

پاسخ تشریحی مسابقات ریاضی

دوره اول متوسطه

۹م + ۸م + ۷م

شامل پاسخ‌های:

- ۵۰۰ پرسش ریاضی هفتم
- ۸۰۰ پرسش ریاضی هشتم
- ۱۲۰۰ پرسش ریاضی نهم
- ۴۰۰ پرسش هوش و خلاقیت
- ۲۲ آزمون آزمایشی

مرشد: مرجع رشد و شکوفایی دانش‌آموزان

ویژه داوطلبان شرکت در آزمون‌های ورودی مدارس تیزهوشان و مدارس برتر کشور

حمیدرضا بیات - مرتضی خمایی ابدی - کیان کریمی خراسانی

به نام خداوند جان و خرد



کزین برتر اندیشه برنگذرد

مقدمه

بسیاری از دانش‌آموزان عزیز امروزه مایلند در مدارس تیزهوشان و یا مدارس خاص دیگر ثبت‌نام کنند. ورود به این‌گونه مدارس، با آزمون‌های دشواری همراه است و بین مواد درسی مختلف، درس ریاضی بیش‌ترین نقش را در پذیرش یا عدم پذیرش دانش‌آموز ایفا می‌کند. کتاب «مسابقات ریاضی دوره اول متوسطه» یا «۳۳۳۳ تست مرشد» دانش‌آموزان کلاس نهم را برای این‌گونه آزمون‌ها آماده می‌کند. در تألیف کتاب «۳۳۳۳ تست مرشد» از منابع مختلفی استفاده شده است که به برخی از آن اشاره می‌شود:

۱. آزمون‌های ورودی مدارس تیزهوشان و مدارس برتر
۲. مسائل مسابقات علمی کشوری و بین‌مدرسه‌ای
۳. مسائل مسابقات بین‌المللی از قبیل: کانگورو، JMC، TIMSS و IMSO
۴. مسائل المپیادهای ریاضی نوجوانان کشور
۵. آزمون‌های ورودی روبوکاپ
۶. مسائل کنکورهای سراسری
۷. سؤالات تألیفی مؤلفان کتاب

گفتنی است این سؤالات براساس فصل‌های کتاب‌های درسی ریاضی هفتم و هشتم و نیز براساس بخش‌های کتاب درسی ریاضی نهم طبقه‌بندی و مرتب شده‌اند. در تهیه این کتاب، با توجه به رویکرد جدید آزمون‌های ورودی مدارس تیزهوشان، به سؤالات «هوش و خلاقیت» توجه ویژه‌ای شده است. هم‌چنین برای این‌که دانش‌آموزان عزیز بتوانند سطح علمی خود را در درس ریاضی ارزیابی کنند، ۲۲ آزمون دوره‌ای و آزمایشی نیز طراحی و در اختیار آن‌ها قرار داده شده است.

در این کتاب، از آیکون  برای نشان دادن سؤالات برگرفته از مسابقات و المپیادهای علمی کشوری و بین‌المللی و از آیکون  برای نشان دادن سؤالات برگرفته از آزمون‌های ورودی مدارس تیزهوشان و مدارس غیرانتفاعی برتر استفاده شده است. کتاب «۳۳۳۳ تست مرشد» در دو جلد تألیف شده است: جلد اول شامل سؤالات همراه با پاسخ‌نامه کلیدی آن‌هاست و جلد دوم به پاسخ‌نامه تشریحی سؤالات اختصاص دارد.

امید است این کتاب در ارتقاء سطح علمی دانش‌آموزان مؤثر باشد و مورد توجه آن‌ها و دبیران گرامی و خانواده‌ها قرار گیرد. در پایان، وظیفه خود می‌دانیم از مؤلفان محترم کتاب، آقایان حمیدرضا بیات، مرتضی خمایی‌ابدی و کیان کریمی خراسانی و دبیر محترم مجموعه تشکر کنیم. هم‌چنین از خانم‌ها فیروزه مرادی و سمانه ایمان‌فرد که زحمت حروف‌چینی و ترسیم شکل‌ها و صفحه‌آرایی کتاب را برعهده داشتند بسیار سپاس‌گذاریم و برای همه آن‌ها آرزوی موفقیت داریم. لطفاً برای ارتباط با مؤلفان کتاب از طریق ایمیل [bayat@mobtakeran.com](mailto:ayat@mobtakeran.com) اقدام نمایید.

فهرست

پایه هفتم

فصل اول (راهبردهای حل مسئله).....	۷
فصل دوم (عددهای صحیح).....	۱۱
فصل سوم (جبر و معادله).....	۱۳
فصل چهارم (هندسه و استدلال).....	۱۹
فصل پنجم (شمارنده‌ها و اعداد اول).....	۲۵
فصل ششم (سطح و حجم).....	۲۸
فصل هفتم (توان و جذر).....	۳۱
فصل هشتم (بردار و مختصات).....	۳۵
فصل نهم (آمار و احتمال).....	۳۸
آزمون دوره‌ای اول پایه هفتم	۴۱
آزمون دوره‌ای دوم پایه هفتم	۴۳

پایه هشتم

فصل اول (عددهای صحیح و گویا).....	۴۸
فصل دوم (حساب عددهای طبیعی).....	۵۲
فصل سوم (چندضلعی‌ها).....	۶۰
فصل چهارم (جبر و معادله).....	۷۱
فصل پنجم (بردار و مختصات).....	۷۸
فصل ششم (مثلث).....	۸۲
فصل هفتم (توان و جذر).....	۹۴
فصل هشتم (آمار و احتمال).....	۹۹
فصل نهم (دایره‌ها).....	۱۰۴
آزمون دوره‌ای اول پایه هشتم	۱۱۵
آزمون دوره‌ای دوم پایه هشتم	۱۱۸
آزمون دوره‌ای سوم پایه هشتم	۱۲۱

پایه نهم

فصل اول (مجموعه‌ها).....	۱۲۶
آزمون دوره‌ای فصل اول (مجموعه‌ها).....	۱۳۷
فصل دوم (اعداد حقیقی).....	۱۳۹
آزمون دوره‌ای فصل دوم (اعداد حقیقی).....	۱۴۹
فصل سوم (استدلال و اثبات در هندسه).....	۱۵۲
آزمون دوره‌ای فصل سوم (استدلال و اثبات در هندسه).....	۱۶۹
فصل چهارم (توان و ریشه).....	۱۷۳
آزمون دوره‌ای فصل چهارم (توان و ریشه).....	۱۸۰
فصل پنجم (عبارت‌های جبری).....	۱۸۳
آزمون دوره‌ای فصل پنجم (عبارت‌های جبری).....	۱۹۵
فصل ششم (خط و معادله‌های خطی).....	۱۹۷
آزمون دوره‌ای فصل ششم (خط و معادله‌های خطی).....	۲۰۹
فصل هفتم (عبارت‌های گویا).....	۲۱۴
آزمون دوره‌ای فصل هفتم (عبارت‌های گویا).....	۲۲۷
فصل هشتم (حجم و مساحت).....	۲۳۱
آزمون دوره‌ای فصل هشتم (حجم و مساحت).....	۲۴۱
آزمون دوره‌ای اول پایه نهم.....	۲۴۵
آزمون دوره‌ای دوم پایه نهم	۲۴۸
آزمون دوره‌ای سوم پایه نهم	۲۵۱
آزمون دوره‌ای چهارم پایه نهم	۲۵۴

فصل‌های تکمیلی

فصل مساحت	۲۵۸
فصل هوش و خلاقیت	۲۷۱

آزمون‌های جامع

آزمون جامع اول	۳۳۰
آزمون جامع دوم	۳۳۵
آزمون جامع سوم	۳۴۰
آزمون جامع چهارم	۳۴۵
آزمون جامع پنجم	۳۴۹

پایه هفتم

فصل اول (راهبردهای حل مسئله)

فصل دوم (عددهای صحیح)

فصل سوم (جبر و معادله)

فصل چهارم (هندسه و استدلال)

فصل پنجم (شمارنده‌ها و اعداد اول)

فصل ششم (سطح و حجم)

فصل هفتم (توان و جذر)

فصل هشتم (بردار و مختصات)

فصل نهم (آمار و احتمال)

آزمون دوره‌ای اول پایه هفتم

آزمون دوره‌ای دوم پایه هفتم

پاسخ‌نامه کلیدی فصل‌های پایه هفتم

پاسخ‌نامه کلیدی آزمون‌های دوره‌ای پایه هفتم

راهبردهای حل مسئله

فصل ۱

$$30 \xrightarrow{-2} 28 \xrightarrow{-4} 24 \xrightarrow{-6} 18 \xrightarrow{-8} 10$$

۱. گزینه «۳»

$$4 \times \bigcirc = 8 \times \square \Rightarrow \bigcirc = 2\square$$

۲. گزینه «۱»

۳. گزینه «۲» اگر شکل مربعی را ۱۸۰ درجه بچرخانیم و کنار شکل L بگذاریم، شکل گزینه «۲» حاصل می‌شود.

۴. گزینه «۱» اگر ۱۲ مهره برداریم، ممکن است ۸ مهره قرمز و ۴ مهره سبز را برداشته باشیم. ولی اگر ۲ مهره دیگر برداریم قطعاً در بیشان، حداقل ۲ مهره آبی برداشته‌ایم.

$$\frac{4}{4} \text{ ----} \Rightarrow \frac{4}{4} \frac{3}{4} \text{ ----} \Rightarrow \frac{4}{4} \frac{3}{4} \frac{2}{4} \text{ ----} \Rightarrow \frac{4}{4} \frac{3}{4} \frac{2}{4} \frac{1}{4} \Rightarrow 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

۵. گزینه «۴»

$$\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}\right) = \frac{48 + 12 + 3 + 1}{4 \times 4 \times 4 \times 4} = \frac{64}{4^4} = \frac{1}{4}$$

۶. گزینه «۲»

۷. گزینه «۳» به کمک «راهبرد الگویابی» داریم:

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{3} + \frac{1}{15} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}, \quad \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} = \frac{45}{105} = \frac{3}{7}$$

پس تا کسر $\frac{n}{2n+1}$ حاصل می‌شود.

$$20 \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{135}{16} = 8,4375$$

۸. گزینه «۴»

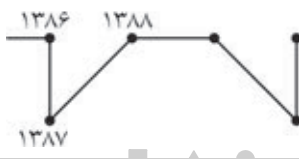
$$1 \times 30 = 30, \quad 2 \times 29 = 58, \quad 3 \times 28 = 84, \quad \dots, \quad 15 \times 16 = 240$$

۹. گزینه «۱»

۱۰. گزینه «۳» الگوی تکرار شونده به شکل زیر است که عدد سمت چپ و بالا بر ۶ بخشپذیر است:



و چون $1386 = 6 \times 231$



$$\square + \square + 30 = 74 \Rightarrow \square = 22$$

۱۱. گزینه «۲»

۱۲. گزینه «۳» فاطمه از حسین و فرهاد بلندتر است. فرهاد نیز از آرزو و راحله بلندتر است.

$$100 \times 3 - 1 = 299$$

۱۳. گزینه «۳» اعداد ۲، ۵، ۸، ۱۱ و ... در ستون وسط هستند. پس:

$$\left. \begin{aligned} x + 300 &= 3 \times 200 + y \\ 200 &= 2 \times y \end{aligned} \right\} \Rightarrow y = 100 \Rightarrow x = 400$$

۱۴. گزینه «۳»

$$\frac{1}{4} + \frac{5}{6} \times \frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{24} \Rightarrow \frac{3}{4} \times \frac{1}{24} = \frac{1}{32}$$

۱۵. گزینه «۳»

$$10 + 3 = 13$$

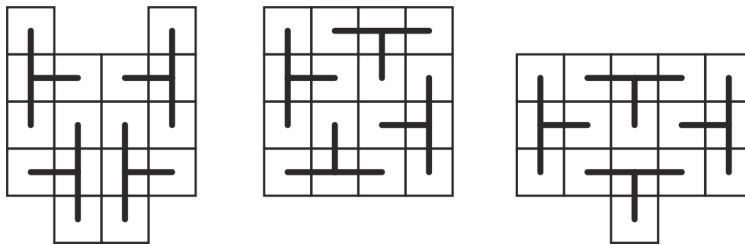
۱۶. گزینه «۲» به کمک «راهبرد حدس و آزمایش»، دو عدد ۱۰ و ۳ را داریم:

$$\left(1 - \frac{1}{10}\right) \times \left(1 - \frac{1}{10}\right) = \frac{9}{10} \times \frac{9}{10} = 81\% \Rightarrow 19\%$$

۱۷. گزینه «۳»

۱۸. گزینه «۳» به کمک «راهبرد حدس و آزمایش» مقدار دایره ۳۲ می‌شود و مقدار مربع ۴ می‌شود و داریم: $\frac{32}{4} = 8$.

۱۹. گزینه «۱» تعداد خانه‌های گزینه ۱ بر ۴ بخش پذیر نیست.



$$25 + 25, \quad 25 + 10 + 10 + 5, \quad 25 + 10 + 5 + 5 + 5$$

۲۰. گزینه «۴»

$$25 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5, \quad 10 + 10 + 10 + 10 + 10, \quad 10 + 10 + 10 + 10 + 5 + 5, \quad 10 + 10 + 10 + 5 + 5 + 5 + 5$$

$$10 + 10 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5, \quad 10 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5, \quad 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5$$

$$\left. \begin{aligned} 1000x - 400y &= 5400 \\ x + y &= 11 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x = 7, y = 4$$

۲۱. گزینه «۴» به کمک «راهبرد حدس و آزمایش» داریم:

$$2^{10} = 1024$$

۲۲. گزینه «۳» به کمک «راهبرد الگویابی» شکل n ام، 2^n تا نقطه دارد.

۲۳. گزینه «۲» تعداد اعداد ۱۹۹ تا است.

$$\frac{199}{2} \approx 100, \quad \frac{100}{2} = 50, \quad \frac{50}{2} = 25, \quad \frac{25}{2} \approx 13, \quad \frac{13}{2} \approx 7, \quad \frac{7}{2} \approx 4, \quad \frac{4}{2} = 2, \quad \frac{2}{2} = 1$$

$$1500 \times 2 = 3000, \quad 3000 \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} \times 4 = 3600$$

۲۴. گزینه «۲»

۲۵. گزینه «۴» به کمک «مخرج مشترک» و «راهبرد حدس و آزمایش» داریم:

$$\frac{216}{2} + \frac{216}{3} + \frac{216}{6} + \frac{216}{8} + \frac{216}{9} = 267$$

۲۶. گزینه «۲»
 سود ۱۰۰ تا ۱۵۰ ⇒ سود ۱۰ تا ۱۵
 $5 \times 10 = 50$: قیمت خرید ۱۵ تا
 $3 \times 20 = 60$: قیمت فروش ۱۵ تا

۲۷. گزینه «۴» حاصل $132 + 130 + 128$ برابر است با دو برابر مجموع سه عدد

$$\frac{132 + 130 + 128}{2} = 195$$

۲۸. گزینه «۱» تنها ماشین‌هایی که روی خط صاف (و مستقیم) بین a و b حرکت می‌کنند از خروجی b خارج می‌شوند. تعداد آن‌ها برابر است با:

$$640 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = 80$$

$$640 - 80 = 560$$

بقیه ماشین‌ها از خروجی c خارج می‌شوند. تعداد آن‌ها برابر است با:

۲۹. گزینه «۳» از مورد «الف» نتیجه می‌گیریم که گزینه ۱ نادرست است. اگر گزینه ۴ درست باشد، آنگاه مورد «ج» تناقض خواهد داشت. اگر گزینه ۲ درست باشد، آنگاه مورد «ب» تناقض خواهد داشت. پس گزینه ۳ درست است.

۳۰. گزینه «۱» به کمک «راهبرد الگویابی» تعداد میله‌ها در جسم به طول n برابر است با $4 + 8n$. پس:

$$4 + 8 \times 40 = 324$$

۳۱. گزینه «۴» یک کیلومتر 100000 سانتی‌متر است. قطر هر 10 تومانی تقریباً 2 سانتی‌متر است. پس 50000 تا 10 تومانی معادل 500000 تومان روی این خط قرار دارند.

۳۲. گزینه «۴» به تساوی روبه‌رو دقت کن:

$$1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{-\frac{1}{3}}}} = 1 - \frac{1}{3}$$

پس می‌توان 5 تا 5 عدد 1 را حذف کرد و به جای آن‌ها 3 نوشت. چون $98 = 5 \times 18 + 3$ ، کافی است کسری با 3 تا 1 را حساب

$$1 - \frac{1}{1-3} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

کنیم:

۳۳. گزینه «۲»
 $30 - (8 + 18) = 4$

۳۴. گزینه «۳» دو رقم سمت راست باید 00 یا 04 یا 40 یا 20 یا 12 یا 32 باشد:

یکی $xy32 \rightarrow$ تا 3 تا $xy12 \rightarrow$ تا 4 تا $xy20 \rightarrow$ تا 2 تا $xy40 \rightarrow$ تا 2 تا $xy04 \rightarrow$ تا 2 تا $xy00 \rightarrow$ تا 6

۳۵. گزینه «۱»


۳۶. گزینه «۲» در ابتدا، دو دسته 27 تایی را روی ترازو می‌گذاریم. اگر مساوی بودند، سکه سبک‌تر در دسته بیرونی است. اگر نامساوی بودند، سکه سبک‌تر در کفه سبک‌تر است.

$80 \rightarrow 27 \rightarrow 9 \rightarrow 3 \rightarrow 1$

با این روش در هر مرحله $\frac{2}{3}$ سکه‌ها حذف می‌شوند:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1 \Rightarrow \frac{1}{6}$$

۳۷. گزینه «۲»

$$\left. \begin{aligned} \square + \Delta + \bigcirc = 16 \\ 4\square + 3\Delta + 2\bigcirc = 54 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} 3\square + 3\Delta + 3\bigcirc = 48 \\ 4\square + 3\Delta + 2\bigcirc = 54 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \square - \bigcirc = 6$$

۳۸. گزینه «۴»

۳۹. گزینه «۲» از «راهبرد حدس و آزمایش» کمک می‌گیریم:

$$\left. \begin{aligned} \bigcirc \times \Delta = 36 \\ \bigcirc + \Delta = 13 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \bigcirc = 9, \Delta = 4 \Rightarrow (9-2) \times (4-2) = 14$$

$$1/1/1 - 1/1/11 - 1/11/1 - 1/11/11 - 11/1/1 - 11/1/11 - 11/11/1 - 11/11/11$$

۴۰. گزینه «۲»

$$2/2/2 - 2/2/22 - 22/2/2 - 22/2/22 - 3/3/3 - 33/3/3 - 4/4/4 - 44/4/4$$

$$5/5/5 - 55/5/5 - 6/6/6 - 66/6/6 - 7/7/7 - 77/7/7 - 8/8/8 - 88/8/8$$

$$36 \rightarrow 9999 \quad 35 \rightarrow 9998, 9989, 9899, 8999$$

۴۱. گزینه «۳» مجموع ارقام یک عدد چهاررقمی حداکثر ۳۶ است.

$$9000 - 5 = 8995$$

تعداد اعداد چهاررقمی ۹۰۰۰ تا است، پس:

$$4 \times 7 - 3 = 25$$

۴۲. گزینه «۲» تعداد مربع‌های رنگی در شکل n ام، برابر است با $4 \times n - 3$. پس:

$$3450 \div 150 = 23 \Rightarrow 23 \times 2 = 46$$

۴۳. گزینه «۳»

$$\frac{\text{ارتفاع } A}{\text{ارتفاع } B} = \frac{11}{14}$$

$$\Leftrightarrow \text{گزینه «۲» } \frac{1}{11} \text{ ارتفاع } A = \frac{4}{V} \text{ ارتفاع } B$$

۴۵. گزینه «۲» در گزینه‌های «۱» و «۳» داوود از کامبیز دیرتر رسیده است، پس غلط هستند. در گزینه «۴» نیز کامبیز از داوود زودتر رسیده است، پس غلط است.

۴۶. گزینه «۳» از بین کسر $1 + (n-1)^2$ تا n^2 ، منخرج‌ها همگی n هستند، مثلاً منخرج کسرهای ۱۷ تا ۲۵ همگی ۵ هستند. پس:

$$31^2 < 1001 < 32^2 \Rightarrow 31$$

۴۷. گزینه «۲» از «راهبرد الگویابی» استفاده می‌کنیم:

$$6 \times 6 - 1 = 35 \rightarrow 1$$

$$66 \times 66 - 1 = 4355 \rightarrow 2$$

$$666 \times 666 - 1 = 443555 \rightarrow 3$$

پس پاسخ مسئله ۱۳۹۴ است.

۴۸. گزینه «۱» در این الگو، اعداد را باید ۷ تا ۷ در نظر گرفت. چون $300 = 7 \times 42 + 6$ پس عدد ۳۰۰ با عدد ۶ در یک ستون قرار دارند. با توجه به دو عدد ۴۲ و ۶ نیز می‌فهمیم که در سطر ۸۶ قرار گرفته است.

$$\frac{1}{2} \times 2\Delta + \frac{1}{4} \Delta = \frac{5}{4} \Delta = 200 \Rightarrow \Delta = 160 \Rightarrow 2\Delta = 320$$

۴۹. گزینه «۲»