن یک مجموعه، اعضای آن را داخل $\{\ \}$ قرار می‌دهیم. مثلاً مجموعهٔ اعداد طبیعی یک‌رقمی را به‌صورت $A=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹\}$ نشان می‌دهیم.

> اگر مجموعهٔ A را به‌صورت $A=\{۱,۲,۳\}$ درنظر بگیریم، برای نشان دادن اینکه «۱ عضو A است» می‌نویسیم $۱\in A$ و برای نشان دادن اینکه «۴ عضو A نیست» می‌نویسیم $۴\notin A$.

مثال: کدام‌یک از موارد زیر یک مجموعه است؟ اعضای مواردی که مجموعه است را نمایش بده.

الف) اعداد اول یک‌رقمی   **ب) سه فوتبالیست**

ج) اعداد زوج بزرگ از ۱۰۰   **د) دو شمارندهٔ عدد ۱۲**

پاسخ:

الف) $\{۲,۳,۵,۷\}$

ب) مجموعه نیست. کدام سه فوتبالیست؟!

ج) $\{۱۰۲,۱۰۴,۱۰۶,۱۰۸,...\}$

د) مجموعه نیست. اعداد ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۶ و ۱۲ شمارنده‌های ۱۲ هستند. کدام دوتایشان؟!

مثال: اگر A مجموعه اعداد اول و $B=\{۲,۴,۵,۹\}$ باشد، در جاهای خالی علامت $\in$ یا $\notin$ قرار بده.

A ○ ۹	A ○ ۶	A ○ ۳	A ○ ۲
B ○ ۹	B ○ ۶	B ○ ۳	B ○ ۲

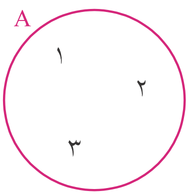
پاسخ:

$۹\notin A$	$۶\notin A$	$۳\in A$	$۲\in A$
$۹\in B$	$۶\notin B$	$۳\notin B$	$۲\in B$

به نظر تو آیا مجموعه‌های $\{۱,۲\}$ ، $\{۲,۱\}$ ، $\{۱,۲,۱\}$ و $\{۲,۲,۲,۱\}$ با هم فرق دارند؟ همهٔ آن‌ها دارای اعضای ۱ و ۲ هستند و عضو دیگری هم ندارند. پس همهٔ آن‌ها یکی هستند.

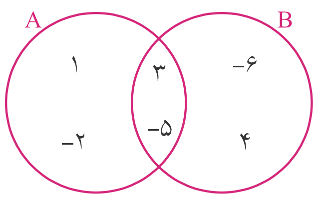
با جابه‌جا کردن عضوهای یک مجموعهٔ، مجموعه جدیدی ساخته نمی‌شود.
با تکرار عضوهای یک مجموعه نیز، مجموعهٔ جدیدی ساخته نمی‌شود.
مثلاً مجموعه‌های $\{۱,۲\}$ ، $\{۲,۱\}$ ، $\{۱,۲,۱\}$ و $\{۲,۲,۲,۱\}$ یکی هستند.

نمودار وِن



بعضی وقت‌ها، مجموعه را با استفاده از منحنی‌های بسته نشان می‌دهیم. مثلاً در شکل روبه‌رو، مجموعهٔ $A=\{۱,۲,۳\}$ را نمایش داده‌ایم:
به این شکل نشان دادن مجموعه‌ها، رسم **نمودار وِن** گفته می‌شود.

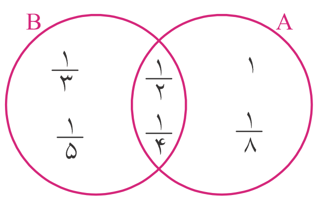
مثال: با توجه به نمودار وِن روبه‌رو، اعضای مجموعه‌های A و B را مشخص کن:



پاسخ: $B=\{۳,-۵,-۶,۴\}$ $A=\{۱,-۲,۳,-۵\}$

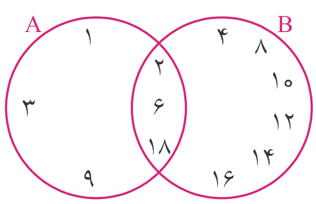
مثال: مجموعه‌های $A=\{۱,\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۸}\}$ و $B=\{\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۵}\}$ را با یک نمودار وِن نمایش بده.

پاسخ:



مثال: اگر A مجموعهٔ شمارنده‌های عدد ۱۸ باشد و B مجموعهٔ اعداد زوج کوچک‌تر از ۲۰ باشد، A و B را با عضوهایشان مشخص کن و آن‌ها را با یک نمودار وِن نمایش بده:

پاسخ:

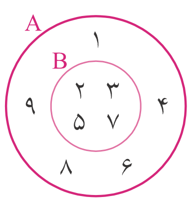


$A=\{۱,۲,۳,۶,۹,۱۸\}$
$B=\{۲,۴,۶,۸,۱۰,۱۲,۱۴,۱۶,۱۸\}$

مثال: اگر A مجموعهٔ اعداد طبیعی یک‌رقمی و B مجموعهٔ اعداد اول یک‌رقمی باشد، آن‌ها را با یک نمودار وِن نمایش بده.

پاسخ:
$A=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹\}$
$B=\{۲,۳,۵,۷\}$

تمام عضوهای B داخل A هم هست. پس نمودار وِن این مجموعه‌ها به این صورت است:



مثال: اگر A مجموعهٔ اعداد دورقمی باشد که مجموع ارقامشان ۱۹ است، اعضای مجموعهٔ A را مشخص کن.

پاسخ: مجموع ارقام یک عدد دورقمی حداکثر ۱۸ است، چون هر رقم آن حداکثر می‌تواند ۹ باشد. پس مجموعهٔ A عضوی ندارد.

اگر مجموعه‌ای هیچ عضوی نداشته باشد، آن را **مجموعهٔ تهی** می‌نامیم و با نماد $\varnothing$ یا $\{\ \}$ نشان می‌دهیم.

مثال: کدام‌یک از مجموعه‌های زیر، تهی است و کدام‌یک تهی نیست؟

الف) اعداد صحیح کوچک‌تر از ۱ — **ب)** اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۱

ج) گربه‌سانان پرنده — **د)** پرنده‌های گوشت‌خوار

پاسخ:

الف) $\{۰,-۱,-۲,-۳,...\}$ — ب) تهی است.

ج) تهی است. — د) تهی نیست، مثلاً جغد گوشت‌خوار است.

مثال: اگر A مجموعهٔ اعداد اول یک‌رقمی، B مجموعهٔ اعداد اول مضرب ۳، C مجموعهٔ اعداد طبیعی بزرگ‌تر از ۳، D مجموعهٔ اعداد طبیعی مضرب ۳، E مجموعهٔ اعداد زوج بین ۳ و ۹، F مجموعهٔ اعداد طبیعی یک‌رقمی مضرب ۴، G مجموعهٔ اعداد طبیعی یک‌رقمی بزرگ‌تر از ۳ و H مجموعهٔ اعداد اول زوج دورقمی باشد، جاهای خالی را با حروف A تا H پر کن:

$\square=\{۴,۵,۶,۷,۸,۹\}$ — $\square=\{۴,۶,۸\}$ — $\square=\{۳\}$

$\square=\{۴,۸\}$ — $\square=\{۲,۳,۵,۷\}$ — $\square=\{۴,۵,۶,۷,...\}$

$\square=\{۳,۶,۹,۱۲,...\}$ — $\square=\{\ \}$

پاسخ:

$G=\{۴,۵,۶,۷,۸,۹\}$ — $E=\{۴,۶,۸\}$ — $B=\{۳\}$

$F=\{۴,۸\}$ — $A=\{۲,۳,۵,۷\}$ — $C=\{۴,۵,۶,۷,...\}$

$D=\{۳,۶,۹,۱۲,...\}$ — $H=\{\ \}$

مثال: در صورت امکان، متناظر با هر عبارت یک مجموعه بنویس:

الف) سه عدد یک‌رقمی بزرگ‌تر از ۶ — **ب)** پنج عدد یک‌رقمی کوچک‌تر از ۸

ج) اعداد طبیعی بین ۵ـ و ۵ — **د)** اعداد صحیح منفی بزرگ‌تر از ۳

ه) اعداد اول دورقمی مضرب ۱۱ — **و)** اعداد اول دورقمی مضرب ۵

ز) جواب معادلهٔ $۲x+۱=۰$ — **ح)** جواب معادلهٔ $x^۲=۴$

پاسخ:

الف) $\{۷,۸,۹\}$ — ب) مجموعه نیست (هفت عدد یک‌رقمی کوچک‌تر از ۸ داریم. پس پنج‌تای آن‌ها نامشخص است).

ج) $\{۱,۲,۳,۴\}$ — د) $\{\ \}$ — ه) $\{۱۱\}$

و) $\{\ \}$ — ز) $\left\{-\frac{۱}{۲}\right\}$ — ح) $\{۲,-۲\}$

مثال: در صورت امکان، متناظر با هر مجموعه یک عبارت بنویس:

الف) $A=\{۲,۴,۸,۱۶,۳۲,...\}$ ب) $B=\{۱۱,۲۲,۳۳,...,۹۹\}$

ج) $C=\{۱۶,۲۵,۳۶,۴۹,۶۴,۸۱\}$ د) $C=\{۴,۶,۸,۹\}$

پاسخ:

الف) توان‌های طبیعی عدد ۲ ب) اعداد دورقمی مضرب ۱۱

ج) اعداد مربع کامل دورقمی د) اعداد مرکب یک‌رقمی

مثال: هر یک از مجموعه‌های $A=\varnothing$ ، $B=\{۰\}$ و $C=\{۰,\varnothing\}$ چند عضو دارند؟

پاسخ: $A=\varnothing$، پس عضوی ندارد.

$B=\{۰\}$ ، پس یک عضو دارد. $(۰\in B)$.

$C=\{۰,\varnothing\}$، پس دو عضو دارد. $(۰\in C$ و $\varnothing\in C)$.

درس دوم: مجموعه‌های برابر و نمایش مجموعه‌ها

برابری مجموعه‌ها

دو مجموعه وقتی مساوی هستند که اعضایشان کاملاً یکسان باشند. مثلاً مجموعه‌های $A=\{۱,۲,۳\}$ و $B=\{۳,۲,۱\}$ مساوی هستند. ولی مجموعهٔ $A=\{۱,۲,۳\}$ با $C=\{۱,۲,۳,۴\}$ یا $D=\{۲,۳,۴\}$ برابر نیست.

دو مجموعهٔ A و B باهم برابر هستند، هرگاه هر عضو A عضوی از B باشد و هر عضو B نیز عضوی از A باشد. در این صورت می‌نویسیم $A=B$.

مثال: اگر A مجموعهٔ «دو عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱ که ضربشان برابر ۱۵ است» باشد، ابتدا مجموعهٔ A را با اعضایش مشخص کن. سپس مشخص کن که کدام‌یک از مجموعه‌های زیر با مجموعهٔ A برابر است؟

الف) B ، مجموعهٔ اعداد اول فرد یک‌رقمی ب) C ، مجموعهٔ اعداد فرد بین ۲ و ۶

ج) $D=\{۱,۱۵\}$ د) E ، مجموعهٔ اعداد فرد کوچک‌تر از ۷

پاسخ: تنها دو عدد بزرگ‌تر از ۱ که ضربشان ۱۵ است، ۳ و ۵ هستند. پس $A=\{۳,۵\}$.

الف) $B=\{۳,۵,۷\} \Rightarrow B\neq A$ ب) $C=\{۳,۵\} \Rightarrow C=A$

ج) $D=\{۱,۱۵\} \Rightarrow D\neq A$ د) $E=\{۱,۳,۵\} \Rightarrow E\neq A$

اگر عضوی در مجموعهٔ A باشد و در مجموعهٔ B نباشد، یا عضوی در مجموعهٔ B باشد و در مجموعهٔ A نباشد، مجموعه‌های A و B برابر نیستند و می‌نویسیم $A\neq B$.

مثال: x چه عددی باشد تا مجموعه‌های $A=\{۴,۵,۷\}$ و $B=\{x+۲,x-۱,x\}$ برابر باشند؟

پاسخ: اعضای مجموعهٔ B از کوچک به بزرگ عبارت‌اند از $x-۱$، x و $x+۲$ که به ترتیب برابرند با ۴، ۵ و ۷. پس $x=۵$.

مثال: x و y چه عددهایی باشند تا مجموعه‌های $A=\{۳,x,\frac{۱}{۲}\}$ و $B=\{۵,\frac{۱}{۲},y\}$ برابر باشند؟

پاسخ: $\frac{۱}{۲}$ در هر دو مجموعه هست. ۳ در A هست، پس باید در B هم باشد، پس $y=۳$. ۵ در B هست، پس باید در A هم باشد، پس $x=۵$.

مثال: x و y چه عددهایی باشند تا مجموعه‌های $A=\left\{۴,\frac{۱}{۲},\sqrt{\frac{۹}{۲۵}},\frac{۱}{x}\right\}$ و $B=\{۰/۱۲۵,۲^{۲},y,۰/۵\}$ برابر باشند؟

پاسخ:

$$\left.\begin{array}{l} A=\{۴,\frac{۱}{۲},\frac{۳}{۵},\frac{۱}{x}\} \\ B=\{\frac{۱}{۸},۴,y,\frac{۱}{۲}\} \end{array}\right\} \Rightarrow x=۸\,,\; y=\frac{۳}{۵}$$

مثال: x و y چه عددهایی باشند تا مجموعه‌های $A=\{۳,۴,۶,۷\}$ و $B=\{x,y,x+۱,y+۲,\frac{x}{۲}\}$ برابر باشند؟

پاسخ: مجموعهٔ A دارای چهار عضو است و مجموعهٔ B دارای پنج عضو. پس یکی از اعضای مجموعهٔ B تکراری است. اگر $x=۳$ آنگاه $\frac{x}{۲}=\frac{۳}{۲}$ که در A نیست. اگر $x=۴$ آنگاه $x+۱=۵$ که در A نیست. اگر $x=۶$ آنگاه $x+۱=۷$ و $\frac{x}{۲}=۳$ که هر دو در A هستند. پس $x=۶$ و $y=۴$ (درنتیجه $y+۲=۶$ و $x=۶$ در واقع یک عضو هستند.)

زیرمجموعه

مثال: مجموعهٔ $A=\{۲,۴,۶,۸,۱۰\}$ را درنظر بگیر. تمام اعضای کدام‌یک از مجموعه‌های زیر، عضوی از مجموعهٔ A نیز هستند؟

$B=\{۲,۴,۸\}$　　$C=\{۴,۸,۱۲\}$　　$D=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$

$E=\{۲,۴,۶,۸,۱۰\}$　　$F=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹,۱۰\}$

پاسخ: مجموعه‌های B و E تمام اعضایشان عضوی از A نیز هستند.

اگر A و B دو مجموعه باشند، به‌طوری که تمام اعضای B عضوی از A نیز باشند، آنگاه می‌گوییم مجموعهٔ B زیرمجموعهٔ A است و می‌نویسیم $B\subseteq A$.

در مثال بالا تمام اعضای مجموعه‌های B و E عضوی از A نیز بودند. پس این دو مجموعه، زیرمجموعهٔ A بودند و می‌توانیم بنویسیم $B\subseteq A$ و $E\subseteq A$.

در مجموعهٔ C، عضو ۱۲ در A وجود نداشت. پس C زیرمجموعهٔ A نبود.

اگر A و B دو مجموعه باشند، به‌طوری که عضوی در B باشد که در A نباشد، آنگاه می‌گوییم مجموعهٔ B زیرمجموعهٔ A نیست و می‌نویسیم $B\nsubseteq A$.

در مثال قبل علاوه بر مجموعهٔ C ، مجموعه‌های D و F هم زیرمجموعهٔ A نبودند. چون اعضای ۱، ۳ و ۵ در D و اعضای ۱، ۳، ۵، ۷ و ۹ در F ، در A نبودند.

اگر کمی دقت کرده باشی، متوجه شدی که مجموعهٔ E برابر مجموعهٔ A بود و همان‌طور که گفتم مجموعهٔ E زیرمجموعهٔ A نیز بود. این در مورد همهٔ مجموعه‌ها درست است. یعنی در هر مجموعه‌ای، همهٔ اعضای مجموعه در خود آن مجموعه وجود دارند! پس هر مجموعه زیرمجموعهٔ خودش است!

هر مجموعه، زیرمجموعهٔ خودش است. یعنی برای هر مجموعهٔ دلخواه مانند A داریم $A \subseteq A$.

همچنین، مجموعهٔ تهی عضوی ندارد که در مجموعهٔ دیگری یافت نشود (چون اصلاً عضوی ندارد!). پس می‌توان گفت مجموعهٔ تهی زیرمجموعهٔ تمام مجموعه‌هاست!

مجموعهٔ تهی، زیرمجموعهٔ هر مجموعهٔ دلخواه مانند A است. یعنی داریم $\varnothing \subseteq A$.

اگر یادت باشد در تعریف برابری دو مجموعه گفتیم که اگر همهٔ اعضای A در B و همهٔ اعضای B در A باشند، آنگاه A و B برابر هستند. همهٔ اعضای A در B باشند، یعنی A زیرمجموعهٔ B باشد. همهٔ اعضای B در A باشند، یعنی B زیرمجموعهٔ A باشد. یعنی دو مجموعه وقتی برابر هستند که هریک زیرمجموعهٔ دیگری باشد!

اگر A و B دو مجموعه باشند و داشته باشیم $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$ ، آنگاه داریم $A = B$.

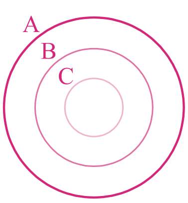
مثال: اگر $A = \{-1,1,-2,2\}$ ، $B = \{0,1,2\}$ ، $C = \{1,2\}$ ، $D = \{-1\}$ ، $E = \{-1,1\}$ و $F = \{1,2\}$ ، مشخص کن که هر کدام از این مجموعه‌ها زیرمجموعهٔ کدام یک از این مجموعه‌هاست؟

پاسخ:

$A \subseteq A \ ,\ B \subseteq B \ ,\ C \subseteq C \ ,\ C \subseteq A \ ,\ C \subseteq B \ ,\ C \subseteq F \ ,\ D \subseteq D \ ,\ D \subseteq A$

$D \subseteq E \ ,\ E \subseteq E \ ,\ E \subseteq A \ ,\ F \subseteq F \ ,\ F \subseteq A \ ,\ F \subseteq B \ ,\ F \subseteq C$

مثال: با توجه به شکل، در جاهای خالی علامت $\subseteq$ یا $\nsubseteq$ قرار بده.



$A \square A$	$A \square B$	$A \square C$	$A \square \varnothing$
$B \square A$	$B \square B$	$B \square C$	$B \square \varnothing$
$C \square A$	$C \square B$	$C \square C$	$C \square \varnothing$
$\varnothing \square A$	$\varnothing \square B$	$\varnothing \square C$	$\varnothing \square \varnothing$

پاسخ:

$A \subseteq A$	$A \nsubseteq B$	$A \nsubseteq C$	$A \nsubseteq \varnothing$
$B \subseteq A$	$B \subseteq B$	$B \nsubseteq C$	$B \nsubseteq \varnothing$
$C \subseteq A$	$C \subseteq B$	$C \subseteq C$	$C \nsubseteq \varnothing$
$\varnothing \subseteq A$	$\varnothing \subseteq B$	$\varnothing \subseteq C$	$\varnothing \subseteq \varnothing$

از این مثال می‌توان فهمید که اگر مجموعه‌ای مانند C زیرمجموعهٔ مجموعه‌ای مانند B باشد و مجموعهٔ B نیز زیرمجموعهٔ مجموعه‌ای مانند A باشد، C زیرمجموعهٔ A نیز هست. (معلم ما می‌گفت: «اگه کرم توی شکم ماهی باشه و ماهی توی شکم کوسه باشه، کرم توی شکم کوسه هم هست!»)

به ازای هر سه مجموعهٔ دلخواه مانند A، B و C داریم: $\left.\begin{matrix}C\subseteq B\\ B\subseteq A\end{matrix}\right\}\Rightarrow C\subseteq A$

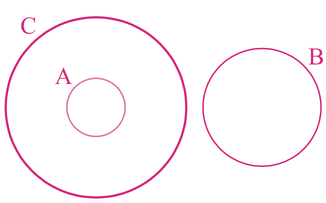
مثال: **با ذکر یک مثال و رسم یک نمودار وِن ثابت کن** $\left.\begin{matrix}\mathbf{A\not\subseteq B}\\ \mathbf{B\not\subseteq C}\end{matrix}\right\}\Rightarrow \mathbf{A\not\subseteq C}$ **نادرست است.**

پاسخ:

$A=\{۱\}$

$B=\{۳\}$

$C=\{۱,۲\}$



در این‌جا $A\not\subseteq B$ و $B\not\subseteq C$ ولی $A\subseteq C$.

حواست باشد که فرق بین عضو و زیرمجموعه را فهمیده باشی! زیرمجموعه، خودش یک مجموعه است که عضوهای آن در مجموعهٔ اصلی وجود دارد. مثلاً مجموعه $A=\{۱,۲\}$ دو عضو دارد: ۱ و ۲. و چهار زیرمجموعه دارد: $\{۱\}$، $\{۲\}$، $\{۱,۲\}$ و $\{\ \}$ (یا همان $\varnothing$). اگر دقت کنی همهٔ زیرمجموعه‌ها علامت $\{\ \}$ را دارند، زیرا خودشان مجموعه هستند. در این مثال چون مجموعهٔ اصلی دارای دو عضو بود، زیرمجموعه‌ها می‌توانند صفر، یک یا دو عضو داشته باشند.

مثال: **مجموعهٔ $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ را درنظر بگیر و جاهای خالی را با علامت $\in$ ، $\notin$ ، $\subseteq$ یا $\not\subseteq$ پر کن:**

$۵ \bigcirc A$	$\{۳\} \bigcirc A$	$۳ \bigcirc A$
$\{\ \} \bigcirc A$	$\{۱,۲,۳,۴\} \bigcirc A$	$\{۲,۴\} \bigcirc A$
$\{۳,۵\} \bigcirc A$	$\varnothing \bigcirc A$	$۱ \bigcirc \{\ \}$
$A \bigcirc \varnothing$	$۲ \bigcirc \varnothing$	$A \bigcirc A$
$\{۵\} \bigcirc \varnothing$	$\{۱,۲,۳,۴,۵\} \bigcirc A$	$\{۱,۲\} \bigcirc \{۱,۳,۴\}$

پاسخ:

$۵ \notin A$	$\{۳\} \subseteq A$	$۳ \in A$
$\{\ \} \subseteq A$	$\{۱,۲,۳,۴\} \subseteq A$	$\{۲,۴\} \subseteq A$
$\{۳,۵\} \nsubseteq A$	$\varnothing \subseteq A$	$۱ \notin \{\ \}$
$A \nsubseteq \varnothing$	$۲ \notin \varnothing$	$A \subseteq A$
$\{۵\} \nsubseteq \varnothing$	$\{۱,۲,۳,۴,۵\} \nsubseteq A$	$\{۱,۲\} \nsubseteq \{۱,۳,۴\}$

مثال: **همهٔ زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $A=\{۱,۲\}$ را بنویس. این مجموعه چند زیرمجموعه دارد؟**

پاسخ: ۴ زیرمجموعه دارد: $\{\ \},\{۱\},\{۲\},\{۱,۲\}$

مثال: **همهٔ زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $A=\{a,b,c\}$ را بنویس. این مجموعه چند زیرمجموعه دارد؟**

پاسخ: ۸ زیرمجموعه دارد: $\{\ \},\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}$

مثال: **اگر P مجموعهٔ همهٔ اعداد اول یک‌رقمی باشد، تمام زیرمجموعه‌های P را بنویس. این مجموعه چند زیرمجموعه دارد؟**

پاسخ: ۱۶ زیرمجموعه دارد: $P=\{۲,۳,۵,۷\}$

$\{\ \},\{۲\},\{۳\},\{۵\},\{۷\},\{۲,۳\},\{۲,۵\},\{۲,۷\},\{۳,۵\},\{۳,۷\},\{۵,۷\},\{۲,۳,۵\},\{۲,۳,۷\},\{۲,۵,۷\},\{۳,۵,۷\},\{۲,۳,۵,۷\}$

با توجه به مثال‌های بالا حتماً فهمیدی که تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه n عضوی، از چه رابطه‌ای به‌دست می‌آید:

> تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ n عضوی، ۲^n تاست.

مثال: **یک مجموعهٔ ۹ عضوی، چند زیرمجموعه دارد؟**

پاسخ: $۲^۹=۵۱۲$ زیرمجموعه دارد.

مثال: **تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه برابر است با ۲۵۶. تعداد اعضای این مجموعه چند است؟**

پاسخ: $۲^۸=۲۵۶$، پس این مجموعه ۸ عضو دارد.

مثال: **تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ $۲k+۷$ عضوی، ۱۶ برابر تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه $k+۵$ عضوی است. k را به‌دست بیار.**

پاسخ:

$$۲^{۲k+۷}=۱۶\times ۲^{k+۵} \Rightarrow ۲^{۲k+۷}=۲^۴\times ۲^{k+۵} \Rightarrow ۲^{۲k+۷}=۲^{k+۹} \Rightarrow ۲k+۷=k+۹ \Rightarrow k=۲$$

نمایش مجموعه‌های اعداد

مجموعه‌های اعداد را می‌توان با روش‌های **توصیفی**، **نمودار وِن** یا **استفاده از نمادهای ریاضی** نشان داد. با روش‌های توصیفی (نشان دادن اعضای مجموعه) و رسم نمودار وِن قبلاً آشنا شدی.

حالا می‌خواهیم مجموعه‌ها را با استفاده از «نمادهای ریاضی» نمایش دهیم. مثلاً مجموعهٔ A را در نظر بگیر: $A=\{۳k \mid k\in \mathbb{N}\}$

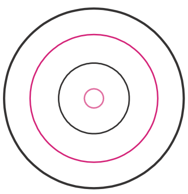
در این عبارت، علامت «|» را «به طوری که» می‌خوانیم. پس کل این عبارت را از چپ به راست، به این‌صورت می‌خوانیم: «A برابر است با مجموعهٔ اعدادی به شکل $۳k$، به طوری که k عضوی از $\mathbb{N}$ است» (k عضوی از $\mathbb{N}$ است در واقع یعنی k یک عدد طبیعی است). پس اعضای مجموعهٔ A در واقع $۳k$هایی هستند که به‌جای k باید اعداد طبیعی قرار گیرد. اولین عضو A را با قرار دادن $k=۱$ در $۳k$ به‌دست می‌آوریم که می‌شود ۳. دومین عضو A را با قرار دادن $k=۲$ در $۳k$ به‌دست می‌آوریم که می‌شود ۶ و همین‌طور تا آخر. پس با کمی دقت متوجه می‌شویم که A مجموعهٔ مضارب طبیعی عدد ۳ است. یعنی $A=\{۳,۶,۹,۱۲,...\}$.

یک مثال دیگر! فرض کن $B=\{۲k-۱ \mid k\in\mathbb{N}\ ,\ k<۶\}$. این عبارت را به این‌صورت از چپ به راست می‌خوانیم: «B برابر است با مجموعهٔ اعدادی به شکل $۲k-۱$، به‌طوری که k عضوی از $\mathbb{N}$ است و k از ۶ کوچک‌تر است». پس در این‌جا نیز k باید عددی طبیعی باشد، ولی فقط اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۶. یعنی k می‌تواند ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ یا ۵ باشد. که به ازای آن‌ها $۲k-۱$ به ترتیب برابر است با ۱ ، ۳ ، ۵ ، ۷ و ۹. پس مجموعهٔ B در واقع مجموعهٔ اعداد طبیعی فرد یک‌رقمی است. یعنی $B=\{۱,۳,۵,۷,۹\}$.

به‌جز $\mathbb{N}$ مجموعه‌های معروف دیگری هم وجود دارند که می‌توان از آن‌ها در نمایش مجموعه‌ها به روش نمادین استفاده کرد. مثلاً: $\mathbb{Z}$ که مجموعهٔ اعداد صحیح است: $\mathbb{Z}=\{...,-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲,۳,...\}$

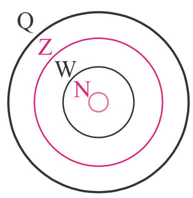
یا $\mathbb{W}$ که مجموعهٔ اعداد حسابی است: $\mathbb{W}=\{۰,۱,۲,۳,...\}$

یا $\mathbb{Q}$ که مجموعهٔ اعداد گویاست.



مثال: اگر مجموعه‌های $\mathbb{W}$ ، $\mathbb{Z}$ ، $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{N}$ را در نمودار وِن روبه‌رو نمایش داده باشیم، مشخص کن که هر دایره مربوط به کدام مجموعه است؟

پاسخ:



هر عدد طبیعی، یک عدد حسابی هم هست. هر عدد حسابی، یک عدد صحیح هم هست. هر عدد صحیح، یک عدد گویا هم هست. پس داریم: $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{W}\subseteq\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}$

مثال: عضوهای مجموعه‌های زیر را بنویس:

$\mathbf{B=\{۳x \mid x\in\mathbb{N}\}}$ $\qquad$ $\mathbf{A=\{x \mid x\in\mathbb{Z},-۲\le x<۵\}}$

پاسخ:

$A=\{-۲,-۱,۰,۱,۲,۳,۴\}$

$B=\{۳,۶,۹,\cdots\}$

مثال: مجموعه‌های زیر را با نمادهای ریاضی نشان بده:

C = اعداد صحیح مضرب ۷ $\qquad$ $\mathbf{B=\{-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲,۳,۴\}}$ $\qquad$ $\mathbf{A=\{۴,۵,۶,۷,\cdots\}}$

پاسخ:

$A=\{x \mid x\in\mathbb{N},x>۳\}$

$B=\{x \mid x\in\mathbb{Z},-۳\le x\le۴\}$

$C=\{۷k \mid k\in\mathbb{Z}\}$

مثال: اعضای مجموعه‌های زیر را بنویس:

$\mathbf{A=\{۳k-۳\,|\,k\in\mathbb{W}\}}$ $\qquad$ $\mathbf{B=\{\frac{۳k}{۵}\,|\,k\in\mathbb{Z}\ ,-۲\le k<۲\}}$ $\qquad$ $\mathbf{C=\{۲^{k}\,|\,k\in\mathbb{N},k\le ۸\}}$

پاسخ:

$k=۰,۱,۲,۳,... \quad\Rightarrow\quad A=\{-۳,۰,۳,۶,...\}$

$k=-۲,-۱,۰,۱ \quad\Rightarrow\quad B=\{\frac{-۶}{۵},\frac{-۳}{۵},۰,\frac{۳}{۵}\}$

$k=۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸ \quad\Rightarrow\quad C=\{۲,۴,۸,۱۶,۳۲,۶۴,۱۲۸,۲۵۶\}$

مثال: مجموعه‌های زیر را با استفاده از نمادهای ریاضی نمایش بده:

$\mathbf{A=\{۱,\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۵}\}}$ $\qquad$ $\mathbf{B=\{۰,۱,۴,۹,۱۶,۲۵,...\}}$ $\qquad$ $\mathbf{C=\{-۱,-\frac{۱}{۳},-\frac{۱}{۹},-\frac{۱}{۲۷},...\}}$

پاسخ:

$A=\{\frac{۱}{k}\,|\,k\in\mathbb{N}\ ,\ k<۶\}$

$B=\{k^{۲}\,|\,k\in\mathbb{W}\}$

$C=\{-\frac{۱}{۳^{k}}\,|\,k\in\mathbb{W}\}$

یادت باشد که اگر مجموعه‌ای با نمادهای ریاضی معرفی شده بود و خواستیم اعضای آن را مشخص کنیم، اعضای آن حتماً یکتا خواهند بود. یعنی مثلاً اگر خواستیم اعضای مجموعه $A=\{۲k\,|\,k\in\mathbb{Z}\}$ را بنویسیم، به این صورت است:

$A=\{...,-۶,-۴,-۲,۰,۲,۴,۶,...\}$

ولی اگر اعضای مجموعه را داشتیم و خواستیم مجموعه را با استفاده از نمادهای ریاضی نمایش دهیم، این نمایش لزوماً یکتا نیست. مثلاً مجموعهٔ $B=\{۱,۴,۷,۱۰,۱۳,...\}$ را درنظر بگیر. یکی از نمایش‌های این مجموعه با نمادهای ریاضی $B=\{۳k-۲\,|\,k\in\mathbb{N}\}$ است. یکی دیگر از نمایش‌های آن $B=\{۳k+۱\,|\,k\in\mathbb{W}\}$ است. نمایش دیگری از آن $B=\{۳k+۴\,|\,x\in\mathbb{Z},\,k>-۲\}$ است. نمایش‌های متعدد دیگری هم وجود دارد!

مثال: ابتدا اعضای مجموعه‌های زیر را مشخص کن. سپس بگو هر کدام از آن‌ها چند زیرمجموعه دارند و زیرمجموعه‌های آن‌ها را بنویس.

$\mathbf{A=\{x\in\mathbb{Z}\,|\,۳x-۱=۵\}}$ $\qquad$ $\mathbf{B=\{\frac{y}{۲}\,|\,y=۰,۳\}}$ $\qquad$ $\mathbf{C=\{ab\,|\,a,b\in\{۱,۲\}\}}$

پاسخ:

$A=\{۲\}\ \Rightarrow$ یک عضو دارد، پس $۲=۲^{۱}$ زیرمجموعه دارد

$\{\ \},\{۲\}\subseteq A$

$B=\{۰,\frac{۳}{۲}\}\ \Rightarrow$ دو عضو دارد، پس $۴=۲^{۲}$ زیرمجموعه دارد

$\{\ \},\{۰\},\left\{\frac{۳}{۲}\right\},\{۰,\frac{۳}{۲}\}\subseteq B$

$C=\{۱,۲,۴\}\ \Rightarrow$ سه عضو دارد، پس $۸=۲^{۳}$ زیرمجموعه دارد

$\{\ \},\{۱\},\{۲\},\{۴\},\{۱,۲\},\{۱,۴\},\{۲,۴\},\{۱,۲,۴\}\subseteq C$

مثال: اگر $A=\{۱,۲,۳,۴\}$، اعضای مجموعه‌های زیر را مشخص کن:

$D=\{x^x \mid x\in C\,,\,x-۱\in B\}$ $\qquad$ $C=\{x \mid x\in B\,,\,\frac{x+۱}{۲}\in \mathbb{N}\}$ $\qquad$ $B=\{x\in A \mid x^۳<۳۰\}$

پاسخ:

$۱^۳=۱<۳۰$ ✓ $\qquad$ $۲^۳=۸<۳۰$ ✓ $\qquad$ $۳^۳=۲۷<۳۰$ ✓ $\qquad$ $۴^۳=۶۴>۳۰$ ×

$\Rightarrow B=\{۱,۲,۳\}$

$\frac{۱+۱}{۲}=۱\in\mathbb{N}$ ✓ $\qquad$ $\frac{۲+۱}{۲}=\frac{۳}{۲}\notin\mathbb{N}$ × $\qquad$ $\frac{۳+۱}{۲}=۲\in\mathbb{N}$ ✓

$\Rightarrow C=\{۱,۳\}$

$۱-۱=۰\notin B$ × $\qquad$ $۳-۱=۲\in B$ ✓

$\Rightarrow D=\{۳^۳\}=\{۲۷\}$

درس سوم: اجتماع، اشتراک و تفاضل مجموعه‌ها

مجموعهٔ مرجع

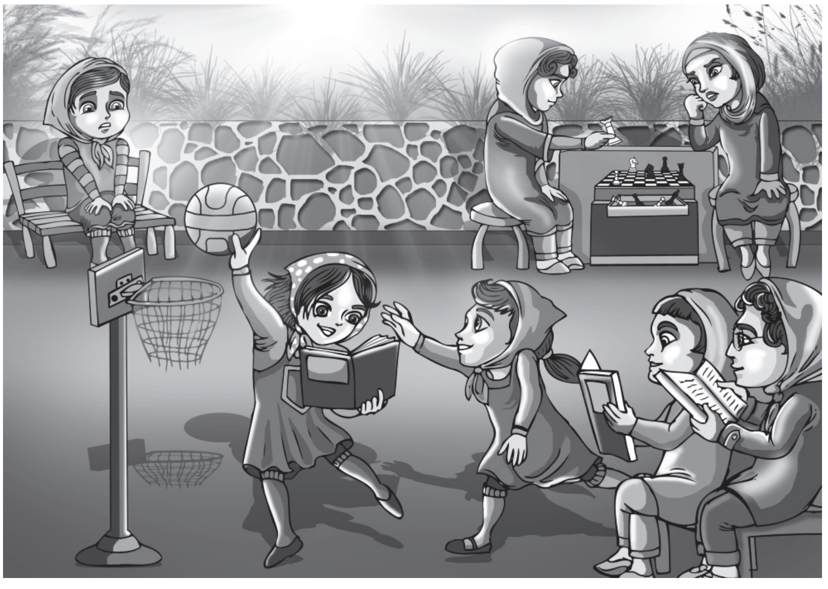
هرجا که دربارهٔ تعدادی مجموعه صحبت می‌کنیم، همهٔ این مجموعه‌ها را می‌توانیم زیرمجموعهٔ یک مجموعه درنظر بگیریم که به آن **مجموعهٔ مرجع** گفته می‌شود و آن را با حرف **M** نشان می‌دهیم.

فرض کن کیانا، لیدا، بهار، سمانه، نرگس، روژیار و زهرا دانش‌آموزان کلاس نهم مدرسه‌ای هستند.

A مجموعه‌ای از دانش‌آموزان است که در مسابقات ریاضی شرکت کرده‌اند: A = { زهرا، سمانه، کیانا }

B مجموعه‌ای از دانش‌آموزان است که در مسابقات بسکتبال شرکت کرده‌اند: B = { نرگس، کیانا }

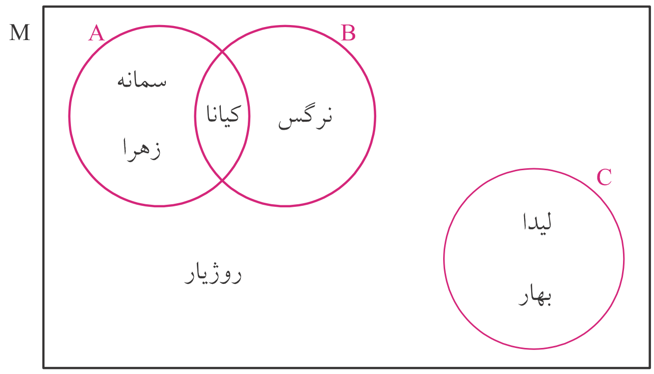
C مجموعه‌ای از دانش‌آموزان است که در مسابقات شطرنج شرکت کرده‌اند: C = { بهار، لیدا }



مجموعه‌های A ، B و C زیرمجموعهٔ یک مجموعهٔ مرجع هستند که در اینجا مجموعهٔ دانش‌آموزان کلاس نهم مدرسه‌شان است:

$M =$ { زهرا، روژیار، نرگس، سمانه، بهار، لیدا، کیانا }

در رسم نمودار وِن معمولاً مجموعه‌ها را با دایره مشخص می‌کنند و مجموعهٔ مرجع را با یک مستطیل بزرگ که همهٔ دایره‌ها (مجموعه‌ها) داخل آن هستند (زیرمجموعهٔ آن هستند) نمایش می‌دهند. مثلاً نمودار وِن مثال ما به این شکل است:



متمم یک مجموعه

متمم مجموعه A، مجموعهٔ همهٔ عضوهای M است که در A نیست و آن را با A' نشان می‌دهیم.

در مثالی که زدیم، داریم:

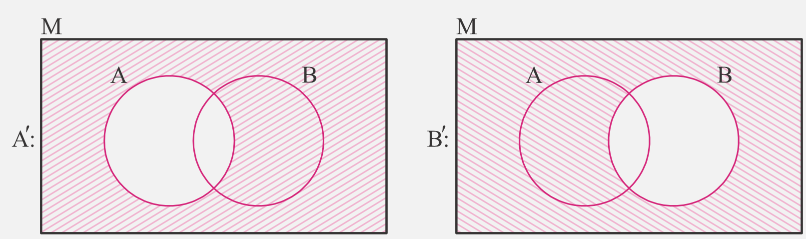
$A' =$ { روژیار، بهار، لیدا، نرگس } $\leftarrow$ آن‌هایی که در A نیستند

$B' =$ { روژیار، بهار، لیدا، زهرا، سمانه } $\leftarrow$ آن‌هایی که در B نیستند

$C' =$ { روژیار، نرگس، زهرا، سمانه، کیانا } $\leftarrow$ آن‌هایی که در C نیستند

متمم مجموعهٔ A را با نمادهای ریاضی به این صورت تعریف می‌کنیم:

$$A' = \{x \mid x \in M , x \notin A\}$$



مثال: اگر $M = \{۱,۲,۳,۴,۵\}$ و $A = \{۳,۴,۵\}$، متمم مجموعهٔ A را بنویس.

پاسخ: $A' = \{۱,۲\}$

مثال: اگر $M = \mathbb{N}$, $A = \{۲x \mid x \in \mathbb{N}\}$، متمم مجموعهٔ A را با نوشتن اعضا مشخص کن.

پاسخ: $A' = \{۱,۳,۵,\cdots\}$

اجتماع دو مجموعه

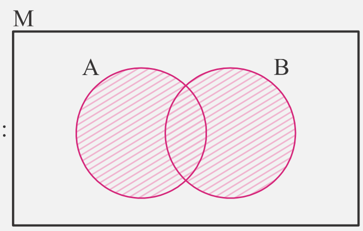
در مثال مدرسه، مجموعه دانش‌آموزانی را که حداقل در یکی از مسابقات ریاضی یا بسکتبال شرکت کرده‌اند، درنظر بگیر. اعضای این مجموعه در واقع یا عضوی از مجموعه A هستند یا عضوی از مجموعه B (یا عضو هر دو). به مجموعه‌ای که اعضای آن حداقل در یکی از مجموعه‌های A و B وجود دارند، «اجتماع مجموعه‌های A و B» گفته می‌شود و آن را با نماد $A \cup B$ نشان می‌دهیم. پس داریم:

$A \cup B =$ { نرگس، کیانا، زهرا، سمانه }

اجتماع دو مجموعهٔ A و B را با نمادهای ریاضی به این صورت تعریف می‌کنیم:

$A \cup B = \{x \mid x \in A$ یا $x \in B\}$

$A \cup B$:



با توجه به تعریف اجتماع دو مجموعه، برای هر مجموعهٔ دلخواه A داریم:

$A \cup A' = M \quad , \quad A \cup M = M \quad , \quad A \cup \varnothing = A \quad , \quad A \cup A = A$

مثال: اگر $A = \{۱,۲,۳\}$ و $B = \{۲,۳,۴\}$، $A \cup B$ را مشخص کن.

پاسخ: $A \cup B = \{۱,۲,۳,۴\}$

مثال: اگر $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -۲ < x < ۵\}$ و $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x < ۷\}$، $A \cup B$ را با نوشتن اعضای آن مشخص کن.

پاسخ:

$$\begin{matrix} A = \{-۱,۰,۱,۲,۳,۴\} \\ B = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶\} \end{matrix} \Rightarrow A \cup B = \{-۱,۰,۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$$

مثال: اگر $A \cup B = B$، درمورد A و B چه می‌توان گفت؟

پاسخ: چون اجتماع A و B برابر B شده، یعنی A عضوی نداشته که در B نباشد، پس A زیرمجموعهٔ B است.

مثال: عبارت‌های زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویس:

الف) $(A \cup M)' \cup (\varnothing \cup A')$ ب) $(A' \cup A)' \cup (M' \cup A)$

پاسخ:

الف) $(M)' \cup (A') = \varnothing \cup A' = A'$

ب) $(M)' \cup (\varnothing \cup A) = \varnothing \cup (A) = A$