فصل سوم: تبدیل‌ها

بخش پنجم: تجانس

آن‌چه در این بخش می‌خوانیم

- مفهوم تجانس
  - انواع تجانس
  - ویژگی‌های تجانس
- ضابطه‌ی تجانس
  - ضابطه‌ی تجانس با مرکز $O(\alpha, \beta)$
  - تجانس‌های متوالی

از جمله تبدیل‌های کارآمد که برخلاف تبدیل‌های معرفی شـده قبلی ایزومتری نیسـت تجانس می‌باشـد که آن را به صورت زیر معرفی می‌کنیم.

تعریف **تجانس: تجانس به مرکز O و نسبت k تبدیلی است که هر نقطه‌ی A در صفحه را به نقطه‌ای مانند A' از آن صفحه نظیر می‌کند به طوری که:**

الف) مرکز تجانس یعنی نقطه‌ی O ثابت باشد. (یعنی تصویر O تحت تجانس به مرکز O خودش می‌شود.)

ب) $\overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OA}$

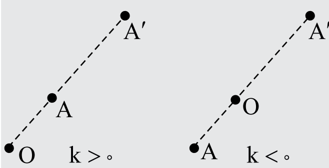
در این صورت A' مجانس A به مرکز O و نسبت k نامیده می شود.

تذکر در تجانس به نسبت k، به عدد k عامل قیاس یا مقیاس نیز می‌گوییم. واضح است که $k \neq 0$، زیرا اگر $k = 0$، آن‌گاه $\overrightarrow{OA} = 0$ و در نتیجه A' بر O منطبق می‌شود. پس تصویر تمام نقاط بر O منطبق است و اصلاً با تبدیل مواجه نیستیم.

نتیجه:

۱- اگر A' مجانس A به مرکز O با نسبت k باشد، آن‌گاه نقاط O، A و A' روی یک خط راست قرار دارند به طوری که $\dfrac{OA'}{OA} = |k|$.

۲- اگر در تجانس، k مثبت باشد، آن‌گاه نقاط A و A' در یک طرف O بوده و تجانس را مستقیم می‌گوییم و اگر k منفی باشد، آن‌گاه نقاط A و A' در طرفین O بوده و تجانس را معکوس می‌نامیم.[1]

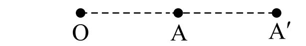


۳- اگر A' مجانس A به مرکز O با نسبت k باشد، آن‌گاه A مجانس نقطه‌ی A' به مرکز O با نسبت $\dfrac{1}{k}$ است. زیرا:

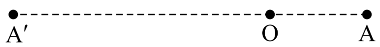
$$\overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OA} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} = \frac{1}{k}\overrightarrow{OA'}$$

۱- در کتاب درسی تجانس معکوس معرفی نشده است و در امتحان نهایی از آن سؤالی مطرح نمی‌شود، ولی در آزمون‌های تستی و حتی کنکور سراسری باید با این مفهوم آشنا باشید.

مسأله ۱ **نقطه‌های A و O در صفحه داده شده‌اند. مجانس نقطه‌ی A به مرکز O را با نسبت‌های $k=2$ و $k=-3$ رسم کنید.**



راه‌حل: اگر A' مجانس A به مرکز O با نسبت ۲ باشد آن‌گاه $\overrightarrow{OA'}=2\overrightarrow{OA}$. بنابراین کافیست از O به A وصل کرده سپس OA را به اندازه‌ی خودش امتداد دهیم تا به A' برسیم.



اگر A' مجانس A به مرکز O با نسبت ۳- باشد، آن‌گاه $\overrightarrow{OA'}=-3\overrightarrow{OA}$ بنابراین باید از O به A وصل کرده در سـمت دیگر O پاره‌خط OA را به اندازه‌ی سه‌برابر خودش امتداد دهیم تا به A' برسیم.

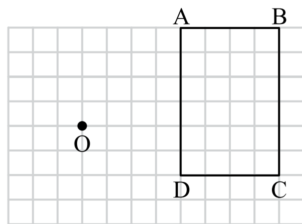
مسأله ۲ **اگر نقاط M' و N' به ترتیب مجانس‌های دو نقطه‌ی M و N در تجانس به مرکز O و نسبت $k=\frac{2}{3}$ باشند، با فرض $MN=6$ فاصله‌ی دو نقطه‌ی M' و N' را تعیین کنید.**

راه‌حل: اگر M' مجانس M به مرکز O با نسبت $\frac{2}{3}$ باشد، آن‌گاه $\overrightarrow{OM'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OM}$ و اگر N' مجانس N به مرکز O با نسبت $\frac{2}{3}$ باشد، آن‌گاه $\overrightarrow{ON'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{ON}$. با توجه به این روابط نقاط M' و N' را در شکل مشخص می‌کنیم. داریم:

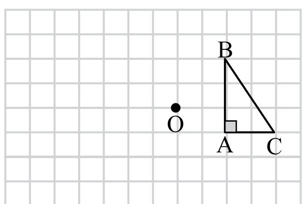
$$M'N'=ON'-OM'=\frac{2}{3}ON-\frac{2}{3}OM=\frac{2}{3}(ON-OM)=\frac{2}{3}MN=\frac{2}{3}(6)=4$$

مسأله ۳ **مجانس هر شکل را به مرکز O با نسبت داده شده رسم کنید.**

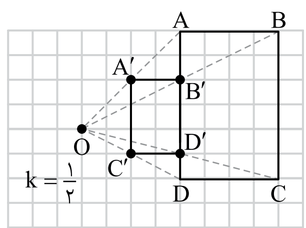
الف) $k=\frac{1}{2}$



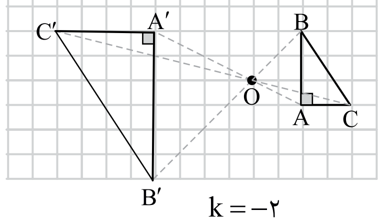
ب) $k=-2$



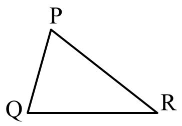
راه‌حل: **الف)** مجانس هر یک از رئوس مستطیل را به مرکز O و نسبت تجانس $k=\frac{1}{2}$ به‌دست می‌آوریم. برای این منظور از مرکز O به رئوس مستطیل وصل کرده وسط هرکدام از پاره‌خط‌های حاصل را به دست می‌آوریم. حال مانند شکل مقابل نقاط به‌دست آمده را به‌ترتیب به یک‌دیگر وصل می‌کنیم.

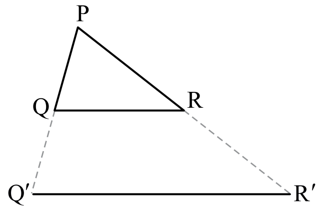


ب) بـرای به دسـت آوردن مجانـس هر رأس مثلث به مرکز O و نسـبت تجانس $k=-2$ از مرکز O به آن رأس وصل کرده از طرف مخالف آن را به انـدازه‌ی دو برابر خودش امتداد می دهیـم. در نهایت نقاط حاصل را به ترتیب به هم وصل می‌کنیم.



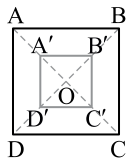
مسأله ④ مجانس مثلث PQR را به مرکز P با نسبت ۲ رسم کنید.





راه‌حل: مجانس نقطه‌ی P خودش می‌باشد و برای تعیین مجانس نقاط Q و R به مرکز P با نسبت ۲ باید PQ و PR را به اندازه‌ی خودشان امتداد دهیم. تا به نقاط Q' و R' برسیم در این صورت مثلث $PQ'R'$ مجانس PQR خواهد بود.

مسأله ⑤ مجانس مربع $ABCD$ به مرکز نقطه‌ی تلاقی اقطار مربع با نسبت $\frac{1}{2}$ را رسم کنید.



راه‌حل: اگر O محل تلاقی دو قطر مربع $ABCD$ باشد و وسط‌های OA، OB ، OC و OD را A' ، B' ، C' و D' در نظر بگیریم، آن‌گاه $A'B'C'D'$ مجانس مربع $ABCD$ به مرکز O و نسبت $\frac{1}{2}$ است.

از مسأله‌های قبل و تعریف تجانس می‌توان نکته‌های زیر را نتیجه گرفت.

نکته: **اگر در تجانس $|k|>1$، تصویر شکل بزرگ‌تر از خود شکل است به همین دلیل در این شرایط تجانس را انبساط می‌گوییم.**

اگر در تجانس $|k|<1$، تصویر شکل کوچک‌تر از خود شکل است به همین دلیل در این شرایط تجانس را انقباض می‌گوییم.

اگر در تجانس $k=1$، هر نقطه به خودش تصویر می‌شود که به آن تبدیل همانی می‌گوییم.

اگر در تجانس $k=-1$، مرکز تجانس وسط هر نقطه و تصویر آن قرار دارد. پس تجانس با نسبت $k=-1$، همان بازتاب مرکزی یا دوران ۱۸۰ درجه به مرکز تجانس است.

ویژگی‌های تجانس

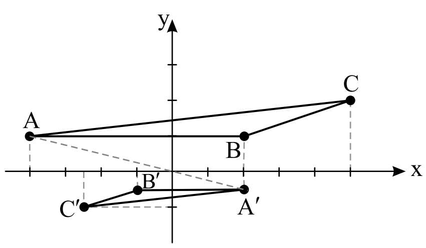
پیش‌از آن‌که به ویژگی‌های تجانس بپردازیم، با دو مسأله برای ورود به بحث آماده می‌شویم.

مسأله ⑥ مثلث ABC با رئوس $A(-4,1)$ ، $B(2,1)$ و $C(5,2)$ مفروض است.

الف) مجانس این مثلث را به مرکز $O(0,0)$ و نسبت $k=-\frac{1}{2}$ رسم کنید.

ب) تجانس قسمت (الف) انبساط است یا انقباض؟ چرا؟

ج) مثلث و تصویرش را از نظر طول ضلع و شیب ضلع با هم مقایسه کنید.



راه‌حل: **الف)** در دستگاه مختصات از هر کدام از نقاط A، B و C به O وصل کرده، پاره‌خط را به اندازه‌ی نصف طول آن از طرف O امتداد می‌دهیم تا تصویر سه نقطه به دست بیاید.

$$A(-4,1)\rightarrow A'(2,\frac{-1}{2})$$

$$B(2,1)\rightarrow B'(-1,\frac{-1}{2})$$

$$C(5,2)\rightarrow C'(\frac{-5}{2},-1)$$

ب) در این تجانس $|k|<1$ پس این تجانس انقباض است. می‌بینید که شکل کوچک شده است.

ج) طول پاره‌خط‌های AB ، AC و BC را با طول پاره‌خط‌های $A'B'$ و $A'C'$ و $B'C'$ مقایسه می‌کنیم. داریم:

$$AB=\sqrt{(۲+۴)^۲+(۱-۱)^۲}=۶ \quad , \quad A'B'=\sqrt{(-۱-۲)^۲+(\frac{-۱}{۲}+\frac{۱}{۲})^۲}=۳$$

$$AC=\sqrt{(۵+۴)^۲+(۲-۱)^۲}=\sqrt{۸۲} \quad , \quad A'C'=\sqrt{(-\frac{۵}{۲}-۲)^۲+(-۱+\frac{۱}{۲})^۲}=\sqrt{\frac{۸۱}{۴}+\frac{۱}{۴}}=\frac{\sqrt{۸۲}}{۲}$$

$$BC=\sqrt{(۵-۲)^۲+(۲-۱)^۲}=\sqrt{۱۰} \quad , \quad B'C'=\sqrt{(-\frac{۵}{۲}+۱)^۲+(-۱+\frac{۱}{۲})^۲}=\sqrt{\frac{۹}{۴}+\frac{۱}{۴}}=\frac{\sqrt{۱۰}}{۲}$$

همان‌طور که دیده می‌شود این تجانس ایزومتری نیست ولی داریم $\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{۱}{۲}$.

حال شیب پاره‌خط‌ها را با شیب تصاویرشان مقایسه می‌کنیم. داریم:

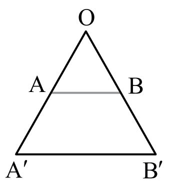
$$m_{AB}=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\frac{۱-۱}{-۴-۲}=۰ \,,\, m_{A'B'}=\frac{y_{A'}-y_{B'}}{x_{A'}-x_{B'}}=\frac{-\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}}{۲+۱}=۰ \Rightarrow AB \parallel A'B'$$

$$m_{AC}=\frac{y_A-y_C}{x_A-x_C}=\frac{۱-۲}{-۴-۵}=\frac{۱}{۹} \,,\, m_{A'C'}=\frac{y_{A'}-y_{C'}}{x_{A'}-x_{C'}}=\frac{-\frac{۱}{۲}+۱}{۲+\frac{۵}{۲}}=\frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{۹}{۲}}=\frac{۱}{۹} \Rightarrow AC \parallel A'C'$$

$$m_{BC}=\frac{y_B-y_C}{x_B-x_C}=\frac{۱-۲}{۲-۵}=\frac{۱}{۳} \,,\, m_{B'C'}=\frac{y_{B'}-y_{C'}}{x_{B'}-x_{C'}}=\frac{-\frac{۱}{۲}+۱}{-۱+\frac{۵}{۲}}=\frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{۳}{۲}}=\frac{۱}{۳} \Rightarrow BC \parallel B'C'$$

همان‌طور که دیده می‌شود این تجانس شیب خط را حفظ می‌کند.

مسأله ⑦ ثابت کنید مجانس هر پاره‌خط، پاره‌خطی است موازی با آن که اندازه‌اش برابر حاصل‌ضرب اندازه‌ی پاره‌خط اولیه در قدرمطلق نسبت تجانس می‌باشد.



راه‌حل: فرض می‌کنیم $A'B'$ مجانس پاره‌خط AB به مرکز O با نسبت k می‌باشد، در این صورت $OA'=kOA$ و $OB'=kOB$. داریم:

$$\frac{OA'}{OA}=\frac{OB'}{OB}=k \xrightarrow{\text{عکس قضیه‌ی تالس}} AB \parallel A'B', \frac{A'B'}{AB}=k$$

بنابراین مجانس هر پاره‌خط، پاره‌خطی موازی با خودش است و نسبت اندازه‌های آن‌ها برابر قدرمطلق نسبت تجانس می‌باشد.

در مسأله‌ی قبل، همان نتیجه‌ای را که در مسأله‌ی پیش از آن در حالت خاص با یک مثال دیده بودیم، در حالت کلی ثابت کرده‌ایم. پس تبدیل تجانس با نسبت k، طول همه‌ی پاره‌خط‌ها را $|k|$ برابر می‌کند و آن‌ها را به پاره‌خط‌هایی موازی با خودشان تبدیل می‌کند.
این ویژگی در یک چند ضلعی و تصویر آن تحت یک تجانس باعث می‌شود که هم زاویه‌های چند ضلعی‌ها با هم نظیر به نظیر مساوی باشند و هم نسبت همه‌ی اضلاع، نظیر به نظیر برابر باشد، یعنی تجانس یک چند ضلعی را به چند ضلعی متشابه با آن تبدیل می‌کند.

نکته: **ویژگی‌های تجانس:**

۱- تجانس شیب خط را حفظ می‌کند.

۲- تحت تجانس، مرکز تجانس ثابت می‌ماند. یعنی مجانسِ مرکز، تحت هر تجانسی با هر نسبتی خودش است.

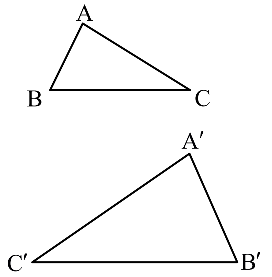
۳- تجانس جهت شکل را حفظ می‌کند.

۴- تجانس طول یا مساحت را حفظ نمی‌کند مگر در حالتی که $|k|=۱$.

۵-تجانس طول را با ضریب $|k|$ و مساحت را با ضریب $k^۲$ تغییر می‌دهد. زیرا مجانس هر شکل با نسبت $|k|$ با خودش متشابه است.

۶- خط‌هایی که نقطه‌های نظیر را به هم وصل می‌کنند در مرکز تجانس همرسند. به عبارتی هر نقطه با مجانسش و مرکز تجانس هم‌خط هستند.

ویژگی‌های (۱)، (۴) و (۵) با توجه به مسأله‌ی قبل بیان شده‌اند. ویژگی‌های (۲) و (۶) از تعریف تجانس مستقیماً به دست می‌آیند.
ویژگی (۳) نیز با توجه به شکل‌هایی که تاکنون رسم کرده‌ایم، قابل بیان است.

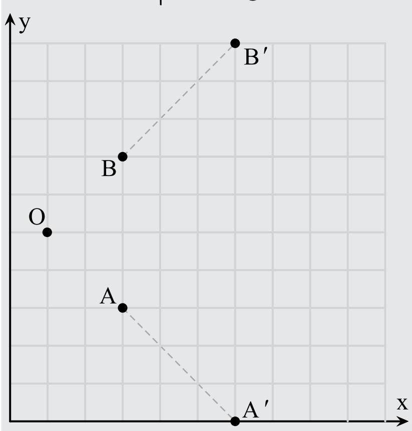


تذکر هر دو چندضلعی که مجانس یک‌دیگر باشند، متشابه‌اند، ولی دو چندضلعی متشابه لزومی ندارد مجانس یک‌دیگر باشند، مانند دو مثلث شکل روبه‌رو. در این دو مثلث خط‌هایی که هر نقطه را به تصویرش وصل می‌کنند، همرس نیستند. البته اگر دو چندضلعی غیرهمنهشت با هم متشابه باشند و اضلاع آن‌ها نظیر به نظیر موازی یک‌دیگر باشند، مجانس یک‌دیگر خواهند بود.

تست ۱: در تجانس به مرکز O و نسبت k نقاط $A(۳,۳)$ و $B(۳,۷)$ به نقاط $A'(۶,۰)$ و $B'(۶,۱۰)$ تبدیل شده‌اند. کدام گزینه درست است؟

۱) $k=\frac{۵}{۲}$, $O(۱,۵)$ **۲)** $k=۵$, $O(۲,-۱)$ **۳)** $k=\frac{۵}{۲}$, $O(۱,۴)$ **۴)** $k=۵$, $O(۰,۱)$

پاسخ: در تجانس خطوطی که نقاط نظیر را به هم وصل می‌کنند یک‌دیگر را در مرکز تجانس قطع می‌کنند. بنابراین اگر معادله‌ی خطوط AA' و BB' را نوشته سپس آن‌ها را با هم قطع دهیم مرکز تجانس O که همان نقطه‌ی تلاقی آن‌ها است به‌دست می‌آید. داریم:



$$m_{AA'}=\frac{y_A-y_{A'}}{x_A-x_{A'}}=\frac{۳-۰}{۳-۶}=-۱$$

$$y-y_۰=m(x-x_۰)\Rightarrow y-۳=-۱(x-۳)\Rightarrow y+x=۶$$

$$m_{BB'}=\frac{y_B-y_{B'}}{x_B-x_{B'}}=\frac{۷-۱۰}{۳-۶}=۱$$

$$y-y_۰=m(x-x_۰)\Rightarrow y-۷=۱(x-۳)\Rightarrow y-x=۴$$

$$\begin{cases} y+x=۶ \\ y-x=۴ \end{cases}\Rightarrow x=۱\ ,\ y=۵\ \Rightarrow\ O(۱,۵)\ \text{مرکز تجانس}$$

در ضمن نسبت $\frac{A'B'}{AB}$ برابر نسبت تجانس k است. بنابراین برای به‌دست آوردن k به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} A'B'=\sqrt{(۶-۶)^۲+(۱۰-۰)^۲}=۱۰ \\ AB=\sqrt{(۳-۳)^۲+(۷-۳)^۲}=۴ \end{array}\right\}\Rightarrow k=\frac{A'B'}{AB}=\frac{۱۰}{۴}=\frac{۵}{۲}$$

بنابراین گزینه‌ی (۱) درست است.

تست ۲: مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع $\sqrt{۱۲}$ را نسبت به مرکز O و عامل مقیاس ۳ مجانس‌یابی کرده‌ایم. مساحت و محیط مثلث تصویر به ترتیب برابر کدام است؟

۱) $۳\sqrt{۱۲}$, $۳\sqrt{۱۲}$ **۲)** $۳\sqrt{۱۲}$, ۱۸ **۳)** ۱۲ , ۱۸ **۴)** $۲۷\sqrt{۳}$, $۱۸\sqrt{۳}$

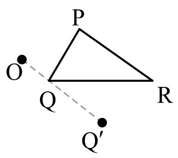
پاسخ: با توجه به نکته‌ی بالا می‌توان گفت در تجانس با نسبت k محیط k برابر و مساحت $k^۲$ برابر می‌شود. می‌دانیم محیط مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a برابر $۳a$ و مساحت آن برابر $\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲$ است. پس می‌توان نوشت:

$$\text{محیط مثلث اولیه}=۳\sqrt{۱۲}=۶\sqrt{۳}\xrightarrow{k=۳}\text{محیط مثلث مجانس}=۳\times۶\sqrt{۳}=۱۸\sqrt{۳}$$

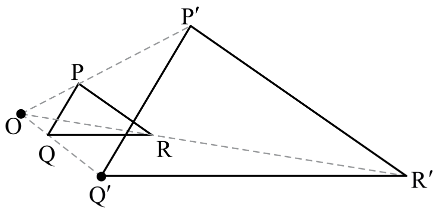
$$\text{مساحت مثلث اولیه}=\frac{\sqrt{۳}}{۴}(\sqrt{۱۲})^۲=۳\sqrt{۳}\xrightarrow{k=۳}\text{مساحت مثلث مجانس}=۳^۲\times۳\sqrt{۳}=۲۷\sqrt{۳}$$

بنابراین گزینه‌ی (۴) درست است.

مسأله ۸ در شکل روبه‌رو Q' مجانس Q به مرکز O می‌باشد. مجانس مثلث PQR را نسبت به مرکز O رسم کنید.

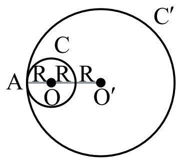


راه‌حل: می‌دانیم مجانس هر پاره‌خط موازی خود آن پاره‌خط است. از این نکته استفاده کرده مجانس رئوس R و P را به‌دست می‌آوریم. برای این منظور از O به R وصل کرده و از Q' خطی موازی QR رسم می‌کنیم تا امتداد پاره‌خط OR را در R' قطع کند.
همچنین از O به P وصل کرده و از Q' خطی موازی QP رسم می‌کنیم تا امتداد پاره‌خط OP را در P' قطع کند. مثلث $P'Q'R'$ مجانس مثلث PQR به مرکز O است.

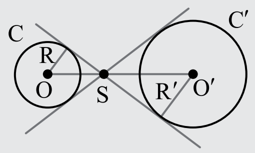


مسأله ۹ نقطه‌ی A روی دایره‌ی $C(O,R)$ قرار دارد. مجانس دایره‌ی C به مرکز A و نسبت $k=۳$ را رسم کنید.

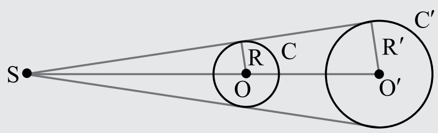
راه‌حل: برای رسم مجانس یک دایره کافی است مجانس مرکز دایره را به‌دست آورده به مرکز نقطه‌ی پیدا شده و شعاع kR دایره‌ای رسم کنیم. در اینجا نقطه‌ی A روی دایره‌ی $C(O,R)$ قرار دارد. مطابق شکل از A به O وصل کرده آن را به اندازه‌ی $۲R$ امتداد می‌دهیم تا به نقطه‌ی O' برسیم. دایره‌ای به مرکز O' و شعاع $۲R$ ترسیم می‌کنیم $(O'A)$. مطابق شکل دایره‌ی C' مجانس دایره‌ی C به مرکز A و نسبت ۳ است.



نکته: **دو دایره در هر حال با توجه به وضعیتی که نسبت به هم دارند به نوعی مجانس یک‌دیگر هستند. به طور دقیق‌تر می‌توان گفت:**
۱- اگر دو دایره نابرابر و دارای مماس مشترک خارجی باشند محل تلاقی این خط و خط‌المرکزین مرکز تجانس و نسبت شعاع‌های دو دایره نسبت تجانس می‌باشد. در این حالت مانند شکل (۱) تجانس مستقیم است.
۲- اگر دو دایره دارای مماس مشترک داخلی باشند محل تلاقی این خط و خط‌المرکزین مرکز تجانس و نسبت شعاع‌های دو دایره، قدرمطلق نسبت تجانس می‌باشد. در این حالت مانند شکل (۲) تجانس معکوس است.
۳- اگر هیچ‌کدام از خطوط مماس مشترک داخلی و خارجی قابل رسم نباشند باز هم قدرمطلق نسبت تجانس، نسبت شعاع‌های دو دایره ولی مرکز تجانس نقطه‌ای روی خط المرکزین دو دایره است که می‌توان آن‌را با توجه به وضعیت دو دایره نسبت به هم به‌دست آورد.



شکل (۲): تجانس معکوس با نسبت $\frac{-R'}{R}$

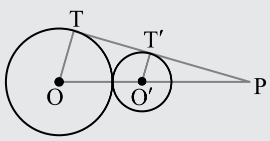


شکل (۱): تجانس مستقیم با نسبت $\frac{R'}{R}$

تست ۳: دو دایره به شعاع‌های ۲ و ۴ مماس خارج‌اند. اگر این دو دایره را مجانس هم بدانیم، فاصله‌ی مرکز تجانس مستقیم آن‌ها تا مرکز دایره‌ی بزرگ‌تر چقدر است؟

۱) ۴ **۲)** ۶ **۳)** ۱۲ **۴)** ۱۶

پاسخ: می‌دانیم دو دایره‌ی نامساوی مجانس یک‌دیگرند و مرکز تجانس مستقیم آن‌ها محل برخورد مماس‌های مشترک خارجی آن‌ها با خط‌المرکزین است. در شکل P مرکز تجانس مستقیم دو دایره است. حال چون شعاع‌های OT و $O'T'$ موازیند داریم:



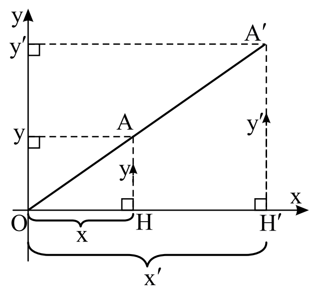
$$OT \parallel O'T' \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{PO'}{PO}=\frac{O'T'}{OT} \Rightarrow \frac{PO'}{PO}=\frac{۲}{۴} \xrightarrow{\text{تفضیل در صورت}} \frac{PO-PO'}{PO}=\frac{۴-۲}{۴}$$

$$\Rightarrow \frac{OO'}{PO}=\frac{۱}{۲} \xrightarrow{OO'=R+R'=۶} \frac{۶}{PO}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow OP=۱۲$$

بنابراین گزینه‌ی (۳) درست است.

ضابطه‌ی تجانس

ضابطه‌ی تجانس به مرکز $O(0,0)$ و نسبت k به صورت $D(x,y)=(kx,ky)$ است.



اثبات: اگر مجانس $A(x,y)$ را به مرکز $O(0,0)$ و نسبت تجانس k نقطه‌ی $A'(x',y')$ فرض کنیم، داریم:

$$OA'=k.OA \Rightarrow \frac{OA}{OA'}=\frac{1}{k}$$

از طرفی با توجه به شکل در در مثلث $OA'H'$ داریم:

$$\overset{\Delta}{OA'H'}: AH \| A'H' \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{OA}{OA'}=\frac{OH}{OH'}=\frac{AH}{A'H'}$$

حال با توجه به رابطه‌ی (۱) و طول مقادیر مشخص شده روی شکل داریم:

$$\frac{1}{k}=\frac{x}{x'}=\frac{y}{y'} \Rightarrow \begin{cases} x'=kx \\ y'=ky \end{cases} \xrightarrow{A'=(x',y')} A'=(kx,ky)$$

پس ضابطه‌ی تجانس به مرکز مبدأ و نسبت k به صورت $T(x,y)=(kx,ky)$ است.

مسأله (۱۵) **ثابت کنید مجانس هرخط به مرکز $O(0,0)$ با نسبت k خطی است موازی آن.**

راه‌حل: این مسأله را قبلاً به عنوان یکی از ویژگی‌های تجانس دیده‌ایم. حالا با استفاده از ضابطه‌ی تجانس آن‌را به روشی دیگر اثبات می‌کنیم. خط $d: ax+by+c=0$ و تجانس با ضابطه‌ی $H(x,y)=(kx,ky)$ را در نظر می‌گیریم. به کمک تغییر متغیر مجانس خط d را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} kx=x' \\ ky=y' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{x'}{k} \\ y=\frac{y'}{k} \end{cases} \xrightarrow{\text{در خط } d \text{ قرار می‌دهیم}} a(\frac{x'}{k})+b(\frac{y'}{k})+c=0 \Rightarrow ax'+by'+kc=0$$

خط $ax'+by'+kc=0$ موازی خط d است پس مجانس خط d موازی خودش می‌باشد.

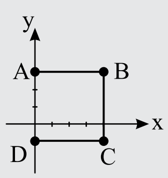
نتیجه: **مجانس خط $ax+by+c=0$ به مرکز مبدأ با نسبت k خط $ax+by+kc=0$ است. یعنی برای تعیین معادله‌ی تصویر یک خط تحت یک تجانس کافی است عدد ثابت آن خط را k برابر کنیم.**

تست ۴: چهارضلعی $ABCD$ با رئوس $A(0,3)$، $B(4,3)$، $C(4,-1)$ و $D(0,-1)$ مفروض است. مساحت تصویر این چهارضلعی تحت تبدیل $D(x,y)=(2x+3,2y-1)$ کدام است؟

۱) ۱۶ **۲)** ۳۲ **۳)** ۸ **۴)** ۶۴

پاسخ: اگر در تبدیل D اعداد ثابت را حذف کنیم به $T(x,y)=(2x,2y)$ می‌رسیم که ضابطه‌ی یک تجانس با نسبت ۲ است بنابراین تبدیل D ترکیب یک انتقال و یک تجانس با نسبت ۲ می‌باشد. می‌دانیم انتقال ایزومتری است و مساحت شکل را تغییر نمی‌دهد و تجانس با نسبت ۲ مساحت شکل را 2^2 برابر می‌کند بنابراین تبدیل D مساحت چهارضلعی را چهار برابر می‌کند.

با توجه به شکل چهارضلعی $ABCD$ مربعی به ضلع ۴ می‌باشد، پس داریم:



$$S'=4S_{ABCD}=4(4)^2=64$$

بنابراین گزینه‌ی (۴) درست است.

ضابطه‌ی تجانس با مرکز $O(\alpha,\beta)$

در صورتی‌که نقطه‌ی A' مجانس نقطه‌ی A به مرکز $O(\alpha,\beta)$ با نسبت k باشد آن‌گاه طبق تعریف تجانس می‌دانیم $\overrightarrow{OA'}=k\overrightarrow{OA}$.

از طرفی مختصات بردار $\overrightarrow{OA}$ برابر $A-O$ است پس می‌توان نوشت:

$$\overrightarrow{OA'}=k\overrightarrow{OA}\Rightarrow A'-O=k(A-O)\Rightarrow A'=kA-(k-۱)O$$

مثال: ضابطه‌ی تجانس به مرکز $O(۲,۳)$ و نسبت $k=۳$ به صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$\overrightarrow{OA'}=۳\overrightarrow{OA}\Rightarrow A'-O=۳(A-O)\Rightarrow A'=۳A-۲O\xrightarrow{A(x,y)}A'=۳(x,y)-۲(۲,۳)\Rightarrow A'=(۳x-۴,۳y-۶)$$

پس ضابطه‌ی این تجانس به صورت $H(x,y)=(۳x-۴,۳y-۶)$ است

تست ۵: معادله‌ی تصویر خط $y+۲x=۳$ تحت تجانس به مرکز $(۱,۴)$ و نسبت ۲ به صورت $y+ax=b$ است. b کدام است؟

(سراسری ریاضی- ۹۰)

۱) ۱-　　**۲)** صفر　　**۳)** ۱　　**۴)** ۵

پاسخ: ابتدا ضابطه‌ی تجانس به مرکز $O(۱,۴)$ و نسبت $k=۲$ را تعیین می‌کنیم. فرض کنید A' مجانس $A(x,y)$ به مرکز $O(۱,۴)$ و نسبت $k=۲$ باشد داریم:

$$\overrightarrow{OA'}=۲\overrightarrow{OA}\Rightarrow A'-O=۲(A-O)\Rightarrow A'=۲A-O\Rightarrow A'=۲(x,y)-(۱,۴)\Rightarrow A'=(۲x-۱,۲y-۴)$$

بنابراین ضابطه‌ی این تجانس $H(x,y)=(۲x-۱,۲y-۴)$ است. حال با تغییر متغیر مجانس خط را به صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}۲x-۱=x'\\ ۲y-۴=y'\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{x'+۱}{۲}\\ y=\dfrac{y'+۴}{۲}\end{cases}\xrightarrow[\text{قرار می دهیم}]{\text{در خط } y+۲x=۳}\frac{y'+۴}{۲}+۲\left(\frac{x'+۱}{۲}\right)=۳\Rightarrow y'+۴+۲x'+۲=۶\Rightarrow y'+۲x'=۰$$

پس معادله‌ی تصویر، خط $y+۲x=۰$ است. با مقایسه‌ی آن با خط $y+ax=b$ نتیجه می‌گیریم $a=۲$ و $b=۰$ است.

بنابراین گزینه‌ی (۲) درست است.

تجانس‌های متوالی

نکته: **اگر مجانس نقطه‌ی A به مرکز O با نسبت k نقطه‌ی A' باشد و مجانس نقطه‌ی A' به مرکز همان نقطه‌ی O با نسبت k' نقطه‌ی A'' باشد، آن‌گاه A'' مجانس نقطه‌ی A به مرکز O با نسبت kk' است.**

اثبات:

$$\left.\begin{matrix}\overrightarrow{OA'}=k\overrightarrow{OA}\\ \overrightarrow{OA''}=k'\overrightarrow{OA'}\end{matrix}\right\}\Rightarrow\overrightarrow{OA''}=k'k\overrightarrow{OA}\Rightarrow$$ A'' مجانس A به مرکز O با نسبت kk' است.

به عبارتی ترکیب چند تجانس هم مرکز با نسبت‌های مختلف، تجانسی با همان مرکز و نسبتی مساوی حاصل‌ضرب نسبت‌های آن تجانس‌ها می‌باشد.

تست ۶: اگر نقطه‌ی A' مجانس A با نسبت $\frac{۲}{۳}$ باشد و مجانس A' با همان مرکز و نسبت ۶ نقطه‌ی A'' باشد آن‌گاه کدام گزینه نادرست است؟

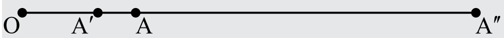
۱) A' مجانس A'' با نسبت $\frac{۱}{۶}$ است.
۲) A مجانس A' با نسبت $\frac{۳}{۲}$ است.
۳) A'' مجانس A با نسبت ۴ است.
۴) $A'A''$ پنج برابر AA' است.

پاسخ: اگر O مرکز تجانس باشد چون A' مجانس A با نسبت $\frac{۲}{۳}$ است پس $\overrightarrow{OA'}=\frac{۲}{۳}\overrightarrow{OA}$ و چون A'' مجانس A' به مرکز O و نسبت ۶ است پس $\overrightarrow{OA''}=۶\overrightarrow{OA'}$. داریم:

گزینه‌ی (۱): $\overrightarrow{OA''}=۶\overrightarrow{OA'}\Rightarrow \overrightarrow{OA'}=\frac{۱}{۶}\overrightarrow{OA''}\Rightarrow$ A' مجانس A'' با نسبت $\frac{۱}{۶}$ است.

گزینه‌ی (۲): $\overrightarrow{OA'}=\frac{۲}{۳}\overrightarrow{OA}\Rightarrow\overrightarrow{OA}=\frac{۳}{۲}\overrightarrow{OA'}\Rightarrow$ A مجانس A' با نسبت $\frac{۲}{۳}$ است.

گزینه‌ی (۳): $\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{OA''}=۶\overrightarrow{OA'}\\ \overrightarrow{OA'}=\frac{۲}{۳}\overrightarrow{OA}\end{array}\right\}\Rightarrow\overrightarrow{OA''}=۴\overrightarrow{OA}\Rightarrow$ A'' مجانس A با نسبت ۴ است.



گزینه‌ی (۴): $AA'=OA-OA'\Rightarrow AA'=OA-\frac{۲}{۳}OA=\frac{۱}{۳}OA$

$$A'A''=OA''-OA'=۶OA'-OA'=۵OA'\xrightarrow{OA'=\frac{۲}{۳}OA}A'A''=\frac{۱۰}{۳}OA$$

$$\frac{A'A''}{AA'}=\frac{\frac{۱۰}{۳}OA}{\frac{۱}{۳}OA}=۱۰\Rightarrow A'A''=۱۰AA'$$

پس گزینه‌ی (۴) نادرست و بنابراین پاسخ تست است.

تمرین‌های تشریحی

۹۵- در جدول زیر، تجانس به مرکز مبدأ و عامل قیاس k است و نیز B مجانس A می‌باشد. جدول زیر را کامل کنید (منظور از تجانس انقباض یا انبساط است).

B	A	نوع تجانس	ضابطه	k
	$(۳,-۴)$			۲
$(۱,-۳)$			$D(x,y)=(\frac{x}{۳},\frac{y}{۳})$	
	$(۶,-۱۲)$			$\frac{۲}{۳}$
$(-۳,۰)$	$(-۱,۰)$			
$(۲,\frac{۵}{۲})$	$(۴,۵)$			

۹۶- فاصله‌ی مجانس نقطه‌ی $A(۳,-۱)$ در تجانس $D(x,y)=(۲x,۲y)$ از مرکز تجانس را تعیین کنید.

۹۷- مجانس مربع $ABCD$ را به مرکز O نقطه‌ی تلاقی قطرهای مربع، یک‌بار با نسبت $\frac{۲}{۳}$ و بار دیگر با نسبت $\frac{۳}{۲}$ رسم کنید و نسبت مساحت‌های دو مربع به‌دست آمده را تعیین کنید.

۹۸- مثلث $A'B'C'$ مجانس مثلث ABC به مرکز O می‌باشد و $\frac{OB}{OB'}=۳$، نسبت مساحت $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ به $\overset{\Delta}{ABC}$ را به‌دست آورید.

۹۹- تقارن مرکزی، تجانس مستقیم است یا معکوس؟ چرا؟

۱۰۰- آیا دو پاره‌خط AB و $A'B'$ در یک صفحه مجانس یک‌دیگرند؟ در چه صورتی مجانس یک‌دیگرند و در این حالت مرکز و نسبت تجانس را مشخص کنید.

۱۰۱- نقاط $O(۰,۰)$، $A(۱,۰)$، $B(۱,۱)$ و $C(۰,۱)$ مختصات رأس‌های یک مربع می‌باشند. اگر مساحت تصویر آن در تبدیل تجانس به مرکز O و با نسبت k مساوی ۱۶ واحد مربع باشد، مقدار k و مختصات تصویر رئوس مربع را یافته و آن را رسم کنید.

۱۰۲- مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع $\sqrt{۳}$ را تحت تبدیل $T(x,y)=(\frac{x}{\sqrt{۲}},\frac{\sqrt{۲}}{۲}y)$ تصویر کرده‌ایم. مساحت شکل حاصل را تعیین کنید.

۱۰۳- شش ضلعی منتظمی به ضلع $\sqrt{۲۷}$ را تحت تجانس به نسبت $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ و مرکز $O(۴,-۱)$ تصویر نموده‌ایم. مساحت و محیط شکل حاصل را تعیین کنید.

۱۰۴- نقاط $(۵,۳)$، $(۷,۱)$ و $(۱,-۱)$ سه رأس یک مثلث قائم‌الزاویه هستند. مساحت مجانس این مثلث با نسبت $k=-\frac{۱}{۴}$ را تعیین کنید.

۱۰۵- خط d به معادله‌ی $y=\frac{x}{۲}+۵$ مفروض است. اولاً تصویر آن را تحت تبدیل $P(x,y)=(\frac{x}{۲},\frac{y}{۲})$ به‌دست آورید. ثانیاً عامل مقیاس را به‌دست آورید و آن‌ها را رسم کنید.

۱۰۶- تصویر خط‌های زیر را در تجانس به مرکز مبدأ مختصات و نسبت تجانس k بیابید.

الف) $D:۳x-۲y=۵ \quad , \quad k=۲$

ب) $D:۴y+۵x-۷=۰ \quad , \quad k=-\frac{۱}{۳}$

۱۰۷- در یک تجانس، تصویر خط $d:۳x+۴y+۲=۰$ از نقطه‌ی $(۲,-۱)$ می‌گذرد. معادله‌ی مجانس خط d را به‌دست آورید.

۱۰۸- اگر دو خط $d:۳x-۲y+۶=۰$ و $d':ax+۵y+c=۰$ مجانس یک‌دیگر باشند، آن‌گاه a چقدر است؟

۱۰۹- اگر خط $۲x+۲y-۳=۰$ تصویر خط $x+y=۱$ در تجانس به مرکز مبدأ مختصات باشد، نسبت تجانس را بیابید.

۱۱۰- نقاط $A(-۱,۲)$ و $B(۱,۰)$ دو رأس مقابل یک مربع هستند. مساحت تصویر این مربع تحت تجانس $H(x,y)=(mx,(۳-m)y)$ را به‌دست آورید.

۱۱۱- مجانس خط $D:۳x=۴y-۲$ را در تجانس به مرکز $(۵,-۳)$ و نسبت تجانس -۱ بیابید.

۱۱۲- اگر در تجانس H، بدانیم $H(۴,۴)=(۳,۷)$ و $H(۸,۴)=(۵,۷)$، آن‌گاه نسبت تجانس را پیدا کنید.

۱۱۳- اگر نقطه‌ی $A'(-۴,۵)$ مجانس نقطه‌ی $A(۲,۳)$ با نسبت $k=۲$ باشد، آن‌گاه مختصات مرکز تجانس را به‌دست آورید.

۱۱۴- مجانس نقطه‌ی $A(۳,-۲)$ را در تجانس به مرکز $O(۴,-۳)$ با نسبت $k=۴$ به‌دست آورید.

۱۱۵- مجانس خط $۲x-y=۵$ را در تجانس به مرکز $O(-۱,۲)$ با نسبت $k=۳$ به‌دست آورید.

۱۱۶- اگر در تجانس به مرکز $(-۲,۳)$ تصویر خط $x-۵y+۱=۰$ خط $x-۵y=۳$ باشد، نسبت تجانس را بیابید.

۱۱۷- دو دایره به شعاع‌های ۳ و ۵ و خط‌المرکزین ۸ واحد مجانس یک‌دیگرند. فاصله‌ی مرکز تجانس از مرکز دایره‌ی کوچکتر را به‌دست آورید.