مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی

یادآوری دنباله‌ی حسابی

در سال دوم، با دنباله‌ی حسابی آشنا شدید. دنباله‌ای از اعداد که اختلاف بین هر دو عدد متوالی آن، مقدار ثابتی به نام **قدرنسبت (d)** است را دنباله‌ی حسابی می‌نامیم.

$$a_1 \xrightarrow{+d} a_1+d \xrightarrow{+d} a_1+2d \xrightarrow{+d} a_1+3d \xrightarrow{+d} \dots \xrightarrow{+d} a_n = a_1+(n-1)d$$

a_1 را جمله‌ی اول، d را قدرنسبت و a_n را جمله‌ی عمومی دنباله‌ی حسابی می‌نامیم. با ذکر چند مثال کاربردهای این رابطه را مرور می‌کنیم.

مثال: جمله‌ی سیزدهم دنباله‌ی حسابی ۲،۱،۴،... - را به دست آورید.

پاسخ: جمله‌ی اول این دنباله عدد ۲- و قدرنسبت (اختلاف جملات متوالی) آن برابر با ۳ است، داریم:

$$\begin{cases} a_1 = -2 \\ d = 3 \end{cases} \xrightarrow[n=13]{a_n=a_1+(n-1)d} a_{13} = a_1+(13-1)d = a_1+12d = -2+12(3) = 34$$

مثال: دنباله‌ی حسابی ۳،۷،۱۱،...،۸۳ را درنظر بگیرید.

الف) این دنباله چند جمله دارد؟ **ب) عدد ۵۱ جمله‌ی چندم این دنباله است؟**

پاسخ: الف)

$$\begin{cases} d = 4 \\ a_1 = 3 \\ a_n = 83 \end{cases} : a_n = a_1+(n-1)d \Rightarrow 83 = 3+(n-1)(4) \Rightarrow 4(n-1) = 80 \Rightarrow n-1 = 20 \Rightarrow n = 21 \Rightarrow$$ این دنباله دارای ۲۱ جمله است.

ب) فرض کنیم $a_n = 51$ باشد، داریم:

$$a_n = 51 \Rightarrow 3+(n-1)(4) = 51 \Rightarrow 4(n-1) = 48 \Rightarrow n-1 = 12 \Rightarrow n = 13 \Rightarrow$$ عدد ۵۱ جمله‌ی سیزدهم این دنباله است.

مثال: چند عدد طبیعی دو رقمی و مضرب ۶ وجود دارد؟

پاسخ: اعداد دو رقمی مضرب ۶ بدین صورت هستند: ۱۲،۱۸،...،۹۶ اگر دقت کنید با دنباله‌ای حسابی مواجه هستیم که در آن جمله‌ی اول برابر ۱۲، قدرنسبت برابر ۶ و جمله‌ی آخر برابر با ۹۶ است. داریم:

$$a_n = a_1+(n-1)d \Rightarrow 96 = 12+(n-1)(6) \Rightarrow 84 = 6(n-1) \Rightarrow n-1 = 14 \Rightarrow n = 15 \Rightarrow$$ ۱۵ عدد دو رقمی مضرب ۶ وجود دارد.

تمرین: چند عدد سه رقمی وجود دارد که رقم یکان آن‌ها ۴ باشد؟

پاسخ: ۹۰

رابطه‌ی بین دو جمله‌ی متمایز و قدرنسبت در دنباله‌ی حسابی

اگر a_n و a_m دو جمله‌ی متمایز از یک دنباله‌ی حسابی باشند، داریم:

$$d = \frac{a_m - a_n}{m-n}$$

برای اثبات این فرمول، کافی است به جای a_m و a_n، قرار دهید $a_1+(m-1)d$ و $a_1+(n-1)d$.

مثال: اگر در یک دنباله‌ی حسابی جمله‌ی پنجم برابر ۱۱ و جمله‌ی هشتم برابر ۲۰ باشد، قدرنسبت این دنباله را بیابید.

پاسخ: روش اول:

$$\begin{cases} a_5 = 11 \Rightarrow a_1+4d = 11 \\ a_8 = 20 \Rightarrow a_1+7d = 20 \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} 3d = 9 \Rightarrow d = 3$$

روش دوم: با استفاده از رابطه‌ی فوق داریم:

$$d = \frac{a_m-a_n}{m-n} \Rightarrow d = \frac{a_8-a_5}{8-5} = \frac{20-11}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

مثال: در یک دنباله‌ی حسابی $a_7 = 19$ و $a_3 = -9$ است. جمله‌ی هفدهم این دنباله را بیابید.

پاسخ:

$$\left.\begin{array}{l} d = \dfrac{a_7-a_3}{7-3} = \dfrac{19-(-9)}{4} = \dfrac{28}{4} = 7 \\ a_7 = 19 \Rightarrow a_1+6d = 19 \xrightarrow{d=7} a_1+42 = 19 \Rightarrow a_1 = -23 \end{array}\right\} \Rightarrow a_{17} = a_1+16d = -23+16(7) = 89$$

مثال: در یک دنباله‌ی حسابی $a_7 + a_9 = 20$ است.

الف) مقدار a_8 را بیابید. **ب) مقدار $a_3 + a_{13}$ را بیابید.**

پاسخ: الف) $a_7 + a_9 = 20 \Rightarrow (a_1 + 6d) + (a_1 + 8d) = 20 \Rightarrow 2a_1 + 14d = 20 \xrightarrow{\div 2} a_1 + 7d = 10 \xrightarrow{a_8 = a_1 + 7d} a_8 = 10$

ب) $a_3 + a_{13} = (a_1 + 2d) + (a_1 + 12d) = 2a_1 + 14d \xlongequal{\text{طبق «الف»}} 20$

واسطه‌ی حسابی و جملات متساوی‌الفاصله در دنباله‌ی حسابی

نتیجه‌ی (۱): اگر سه عدد a و b و c جملات متوالی یک دنباله‌ی حسابی باشند، در این‌صورت $\mathbf{2b = a + c}$ است و b را **واسطه‌ی حسابی** a و c می‌گوییم.

برای اثبات نتیجه‌ی فوق، کافی است به این نکته توجه کنید که « $b - a = c - b =$ قدرنسبت.»

توجه: در قست «الف» مثال قبل، a_8 واسطه‌ی حسابی a_7 و a_9 است، پس: $2a_8 = a_7 + a_9 \Rightarrow 2a_8 = 20 \Rightarrow a_8 = 10$

نتیجه‌ی (۲): اگر m و n و p و q اعدادی طبیعی بوده و $\mathbf{m + n = p + q}$ باشد، در این صورت $\mathbf{a_m + a_n = a_p + a_q}$ خواهد بود.

توجه: در قسمت «ب» مثال قبل $13 + 3 = 9 + 7$ است، پس $a_7 + a_9 = a_3 + a_{13}$ می‌باشد، بنابراین $a_3 + a_{13} = 20$ خواهد بود.

برای اثبات نتیجه‌ی (۲)، کافی است از رابطه‌ی جمله‌ی عمومی دنباله‌ی حسابی، یعنی $a_n = a_1 + (n-1)d$ کمک بگیرید. (بر عهده‌ی خودتان)

مثال: در دنباله‌ی حسابی $-2, x, 10, \ldots$، واسطه‌ی حسابی جملات دهم و دوازدهم را به‌دست آورید.

پاسخ: x واسطه‌ی حسابی -2 و 10 است، داریم: $2x = -2 + 10 \Rightarrow x = 4$

پس دنباله به‌صورت $-2, 4, 10, \ldots$ خواهد بود که قدرنسبت آن برابر با ۶ است. واسطه‌ی حسابی جملات دهم و دوازدهم، همان جمله‌ی یازدهم (جمله‌ی وسط آن‌ها) است. پس:

$a_{11} = a_1 + 10d = -2 + 10(6) = 58$

تمرین: در یک دنباله‌ی حسابی $a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 = 60$ است.

الف) مقدار a_7 را بیابید. **ب) مقدار $a_2 + a_{12}$ را بیابید.**

پاسخ: الف) ۱۲ ب) ۲۴

حال که نکات مهم مبحث دنباله‌ی حسابی مربوط به سال گذشته را مرور کردیم، شما را با موضوعات جدیدی از این مبحث آشنا می‌کنیم.

مجموع جملات دنباله‌ی حسابی به روش گاوس

کارل فردریش گاوس، ریاضی‌دان آلمانی، در کودکی روشی برای جمع اعداد ۱ تا ۱۰۰ ارائه کرد. بدین‌صورت که اعداد ۱ تا ۱۰۰ را یک‌بار از آخر بـه اول زیـر آن‌ها نوشت و آن‌ها را با هم جمع کرد:

$$\begin{array}{r} 1 + 2 + 3 + \cdots + 98 + 99 + 100 \\ + \\ 100 + 99 + 98 + \cdots + 3 + 2 + 1 \\ \hline \underbrace{101 + 101 + 101 + \cdots + 101 + 101 + 101}_{\text{۱۰۰ مرتبه}} \end{array}$$

بعد از جمع کردن دو سطر، ۱۰۰ مرتبه عدد ۱۰۱ به‌وجود آمد، که مجموع آن‌ها برابر باشد با:

$100 \times 101 = 10100$

ولی از آن‌جایی که عدد به‌دست آمده دو برابر چیزی بود که گاوس مجموع آن را می‌خواست، حاصل را بر ۲ تقسیم کرد:

$1 + 2 + \cdots + 100 = \frac{10100}{2} = 5050$

می‌دانیم اعدادطبیعی، یک دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی اول ۱ و قدرنسبت ۱ می‌باشد. در واقـع گـاوس بـرای محاسـبه‌ی ۱۰۰ جملـه‌ی اول ایـن دنبالـه‌ی حسابی، از نکته‌ی مربوط به **جملات متساوی‌الفاصله** استفاده کرد، به این‌ترتیب که:

$a_1 + a_{100} = a_2 + a_{99} = a_3 + a_{98} = \cdots = a_{50} + a_{51}$

$$\Rightarrow \text{مجموع ۱۰۰ جمله} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{98} + a_{99} + a_{100} = (a_1 + a_{100}) + \underbrace{(a_2 + a_{99})}_{=(a_1 + a_{100})} + \cdots + \underbrace{(a_{55} + a_{56})}_{=(a_1 + a_{100})} = \left(\frac{100}{2}\right) \times (a_1 + a_{100})$$

می‌توان تعمیم روش گاوس را به‌صورت زیر بیان کرد.

اگر $\{a_n\}$ یک دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی اول a_1 باشد، مجموع n جمله‌ی اول این دنباله برابر است با:

$$\mathbf{S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)}$$

مثال: با استفاده از روش گاوس، حاصل عبارات زیر را بیابید.

الف) $1+2+3+\cdots+n$

ب) $1+3+5+\cdots+(2n-1)$

پاسخ:

الف)

$$\begin{array}{r} 1+2+\cdots+(n-1)+n \\ +\quad n+(n-1)+\cdots+2+1 \\ \hline \underbrace{(n+1)+(n+1)+\cdots+(n+1)+(n+1)}_{\text{مرتبه } n} \end{array}$$

بنابراین $1+2+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ می‌شود.

ب)

$$\begin{array}{r} 1+3+\cdots+(2n-3)+(2n-1) \\ +\quad (2n-1)+(2n-3)+\cdots+3+1 \\ \hline \underbrace{2n+2n+\cdots+2n+2n}_{\text{مرتبه } n} \end{array}$$

بنابراین داریم:

$$1+3+\cdots+(2n-1)=\frac{n\times 2n}{2}\Rightarrow 1+3+\cdots+(2n-1)=n^2$$

تمرین: با استفاده از روش گاوس نشان دهید:

الف) $2+4+6+\cdots+2n=n^2+n$

ب) $3+7+11+\cdots+(4n-1)=2n^2+n$

رابطه‌ی S_n در دنباله‌ی حسابی

در یک دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی اول a و قدرنسبت d، مجموع n جمله‌ی اول دنباله، از رابطه‌ی $\mathbf{S_n=\frac{n}{2}[2a+(n-1)d]}$ به‌دست می‌آید. زیرا:

$$S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)\xrightarrow{a_n=a_1+(n-1)d}S_n=\frac{n}{2}\left[a_1+(a_1+(n-1)d)\right]\Rightarrow \boxed{S_n=\frac{n}{2}\left[2a_1+(n-1)d\right]}$$

توجه: در مثال قبل، می‌توان با فرمول S_n جواب‌ها را یافت. دقت کنید:

$$1+2+\cdots+n=?\Rightarrow\begin{cases}a=1\\ d=1\end{cases}\Rightarrow S_n=\frac{n}{2}[2(1)+(n-1)(1)]=\frac{n}{2}(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$1+3+\cdots+(2n-1)=?\Rightarrow\begin{cases}a=1\\ d=2\end{cases}\Rightarrow S_n=\frac{n}{2}[2(1)+(n-1)(2)]=\frac{n}{2}(2n)=n^2$$

مثال: مجموع ۷ جمله‌ی اول دنباله‌های حسابی زیر را بیابید.

الف) $-2,1,4,\ldots$

ب) $2,x,8,\ldots$

ج) $1,b,c,\frac{11}{2},\ldots$

د) $\log_{10}3,\log_{10}12,\log_{10}48,\ldots$

پاسخ: الف) در دنباله‌ی $-2,1,4,\ldots$، جمله‌ی اول برابر -2 و قدرنسبت برابر با ۳ است، داریم:

$$S_7=\frac{7}{2}\left[2(-2)+(7-1)(3)\right]=\frac{7}{2}(-4+18)=\frac{7}{2}\times 14=49$$

ب) ابتدا مقدار x را می‌یابیم و سپس مجموع را محاسبه می‌کنیم.

$$2,x,8\xrightarrow{x\text{ واسطه‌ی حسابی است.}}2x=2+8\Rightarrow x=5$$

$$2,5,8,\ldots\Rightarrow\begin{cases}a=2\\ d=3\end{cases}\Rightarrow S_7=\frac{7}{2}\left[2(2)+(7-1)(3)\right]=\frac{7}{2}(22)=77$$

ج)

$$1,b,c,\frac{11}{2},\ldots\Rightarrow\begin{cases}a=1\\ a_4=\frac{11}{2}\end{cases}\Rightarrow a+3d=\frac{11}{2}\Rightarrow 1+3d=\frac{11}{2}\Rightarrow 3d=\frac{9}{2}\Rightarrow d=1/5$$

$$S_7=\frac{7}{2}\left[2a+(7-1)d\right]=\frac{7}{2}[2+6(1/5)]=\frac{7}{2}(11)=38/5$$

د) $\log_{10}3, \log_{10}12, \log_{10}48, \dots \Rightarrow \log_{10}3, 2\log 2+\log 3, 4\log 2+\log 3, \dots$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1=\log_{10}3 \\ d=2\log_{10}2=\log_{10}4 \end{cases} \Rightarrow S_7=\frac{7}{2}[2\log_{10}3+(7-1)\log_{10}4]=\frac{7}{2}[2\log_{10}3^2+\log_{10}4^6]=7\log_{10}[3^2\times 4^6]^{\frac{1}{2}}=7\log_{10}192$$

مثال: مجموع آن دسته از اعداد طبیعی دو رقمی را بیابید که:

الف) بر ۲ بخش‌پذیر باشند. ب) بر ۳ و ۵ بخش‌پذیر باشند. ج) رقم یکان آن‌ها ۳ باشد.

پاسخ: الف) اعداد دو رقمی مضرب ۲ تشکیل یك دنباله‌ی حسابی به‌صورت ۱۰،۱۲،۱۴،...،۹۸ می‌دهند که در آن جمله‌ی اول ۱۰ و قدرنسبت ۲ می‌باشد. ابتدا تعداد این اعداد و سپس S_{45} را می‌یابیم.

$$a_n=98 \Rightarrow 10+(n-1)(2)=98 \Rightarrow 2n-2=88 \Rightarrow n=45$$

$$S_{45}=\frac{45}{2}[2(10)+(45-1)(2)]=\frac{45}{2}(108)=45\times 54=2430$$

ب) اعدادی بر ۳ و ۵ بخش‌پذیرند که بر ۱۵ بخش‌پذیر باشند. اعداد دو رقمی مضرب ۱۵ تشکیل یك دنباله‌ی حسابی به‌صورت ۱۵،۳۰،۴۵،...،۹۰ که درآن جمله‌ی اول ۱۵ و قدرنسبت نیز ۱۵ می‌باشد.

$$a_n=90 \Rightarrow 15+(n-1)(15)=90 \Rightarrow 15(n-1)=75 \Rightarrow n-1=5 \Rightarrow n=6$$

$$S_6=\frac{6}{2}[2(15)+(6-1)(15)]=3(30+75)=3(105)=315$$

ج) اعداد دو رقمی که رقم یکان آن‌ها ۳ است تشکیل یك دنباله‌ی حسابی به‌صورت ۱۳،۲۳،۳۳،...،۹۳ می‌دهند که درآن جمله‌ی اول ۱۳ و قدرنسبت ۱۰ می‌باشد. مشخص است که تعداد این اعداد برابر با ۹ است، داریم:

$$S_9=\frac{9}{2}[2(13)+(9-1)(10)]=\frac{9}{2}(26+80)=\frac{9}{2}\times 106=477$$

مثال: حداکثر چند جمله از جملات دنباله‌ی حسابی $3, \frac{5}{2}, 2, \frac{3}{2}, 1, \dots$ را با هم جمع کنیم تا حاصل عددی مثبت گردد.

پاسخ: در واقع می‌خواهیم، در دنباله‌ی فوق $S_n>0$ باشد، پس داریم:

$$S_n>0 \Rightarrow \frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d)>0 \Rightarrow \frac{n}{2}\left(2(3)+(n-1)\left(-\frac{1}{2}\right)\right)>0 \xrightarrow{\times 2} n\left(6-\frac{(n-1)}{2}\right)>0$$

$$\xrightarrow{\times 2} n(12-n+1)>0 \Rightarrow n(13-n)>0 \Rightarrow 0<n<13$$

بنابراین حداکثر مقداری که n می‌تواند اختیار کند تا به ازای آن S_n عددی مثبت باشد برابر ۱۲ است.

مثال: مجموع چندجمله از دنباله‌ی حسابی ۷،۱۲،... برابر با ۸۵ می‌شود؟

پاسخ: طبق صورت سؤال $S_n=85$ ، $d=5$ ، $a=7$ می‌باشند. بنابراین داریم:

$$S_n=85 \Rightarrow 85=\frac{n}{2}[2(7)+(n-1)(5)] \Rightarrow 85=\frac{n}{2}(5n+9) \Rightarrow 5n^2+9n-170=0 \Rightarrow n=5$$

تمرین: اگر مجموع n عدد زوج متوالی (با شروع از ۲) ۱۴ برابر تعداد آن‌ها باشد، مقدار n را بیابید.

پاسخ: ۱۳

مثال: در هر یك از حالات زیر در دنباله‌ی حسابی مفروض S_{20} را بیابید.

الف) $a_1=1$ ، $a_5=9$ ب) $a_6=11$ ، $a_4=3$ ج) $a_{13}=19$ ، $a_8=9$ د) $S_{10}=100$ ، $a_4=7$

پاسخ: الف)

$$a_5=9 \Rightarrow a_1+4d=9 \xrightarrow{a_1=1} 1+4d=9 \Rightarrow 4d=8 \Rightarrow d=2$$

$$S_{20}=\frac{20}{2}[2(1)+(20-1)(2)]=10(2+38)=10\times 40=400$$

ب)

$$\begin{cases} a_4=3 \\ a_6=11 \end{cases} \Rightarrow d=\frac{a_6-a_4}{6-4}=\frac{11-3}{2}=\frac{8}{2}=4 \xrightarrow[a_1+3d=3]{a_4=3} a_1+12=3 \Rightarrow a_1=-9$$

$$S_{20}=\frac{20}{2}[2(-9)+(20-1)(4)]=10[-18+76]=10\times 58=580$$

ج) **روش اول:**

$$\begin{cases} a_8=9 \\ a_{13}=19 \end{cases} \Rightarrow d=\frac{a_{13}-a_8}{13-8}=\frac{19-9}{5}=\frac{10}{5}=2 \xrightarrow[a_1=7d=9]{a_8=9} a_1+14=9 \Rightarrow a_1=-5$$

$$S_{20}=\frac{20}{2}[2(-5)+(20-1)(2)]=10[-10+38]=280$$

روش دوم: وقتی اعداد تشکیل دنباله‌ی حسابی می‌دهند، کافی است برای محاسبه‌ی S_n، میانگین جمله‌ی اول و آخر (یا در صورت وجود عدد وسط) را در تعداد کل اعداد ضرب کنیم.

$$\text{میانگین} = \frac{\text{مجموع}}{\text{تعداد}} \Rightarrow \text{مجموع} = \text{تعداد} \times \text{میانگین} \Rightarrow S_n = n\left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right) \xrightarrow{\text{اگر } n \text{ فرد باشد}} S_n = n \times \text{جمله‌ی وسط} = n \times a_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}$$

با استفاده از این رابطه خواهیم داشت:

$$\left.\begin{array}{l} S_{20} = 20\left(\frac{a_1 + a_{20}}{2}\right) \\ 1 + 20 = 13 + 8 \Rightarrow a_1 + a_{20} = a_8 + a_{13} = 9 + 19 = 28 \end{array}\right\} \Rightarrow S_{20} = 20\left(\frac{28}{2}\right) = 280$$

د)

$$\begin{cases} a_4 = 7 \Rightarrow a_1 + 3d = 7 \\ S_{10} = 100 \Rightarrow \frac{10}{2}\left[2a_1 + (10-1)d\right] = 100 \Rightarrow 10a_1 + 45d = 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + 3d = 7 \\ 10a_1 + 45d = 100 \end{cases} \Rightarrow a_1 = 1 \ , \ d = 2$$

$$S_{20} = \frac{20}{2}\left[2(1) + (20-1)(2)\right] = 10(2 + 38) = 400$$

مثال: **اگر به قدرنسبت یک دنباله‌ی حسابی ۴ واحد اضافه کرده و از جمله‌ی اول آن ۳ واحد کم کنیم، مجموع بیست جمله‌ی اول آن چه تغییری نسبت به قبل می‌کند؟**

پاسخ:

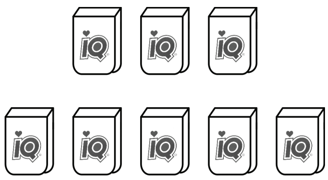
$$S_{20} = \frac{20}{2}\left[2a + (20-1)(d)\right] = 10[2a + 19d]$$

حال d را به $d+4$ و a را به $a-3$ تبدیل می‌کنیم، داریم:

$$S'_{20} = 10\left[2(a-3) + 19(d+4)\right] = 10[2a - 6 + 19d + 76] = 10[2a + 19d + 70] = \underbrace{10[2a + 19d]}_{S_{20}} + 700 \Rightarrow$$

۷۰۰ واحد اضافه می‌شود.

مثال: **در یک فروشگاه قوطی‌های آب معدنی «iQ» به طریق مقابل چیده شده‌اند: «بالاترین ردیف ۳ قوطی، زیر آن ۵ قوطی، بعد ۷ قوطی و ...» اگر قوطی‌ها در ۸ ردیف چیده شده باشند، تعداد کل قوطی‌هایی که به این طریق چیده شده‌اند را بیابید.**



پاسخ:

$$a_1 = 3 \ , \ a_2 = 5 \ , \ a_3 = 7, \dots \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 3 \\ d = 2 \end{cases} \Rightarrow S_8 = \frac{8}{2}\left[2(3) + (8-1)(2)\right] = 4(6 + 14) = 80$$

پس در ردیف اول تا هشتم در مجموع ۸۰ قوطی چیده شده است.

مثال: **اعداد فرد را به گونه‌ای دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد اعداد هر دسته، برابر با شماره‌ی آن دسته باشد، دقت کنید:**

(۱)،(۳،۵)،(۷،۹،۱۱)،(۱۳،۱۵،۱۷،۱۹)،...

الف) کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عدد دسته‌ی دهم را به‌دست آورید. **ب) مجموع تمام اعداد دسته‌ی دهم را بیابید.**

پاسخ: الف) مجموع تعداد اعداد دسته‌های اول تا نهم برابر است با:

$$1 + 2 + 3 + \dots + 9 = \frac{9 \times 10}{2} = 45$$

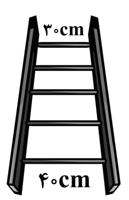
بنابراین کوچک‌ترین عدد دسته‌ی دهم، چهل و ششمین عدد فرد، یعنی عدد ۹۱ و بزرگ‌ترین عدد دسته‌ی دهم، پنجاه و پنجمین عدد فرد یعنی ۱۰۹ است:

دسته‌ی دهم : ۹۱،۹۵،...،۱۰۹

ب) برای یافتن مجموع اعداد دسته‌ی دهم، داریم:

$$\begin{cases} a_1 = 91 \\ d = 2 \\ n = 10 \end{cases} \Rightarrow S_{10} = \frac{10}{2}\left[2(91) + (10-1)(2)\right] = 5(182 + 18) = 1000$$

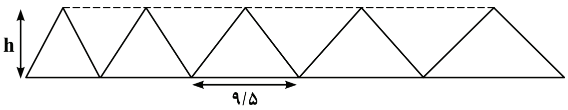
مثال: **طول پله‌های یک نردبان به‌طور یکنواخت از پایین به بالا از ۴۰ سانتی‌متر به ۳۰ سانتی‌متر می‌رسد. اگر مجموع طول پله‌ها ۵/۲۵ متر باشد، این نردبان چند پله دارد؟**



پاسخ: اگر تعداد پله‌ها را n فرض کنیم، داریم:

$$\begin{cases} a_1 = 40\,cm \\ a_n = 30\,cm \\ S_n = 5/25 = 525\,cm \end{cases} \Rightarrow S_n = n\left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right) \Rightarrow 525 = n\left(\frac{40 + 30}{2}\right) \Rightarrow 525 = 35n \Rightarrow n = \frac{525}{35} = 15$$

پس این نردبان ۱۵ پله دارد.



مثال: ۵ مثلث داریم که هم ارتفاع هستند و اندازه‌ی قاعده‌ی آن‌ها تشکیل دنباله‌ی حسابی می‌دهند. (طبق شکل)

اگر مجموع مساحت‌های این مثلث‌ها برابر ۹۵ و اندازه‌ی قاعده‌ی مثلث میانی برابر ۹/۵ باشد، اندازه‌ی ارتفاع این مثلث‌ها را بیابید.

پاسخ: طبق اطلاعات صورت سؤال داریم:

$$\begin{cases} n=۵ \\ S_۵=۹۵ \\ a_۳=\frac{۱}{۲}(۹/۵)h \end{cases} \Rightarrow ۹۵=\frac{۵}{۲}\left[۲a_۱+(۵-۱)(d)\right] \Rightarrow ۹۵=\frac{۵}{۲}(۲a_۱+۴d) \Rightarrow a_۱+۲d=۱۹ \xrightarrow{a_۳=a_۱+۲d} \frac{۱}{۲}(۹/۵)h=۱۹ \Rightarrow h=۴$$

تمرین: مهرداد برای خرید یك دوچرخه، بهای آن را قسطی پرداخت می‌کند. برای قسط اول ۲۰ هزار تومان، برای قسط دوم ۲۵ هزار تومان و برای قسط سوم ۳۰ هزار تومان و به همین شکل هر با پنج هزار تومان به قسط می‌افزاید. طی چندقسط مهرداد بهای دوچرخه را که ۶۵۰ هزار تومان است پرداخت می‌کند؟

پاسخ: $n=۱۳$

مثال: معادلات مقابل را حل کنید. الف) $(x+۱)+(x+۴)+(x+۷)+\cdots+(x+۳۱)=۴۰۰$ ب) $۹^{۲+۴+۶+\cdots+۲x}=۲۷^{۲۸}$

پاسخ: الف) ابتدا تعداد جملات (تعداد پرانتزها) را می‌یابیم:

$$\begin{cases} a_۱=x+۱ \\ a_n=x+۳۱ \\ d=۳ \end{cases} \Rightarrow x+۳۱=(x+۱)+(n-۱)(۳) \Rightarrow \cancel{x}+۳۱=\cancel{x}+۳n-۲ \Rightarrow n=۱۱$$

حال $S_{۱۱}$ را محاسبه کرده و برابر با ۴۰۰ قرار می‌دهیم:

$$S_{۱۱}=۴۰۰ \Rightarrow \frac{۱۱}{۲}\left[۲(x+۱)+(۱۱-۱)(۳)\right]=۴۰۰ \Rightarrow \frac{۱۱}{۲}[۲x+۳۲]=۴۰۰ \Rightarrow ۱۱x+۱۷۶=۴۰۰ \Rightarrow ۱۱x=۲۲۴ \Rightarrow x=\frac{۲۲۴}{۱۱}$$

ب)

$$۹^{۲+۴+۶+\cdots+۲x}=۲۷^{۲۸} \Rightarrow (۳^۲)^{۲+۴+\cdots+۲x}=(۳^۳)^{۲۸} \Rightarrow ۴+۸+\cdots+۴x=۸۴ \xRightarrow{\div ۴} ۱+۲+\cdots+x=۲۱ \Rightarrow \frac{x(x+۱)}{۲}=۲۱ \Rightarrow x=۶$$

حال دنباله‌ی حسابی را رها کرده و به سراغ دنباله‌ی هندسی می‌رویم و با یادآوری مبحث دنباله‌ی هندسی کتاب ریاضی (۲) درس را آغاز می‌کنیم.

یادآوری دنباله‌ی هندسی

در سال دوم با دنباله‌ی هندسی آشنا شدید. دنباله‌ای از اعداد که نسبت جملات متوالی آن مقدار ثابتی به نام **قدرنسبت (q)** است.

$$a_۱ \xrightarrow{\times q} a_۱q \xrightarrow{\times q} a_۱q^۲ \xrightarrow{\times q} a_۱q^۳ \xrightarrow{\times q} \cdots \xrightarrow{\times q} a_n=a_۱q^{n-۱}$$

$a_۱$ را جمله‌ی اول، q را قدرنسبت و a_n را جمله‌ی عمومی دنباله‌ی هندسی می‌نامیم. با ذکر چند مثال، کاربردهای این رابطه را مرور می‌کنیم.

مثال: جمله‌ی دهم دنباله‌ی هندسی $-۲, ۱, -\frac{۱}{۲}, \ldots$ را بیابید.

پاسخ:

$$\begin{cases} a_۱=-۲ \\ q=-\frac{۱}{۲} \end{cases} \Rightarrow a_{۱۰}=a_۱q^۹=(-۲)\left(-\frac{۱}{۲}\right)^۹=-۲\times\frac{-۱}{۲^۹}=\frac{۱}{۲^۸}=\frac{۱}{۲۵۶}$$

مثال: دنباله‌ی هندسی $\frac{۱}{۸}, \frac{۱}{۴}, \ldots, ۳۲$ را درنظر بگیرید.

الف) این دنباله چند جمله دارد؟ ب) اگر این دنباله را به همین‌صورت ادامه دهیم، عدد ۱۲۸ جمله‌ی چندم این دنباله است؟

پاسخ:

الف)
$$\begin{cases} a_۱=\frac{۱}{۸} \\ q=۲ \\ a_n=۳۲ \end{cases} \Rightarrow ۳۲=\frac{۱}{۸}(۲)^{n-۱} \Rightarrow ۲^{n-۱}=۲۵۶=۲^۸ \Rightarrow n-۱=۸ \Rightarrow n=۹$$

ب)
$$a_n=۱۲۸ \Rightarrow a_۱q^{n-۱}=۱۲۸ \xrightarrow[q=۲]{a_۱=\frac{۱}{۸}} \frac{۱}{۸}(۲)^{n-۱}=۱۲۸ \Rightarrow ۲^{n-۱}=۸\times۱۲۸ \Rightarrow ۲^{n-۱}=۲^{۱۰} \Rightarrow n-۱=۱۰ \Rightarrow n=۱۱$$

مثال: در یك دنباله‌ی هندسی $a_۴=۵$ و $a_۶=۴۵$ است. قدرنسبت این دنباله را بیابید.

پاسخ:

$$\begin{cases} a_۴=۵ \Rightarrow a_۱q^۳=۵ \\ a_۶=۴۵ \Rightarrow a_۱q^۵=۴۵ \end{cases} \xrightarrow{\text{تقسیم}} \frac{۱}{q^۲}=\frac{۱}{۹} \Rightarrow q^۲=۹ \Rightarrow q=\pm۳$$

رابطه‌ی بین دو جمله متمایز و قدرنسبت در دنباله‌ی هندسی

اگر a_m و a_n دو جمله‌ی مخالف صفر از یک دنباله‌ی هندسی باشند، داریم:

$$q^{m-n}=\frac{a_m}{a_n}$$

برای اثبات این فرمول، کافی است به جای a_m و a_n، قرار دهید a_1q^{m-1} و a_1q^{n-1}.

توجه: در مثال قبل می‌توان نوشت:

$$q^{6-4}=\frac{a_6}{a_4}\Rightarrow q^2=\frac{45}{5}=9\Rightarrow q=\pm 3$$

مثال: در یک دنباله‌ی هندسی جمله‌ی سوم برابر ۷ و جمله‌ی ششم برابر ۵۶ است. جمله‌ی نهم را به‌دست آورید.

پاسخ:

$$\begin{cases}a_3=7\Rightarrow a_1q^2=7\\ a_6=56\Rightarrow a_1q^5=56\end{cases}\xrightarrow{\text{تقسیم}}\frac{1}{q^3}=\frac{1}{8}\Rightarrow q^3=8\Rightarrow q=2$$

از آن‌جایی که $a_3=7$ است، داریم:

$$a_3=7\Rightarrow a_1(2)^2=7\Rightarrow a_1=\frac{7}{4}\Rightarrow a_9=a_1q^8=\frac{7}{4}(2)^8=7\times 2^6=448$$

واسطه‌ی هندسی

اگر سه عدد a و b و c جملات متوالی یک دنباله‌ی هندسی باشند، در این‌صورت $\mathbf{b^2=ac}$ است و b را **واسطه‌ی هندسی** a و c می‌گوییم.

برای اثبات رابطه‌ی $b^2=ac$، کافی است به این نکته توجه کنید که « $\frac{b}{a}=\frac{c}{b}=$ قدرنسبت».

توجه: در مثال قبل، جمله‌های سوم و ششم داده شده‌اند و جمله‌ی نهم خواسته شده است، پس:

$$(a_6)^2=a_3\times a_9\Rightarrow (56)^2=7\times a_9\Rightarrow a_9=7\times 64=448$$

مثال: در یک دنباله‌ی هندسی حاصل‌ضرب جملات سوم و هفتم برابر ۶۴ است.

الف) جمله‌ی پنجم را به دست آورید. **ب) حاصل‌ضرب جملات چهارم و ششم را به دست آورید.**

پاسخ:

الف) $\underbrace{a_3,a_5,a_7}_{\text{دنباله‌ی هندسی}}\Rightarrow (a_5)^2=a_3\times a_7\Rightarrow (a_5)^2=64\Rightarrow a_5=\pm 8$

ب) $a_3\times a_7=64\Rightarrow a_1q^2\times a_1q^6=64\Rightarrow a_1^2\times q^8=64\Rightarrow a_4\times a_6=a_1q^3\times a_1q^5=a_1^2\times q^8=64$

جملات متساوی‌الفاصله در دنباله‌ی هندسی

نتیجه: اگر m و n و p و q اعدادی طبیعی بوده و $\mathbf{m+n=p+q}$ باشد، در این صورت $\mathbf{a_m\times a_n=a_p\times a_q}$ خواهد بود.

توجه: در قسمت «ب» مثال قبل، چون $6+4=7+3$ است، پس: $a_3\times a_7=a_4\times a_6=64$

تمرین: در یک دنباله‌ی هندسی حاصل‌ضرب جملات سوم، چهارم، پنجم و ششم برابر با ۶۴ است. حاصل‌ضرب جملات دوم و هفتم را به دست آورید.

پاسخ: ۸ یا ۸-

مجموع جملات دنباله‌ی هندسی

فرض کنید می‌خواهیم مجموع جملات دنباله‌ی ۲،۴،۸،۱۶،۳۲،۶۴،۱۲۸ را به‌دست آوریم. می‌توانیم به این طریق عمل کنیم:

مجموع جملات را برابر با A می‌گیریم:

$$A=2+4+8+\cdots+128$$

به طرفین عدد ۲ را اضافه می‌کنیم:

$$A+2=2+2+4+8+\ldots+128\Rightarrow A+2=4+4+8+16+\cdots+128\Rightarrow A+2=8+8+16+\cdots+128$$

$$\Rightarrow\cdots\Rightarrow A+2=128+128=256\Rightarrow A=254$$

ولی این روش کمی وقت‌گیر است و مطمئناً در همه‌ی مسائل اجرایی نیست. پس فرمولی برای یافتن S_n بیان می‌کنیم.

S_n دنباله‌ی هندسی:

قضیه: نشان دهید در یک دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول a_1 و قدرنسبت q $(q\neq 1)$، مجموع n جمله‌ی اول دنباله برابر است با:

$$S_n=a_1\frac{1-q^n}{1-q}\ ,\ S_n=a_1\frac{q^n-1}{q-1}\ ,\ S_n=\frac{a_1-a_{n+1}}{1-q}\ ,\ S_n=\frac{a_{n+1}-a_1}{q-1}$$

اثبات: روش اول:

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=a_1+a_1q+a_1q^2+\cdots+a_1q^{n-1}=a_1(1+q+q^2+\cdots+q^{n-1})=a_1\frac{(1+q+q^2+\cdots+q^{n-1})(1-q)}{1-q}$$

$$\Rightarrow S_n=a_1\frac{1-q^n}{1-q}=a_1\frac{q^n-1}{q-1}\Rightarrow S_n=\frac{a_1-a_1q^n}{1-q}=\frac{a_1-a_{n+1}}{1-q}=\frac{a_{n+1}-a_1}{q-1}$$

روش دوم:

$$\begin{cases}S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n\\ S_nq=a_1q+a_2q+\cdots+a_nq=a_2+a_3+\cdots+a_n+a_{n+1}\end{cases}$$

$$S_nq-S_n=(a_2+a_3+\cdots+a_n+a_{n+1})-(a_1+a_2+\cdots+a_n)=a_{n+1}-a_1\Rightarrow S_n(q-1)=a_{n+1}-a_1$$

$$\Rightarrow S_n=\frac{a_{n+1}-a_1}{q-1}=\frac{a_1-a_{n+1}}{1-q}\Rightarrow S_n=a_1\frac{1-q^n}{1-q}=a_1\frac{q^n-1}{q-1}$$

توجه: در مثال فوق داریم:

$$2+4+8+\cdots+128=?$$

$$\begin{cases}a_1=2\\ q=2\Rightarrow S_7=2\left(\frac{2^7-1}{2-1}\right)=2(128-1)=2\times 127=254\\ n=7\end{cases}$$

مثال: مجموع ۵ جمله‌ی اول دنباله‌های هندسی زیر را بیابید.

الف) $1,2,4,\ldots$ ب) $-\frac{2}{5},\frac{1}{2},-\frac{5}{8},\ldots$ ج) $2,x,y,\frac{1}{4},\ldots$ د) $\log_{10}2,\log_{10}4,\log_{10}16,\ldots$

پاسخ:

الف) $\begin{cases}a_1=1\\ q=2\end{cases}\Rightarrow S_5=1\left(\frac{2^5-1}{2-1}\right)=32-1=31$

ب) $\begin{cases}a_1=-\frac{2}{5}\\ q=\frac{\frac{1}{2}}{-\frac{2}{5}}=-\frac{5}{4}\end{cases}\Rightarrow S_5=-\frac{2}{5}\left(\frac{(-\frac{5}{4})^5-1}{-\frac{5}{4}-1}\right)=-\frac{2}{5}\left(\frac{-\frac{4149}{1024}}{-\frac{9}{4}}\right)=-\frac{461}{640}$

ج) $\begin{cases}a_1=2\\ a_4=\frac{1}{4}\end{cases}\Rightarrow \frac{1}{4}=2q^3\Rightarrow q=\frac{1}{2}\Rightarrow S_5=2\left(\frac{(\frac{1}{2})^5-1}{\frac{1}{2}-1}\right)=-4\left(\frac{1}{32}-1\right)=\frac{31}{8}$

د) $\log_{10}2,\log_{10}4,\log_{10}16,\ldots\Rightarrow \log_{10}2,2\log_{10}2,4\log_{10}2,\ldots$

$$\begin{cases}a_1=\log_{10}2\\ q=2\end{cases}\Rightarrow S_5=\log_{10}2\times\left(\frac{2^5-1}{2-1}\right)=31\times\log_{10}2=\log_{10}2^{31}$$

مثال: اگر جملات اول و هفتم یك دنباله‌ی هندسی به‌ترتیب ۳ و ۲۴ باشد، مجموع ۶ جمله‌ی اول این دنباله چه‌قدر است؟

پاسخ:

$$\frac{a_7}{a_1}=q^{7-1}\Rightarrow\frac{24}{3}=q^6\Rightarrow q=\sqrt[6]{8}=\sqrt[6]{2^3}\Rightarrow q=\sqrt{2}$$

$$S_6=\frac{a_7-a_1}{q-1}=\frac{24-3}{\sqrt{2}-1}=21(\sqrt{2}+1)$$

مثال: **مجموع چندجمله از دنباله‌ی هندسی ۱، ۲-، ۴، ... برابر با ۴۳ می‌شود؟**

پاسخ:

$$\begin{cases} a_۱=۱ \\ q=-۲ \\ S_n=۴۳ \end{cases} \Rightarrow ۴۳=۱\left(\frac{(-۲)^n-۱}{-۲-۱}\right) \Rightarrow ۴۳=\frac{(-۲)^n-۱}{-۳} \Rightarrow (-۲)^n-۱=-۱۲۹ \Rightarrow (-۲)^n=-۱۲۸ \Rightarrow n=۷$$

مثال: **در یک دنباله‌ی هندسی مجموع ۱۰ جمله‌ی اول دنباله ۳۳ برابر مجموع ۵ جمله‌ی اول آن است. قدرنسبت این دنباله را بیابید.**

پاسخ: $S_{۱۰}=۳۳S_۵ \Rightarrow \cancel{a_۱}\left(\frac{q^{۱۰}-۱}{\cancel{q-۱}}\right)=۳۳\cancel{a_۱}\left(\frac{q^۵-۱}{\cancel{q-۱}}\right) \Rightarrow \cancel{(q^۵-۱)}(q^۵+۱)=۳۳\cancel{(q^۵-۱)} \Rightarrow q^۵+۱=۳۳ \Rightarrow q^۵=۳۲ \Rightarrow q=۲$

مثال: **اگر S_n مجموع n جمله‌ی اول دنباله‌ی هندسی $\{a_n\}$ با قدرنسبت q باشد، ثابت کنید:**

الف) $\dfrac{S_{۲n}}{S_n}=q^n+۱$

ب) $\dfrac{\text{مجموع } n \text{ جمله‌ی دوم}}{\text{مجموع } n \text{ جمله‌ی اول}}=q^n$

پاسخ: الف)

$$\frac{S_{۲n}}{S_n}=\frac{\frac{a_۱(q^{۲n}-۱)}{q-۱}}{\frac{a_۱(q^n-۱)}{q-۱}}=\frac{q^{۲n}-۱}{q^n-۱}=\frac{(q^n)^۲-۱^۲}{q^n-۱}\xlongequal{\text{اتحاد مزدوج}}\frac{(q^n-۱)(q^n+۱)}{q^n-۱}=q^n+۱$$

ب) ابتدا n جمله‌ی اول و n جمله‌ی دوم دنباله‌ی $\{a_n\}$ را مشخص می‌کنیم:

$$\underbrace{a_۱, a_۲, \dots, a_n}_{n \text{ جمله‌ی اول}}, \underbrace{a_{n+۱}, a_{n+۲}, \dots, a_{n+n}}_{n \text{ جمله‌ی دوم}}$$

مجموع n جمله‌ی اول (یعنی $a_۱+a_۲+\dots+a_n$) همان S_n است. مجموع $۲n$ جمله‌ی اول (یعنی $a_۱+a_۲+\dots+a_{۲n}$) نیز همان $S_{۲n}$ است که در قسمت «الف» با آن مواجه بودیم. حال باید مجموع n جمله‌ی دوم را به دست آوریم. داریم:

$$\text{مجموع } n \text{ جمله‌ی دوم}=a_{n+۱}+a_{n+۲}+\dots+a_{۲n}=(a_۱+a_۲+\dots+a_n+a_{n+۱}+a_{n+۲}+\dots+a_{۲n})-(a_۱+a_۲+\dots+a_n)=S_{۲n}-S_n$$

$$\Rightarrow \frac{\text{مجموع } n \text{ جمله‌ی دوم}}{\text{مجموع } n \text{ جمله‌ی اول}}=\frac{S_{۲n}-S_n}{S_n}=\frac{S_{۲n}}{S_n}-\frac{S_n}{S_n}=\frac{S_{۲n}}{S_n}-۱\xlongequal{\text{طبق الف}}(q^n+۱)-۱=q^n$$

تمرین: **در یک دنباله‌ی هندسی $\frac{S_۸}{S_۴}=۱۷$ است. مقدار $\frac{a_۸}{a_۴}$ را به‌دست آورید.**

پاسخ: ۱۶

مثال: **در دنباله‌ی هندسی $۱, \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۴}, \dots$ مجموع ۴ جمله‌ی اول دنباله چند برابر مجموع ۴ جمله‌ی بعدی آن است؟**

پاسخ:

$$\text{مجموع ۴ جمله‌ی اول دنباله}=S_۴=\frac{\left(\frac{۱}{۲}\right)^۴-۱}{\frac{۱}{۲}-۱}=\frac{-\frac{۱۵}{۱۶}}{-\frac{۱}{۲}}=\frac{۱۵}{۸}$$

$$\text{مجموع ۴ جمله‌ی دوم دنباله}=S_۸-S_۴=\frac{\left(\frac{۱}{۲}\right)^۸-۱}{\frac{۱}{۲}-۱}-\frac{\left(\frac{۱}{۲}\right)^۴-۱}{\frac{۱}{۲}-۱}=\frac{۲۵۵}{۱۲۸}-\frac{۱۵}{۸}=\frac{۱۵}{۱۲۸} \Rightarrow \frac{S_۴}{S_۸-S_۴}=\frac{\frac{۱۵}{۸}}{\frac{۱۵}{۱۲۸}}=\frac{۱۲۸}{۸}=۱۶$$

مثال: **حداقل چند جمله از دنباله‌ی هندسی $\frac{۱}{۲}, ۱, ۲, \dots$ را (با شروع از جمله‌ای اول) جمع کنیم تا حاصل بزرگ‌تر از ۹۰۰ شود؟**

پاسخ: باید از نامعادله‌ی $S_n>۹۰۰$ کم‌ترین مقدار n را بیابیم.

$S_n=\frac{۱}{۲}\left(\frac{۲^n-۱}{۲-۱}\right)>۹۰۰ \Rightarrow ۲^n-۱>۱۸۰۰ \Rightarrow ۲^n>۱۸۰۱ \Rightarrow n>۱۰ \Rightarrow$ کم‌ترین مقدار n برابر با ۱۱ است.

مثال: **در یک دنباله‌ی هندسی $a_۵=۴$ و $a_۷=۳۶$ است. اگر دنباله صعودی باشد، مقدار $S_۴$ را بیابید.**

پاسخ:

$$\begin{cases} a_۵=۴ \\ a_۷=۳۶ \end{cases} \Rightarrow q^{۷-۵}=\frac{۳۶}{۴} \Rightarrow q^۲=۹ \xrightarrow{\text{دنباله صعودی است.}} q=۳ \Rightarrow a_۱=\frac{۴}{۸۱} \Rightarrow S_۴=\frac{۴}{۸۱}\left(\frac{۳^۴-۱}{۳-۱}\right)=\frac{۴}{۸۱}\left(\frac{۸۰}{۲}\right)=\frac{۱۶۰}{۸۱}$$

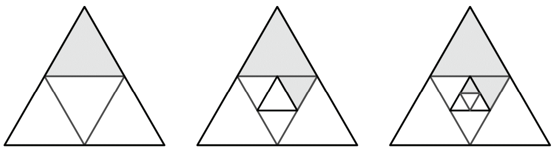
مثال: اسب مسابقه‌ای را ۸۰۰۰۰۰ تومان قیمت‌گذاشتند ولی خریدار متعقد بود قیمت اسب گران است. فروشنده پیشنهادی به خریدار کرد، او گفت: «من اسب را به شما می‌دهم ولی ۲۰ میخ نعل‌های این اسب را به این طریق به شما می‌فروشم‌که برای میخ اول ۱ تومان، برای میخ دوم ۲ تومان، برای میخ سوم ۴ تومان و ... می‌گیرم». خریدار که از این پیشنهاد خوشحال شده بود، اسب را خرید. به نظر شما خریدار سود کرده یا ضرر؟ چه‌قدر؟

پاسخ: باید قیمت کل ۲۰ میخ را حساب کنیم. داریم:

$$\begin{cases} a_۱ = ۱ \\ q = ۲ \\ n = ۲۰ \end{cases} \Rightarrow S_{۲۰} = ۱\left(\frac{۲^{۲۰}-۱}{۲-۱}\right) = ۲^{۲۰}-۱ = ۱۰۴۸۵۷۵ \text{ تومان}$$

مشخص است که خریدار ضرر کرده است، چون قیمت میخ‌ها برابر با یك میلیون و چهل و هشت هزار و پانصد و هفتاد و پنج تومان شده، یعنی دویست و چهل و هشت هزار و پانصد و هفتاد و پنج تومان ضرر کرده است.

مثال: در شکل مقابل، وسط‌های اضلاع مثلثی متساوی‌الاضلاع را متوالیاً به هم وصل می‌کنیم و در هر مرحله یکی از مثلث‌های ایجاد شده را رنگ می‌نماییم و این کار را ادامه می‌دهیم. از مرحله‌ی چندم به بعد، بیش از ۳۳/۳ درصد مثلث اولیه رنگ می‌شود؟



(۱) (۲) (۳) ....

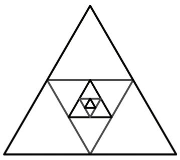
پاسخ: سطح قسمت رنگی در شکل nاُم $= \frac{۱}{۴} + \left(\frac{۱}{۴}\right)^۲ + \left(\frac{۱}{۴}\right)^۳ + \cdots + \left(\frac{۱}{۴}\right)^n$

باید $S_n > \frac{۳۳/۳}{۱۰۰}$ باشد، پس:

$$\frac{۱}{۴}\left(\frac{\left(\frac{۱}{۴}\right)^n - ۱}{\frac{۱}{۴} - ۱}\right) > \frac{۳۳۳}{۱۰۰۰} \Rightarrow -\frac{۱}{۳}\left(\left(\frac{۱}{۴}\right)^n - ۱\right) > \frac{۳۳۳}{۱۰۰۰} \xrightarrow{\times(-۳)} \left(\frac{۱}{۴}\right)^n - ۱ < -\frac{۹۹۹}{۱۰۰۰} \Rightarrow \frac{۱}{۴^n} < \frac{۱}{۱۰۰۰} \Rightarrow ۴^n > ۱۰۰۰ \Rightarrow n \geq ۵$$

بنابراین، از شروع مرحله‌ی (پنجم) به بعد بیشتر از ۳۳/۳ درصد مثلث اولیه رنگ می‌شود.

مثال: در مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع واحد، وسط‌های اضلاع را متوالیاً به هم وصل می‌کنیم تا مثلث متساوی‌الاضلاع جدیدی به‌وجود آید و این کار را ادامه می‌دهیم. حداکثر تا مرحله‌ی چندم می‌توانیم این عمل را تکرار کنیم تا مجموع محیط‌های مثلث‌ها از ۵/۹۸ تجاوز نکند؟



پاسخ:

دنباله‌ی محیط‌های مثلث‌ها : $۳, \frac{۳}{۲}, \frac{۳}{۴}, \ldots$ (چرا؟)

مجموع محیط‌های مثلث‌ها نباید از ۵/۹۸ تجاوز کند، پس باید $S_n \leq ۵/۹۸$ باشد، داریم:

$$۳\left(\frac{\left(\frac{۱}{۲}\right)^n - ۱}{\frac{۱}{۲} - ۱}\right) \leq ۵/۹۸ \Rightarrow -۶\left(\frac{۱}{۲^n} - ۱\right) \leq ۵/۹۸ \Rightarrow \frac{۶}{۲^n} \geq ۰/۰۲ \Rightarrow ۲^n \leq ۳۰۰ \Rightarrow n \leq ۸ \Rightarrow \text{ حداکثر تا ۸ مرحله}$$

تمرین: برای از بین بردن ذرات معلق در یك محلول، آن را از صافی‌هایی عبور می‌دهیم. اگر در اثر عبور از هر صافی، تعداد ذرات معلق موجود در محلول نصف شود، حداقل چه تعداد صافی لازم است تا بیش از ۹۷ درصد ذرات معلق موجود در محلول از بین بروند؟

پاسخ: ۶

مثال: حاصل عبارات زیر را بیابید.

الف) $۹ + ۹۹ + ۹۹۹ + \cdots + \underbrace{۹۹\ldots۹}_{\text{۱۰ مرتبه}}$

ب) $۱۱ + ۱۰۱ + ۱۰۰۱ + \cdots + ۱\underbrace{۰\ldots۰}_{\text{۱۰ مرتبه}}۱$

پاسخ: الف) دنباله را بدین صورت می‌نویسیم:

$$۹, ۹۹, ۹۹۹, \ldots, \underbrace{۹۹\ldots۹}_{\text{۱۰ تا}} = ۱۰-۱, ۱۰^۲-۱, ۱۰^۳-۱, \ldots, ۱۰^{۱۰}-۱ \Rightarrow (۱۰ + ۱۰^۲ + ۱۰^۳ + \ldots + ۱۰^{۱۰}) - (۱۰ \times ۱) = ۱۰\left(\frac{۱۰^{۱۰}-۱}{۱۰-۱}\right) - ۱۰ = ۱۰\left(\frac{۱۰^{۱۰}-۱۰}{۹}\right)$$

ب) دنباله را بدین صورت می‌نویسیم:

$$۱۱ + ۱۰۱ + ۱۰۰۱ + \cdots + ۱\underbrace{۰\ldots۰}_{\text{۱۰ تا}}۱ = ۱۰ + ۱, ۱۰^۲ + ۱, ۱۰^۳ + ۱, \ldots, ۱۰^{۱۱} + ۱$$

$$\Rightarrow (۱۰ + ۱۰^۲ + \cdots + ۱۰^{۱۱}) + (۱۱ \times ۱) = ۱۰\left(\frac{۱۰^{۱۱}-۱}{۱۰-۱}\right) + ۱۱ = \frac{۱۰}{۹}(۱۰^{۱۱}-۱) + ۱۱$$