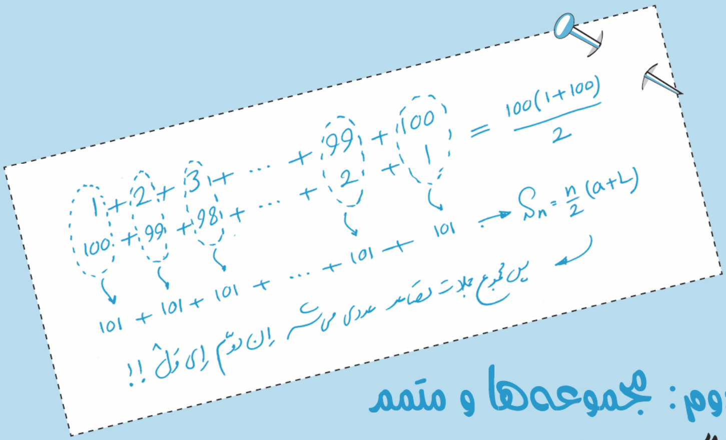
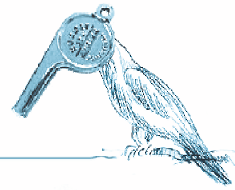


فصل اول
مجموعه، الگو و دنباله

درس اول و دوم: مجموعه‌ها و متمم

درس سوم: الگو و دنباله

درس چهارم: دنباله‌های حسابی



بخش اول: شناخت کلی مجموعه‌ها

کتابتون درس رو با یادآوری مجموعه‌های اعداد از سال‌های پیش شروع کرده ولی فکر می‌کنم بهتره که قبلش یه کم در مورد خود مجموعه‌ها و تعاریف اصلی‌شون با هم صحبت کنیم و بعد از اون بپردازیم به مجموعه‌های اعداد که در واقع مهم‌ترین مجموعه‌ها توی دنیای ریاضی هستن. مجموعه یکی از اساسی‌ترین مفاهیم ریاضیه و ما تو علم ریاضی تمام اشیاء و اجسام و افراد و ... رو در قالب مجموعه‌ها تعریف می‌کنیم و بسیاری از نظریه‌های ریاضی بر مبنای نظریه مجموعه‌ها پایه‌گذاری شده. البته همه‌ی اینهارو مدیون مطالعات جدی ریاضیدان آلمانی جناب آقای جرج فردیناند لودویک فیلیپ کانتور! هستیم که بد نیست عکس جوونی و میانسالی ایشون‌رو هم ببینید. البته فکر کنم ترجیح می‌دادید عکس یکی از هنرمندای عزیزمون و یا یکی از ورزشکارا رو می‌ذاشتیم که من خودمم ترجیح می‌دادم ولی خدایی اینجا جاش نبود.

کار اصلی ایشون به زبون ساده وارد کردن مفهوم بی‌نهایت به ریاضی بود. ایشون مجموعه‌ی عجیب و شگفت‌انگیزشون رو تو سال ۱۸۸۳ به دنیای ریاضی معرفی کردن.

بریم سراغ تعریف‌های اصلی مجموعه‌ها:

۱ تعریف خود مجموعه:

دسته‌ای از اعداد، حرف، اشیاء یا افراد مشخص و متمایز می‌شه یه مجموعه. مثلاً مجموعه‌ی بازیکنان اصلی تیم ملی والیبال ایران در برابر ایتالیا در المپیک ۲۰۱۶ ریو:

{مهدی مهدوی، میلاد عبادی‌پور، فرهاد قائمی، عادل غلامی، سیدمحمدموسوی، سعید معروف} = ترکیب اصلی

حالا یه سؤال مهم. اگه جای بازیکنای ارزندهٔ تیم ملی‌مون رو عوض کنم ترکیب تغییر می‌کنه؟!
جواب منفیه. تو مجموعه‌ها تعویض ترتیب اعضای مجموعه تأثیری بر مجموعه نداره و مجموعه‌ی جدیدی ایجاد نمی‌شه.

مثلاً مجموعه‌ی A رو تعریف می‌کنم؛ اعداد اول یک رقمی: $A = \{۲, ۳, ۵, ۷\}$

تعداد اعضای این مجموعه‌رو با $n(A)$ نشون می‌دیم و داریم $n(A) = ۴$

۲) تعریف زیر مجموعه:

مجموعه‌ی B زیر مجموعه‌ی A می‌شه به شرطی که تمام اعضای B از داخل A انتخاب شده باشه یا به اصطلاح هر عضو از B، عضوی از A هم باشه. مثلاً مجموعه‌ی $B = \{۲, ۳\}$ زیرمجموعه‌ی A یعنی مجموعه‌ی اعداد اول یک رقمیه و به زبون ریاضی می‌گیم: $B \subset A$

چون دو عضو مجموعه‌ی B عضو A هم هستن و داریم: $۲ \in A$ و $۳ \in A$.

پس زیرمجموعه بودن رو با نماد $\subset$ و عضو بودن اعضای مجموعه‌رو با نماد $\in$ نشون می‌دیم. دقت داشته باشید همونطور که سالهای گذشته یاد گرفتید، یک مجموعه n عضوی دارای ۲^n زیرمجموعه است. مثلاً مجموعه‌ی $M = \{a, b, c\}$ که سه عضویه $(n = ۳)$؛ $۲^۳$ تا زیرمجموعه داره که با هم می‌بینیم:

$$\text{مجموعه‌ی زیرمجموعه‌های } M = \{\underbrace{\{\}}_{\text{تهی } \varnothing}, \underbrace{\{a\}, \{b\}, \{c\}}_{\text{زیرمجموعه‌های یک عضوی}}, \underbrace{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}}_{\text{زیرمجموعه‌های دو عضوی}}, \underbrace{\{a, b, c\}}_{\text{خودش}}\}$$

تو این مثال به M می‌گیم مجموعه‌ی مرجع تو هر مسئله‌ای می‌تونیم یه مجموعه‌ی مرجع داشته باشیم. بعداً یاد می‌گیریم که در حساب دیفرانسیل مجموعه‌ی مرجع؛ مجموعه‌ی اعداد حقیقیه که با R نشونش می‌دیم. همه‌ی مجموعه‌ها زیر مجموعه‌ی مرجع هستن $(A \subset M)$ و تهی هم که هیچ عضوی نداره زیر مجموعه‌ی همه‌ی مجموعه‌هاست $\phi \subset M$ و $\phi \subset A$ و هر مجموعه زیر مجموعه‌ی خودش هم هست $(A \subset A)$ مثلاً اگه مجموعه‌ی مرجع؛ اعداد طبیعی یک رقمی باشه و داشته باشیم:

$M = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹\}$

دو تا زیرمجموعه‌ی بسیار مهم می‌شه برایش تعریف کرد که هیچ اشتراکی با هم ندارن.

$A = \{۱, ۳, ۵, ۷, ۹\}$: مجموعه‌ی اعداد طبیعی فرد

$B = \{۲, ۴, ۶, ۸\}$: مجموعه‌ی اعداد طبیعی زوج

در این حالت می‌گیم مجموعه A متمم B و مجموعه B هم متمم A میشه. (متمم اسم فاعله تو باب ثلاثی مزید بر وزن مُفَعِّلْ یعنی تمام‌کننده؛ مثل مُعَلِّمْ).

ویژگی دو مجموعه‌ی متمم اینه که اشتراکی با هم ندارن و اجتماعشون هم می‌شه M. $A \cap B = \phi \ , \ A \cup B = M$

معمولاً متمم A رو با A' نشون می‌دیم. پس داریم: $A \cap A' = \phi$ و $A \cup A' = M$

اشتراک دو مجموعه $(A \cap B)$: میگن این و اون

منظور از مجموعه‌ی $A \cap B$، مجموعه‌ایه که اعضاش هم متعلق به مجموعه A و هم متعلق به مجموعه B باشه.

مثال: $\left.\begin{array}{l} A = \{۳, ۷, ۱۶\} \\ B = \{۳, ۴, ۵, ۱۶\} \end{array}\right\} \Rightarrow A \cap B = \{۳, ۱۶\}$

چند تا نکته مهم تو اشتراک:

۱) $A \cap A = A$ اشتراک هر مجموعه با خودش میشه خودش:

۲) $A \cap \varnothing = \varnothing$ اشتراک هر مجموعه با مجموعه‌ی تهی ، تهی می‌شه:

۳) $A \cap M = A$ اشتراک هر مجموعه با مرجع ، خود مجموعه می‌شه:

۴) $A \cap A' = \varnothing$ اشتراک هر مجموعه با متممش تهی میشه:

تذکر اشتراک دو تا مجموعه، که یکی زیرمجموعه‌ی اون یکی باشه، برابر مجموعه‌ی کوچک‌تر می‌شه: $A \subset B \iff A \cap B = A$

اجتماع دو مجموعه $(A \cup B)$: میگن یا این یا اون

$A \cup B$ یعنی مجموعه‌ای که اعضاش شامل تمامی اعضای دو تا مجموعه‌ی A و B باشه.

$A = \{۳, ۴, ۶\} \ , \ B = \{۳, ۴, ۵, ۹\} \Rightarrow A \cup B = \{۳, ۴, ۵, ۶, ۹\}$

چند تا نکته مهم تو اجتماع:

۱) $A \cup A = A$ اجتماع هر مجموعه با خودش میشه خودش:

۲) $A \cup \varnothing = A$ اجتماع هر مجموعه با تهی میشه خود مجموعه:

۳) $A \cup M = M$ اجتماع هر مجموعه با مرجع میشه مرجع:

۴) $A \cup A' = M$ اجتماع هر مجموعه با متمم میشه مرجع:

حالا که فهمیدین اجتماع و اشتراک چیه لازمه که رابطه‌ی بسیار مهم بین این دو تا رو هم بلد باشین. با یه مثال شروع می‌کنم. فرض کنید امروز جمعست و بعدازظهر ساعت ۵ تیم ملی والیبالمون تو سالن دوازده هزار نفری مجموعه ورزشی آزادی با تیم ملی والیبال آرژانتین بازی داره و بعدش ساعت ۸ شب ۵۰۰ متر اون‌ورتر تیم ملی فوتبال کشورمون در چارچوب رقابت‌های مقدماتی جام جهانی تو استادیوم یکصد هزار نفری که الان که بعد از ۳۰ سال طبقه بالا رو هم صندلی گذاشتن و تا روی اون سیمان ننشسته باشی نمی‌فهمی که من چی دارم بهت می‌گم! شده حدوداً ۸۰ هزار نفری با تیم ملی قدرتمند کره جنوبی بازی داره.

چون تعطیلات بوده مدیر مدرستون یه حالی به کلاس نمونه‌ی ۳۰ نفری شما داده و ۳۰ تا بلیت والیبال و ۳۰ تا بلیت فوتبال تو جایگاه VIP (very Important Person) براتون تهیه کرده. ۲۰ نفرتون فقط والیبال رو از نزدیک دیدید و ۲۵ نفر فوتبال. و البته همه‌ی بچه‌ها امروز به ورزشگاه اومدن.

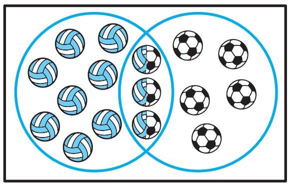
یعنی چی؟ شما که ۳۰ نفر بیشتر نبودین بچه‌ها! حالا چه جوری این مسأله‌رو حل کنیم: اگه تماشاگرای والیبال‌رو با V و تماشاگرای فوتبال رو با F نشون بدیم داریم:

$n(V)=۲۰ \;,\; n(F)=۲۵$

خب اگه این دو تا عدد رو با هم جمع کنیم که می‌شه ۴۵ نفرا! یعنی ۱۵ نفر تولید شدن؟!! نخیر بچه‌ها. این ۱۵ نفر، دوستان عزیزی بودن که عرق (ارق) ملی‌شون در حال فوران بوده و هر دو بازی‌رو دیدن. پس شد $n(V)$ تعداد والیبالیا؛ $n(F)$ تعداد فوتبالیا و تعداد افرادی که هم فوتبالی بودن و هم والیبالی و تو هر دو رشته مشترک بودن می‌شه $n(V\cap F)$ و تعداد افرادی که یا فوتبال دیدن یا والیبال دیدن و یا هر دو رو دیدن (یعنی حداقل یکی رو دیدن) می‌شه $n(V\cup F)$: پس داریم:

$$\underset{n(V\cup F)}{۳۰} = \underset{n(V)}{۲۵} + \underset{n(F)}{۲۰} - \underset{n(V\cup F)}{۱۵}$$

خوبه که این جریان رو تویه نمودار وِن (Venndiagram) یا نمودار مجموعه که در سال ۱۸۸۱ توسط آقای جان وِن ریاضیدان انگلیسی ابداع شد ببینیم:



پس می‌تونیم بطورکلی بگیم که:

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

حالا اگه امشب فقط اجازه داشتین از یک مسابقه استفاده کنیم داستان فرق می‌کرد. یعنی کسی اجازه نداشت هر دو رو تماشا کنه ولی همه باید حداقل یک بازی رو می‌دیدن. اینجا $n(V\cap F)=۰$ و $n(V\cup F)=۳۰$

حالا فرض کنید ۱۲ نفر رفتن والیبال و ۱۸ نفر فوتبال.

البته درسته که تیم ملی والیبالمون تو سالهای اخیر ترکونده ولی متأسفانه هنوز طرفدار فوتبال بیشتره! پس داریم:

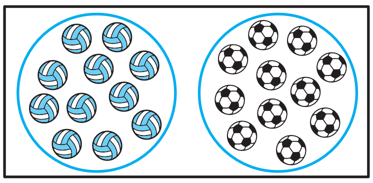
$۳۰=۱۸+۱۲$

$n(V\cup F)=n(V)+n(F)$

اینجا چون اشتراک صفر بود می‌تونیم بصورت کلی تعریف کنیم که اگر دو مجموعه A و B نسبت به هم ناسازگار باشن یعنی اشتراکشون صفر باشه داریم:

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)$

و نمودار وِن برای این مثال هم اینجوری میشه:



حالا اگه کلاستون ۴۰ نفر بود ۱۰ نفر می‌موندن بیرون مجموعه‌ی A و B. که بهش می‌گیم $(A\cup B)'$. در واقع $(A\cup B)'$ اعضایی هستن که نه متعلق به A هستن و نه متعلق به B که می‌شه $A'\cap B'$.

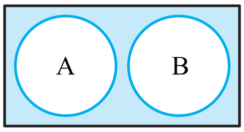
این قوانین‌رو سر آگوستوس دمورگان ریاضیدان انگلیسی وضع کرد:

$A'\cap B'=(A\cup B)' \quad , \quad A'\cup B'=(A\cap B)'$

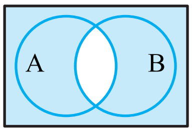
ما به زبون خودمونی می‌گیم که دبل‌پریم دوست نداریم! یعنی $A'\cap B'$ یا $A'\cup B'$. پس با یه دونه پریم راحت‌تریم: $(A\cup B)'$ یا $(A\cap B)'$.

حالا کتابتون تو تمرینات مجموعه‌ی مرجع‌رو با U نشون داده. پس داریم:

$n(A'\cap B')=n(A\cup B)'=n(U)-n(A\cup B)\rightarrow$



$n(A'\cup B')=n(A\cap B)'=n(U)-n(A\cap B)\rightarrow$



مثال ۱ **در یک روستا با جمعیت ۴۰۰ نفر، ۲۴۰ نفر از افراد روستا سواد خواندن و نوشتن را داشته و ۱۱۰ نفر از جمعیت این روستا دارای مهارت قالی‌بافی می‌باشند و تعداد ۸۰ نفر دارای هر دو مهارت می‌باشند.**

الف) چند نفر از این تعداد حداقل یکی از این توانایی‌ها را دارا هستند؟

ب) چند نفر از این افراد فقط دارای مهارت قالی‌بافی می‌باشند؟

پ) چند نفر از این افراد فقط دارای سواد خواندن و نوشتن می‌باشند؟

ت) چه تعدادی از جمعیت روستا هیچ کدام از این موارد را دارا نیستند؟

ث) چه تعدادی مهارت خواندن و نوشتن را ندارند؟

پاسخ:

$n(U)=۴۰۰\ ,\ n(A)=۲۴۰\ \ n(B)=۱۱۰$

$n(A\cap B)=۸۰$

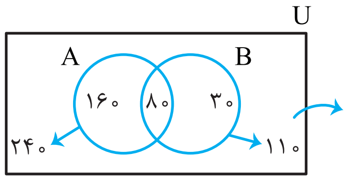
الف) $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)\Rightarrow n(A\cup B)=۲۴۰+۱۱۰-۸۰=۲۷۰$

ب) $n(B-A)=n(B)-n(A\cap B)=۱۱۰-۸۰=۳۰$

پ) $n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)=۲۴۰-۸۰=۱۶۰$

ت) $n(A'\cap B')=n(A\cup B)'=n(U)-n(A\cup B)\Rightarrow n(A'\cap B')=۴۰۰-۲۷۰=۱۳۰$

ث) $n(A')=۴۰۰-۲۴۰=۱۶۰$



$n(A\cup B)=۱۶۰+۸۰+۳۰=۲۷۰$

مثال ۲ **در یک دوره جشنواره فیلم کوتاه با شرکت ۲۱ فیلم در موضوعات مختلف در حال برگزاری است که در بین آنها ۷ فیلم پویانمایی (کارتونی) و ۸ فیلم طنز وجود دارد، به طوری که ۳ تا از فیلم‌های پویانمایی با مضمون طنز می‌باشند. مطلوب است تعداد کل فیلم‌های که:** *(تمرین کتاب درسی صفحه‌ی ۱۱)*

الف) پویانمایی یا طنزند. **ب) غیر پویانمایی و غیر طنزند.**

پاسخ: روش اول:

مجموعه تمام فیلم‌ها = U

مجموعه فیلم‌های پویانمایی = C

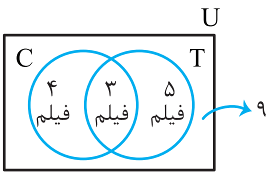
مجموعه فیلم‌های طنز = T

الف) $n(C\cup T)=n(C)+n(T)-n(C\cap T)\Rightarrow u(C\cup T)=۷+۸-۳=۱۲$

ب) $n(C\cup T)'=n(U)-n(C\cup T)=۲۱-۱۲=۹$

روش دوم:

با استفاده از نمودار وِن



مثال ۳ **در یک نظرسنجی از ۱۰ مشتری یک فروشگاه زنجیره‌ای، مشخص شد که ۷۰ نفر آنها در یک ماه گذشته از محصولات شرکت A و ۵۷ نفرشان از محصولات شرکت B خرید کرده‌اند. همچنین ۳۲ نفر از آنان نیز اعلام کرده‌اند که در این مدت از محصولات هر دو شرکت خرید کرده‌اند. چه تعداد از این ۱۱۰ نفر در یک ماه قبل:** *(تمرین ۶ صفحه‌ی ۱۳ کتاب درسی)*

الف) دست کم از یکی از این دو شرکت خرید کرده‌اند. **ب) فقط از شرکت A خرید کرده‌اند.**

پ) دقیقاً از یکی از این دو شرکت خرید کرده‌اند. **ت) از هیچ یک از این دو شرکت خرید نکرده‌اند.**

پاسخ:

$U = ۱۱۰ \quad n(A) = ۷۰ \quad n(B) = ۵۷ \quad n(A \cap B) = ۳۲$

الف) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = ۷۰ + ۵۷ - ۳۲ = ۹۵$

ب) $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = ۷۰ - ۳۲ = ۳۸$

پ) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) = n(A' \cap b') = n(A \cup B)' = n(U) - n(A \cup B) = ۱۱۰ - ۹۵ = ۱۵$

تفاضل دو مجموعه: $(A - B)$

منظور از $A - B$ مجموعه‌ایه که اعضای اون در مجموعه‌ی A قرار دارن اما تو مجموعه‌ی B نیستن.

$A = \{۳, ۴, ۱۱\} \quad , \quad B = \{۳, ۴, ۵, ۹\} \Rightarrow A - B = \{۱۱\} \; , \; B - A = \{۵, ۹\}$

تذکر برای به دست آوردن مجموعه‌ی $B - A$ کافیه از مجموعه‌ی B اعضایی رو که با اعضای A مشترک هستن حذف کنیم.

چند تا نکته مهم در مورد تفاضل:

$۱) A - A = \varnothing \qquad ۲) A - \varnothing = A \qquad ۳) A - M = \varnothing \qquad ۴) M - A = A' \qquad ۵) A - A' = A$

نکته اگه دو تا مجموعه هیچ عضو مشترکی نداشته باشن $(A \cap B = \varnothing)$ تفاضلشون برابر مجموعه‌ی اول می‌شه.

$$A \cap B = \varnothing \Rightarrow \begin{cases} A - B = A \\ B - A = B \end{cases}$$

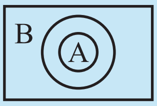
دو مجموعه مساوی:

اگه اعضای دو مجموعه یکی باشن اون دو تا مجموعه با هم برابر می‌شن. دو مجموعه‌ی مساوی، هر دو زیر مجموعه‌ی همدیگه هستن.

$A = B \Leftrightarrow A \subset B \quad , \quad B \subset A$

تذکر اگه $A \subset B$ باشه:

$$A \subset B \Rightarrow \begin{cases} ۱) A \cap B = A & \text{مجموعه ضعیف تر} \\ ۲) A \cup B = B & \text{مجموعه قویتر} \end{cases}$$



این‌جور مسائل رو بهتره با نمودار وِن ببینید:

بخش دوم: مجموعه‌های اعداد

۱ مجموعه‌ی اعداد طبیعی (Natural numbers): $\mathbb{N} = \{۱, ۲, ۳, ۴, ...\}$

۱ـ۱ـ مجموعه‌ی اعداد طبیعی **زوج و فرد** به شکل زیر:

مجموعه‌ی اعداد طبیعی زوج $E = \{۲k \mid k \in N\} = \{۲, ۴, ۶, ۸, ...\} \rightarrow$ **(Even numbers)**

مجموعه‌ی اعداد طبیعی فرد $O = \{۲k - ۱ \mid k \in N\} = \{۱, ۳, ۵, ۷, ...\} \rightarrow$ **(Odd numbers)**

۲ مجموعه‌ی اعداد حسابی (Whole numbers): به اجتماع اعداد طبیعی و عدد صفر مجموعه‌ی اعداد حسابی گفته می‌شه و اون رو با I یا W نشون می‌دیم.

$W = \{۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ...\}$

پس میشه اینجوری هم نوشت:

$W = N \cup \{۰\}$

و همچنین $W - N$ تک عضویه.

۳ مجموعه‌ی اعداد صحیح (Zahlen numbers): $\mathbb{Z} = \{..., -۲, -۱, ۰, ۱, ۲, ...\}$

۴ مجموعه‌ی اعداد گویا (Quotient numbers): $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z} \, , n \neq ۰\}$

۵ مجموعه‌ی اعداد گنگ (اصم): هر عددی که گویا نباشه گنگه! حواست باشه تو مجموعه‌ی پایین، e به توان دو نرسیده ها ! برو تو پاورقی!

$\mathbb{Q}' = \{\dots, -\sqrt{۳}, \dots, \sqrt{۲}, \dots, e^{۲}, \dots, \pi^{۱}, \dots\}$

۶ مجموعه‌ی اعداد حقیقی (Real numbers): به مجموعه‌ی شامل همه اعداد گویا و گنگ مجموعه‌ی اعداد حقیقی می‌گن و با $\mathbb{R}$ نشونش می‌دیم.

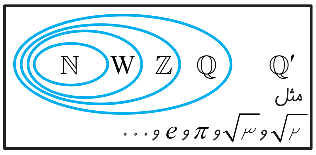
نکته

$\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}' = \varnothing \quad , \quad \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}' = \mathbb{R}$

$\mathbb{N} \subset \mathbb{W} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

اینم نمودار قشنگ صفحه دوم کتاب درسی‌تون که ما یه ذره کاملترش هم می‌کنیم.

(مجموعه اعداد حقیقی) $\mathbb{R}$



بسته بودن یک مجموعه: اگه محصول یک عملیات جبری داخل مجموعه باشه می‌گیم که مجموعه نسبت به اون عملیات بسته است. مثلاً مجموعه اعداد فرد نسبت به عمل ضرب بسته است و نسبت به عمل جمع بسته نیست. چون ضرب دو عدد فرد، فرده ولی جمعشون زوج میشه.

بخش سوم : انواع بازه

جواب‌های یک معادله برحسب درجه‌ی اون چند تا عدده ولی جواب‌های یک نامعادله معمولاً یک بازه است یعنی مجموعه‌ای از اعداد. پس لازمه قبل از شروع روش‌های حل نامعادله، توضیحاتی در مورد انواع بازه خدمت عزیزان تقدیم کنم. این بازه (a,b) یک بازه‌ی بازه. یعنی خود a و b در مجموعه‌حضور ندارن (البته با اجازه‌ی شما)، اما این بازه $[a,b]$ یک بازه‌ی بسته است. یعنی چون خود a و b هست باید بازه رو بست! در این حالت خود a و b در بازه حضور دارن. بازه‌های $(a,b]$ و $[a,b)$ نیمه بازن.

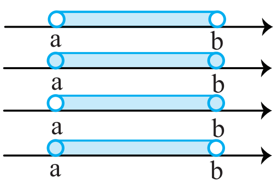
با هم این بازه‌ها را روی محور اعداد حقیقی می‌بینیم تا اگر احیاناً مشکلی هست برطرف بشه:

۱) (a,b) — $\{x \mid x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$

۲) $[a,b]$ — $\{x \mid x \in \mathbb{R}, a \le x \le b\}$

۳) $(a,b]$ — $\{x \mid x \in \mathbb{R}, a < x \le b\}$

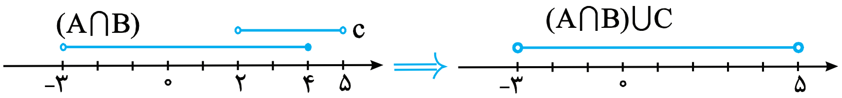
۴) $[a,b)$ — $\{x \mid x \in \mathbb{R}, a \le x < b\}$



اگه **اجتماع** $(\cup)$ دو بازه خواسته شد، جواب باید هر دو تا رو پوشش بده و اگه **اشتراک** $(\cap)$ خواسته شد فقط جاهایی که تو هر دو بازه هستن قبوله!

مثال ۴ اگر $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \le ۴\}$ و $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -۳\}$ و $C = \{x \in \mathbb{R} \mid ۲ < x < ۵\}$ باشند، حاصل $(A \cap B) \cup C$ به‌دست آورید؟

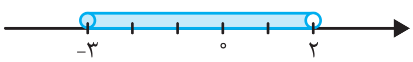
پاسخ: تو این سؤال‌ها که باید چند بازه با هم درنظر گرفته بشه، بهترین روش، رسم اونها روی محوره:

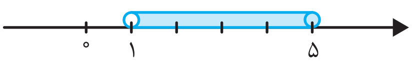


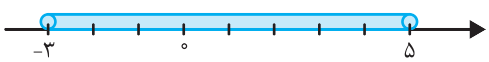
$(A \cap B) = (-۳, ۴] \quad \Rightarrow \quad (A \cap B) \cup C = (-۳, ۵)$

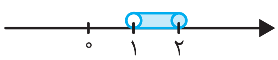
مثال ۵ اگر $A = [-۳, ۲)$ و $B = (۱, ۵]$ باشد بازه‌های A و B را روی محور نشان دهید و حاصل عبارت‌های $A - B$، $B - A$، $A \cup B$ و $A \cap B$ را تعین کنید.

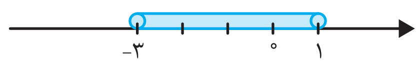
پاسخ:

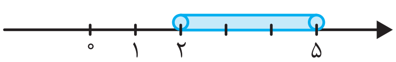
مجموعه A


مجموعه B


$A \cup B$


$A \cap B$


$A - B$


$B - A$


۱. عدد π همون عدد ...۳/۱۴۱۵ خودمونه

۲. عدد e همون عدد نپر خودمونه: $e \simeq ۲/۷۱۸۲\dots$

$A \cup B = [-۳,۵]$ $\qquad$ $A \cap B = (۱,۲]$

$A - B = [-۳,۱]$ $\qquad$ $B - A = [۲,۵]$

بازه‌هایی که در بالا مورد بررسی قرا دادیم بازه‌های متناهی هستند، نوع دیگر از بازه‌ها هستن که به صورت نامتناهی است. یعنی یک طرف $+\infty$ یا $-\infty$ هست. اینگونه بازه‌ها برای نشان دادن اعداد بیشتر از a یا کمتر از a مورد استفاده قرار می‌گیرد. در زیر چند نمونه از این بازه‌ها رو با هم بررسی می‌کنیم.

۵) $(a,+\infty) = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x > a\}$

۶) $[a,+\infty) = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \geq a\}$

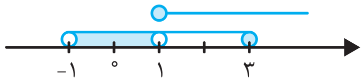
۷) $(-\infty,a) = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x < a\}$

۸) $(-\infty,a] = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \leq a\}$

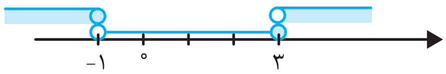
تذکر بازه $(-\infty,+\infty)$ روی محور اعداد نشان دهنده مجموعه اعداد حقیقی است.

مثال ۶ **حاصل عبارت‌های زیر را به کمک محور مختصات به صورت بازه نشان دهید.**

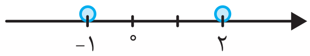
الف) $(-۱,۳]-[۱,+\infty) = (-۱,۱)$



ب) $\mathbb{R}-(-۱,۳] = (-\infty,-۱] \cup (۳,+\infty)$



ج) $\mathbb{R}-\{-۱,۲\} = (-\infty,-۱) \cup (-۱,۲) \cup (۲,+\infty)$



بخش چهارم: تعریف مجموعه متناهی و نامتناهی

اگر مجموعه‌ای دارای K عضو باشد (اعضای آن محدود باشد)، آن را مجموعهٔ متناهی (با پایان) می‌نامیم.

به عنوان مثال:

مجموعه اعداد طبیعی کمتر از ۱۰، مجموعه اعداد اول یک رقمی، تعداد رگ‌های بدن انسان، مجموعه دانش‌آموزان مدارس فرزانگان، جمعیت شهر تهران، مجموعه مولکول‌های موجود در یک مول مشخص از آب، شمارنده‌های مشترک ۶ و ۷

اگر نتونیم تعداد اعضای یک مجموعه رو به صورت یک عدد بیان کنیم (در واقع تعداد اعضای این مجموعه از هر عددی بزرگ‌تر است.) این مجموعه را نامتناهی (بی‌پایان) می‌نامیم.

به عنوان مثال:

مجموعه اعداد صحیح بزرگ‌تر از ۲، مجموعه اعداد طبیعی فرد، مجموعه اعداد حقیقی، مجموعه تمام دایره‌ها به مرکز مبدا مختصات، مضارب عدد ۶، مجموعه کسرهای مثبت با صورت یک، مضارب مشترک ۶ و ۷، بازه $(۰,۱)$

مثال ۷ **دو مجموعه متناهی مثال بزنید که یکی از آنها زیرمجموعه دیگری باشد.**

پاسخ: مجموعه اعداد طبیعی و مجموعه اعداد حسابی که در این ۲ مجموعه؛ مجموعه اعداد طبیعی زیر مجموعه اعداد حسابی است.

متمم یک مجموعه

در هر بحث، مجموعه‌ای را که همه مجموعه‌های مورد بحث زیرمجموعه آن باشند را مجموعه مرجع می‌نامیم و با U نمایش می‌دهیم.

به صورت هندسی مجموعه مرجع تمام مجموعه‌های دیگر رو شامل می‌شه حالا اگه A زیرمجموعه‌ای از U باشد به مجموعه $U-A$ می‌گیم متممِ A و با A' نشونش می‌دیم.

$A' = \{x \in U \mid x \notin A\}$

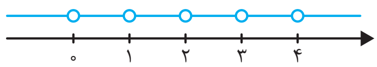
چند تا خاصیت برای متمم مجموعه براتون در نظر گرفتم:

$\phi' = U \quad U' = \phi \quad , \quad (A')' = A$

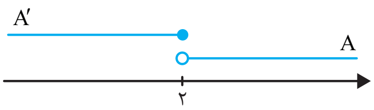
$A \cup A' = U \qquad A \cap A' = \phi$

مثال ۸ اگر $\mathbb{R}$ به عنوان مجموعه مرجع باشد متمم مجموعه‌های زیر را بنویسید.

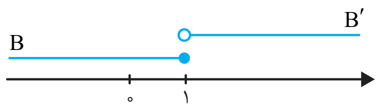
الف) W ← شامل اعداد حقیقی و غیرحسابی $= \mathbb{R}-W$



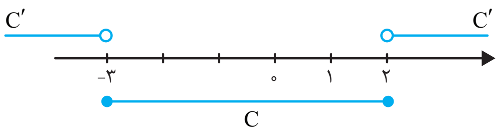
ب) $(۲,+\infty)$ ← $(-\infty,۲]$

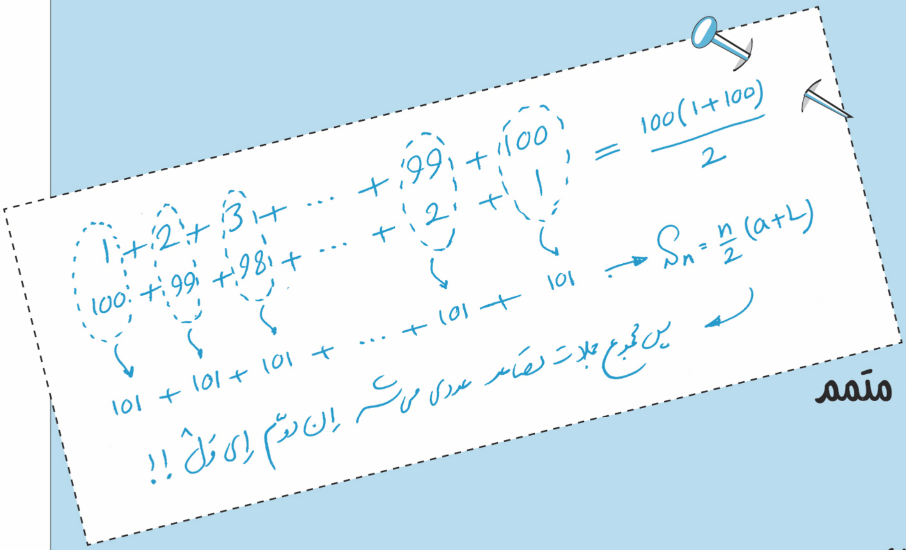


پ) $(-\infty,۱]$ ← $(۱,+\infty)$



ت) $[-۳,۲]$ ← $(-\infty,-۳)\cup(۲,+\infty)$





درس اول و دوم: مجموعه‌ها و متمم

درس سوم: الگو و دنباله

درس چهارم: دنباله‌های حسابی

هر تعدادی از اعداد که اونها رو پشت سر هم نوشته باشیم تشکیل یک دنباله می‌دن. به هر عدد که در یک دنباله قرار داره یک جمله آن دنباله گفته میشه. جمله‌ی nاُم دنباله را (n عددی طبیعی و دلخواه) جمله‌ی عمومی می‌نامیم. به طور کلی دنباله تابعی است که دامنه‌ی آن اعداد طبیعی است. بعضی وقتا جملات دنباله دارای یک الگو هستن و بعضی اوقات فاقد الگو هستن. در واقع جمله‌ی عمومی دنباله الگوی جملات یک دنباله است.

دنباله‌ی اول : $۱,۳,۷,۱۳,۱۹,۲۹,...$

دنباله‌ی دوم : $۱,۳,۵,۷,۹,۱۱,...$

توی دنباله‌ی اول الگوی مشخصی وجود نداره و نمی‌تونیم جمله‌ی هفتم رو پیش‌بینی کنیم ولی توی دنباله‌ی دومی اعداد طبیعی فرد رو می‌بینیم و الگوش به صورت $۲n-۱$ هست. به $a_n = ۲n-۱$ جمله‌ی عمومی این دنباله گفته میشه. به عنوان مثال برای تعیین جمله‌ی هزار و سیصد و نود و پنجم کافیه به جای n، عدد ۱۳۹۵ رو بذاریم که عدد ۲۷۸۹ بدست میاد. این امکان وجود داره که برای یک دنباله ممکنه چندین الگو وجود داشته باشه ولی مهم اینه که شما بتونید ساده‌ترین الگو رو بدست بیارین. مثلاً برای دنباله زیر می‌خوام ۲ تا الگو بنویسیم:

$۵,۷,۹,۱۱$

الگوی اول؛ $۲n+۳$، یعنی اگر به n بدی یک میشه ۵,...

الگوی دوم؛ $۲n+۳+(n-۱)(n-۲)(n-۳)(n-۴)$؛ بنابراین به ازای $n=۱$ ، ۵ بدست میاد. ولی الگوی اول کجا و الگوی دوم کجا!

پس گفتیم دنباله تابعی که دامنش اعداد طبیعیه بچه ها و به همین خاطر توی ضابطش بجای x از n استفاده می‌شه. مثلاً $a_n = -۳n+۱$ یک دنباله‌ی عددیه. اگه بخوایم جملات این دنباله رو بنویسیم کافیه از $n=۱$ شروع کنیم و بهش عدد بدیم. جمله‌ی اولش می‌شه $a_۱ = -۳(۱)+۱ = -۲$. به همین ترتیب جمله‌ی دومش می‌شه $a_۲ = -۳(۲)+۱ = -۵$. اگه بخوایم جملاتش رو یه جا نشون بدیم اینجوری عمل می‌کنیم: $a_n = \{-۲,-۵,-۸,-۱۱\}$ حالا یه دنباله‌ی دیگه مثلاً $b_n = ۳\times(\frac{۱}{۲})^n$ که یک دنباله‌ی هندسیه و تو درس نامه‌ی سوم با خصوصیاتش آشنا می‌شیم. اگه بخوایم جملات این یکی دنباله رو بنویسیم باز هم از $n=۱$ شروع می‌کنیم: $b_۱ = ۳\times(\frac{۱}{۲})^۱ = \frac{۳}{۲}$ و $b_۲ = ۳\times(\frac{۱}{۲})^۲ = \frac{۳}{۴}$ و ... .اگه بخوایم جملات رو یک جا نشون بدیم هم که اینجوری عمل می‌کنیم: $b_n = \{\frac{۳}{۲},\frac{۳}{۴},\frac{۳}{۸},\frac{۳}{۱۶},...\}$ این که آخرش به کجا می‌رسه می‌ره تو فصل حد دنباله‌ها که تو سال آخر دبیرستان می‌خونیم و اینجا در موردش صحبت نمی‌کنیم. تو این دو تا دنباله که با هم دیدیم یه نظم خاصی بین جملات وجود داشت ولی لزوماً این طور نیست. یعنی هر تعدادی از اعداد که پشت سر هم نوشته باشیم یه دنباله تشکیل می‌دن. در واقع هر موقع مجموعه‌ای از اعداد رو شماره گذاری کنیم یه دنباله در دست داریم که به هر عدد از اون دنباله یک جمله‌ی دنباله گفته می‌شه.

می‌خوام در مورد یکی از اشتباهات رایج دانش‌آموزی باهاتون صحبت کنم. همونطور که همتون می‌دونید یه عدد زوج رو با $۲n$ نشون می‌دیم. حالا سوال اینجاست که عدد فرد رو با $۲n-۱$ نشون بدیم یا $۲n+۱$؟! خب هر دو تای اینا فردن بچه‌ها ولی دنباله‌ی اعداد فرد با عدد ۱ شروع می‌شه و باید جمله‌ی عمومیش هم به ازای $n=۱$ با عدد ۱ رو بده که با این تفسیر جمله‌ی عمومی می‌شه $۲n-۱$.

حالا بریم چند تا مثال تشخیص جمله عمومی از آسون به سخت با هم ببینیم.

مثال ۱ $2,5,8,11,...$

چون ۳ تا ۳ جلو رفته پس حتماً یه $3n$ داره. حالا چون جمله‌ی اولش ۲ شده پس $3n-1$ بوده که به ازای $n=1$ شده ۲.

مثال ۲ $-1,3,7,11,...$

چون ۴ تا ۴ جلو رفته پس حتماً یه $4n$ داره و چون جمله‌ی اولش ۱- شده پس $4n-5$ بوده که به ازای $n=1$ بشه ۱-.

مثال ۳ $1,2,4,8,16,...$

چون هر جمله ضربدر ۲ شده پس حتماً 2^n بوده و چون جمله‌ی اولش ۱ شده پس 2^{n-1} بوده که به ازای $n=1$ شده $2^0=1$.

مثال ۴ $1,1,2,6,24,...$

دیگه اینجا نظم جملات مثل ۳ تا مثال قبلی نیست. احتیاج به حضور ذهن داره بچه‌ها. اگه نفهمیدین زیاد به مغزتون فشار نیارین. این عددا فاکتوریل اعداد صفر تا چهارن. پس جمله‌ی اول باید بشه $0!$ یعنی باید جمله‌ی عمومی $(n-1)!$ باشه. حالا بریم به عنوان مثال دو تا سوال آزمون سنجش رو با هم ببینیم:

مثال ۵ در دنباله اعداد $\frac{1}{2},\frac{3}{5},\frac{5}{8},\frac{7}{11},...$ جمله‌ی هفدهم کدام است؟

۱) ۰/۶۴ ۲) ۰/۶۶ ۳) ۰/۶۸ ۴) ۰/۷۲

پاسخ: خب صورت کسرها که ۲ تا ۲ تا زیاد شده. پس $2n$ داشته و چون جمله‌ی اولش ۱ شده پس $2n-1$ بوده. مخرج کسرها ۳ تا ۳ تا زیاد شده پس $3n$ بوده و چون جمله‌ی اولش ۲ شده پس $3n-1$ بوده. بنابراین جمله عمومی دنباله شد $a_n=\frac{2n-1}{3n-1}$ حالا کافیه بجای n ها ۱۷ بذاریم:

$$\Rightarrow a_{17}=\frac{2(17)-1}{3(17)-1}=\frac{33}{50}=0/66$$

مثال ۶ جمله‌ی نهم از دنباله‌ی اعداد $\frac{1}{2},\frac{1}{6},\frac{1}{12},\frac{1}{20},...$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{90}$ ۲) $\frac{1}{84}$ ۳) $\frac{1}{72}$ ۴) $\frac{1}{64}$

پاسخ: اینجا دیگه یه خورده با ۵ تا مثال قبلی فرق می‌کنه. مخرج جمله‌ی اول 2×1، دومی 3×2، سومی 4×3 و ... پس جمله‌ی عمومی به صورت $\frac{1}{n(n+1)}$ بوده و جمله‌ی نهم می‌شه $\frac{1}{90}=\frac{1}{9(9+1)}$.

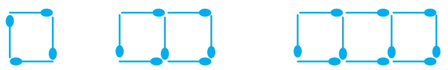
مثال ۷ جمله‌ی هفتم از دنباله‌ی اعداد $\frac{1}{2},\frac{2}{5},\frac{3}{10},...$ کدام است؟

۱) ۰/۱۲ ۲) ۰/۱۴ ۳) ۰/۱۵ ۴) ۰/۱۷

پاسخ: صورت کسر که خیلی تابلوئه: n. مخرج کسر هم با یه خورده دقت متوجه می‌شی. مخرج هر کسر از عدد مربع کامل صورت کسر یک واحد بیشتره. یعنی n^2+1. پس جمله‌ی عمومی $\frac{n}{n^2+1}$ بوده که به ازای $n=7$ می‌شه $\frac{7}{50}$ یعنی $\frac{14}{100}$.

تو کتاب ریاضی ۲ هم برای ساده‌سازی توضیح این موضوع از چوب کبریت و صندلی‌های سالن تئاتر استفاده شده. به مثال زیر توجه کنید:

مثال ۸ با استفاده از چوب کبریت سه شکل زیر ساخته شده‌اند. تعداد چوب کبریت‌های به کار رفته در شکل nاُم چند تاست؟

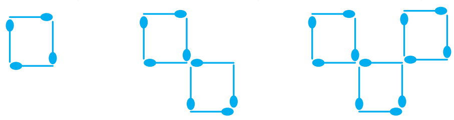


۴ و ۷ و ۱۰ و ...

پاسخ: خب بیا دنبالش رو بنویسیم دیگه:

۳ تا ۳ تا زیاد شده پس $3n$ داره. جمله‌ی اول هم ۴ شده پس $3n+1$ بوده.

مثال ۹ حالا تعداد این چوب کبریت‌ها در شکل nاُم چند تاست؟

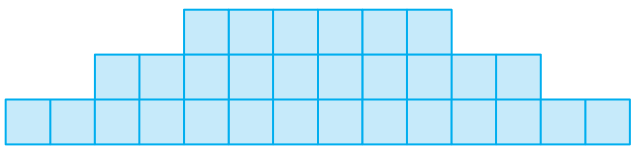


۴ و ۸ و ۱۲ و ...

پاسخ: باز هم دنبالش رو می‌نویسیم:

دیگه از این تابلوتر نمیشه. ۴ تا ۴ تا اضافه شده. پس $4n$ بوده. جمله‌ی اول هم که خود ۴ شده. پس دیگه هیچ کم و کسری نداره.

مثال ۱۰ شکل زیر سه ردیف از تعداد صندلی‌های یک سالن تئاتر را نشان می‌دهد. اگر تعداد صندلی‌های ردیف بعدی از الگوی افزایش صندلی‌های این ۳ ردیف پیروی کنند. تعداد صندلی‌ها را تا ردیف هفتم بدست آورید.



پاسخ: باز هم باید دنباله رو بنویسیم: ردیف اول ۶ تا صندلی، ردیف دوم ۱۰ تا، ردیف سوم ۱۴ تا، خلاصه به هر ردیف ۴ تا اضافه شده. پس $4n$ داریم و جمله‌ی اول هم که ۶ بوده. پس $4n+2$ بوده. بنابراین تو ردیف هفتم می‌شه $4\times7+2$ یعنی ۳۰.