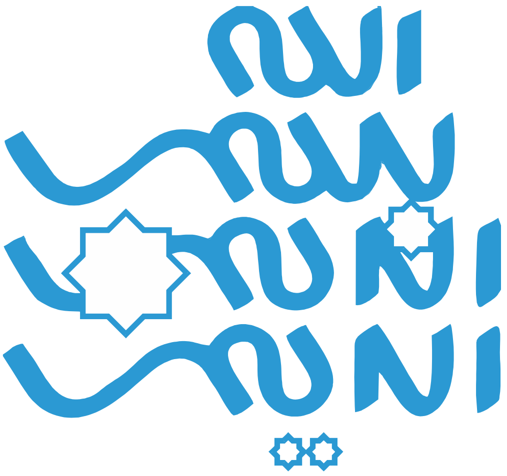
هندسه یازدهم یگانه

از مجموعه رشادت

علی صادقی



مقدمه

به‌نام خداوند جان و خرد
کزین برتر اندیشه برنگذرد

بسیار خرسندیم که کتاب «هندسه یازدهم یگانه» را تقدیم دانش‌آموزان می‌کنیم. این کتاب مطالب هندسه پایهٔ یازدهم را در سطح پیشرفته ارائه می‌دهد. دانش‌آموز، ابتدا با مباحث هر فصل آشنا می‌شود و با مثال‌های فراوان بر حل آن‌ها اشراف پیدا می‌کند. سپس برای هر فصل، تعدادی سؤالات تشریحی و چهارگزینه‌ای را پاسخ می‌دهد تا بر موضوع تسلط یابد.

در ادامه سؤالات کنکورهای سراسری تا سال ۹۶ و ۱۰ آزمون چهارگزینه‌ای برای هر فصل جهت خودآزمایی آورده شده است.

پاسخ تمام سؤالات اعم از تشریحی، چهارگزینه‌ای، کنکورهای سراسری، آزمون‌ها، در کتاب دیگری تحت عنوان کتاب پاسخ‌نامه، به تفصیل توضیح داده شده است. سطح‌بندی سؤالات نیز در کتاب پاسخ‌نامه انجام گرفته است.

انتظار می‌رود کتاب حاضر، همهٔ نیازهای دانش‌آموزان کلاس یازدهم را در درس هندسه که مایل به تحصیل در بهترین دانشگاه‌ها و بهترین رشته‌های کشور هستند، پاسخ‌گو باشد.

در اینجا لازم می‌دانیم از مؤلف محترم آقای علی صادقی که کتاب را زیر نظر دبیر مجموعه تألیف کرده‌اند تشکر کنیم. هم‌چنین از خانم‌ها محبوبه شریفی (حروف‌چین و صفحه‌آرا)، سارا لطفی مقدم و سمانه مسروری و بهاره خدامی (گرافیست‌ها) و مدیران و همکاران واحدهای حروف‌چینی، تولید و فروش سپاسگزاریم.

امیدواریم دبیران محترم هندسه و دانش‌آموزان و خانواده‌های عزیز آن‌ها ما را با اعلام نظرات، پیشنهادها و انتقادها خود دربارهٔ این کتاب یاری فرمایند.

انتشارات مبتکران

فهرست

فصل ۱
دایره

فصل ۲
کاربردها هندسی و تبدیل‌های

فصل ۳
روابط طولی در مثلث

پاسخ‌نامه کلیدی

فصل ۱

دایره

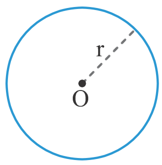
درس ۱ مفاهیم اولیه و زاویه‌ها در دایره

دایره

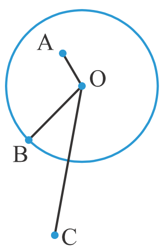
تمام نقاطی از صفحه که از یک نقطه ثابت (مرکز O) به فاصله یکسان و ثابت (شعاع r) باشند دایره‌ای به مرکز O و شعاع r گفته می‌شود.

– در شکل مقابل، دایره‌ای به مرکز O و شعاع r رسم شده است.

– دایره به مرکز O و شعاع r را به‌صورت $C(O,r)$ نمایش می‌دهیم.



اوضاع نسبی یک نقطه و یک دایره



۱. نقطه درون دایره: نقطه A درون دایره است اگرو تنها اگر فاصله آن تا مرکز دایره کمتر از r (شعاع دایره) باشد. یعنی $OA < r$.

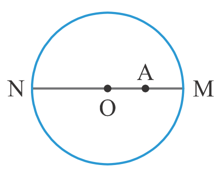
۲. نقطه روی دایره: نقطه B روی دایره است اگر و تنها اگر فاصله آن تا مرکز دایره برابر با r (شعاع دایره) باشد. یعنی $OB = r$.

۳. نقطه خارج دایره: نقطه C خارج دایره است اگر و تنها اگر فاصله آن تا مرکز دایره بزرگتر از r (شعاع دایره) باشد. یعنی $OC > r$.

بیشترین و کمترین فاصله یک نقطه از یک دایره

بیشترین و کمترین فاصله نقطه A از یک دایره را با توجه به اوضاع نسبی یک نقطه و یک دایره در ۳ حالت زیر بررسی می‌کنیم.

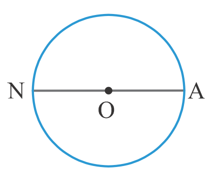
الف) نقطه A درون دایره باشد: در این حالت، قطر گذرنده از A را رسم می‌کنیم تا دایـره را درنقـاط M و N قطع کند. در این صورت M نزدیکترین نقطه از دایره به A و N دورترین نقطه از دایره به A می‌باشد ولذا



بیشترین فاصله A از دایره $= R + OA$

کمترین فاصله A از دایره $= R - OA$

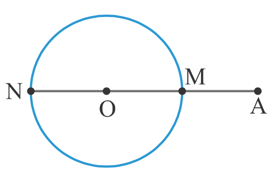
ب) نقطه A روی دایره باشد: در این حالت، قطر گذرنده از A را رسم مـی‌کنیم. نزدیکتـرین نقطـه از دایره به A خود A، و دورترین نقطه از دایره به A، نقطه N می‌باشد ولذا



بیشترین فاصله A از دایره $= 2R$

کمترین فاصله A از دایره $= 0$

پ) نقطه A خارج دایره باشد: در این حالت، از A به مرکز دایره (O) وصل کرده امتداد می‌دهیم تا دایره را در M و N قطع کند. M نزدیکترین نقطه از دایره به A و N دورترین نقطه از دایره به A می‌باشد ولذا



بیشترین فاصله A از دایره $= OA + R$

کمترین فاصله A از دایره $= OA - R$

تست

۱: بیشترین و کمترین فاصله نقطه A از یک دایره به‌ترتیب ۱۰ و ۶ می‌باشد. شعاع دایره کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۲ یا ۸ ✓

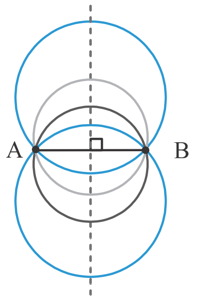
پاسخ: چون وضعیت نقطه A و دایره را نمی‌دانیم دو وضعیت درنظر می‌گیریم (نقطه A روی دایره نیست زیرا باید در ایـن صـورت کمترین فاصله صفر باشد).

A درون دایره $\Rightarrow \begin{cases} \text{کمترین فاصله} = R - OA = 6 \\ \text{بیشترین فاصله} = R + OA = 10 \end{cases} \Rightarrow R = 8$

A خارج دایره $\Rightarrow \begin{cases} \text{کمترین فاصله} = OA - R = 6 \\ \text{بیشترین فاصله} = OA + R = 10 \end{cases} \Rightarrow R = 2$

تذکر

۱. از دو نقطه متمایز A و B (شکل مقابل) بی‌شمار دایره می‌گذرد که مرکز همه دایره‌ها روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار می‌گیرد. با توجه به شکل مقابل، شعاع‌های این دایره‌ها همواره بزرگ‌تر یا مساوی نصف AB می‌باشد. یعنی $R \geq \frac{AB}{۲}$. بنابراین کوچک‌ترین دایره‌ای که از A و B می‌گذرد، دایره‌ای است که AB قطر آن $(R = \frac{AB}{۲})$ و وسط AB مرکز آن باشد.



تست

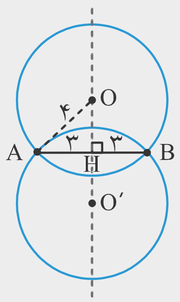
۲: پاره‌خط $AB = ۶$ مفروض است، چند دایره به شعاع ۴ از A و B می‌گذرد؟

۱) صفر　　۲) ۱　　۳) ۲ ✓　　۴) بی‌شمار

پاسخ: طبق تذکر ۱ مرکز چنین دایره‌هایی باید روی عمودمنصف AB قرار داشته باشند و همچنین $OA = OB = ۴$. بنابراین:

$$\overset{\Delta}{OAH}: \hat{H} = ۹۰^{\circ} \Rightarrow OH^{۲} = OA^{۲} - AH^{۲} = ۴^{۲} - ۳^{۲} = ۱۶ - ۹ = ۷ \Rightarrow OH = \sqrt{۷}$$

درنتیجه دو نقطه O و O' روی عمودمنصف AB و در طرفین AB به فاصله $\sqrt{۷}$ از آن، مرکز دایره‌های موردنظر می‌باشند و لذا ۲ دایره وجود دارد.



تست

۳: پاره‌خط AB به طول ۶ مفروض است. اگر تنها دو دایره به شعاع $۶x - ۱$ از A و B بگذرد، حدود x کدام است؟

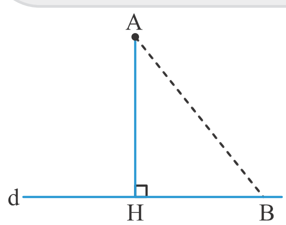
۱) $x > \frac{۱}{۶}$　　۲) $x > ۱$　　۳) $x > \frac{۲}{۳}$ ✓　　۴) $\frac{۱}{۶} < x < \frac{۲}{۳}$

پاسخ: طبق تذکر ۱ باید داشته باشیم $R > \frac{AB}{۲}$ (اگر $R = \frac{AB}{۲}$ باشد تنها یک دایره از A و B می‌گذرد). بنابراین:

$$۶x - ۱ > \frac{۶}{۲} \Rightarrow ۶x > ۴ \Rightarrow x > \frac{۲}{۳}$$

یادآوری (فاصله نقطه از خط): خط d و نقطه A مفروضند. اگر H پای عمودی باشد که از A به خط d رسم می‌شود، اندازه پاره‌خط AH را فاصله نقطه A از خط d می‌گوییم.

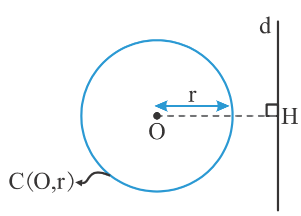
واضح است که این فاصله (AH) کوتاه‌ترین فاصله نقطه A از سایر نقاط خط d است (AH < AB).



اوضاع نسبی یک خط و یک دایره

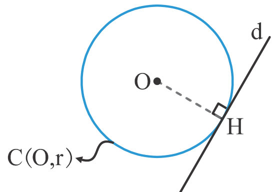
۱. **خط خارج دایره است (متخارج):** در این حالت خط و دایره، هیچ نقطه مشترکی ندارند و فاصله مرکز دایره تا خط از شعاع دایره بیشتر است.

$OH > r \Leftrightarrow$ خط d خارج دایره است



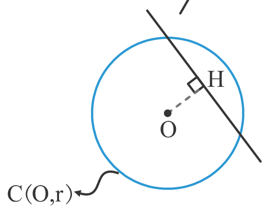
۲. **خط مماس بر دایره است:** در این حالت خط و دایره، تنها یک نقطه مشترک دارند و فاصله مرکز دایره تا خط برابر شعاع دایره است.

$OH = r \Leftrightarrow$ خط d بر دایره مماس است



۳. **خط و دایره متقاطع‌اند:** در این حالت خط و دایره دو نقطه مشترک دارند و فاصله مرکز دایره تا خط از شعاع دایره کمتر است.

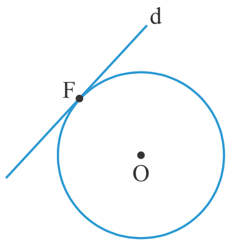
$OH < r \Leftrightarrow$ خط d و دایره متقاطع‌اند.



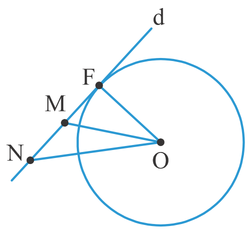
تذکر

۲. *به خطی که دایره را در دو نقطه قطع کند، خط قاطع می‌گویند.*

ویژگی خط مماس بر دایره

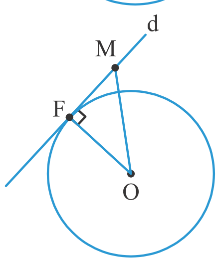


فرض کنیم خط d بر دایره C مماس است. نزدیکترین نقطه خط d به نقطه O نقطه F است. زیرا می‌دانیم $OF = R$ و هر نقطه دیگر از خط d خارج دایره است و بنابراین فاصله آن‌ها از مرکز دایره بیشتر از شعاع است. اگر از O به d عمود کنیم، این خط عمود، خط d را در نقطه F قطع می‌کند. زیرا اگر فرض کنیم که در F قطع نکند، پس نقطه دیگری مانند M وجود دارد که OM بر خط d عمود است و M پای عمود می‌باشد. نقطه دیگری مانند N روی خط d هست که M بین N و F قرار دارد و $FM = MN$ درنتیجه



$$\left.\begin{array}{l} FM = MN \\ F\hat{M}O = N\hat{M}O = 90^\circ \\ OM = OM \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{OMN} \cong \overset{\Delta}{OMF} \Rightarrow ON = OF = R$$

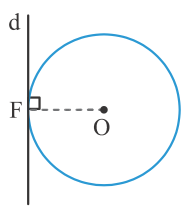
بنابراین نقطه N نیز روی دایره است و این با فرض مماس بودن خط d بر دایره، تناقض دارد. پس خط مماس، در نقطه F بر OF عمود است. بنابراین اگر F نقطه‌ای روی دایره باشد، شعاع OF و خط مماس بر دایره در نقطه F، هم عمودند.



حال فرض می‌کنیم d در نقطه F به شعاع OF عمود باشد. همچنین فرض می‌کنیم M نقطه دیگری غیر از F روی خط d باشد. چون $OM > OF$ درنتیجه نقطه M خارج دایره C است. بنابراین خط d با دایره C فقط یک نقطه مشترک دارد و در نتیجه خط d بر دایره مماس است. بنابراین:

خط d در نقطه F بر دایره C مماس است اگر و تنها اگر خط d بر شعاع گذرنده از F عمود باشد.

طریقه رسم خط مماس بر دایره از یک نقطه روی دایره

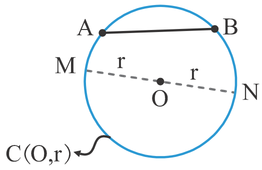


اگر F نقطه‌ای روی دایره $C(O,r)$ باشد طبق ویژگی خط مماس، برای اینکه در نقطه F مماس بر دایره رسم کنیم، کافی است ابتدا از O به F وصل کرده سپس در نقطه F عمودی بر خط OF خارج کنیم. این خط چون بر شعاع گذرنده از F عمود است، بنابراین در F بر دایره مماس خواهد بود.

تذکر

۳. *در هر نقطه از یک دایره تنها و تنها یک مماس بر آن دایره می‌توان رسم کرد (چرا؟)*

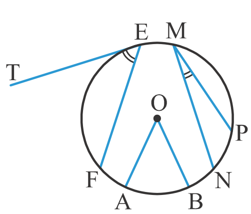
چند تعریف اولیه



۱. شعاع دایره: پاره‌خطی که یک سر آن مرکز دایره و سر دیگر آن روی دایره باشد، شعاع نامیده می‌شود.

۲. وتر دایره: پاره‌خطی که دو سر آن روی دایره باشد، وتر دایره نامیده می‌شود (وتر AB در شکل مقابل).

۳. قطر دایره: وتری از دایره که از مرکز دایره می‌گذرد، قطر دایره نامیده می‌شود (قطر MN در شکل مقابل). واضح است که قطر بزرگترین وتر دایره است.

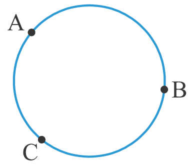


۴. زاویه مرکزی: زاویه‌ای است که رأس آن بر مرکز دایره واقع است و اضلاعش، شعاع‌های دایره‌اند. (زاویه $A\hat{O}B$).

۵. زاویه محاطی: زاویه‌ای است که رأس آن روی دایره و اضلاعش دو وتر از دایره‌اند (زاویه $N\hat{M}P$)

۶. زاویه ظِلّی: زاویه‌ای است که رأس آن روی دایره و یکی از اضلاع آن، وتر دایره و ضلع دیگرش مماس بر دایره است. (زاویه $T\hat{E}F$)

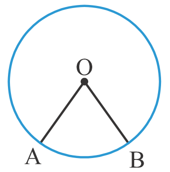
۷. کمان: دو نقطه A و B را روی دایره درنظر می‌گیریم. این دو نقطه، محیط دایـره را بـه دو بخـش تقسیم می‌کنند، که به هر یک از آن بخش‌ها، کمان یا قوس می‌گوییم.



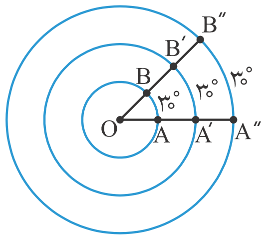
– کمان AB را به‌صورت $\overset{\frown}{AB}$ می‌نویسیم و می‌خوانیم «کمان AB». وقتی می‌نویسیم $\overset{\frown}{AB}$ منظور کمان کوچکتر می‌باشد. برای نشان دادن کمان بزرگتر از نقطه کمکی مانند C استفاده می‌کنیم و می‌نویسیم $\overset{\frown}{ACB}$.

– هر قطر، دایره را به دو کمان مساوی تقسیم می‌کند که این دو کمان‌ها را نیم‌دایره می‌نامیم.

۸. اندازه کمان، همان اندازه زاویه مرکزی مقابل بـه آن تعریـف مـی‌شـود و واحـد آن درجـه اسـت. به‌عبارت دیگر اندازه زاویه مرکزی برابر با اندازه کمان مقابل به آن است. یعنی: $\hat{O} = \overset{\frown}{AB}$



۹. با توجه به شکل مقابل، واضح است که کمان‌های دایره‌های مختلف می‌تواننـد انـدازه‌هـای برابـر و طول‌های نابرابر داشته باشند. اندازه هر سه کمان $\overset{\frown}{AB}$، $\overset{\frown}{A'B'}$ و $\overset{\frown}{A''B''}$ برابرند در صورتی که طول این کمان‌ها نابرابرند.



۱۰. باتوجه به اینکه محیط دایره، یک کمان به اندازه ۳۶۰° است لذا برای به‌دست آوردن طول کمانی مانند AB می‌توانیم به‌صورت زیر عمل کنیم:

$$\frac{\text{طول کمان } \overset{\frown}{AB}}{\text{محیط دایره}} = \frac{\text{اندازه کمان } \overset{\frown}{AB}}{۳۶۰^\circ}$$

(π برحسب رادیان یعنی $\pi \simeq ۳/۱۴$)

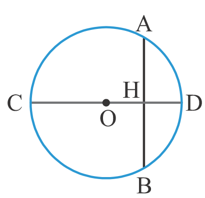
مسأله ۱: در دایره‌ای به شعاع ۴ سانتی‌متر، طول کمان $\overset{\frown}{AB}$ با اندازه ۶۰° را به‌دست آورید

پاسخ:

$$\frac{۶۰^\circ}{۳۶۰^\circ} = \frac{\text{طول کمان } \overset{\frown}{AB}}{۲\pi(۴)} \Rightarrow \text{طول کمان } \overset{\frown}{AB} = \frac{۸\pi}{۶} = \frac{۴\pi}{۳} \simeq \frac{۴(۳/۱۴)}{۳} \simeq ۴/۱۸\ \text{cm}$$

ویژگی‌های مربوط به یک وتر و کمان نظیر آن

در زیر ویژگی‌های مربوط به یک وتر از دایره و کمان نظیر آن وتر را بررسی می‌کنیم.



۱. در هر دایره، قطر عمود بر یک وتر، آن وتر و کمان‌های نظیر آن را نصف می‌کند به عبارت دیگر

$$OD \perp AB \Rightarrow \begin{cases} AH = HB \\ \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{DB} \text{ و } \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{CB} \end{cases}$$

۲. در هر دایره خطی که از مرکز دایره، به وسط وتری از آن دایره وصل می‌شود، بر آن وتر عمود است و کمان نظیر آن وتر را نصف می‌کند. به‌عبارت دیگر:

$$AH = HB \Rightarrow \begin{cases} OD \perp AB \\ \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{DB} \end{cases}$$

۳. در هر دایره، خطی که از مرکز دایره، به وسط کمانی از آن دایره وصل می‌شود، بر وتر نظیر آن کمان عمود است و آن وتر را نصف می‌کند. به‌عبارت دیگر:

$$\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{DB} \Rightarrow \begin{cases} OD \perp AB \\ AH = HB \end{cases}$$

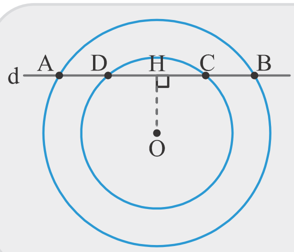
تذکر

۴. اثبات ویژگی‌های فوق در بخش سؤالات تشریحی مطرح شده است.

تذکر

۵. با توجه به ویژگی‌های فوق، اگر نقاط وسط وتر AB و وسط کمان AB را به هم وصل کنیم، امتدا پاره‌خط حاصل از مرکـز دایـره مـی‌گـذرد و این خط در وسط وتر AB، بر وتر AB عمود است.

مسأله ۲: خطی مطابق شکل، دو دایره هم مرکز را قطع می‌کنـد و دو پـاره‌خـط بـین دو دایـره محصور (محدود) می‌شوند. ثابت کنید این دو پاره‌خط با هم برابرند.



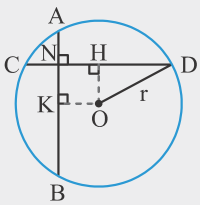
پاسخ: از O بر خط d عمود می‌کنیم.

$$\begin{rcases} OH \perp AB \Rightarrow AH = HB \\ OH \perp DC \Rightarrow DH = HC \end{rcases} \Rightarrow AH - DH = HB - HC \Rightarrow AD = BC$$

تست

۴: مطابق شکل مقابل دو وتر AB و CD بر هم عمودند. اندازه شعاع دایره کدام است؟ ($AN = CN = ۲$ و $ND = NB = ۶$)

۱) $\sqrt{۵}$ ۲) $۲\sqrt{۵}$ ✓ ۳) $۳\sqrt{۵}$ ۴) ۵



پاسخ:

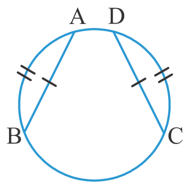
از مرکز دایره به هر یک از دو وتر عمود می‌کنیم. بنابراین $CH = HD = \frac{CD}{۲} = ۴$ و $AK = KB = \frac{AB}{۲} = ۴$.

$$NK = AK - AN = ۴ - ۲ = ۲ \Rightarrow OH = ۲$$

$$\overset{\Delta}{OHD}: \hat{H} = ۹۰° \Rightarrow r^۲ = OH^۲ + HD^۲ = ۴ + ۱۶ = ۲۰ \Rightarrow r = ۲\sqrt{۵}$$

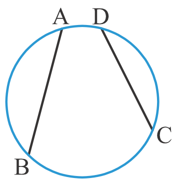
ویژگی‌های مربوط به دو وتر از یک دایره

۱. در هر دایره، اگر دو وتر با هم برابر باشند، آنگاه کمان‌های نظیر آن‌ها نیز با هم برابرند و برعکس. به‌عبارت دیگر:



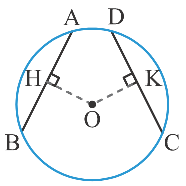
$$AB = CD \Leftrightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$$

۲. در هر دایره، اگر دو وتر نابرابر باشند، کمان نظیر وتر بزرگ‌تر، از کمان نظیر وتر کوچک‌تر، بزرگ‌تر است و برعکس. به‌عبارت دیگر:



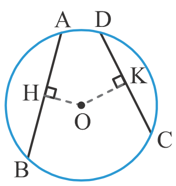
$$AB > CD \Leftrightarrow \overset{\frown}{AB} > \overset{\frown}{CD}$$

۳. در هر دایره، وترهای برابر، از مرکز دایره به یک فاصله‌اند و برعکس. به‌عبارت دیگر:



$$AB = CD \Leftrightarrow OH = OK$$

۴. در هر دایره، از دو وتر نابرابر، آن‌که بزرگ‌تر است، به مرکز دایره نزدیک‌تر است و برعکس. به‌عبارت دیگر:



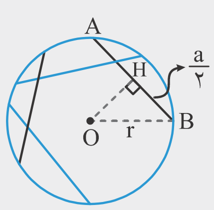
$$AB > CD \Leftrightarrow OH < OK$$

تذکر

۶. اثبات ویژگی‌های فوق در بخش سؤالات تشریحی مطرح شده است.

مسأله

۳: ثابت کنید در دایره $C(O,r)$ وسط وترهایی به طول a، روی دایره‌ای به مرکز O و شعاع $\sqrt{r^۲ - \frac{a^۲}{۴}}$ قرار می‌گیرند.



پاسخ:

می‌دانیم در دایره وترهای مساوی همگی از مرکز به یک فاصله‌اند و فاصله مرکز تا هر یک از وترهای مساوی، خطی است عمود در وسط این وترها. بنابراین وسط این وترها همگی از مرکز به یک فاصله‌اند. درنتیجه روی دایره‌ای به مرکز O و شعاع OH قرار می‌گیرند. طول OH را به‌صورت زیر محاسبه می‌کنیم.

$$\overset{\Delta}{OHB}: \hat{H} = ۹۰° \Rightarrow OH^۲ = r^۲ - \frac{a^۲}{۴} \Rightarrow OH = \sqrt{r^۲ - \frac{a^۲}{۴}}$$

تست

۵: در دایره‌ای به مرکز O و شعاع ۶، وسط وترهایی به طول ۲ روی کدام دایره قرار می‌گیرد؟

۱) $C(O,6)$ ۲) $C(O,\sqrt{33})$ ۳) $C(O,\sqrt{34})$ ۴) $C(O,\sqrt{35})$ ✓

پاسخ:

با توجه به مسأله قبل، وسط وترهایی به طول ۲ در دایره‌ای به مرکز O و شعاع ۶، روی دایره‌ای به مرکز O و شعاع $\sqrt{6^2-\frac{2^2}{4}}=\sqrt{35}$ قرار می‌گیرند. یعنی $C(O,\sqrt{35})$.

تست

۶: در دایره $C(O,6)$ دو وتر $AB=2x-1$ و $CD=x^2-4$ به‌گونه‌ای می‌باشند که وتر AB از مرکز دایره دورتر است. در این صورت چند مقدار صحیح برای x وجود دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ✓ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

پاسخ:

اولاً باید طول این وترها مثبت باشد. بنابراین:

$$AB>0 \Rightarrow 2x-1>0 \Rightarrow x>\frac{1}{2}$$

$$CD>0 \Rightarrow x^2-4>0 \Rightarrow x^2>4 \Rightarrow x>2 \text{ یا } x<-2$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک}} x>2$$

ثانیاً از آنجا که وتر AB از مرکز دایره دورتر است نتیجه می‌شود که $AB<CD$. بنابراین:

$$AB<CD \Rightarrow 2x-1<x^2-4 \Rightarrow x^2-2x-3>0 \Rightarrow x<-1 \text{ یا } x>3$$

ثالثاً باید این وترها از قطر دایره کوچکتر مساوی باشند. بنابراین:

$$CD\le 12 \Rightarrow x^2-4\le 12 \Rightarrow x^2\le 16 \Rightarrow -4\le x\le 4$$

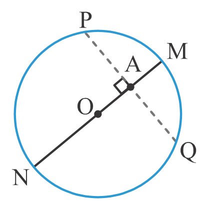
بنابراین اشتراک بازه‌های (۲) $(x>2)$ و (۳) $(x>3 \text{ یا } x<-1)$ و (۴) $(-4\le x\le 4)$ حدود تغییرات x می‌باشد که $3<x\le 4$ است. در این بازه هم تنها عدد $x=4$، یک عدد صحیح است.

وتر ماکزیمم (بزرگترین) و وتر مینیمم (کوچکترین) گذرنده از یک نقطه داخل دایره

فرض می‌کنیم A نقطه دلخواه (غیر مرکز) درون دایره $C(O,r)$ باشد. می‌دانیم از نقطه A بی‌شمار وتر می‌گذرد. بزرگترین وتر گذرنده از A، قطر گذرنده از A می‌باشد و کوچکترین وتر گذرنده از A، وتری است که در نقطه A بر قطر گذرنده (بزرگترین وتر) از A عمود باشد.

(اثبات در بخش سؤالات تشریحی بیان شده است)

در شکل مقابل وتر MN بزرگترین وتر گذرنده از A و PQ کوچکترین وتر گذرنده از A می‌باشد.



تست

۷: در دایره $C(O,6)$، نقطه A به فاصله ۲ واحد از مرکز دایره قرار دارد. اندازه کوچکترین وتر گذرنده از A کدام است؟

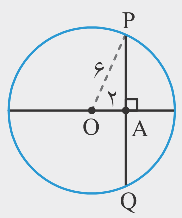
۱) $4\sqrt{2}$ ۲) $6\sqrt{2}$ ۳) $8\sqrt{2}$ ✓ ۴) $10\sqrt{2}$

پاسخ:

کوچکترین وتر گذرنده از A، وتری است که بر قطر گذرنده از A عمود باشد. بنابراین:

$$OA\perp PQ \Rightarrow PA=AQ=\frac{1}{2}PQ$$

$$\overset{\Delta}{PAO}: PA^2=OP^2-OA^2=36-4=32 \Rightarrow PA=4\sqrt{2} \Rightarrow PQ=8\sqrt{2}$$



تست

۸: در دایره $C(O,6)$، نقطه A به فاصله ۲ واحد از مرکز دایره قرار دارد. چند وتر داخل دایره می‌توان رسم کرد که از A بگذرند و طول آن‌ها برابر با ۸ باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) بی‌شمار ۴) صفر ✓

پاسخ:

طبق تست قبل طول کوتاه‌ترین وتر گذرنده از A برابر با $8\sqrt{2}$ است و این بدین معنی است که وتری با طول کمتر از $8\sqrt{2}$ وجود ندارد.

تست

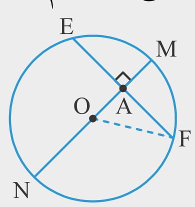
۹: نقطه A درون دایره C مفروض است. اگر طول کوچکترین و بزرگترین وتر از دایره C که از نقطه A می‌گذرند به‌ترتیب ۱۲ و ۱۵ باشد، فاصله نقطه A تا مرکز دایره چقدر است؟

۱) ۴ ۲) ۴/۵ ✓ ۳) ۵ ۴) ۵/۵

پاسخ:

بزرگترین وتر گذرنده از A، قطر گذرنده از A و کوچکترین وتر گذرنده از A، وتری است که در A بر قطر عمود است.

همچنین قطر عمود بر وتر، وتر را نصف می‌کند. بنابراین در شکل زیر داریم: $EA = AF = 6$ و شعاع دایره $R = \frac{15}{2}$. از O به F وصل می‌کنیم:

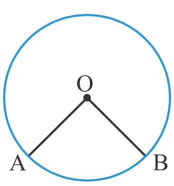


$$\overset{\Delta}{OAF}: OA^2 = OF^2 - AF^2$$

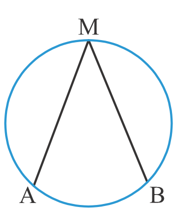
$$OA^2 = (\frac{15}{2})^2 - 6^2 = \frac{81}{4} \Rightarrow OA = \frac{9}{2} = 4/5$$

انواع زوایا در دایره

به‌طور کلی در دایره ۷ نوع زاویه به‌صورت زیر وجود دارد. برخی از این زاویه در قبل تعریف شده ولی جهت یادآوری به هر ۷ نوع زاویه اشاره کرده و اندازه هر یک را مشخص می‌کنیم.

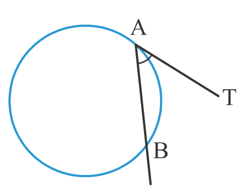


۱. زاویه مرکزی: زاویه‌ای است که رأس آن بر مرکز دایره واقع است و اضلاعش، شعاع‌های دایره‌اند.
طبق تعریف، اندازه زاویه مرکزی برابر با اندازه کمان مقابلش است. یعنی: $\hat{O} = \overset{\frown}{AB}$



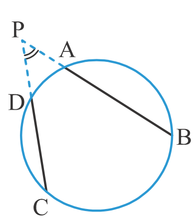
۲. زاویه محاطی: زاویه‌ای است که رأس آن روی دایره و اضلاعش دو وتر از دایره‌اند. ثابت می‌شود اندازه هر زاویه محاطی، برابر با نصف کمان مقابلش است. یعنی $\hat{M} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$

(اثبات در بخش سؤالات تشریحی بیان شده است)



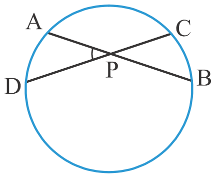
۳. زاویه ظِلّی: زاویه‌ای است که رأس آن روی دایره و یکی از اضلاع آن، وتر دایره و ضلع دیگرش مماس بر دایره است. ثابت می‌شود اندازه هر زاویه ظِلّی، برابر با نصف کمان مقابلش است. یعنی $B\hat{A}T = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$.

(اثبات در بخش سؤالات تشریحی بیان شده است)



۴. زاویه بین امتداد دو وتر: (زاویه بین دو قاطع یا زاویه وتری خارجی): زاویه‌ای است که از برخورد امتداد دو وتر از دایره، در خارج دایره ایجاد می‌شود.
ثابت می‌شود اندازه این زاویه برابر است با نصف قدرمطلق تفاضل اندازه کمان‌های روبرویش.
یعنی: $\hat{P} = \frac{|\overset{\frown}{BC} - \overset{\frown}{AD}|}{2}$

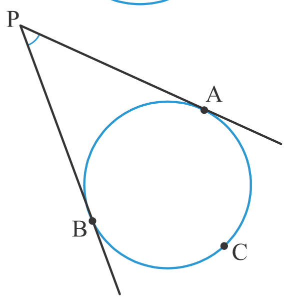
(اثبات در بخش سؤالات تشریحی بیان شده است)



۵. زاویه بین دو وتر (زاویه وتری داخلی): زاویه‌ای است که از برخورد دو وتر در داخل دایره ایجاد می‌شود.
ثابت می‌شود اندازه این زاویه برابر است با نصف مجموع اندازه کمان‌های روبه‌رویش.

یعنی: $\hat{P} = \frac{\overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{AD}}{۲}$

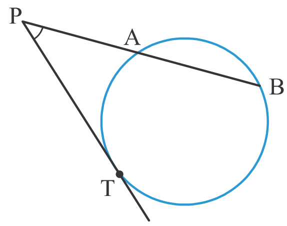
(اثبات در بخش سؤالات تشریحی بیان شده است)



۶. زاویه بین دو مماس: زاویه‌ای است که از برخورد دو مماس بر یک دایره و در خارج دایره ایجاد می‌شود.
ثابت می‌شود اندازه این زاویه برابر است با نصف قدرمطلق تفاضل اندازه کمان‌های روبرویش. یعنی:

$$\hat{P} = \frac{\left|\overset{\frown}{ACB} - \overset{\frown}{AB}\right|}{۲}$$

(اثبات در بخش سؤالات تشریحی بیان شده است)

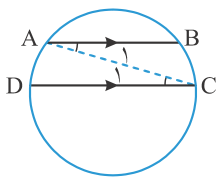


۷. زاویه بین قاطع و مماس (زاویه بین امتداد وتر و مماس): زاویه‌ای است که از برخورد امتداد یک وتر و یک مماس بر دایره، در خارج دایره ایجاد می‌شود.
ثابت می‌شود اندازه این زاویه برابر است با نصف قدرمطلق تفاضل اندازه کمان‌های روبه‌رویش.

یعنی: $\hat{P} = \frac{\left|\overset{\frown}{BT} - \overset{\frown}{AT}\right|}{۲}$

(اثبات در بخش سؤالات تشریحی بیان شده است)

نکته



۱. *در هر دایره، کمان‌های محصور (محدود) بین دو وتر موازی، با هم برابرند. به‌عبارت دیگر:*

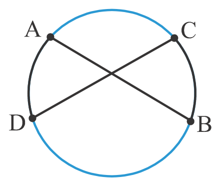
$$AB \parallel CD \Rightarrow \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BC}$$

اثبات

از A به C وصل می‌کنیم و از قضیه خطوط موازی و مورب، کمک می‌گیریم.

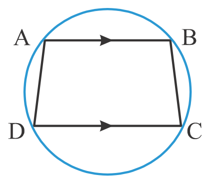
$$\begin{cases} AB \parallel DC \\ \text{مورب } AC \end{cases} \Rightarrow \hat{A}_۱ = \hat{C}_۱ \xrightarrow{\hat{A}_۱ \text{ و } \hat{C}_۱ \text{ محاطی‌اند}} \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{AD}}{۲} \Rightarrow \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{AD}$$

مهم / تذکر



توجه شود که عکس مطلب فوق برقرار نمی‌باشد یعنی ممکن است دو کمان با هم برابر باشند ولی وترهای مربوطه با هم موازی نباشند. در شکل مقابل $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BC}$ ولی دو وتر AB و CD موازی نیستند!

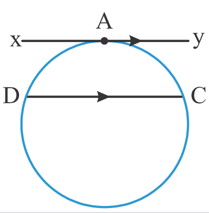
مهم / نتیجه



با توجه به نکته ۱ می‌توان گفت ذوزنقه‌ای که رئوس آن بر روی یک دایره باشد، حتماً متساوی‌الساقین است.

$$AB \parallel DC \Rightarrow \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BC} \Rightarrow AD = BC$$

نکته

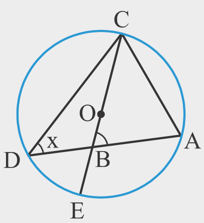


۲. *(حالت خاص نکته ۱) در هر دایره، کمان‌های محصور (محدود) بین یک وتر و مماس موازی با آن، با هم برابرند. به‌عبارت دیگر:* $xy \parallel DC \Rightarrow \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BC}$

اثبات: مشابه اثبات نکته ۱ عمل کنید.

تست

۱۰: در شکل زیر O مرکز دایره است. اگر $\hat{A} = ۷۵°$ و $\hat{B} = ۵۰°$ در این صورت مقدار x کدام است؟



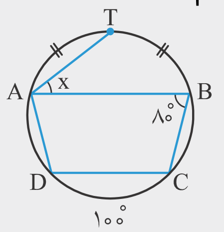
۱) ۳۰° ۲) ۳۵° ✓ ۳) ۴۰° ۴) ۴۵°

پاسخ: زوایای $\hat{D}$ و $\hat{A}$ محاطی‌اند. بنابراین: $\overset{\frown}{AC} = ۲x$ و $\overset{\frown}{DC} = ۱۵۰°$. می‌دانیم $\overset{\frown}{CDE} = ۱۸۰°$، درنتیجه $\overset{\frown}{DE} = ۳۰°$. زاویه $\hat{B}$ زاویه بین دو وتر است، و لذا:

$$\hat{B} = \frac{\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{DE}}{۲} \Rightarrow ۵۰° = \frac{۲x + ۳۰°}{۲} \Rightarrow x = ۳۵°$$

تست

۱۱: در شکل زیر، وترهای AB و CD موازیند. $\overset{\frown}{CD}=۱۰۰^\circ$ و T وسط کمان AB است. زاویه x کدام است؟



۱) ۲۰° ۲) ۲۵° ۳) ۳۰° ۴) ۳۵° ✓

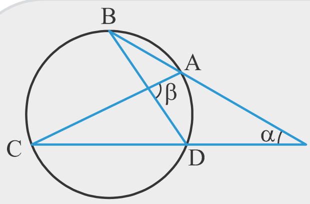
پاسخ: از آنجا که وترهای AB و CD موازیند، نتیجه می‌شود که $\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BC}$. از طرفی زاویه $\hat{B}$ محاطی است، و لذا

$$\hat{B}=\frac{\overset{\frown}{ADC}}{۲}\Rightarrow ۸۰^\circ=\frac{\overset{\frown}{AD}+۱۰۰^\circ}{۲}\Rightarrow \overset{\frown}{AD}=۶۰^\circ=\overset{\frown}{BC}$$

$$\overset{\frown}{ATB}=۳۶۰^\circ-(\overset{\frown}{AD}+۱۰۰^\circ+\overset{\frown}{BC})=۳۶۰^\circ-(۱۰۰^\circ+۱۲۰^\circ)=۱۴۰^\circ\Rightarrow \overset{\frown}{AT}=\overset{\frown}{TB}=\frac{۱۴۰^\circ}{۲}=۷۰^\circ\Rightarrow x_{\text{محاطی}}=\frac{\overset{\frown}{TB}}{۲}=\frac{۷۰^\circ}{۲}=۳۵^\circ$$

تست

۱۲: در شکل مقابل اگر $B\hat{A}C=۳A\hat{B}D$ باشد، آنگاه زاویه β چند برابر زاویه α است؟



۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) ۲ ✓

۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) ۳

پاسخ: فرض می‌کنیم $A\hat{B}D=x$. بنابراین $B\hat{A}C=۳x$. زوایای $A\hat{B}D$ و $B\hat{A}C$ محاطی‌اند ولذا نصف کمان روبرویشان می‌باشند. درنتیجه:

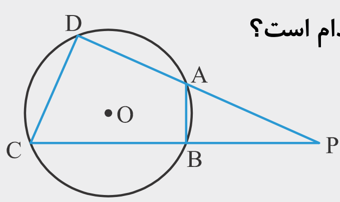
$$A\hat{B}D=\frac{\overset{\frown}{AD}}{۲}\Rightarrow \overset{\frown}{AD}=۲x$$

$$B\hat{A}C=\frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}\Rightarrow \overset{\frown}{BC}=۶x$$

از طرفی: $\alpha=\frac{\overset{\frown}{BC}-\overset{\frown}{AD}}{۲}=\frac{۶x-۲x}{۲}=۲x\Rightarrow \alpha=۲x$ و $\beta=\frac{\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{AD}}{۲}=\frac{۶x+۲x}{۲}=۴x$. بنابراین $\beta=۲\alpha$.

تست

۱۳: در دایره $C(O,R)$ شکل مقابل، $AB=R$ و $CD=\sqrt{۲}R$ می‌باشند. مقدار زاویه P کدام است؟



۱) ۲۰° ۲) $۲۲/۵^\circ$

۳) ۱۵° ✓ ۴) ۳۰°

پاسخ: از O به A و B و C و D وصل می‌کنیم. داریم:

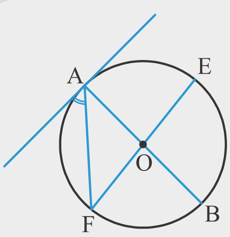
$$OA=OB=AB=R\Rightarrow \overset{\Delta}{OAB}\ \text{متساوی الاضلاع}\Rightarrow A\hat{O}B=۶۰^\circ\Rightarrow \overset{\frown}{AB}=۶۰^\circ$$

$$OD=OC=R\ \text{ و }\ CD=\sqrt{۲}R\Rightarrow \overset{\Delta}{DOC}\ \text{قائم الزاویه}\Rightarrow D\hat{O}C=۹۰^\circ\Rightarrow \overset{\frown}{DC}=۹۰^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{P}=\frac{\overset{\frown}{DC}-\overset{\frown}{AB}}{۲}=\frac{۹۰^\circ-۶۰^\circ}{۲}=۱۵^\circ$$

تست

۱۴: در شکل مقابل O مرکز دایره و $\hat{A}=۵۸^\circ$ است. اندازه کمان $\overset{\frown}{AE}$ کدام است؟



۱) ۶۴° ۲) ۶۸°

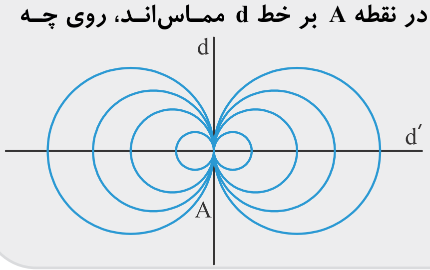
۳) ۷۲° ✓ ۴) ۷۴°

پاسخ: زاویه $\hat{A}$ ظلّی است و بنابراین $\hat{A}=\frac{\overset{\frown}{AF}}{۲}\Rightarrow \overset{\frown}{AF}=۱۱۶^\circ$. همچنین:

$$\overset{\frown}{AFB}=۱۸۰^\circ\Rightarrow \overset{\frown}{AF}+\overset{\frown}{FB}=۱۸۰^\circ\Rightarrow ۱۱۶^\circ+\overset{\frown}{FB}=۱۸۰^\circ\Rightarrow \overset{\frown}{FB}=۶۴^\circ\Rightarrow \overset{\frown}{AE}=۶۴^\circ$$

مسئله

۴: خط d و نقطه A روی آن مفروض است. مرکزهای همه دایره‌هایی که همگی در نقطه A بر خط d مماس‌اند، روی چه شکلی هستند؟ این شکل چه وضعی نسبت به خط d دارد؟

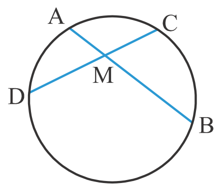


پاسخ: مطابق شکل مقابل، مرکزهای همه دایره‌هایی که همگی در نقطه A بر خط d مماس‌اند، روی یک خط قرار می‌گیرند (d′)، که با توجه به اینکه مماس بر شعاع گذرنده از آن نقطه عمود است، این خط در نقطه A بر خط d عمود می‌شود.

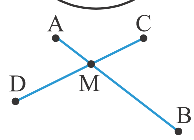
درس ۲ روابط طولی در دایره

اگر دو وتر از یک دایره با هم موازی نباشند، یا درون دایره یکدیگر را قطع می‌کنند یا بیرون دایره. همچنین اگر یک وتر با یک خط مماس بر دایره موازی نباشند در خارج دایره یکدیگر را قطع می‌کنند. به روابط بین اندازه پاره‌خط‌هایی که از این تقاطع‌ها پدید می‌آیند، روابط طولی در دایره می‌گوییم.

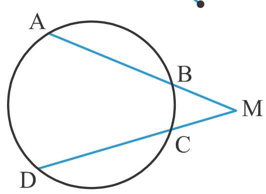
روابط طولی در دایره به صورت زیر می‌باشند:



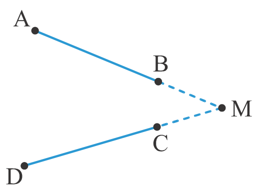
الف) اگر دو وتر از دایره در داخل دایره یکدیگر را قطع کنند، حاصلضرب اندازه‌های دو قطعه ایجاد شده روی یکی با حاصلضرب دو قطعه دیگری برابر است. یعنی: $MA \cdot MB = MC \cdot MD$



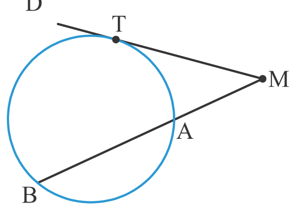
* توجه شود عکس این مطلب نیز برقرار است. یعنی: اگر دو پاره‌خط AB و CD در نقطه M متقاطع باشند به‌طوری که $MA \cdot MB = MC \cdot MD$، در این صورت نقاط A، B، C و D روی یک دایره قرار می‌گیرند.



ب) اگر دو وتر از دایره در خارج دایره یکدیگر را قطع کنند، حاصلضرب اندازه‌های دو قطعه ایجاد شده (از نقطه تقاطع) روی یکی با حاصلضرب دو قطعه دیگری برابراست. یعنی: $MA \cdot MB = MC \cdot MD$

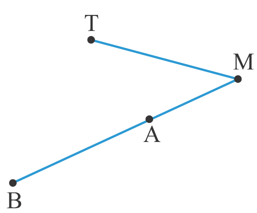


* توجه شود عکس این مطلب نیز برقرار است. یعنی: اگر امتداد دو پاره‌خط AB و CD یکدیگر را در نقطه M قطع کنند به‌طوری که $MA \cdot MB = MC \cdot MD$، در این صورت نقاط A، B، C و D روی یک دایره قرار می‌گیرند.



پ) اگر از یک نقطه خارج دایره، یک مماس و یک قاطع بر دایره رسم کنیم، قطعه‌ای از مماس، محدود بین آن نقطه و نقطه تماس، واسطه (میانگین) هندسی بین دو قطعه قاطع است. یعنی:

$$MT^۲ = MA \cdot MB$$



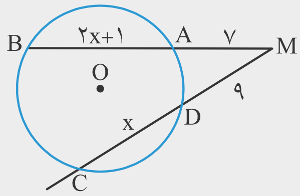
* توجه شود عکس این مطلب نیز برقرار است. یعنی: اگر سه نقطه M، A و B در یک راستا و نقطه T در این راستا نباشد به‌طوری که $MT^۲ = MA \cdot MB$، آنگاه دایره گذرنده از سه نقطه A و B و M در نقطه T برخط MT مماس است.

تذکر

۷. اثبات هر یک از روابط طولی فوق و عکس‌هایشان در بخش سؤالات تشریحی بیان شده است.

تست

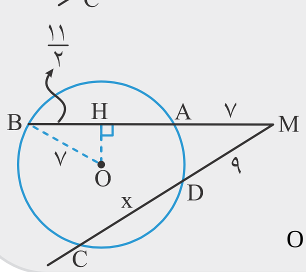
۱۵: در دایره $C(O,۷)$ شکل مقابل، فاصله مرکز دایره از وتر بزرگتر کدام است؟



۱) ✓ $\frac{۵\sqrt{۳}}{۲}$ ۲) $\frac{۵\sqrt{۲}}{۲}$

۳) $۲\sqrt{۳}$ ۴) $۳\sqrt{۲}$

پاسخ: طبق روابط طولی در دایره خواهیم داشت:

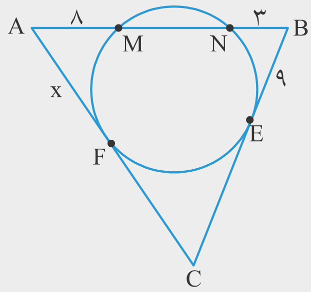


$$MA \cdot MB = MD \cdot MC$$
$$۷(۲x+۸) = ۹(۹+x) \Rightarrow ۱۴x+۵۶ = ۸۱+۹x \Rightarrow x = ۵$$

بنابراین $AB = ۲x+۱ = ۱۱$. از O بر AB عمود می‌کنیم. می‌دانیم این عمود، AB را نصف می‌کند.

$$\overset{\Delta}{OBH}: OH^۲ = ۷^۲ - (\frac{۱۱}{۲})^۲ = \frac{۱۴^۲-۱۱^۲}{۴} = \frac{(۱۴-۱۱)(۱۴+۱۱)}{۴} = \frac{۳\times ۲۵}{۴} \Rightarrow OH = \frac{۵\sqrt{۳}}{۲}$$

تست ۱۶: در شکل مقابل، طول مماس AF کدام است؟



۱) $۲\sqrt{۶}$ ۲) $۴\sqrt{۶}$

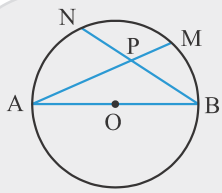
۳) $۸\sqrt{۵}$ ۴) ۱۶ ✓

پاسخ: فرض می‌کنیم $MN = y$. طبق روابط طولی در دایره داریم:

$$۹^۲ = ۳(۳+y) \Rightarrow ۳+y = ۲۷ \Rightarrow y = ۲۴$$

$$x^۲ = ۸(۸+y) \Rightarrow x^۲ = ۸(۸+۲۴) = ۸\times۳۲ \Rightarrow x = ۱۶$$

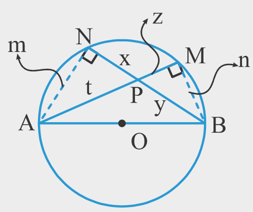
تست ۱۷: در دایره‌ای به شعاع ۳ واحد، دو وتر AM و BN یکدیگر را در نقطه P قطع کرده‌اند. حاصل عبارت $BP\times BN + AP\times AM$ کدام است؟ (O مرکز دایره است)



۱) ۱۶ ۲) ۲۷

۳) ۳۶ ✓ ۴) ۸۱

پاسخ:



از M به B و از N به A وصل می‌کنیم. زوایای AMB و ANB محاطی روبرو به قطر AB هستند، بنابراین قائمه می‌باشند. با نامگذاری طول پاره‌خط‌ها در شکل، به‌دنبال حاصل عبارت زیر هستیم:

$$BP\times BN + AP\times AM = y(x+y) + t(t+z) = xy + y^۲ + t^۲ + tz = ?$$

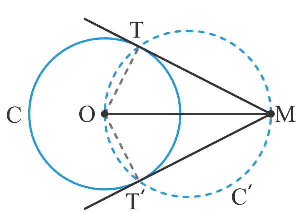
طبق روابط طولی در دایره داریم: $(*)\ xy = tz$

$$\overset{\Delta}{AMB}: \hat{M} = ۹۰^\circ \Rightarrow AB^۲ = (t+z)^۲ + n^۲ \Rightarrow AB^۲ = t^۲ + ۲tz + \underbrace{z^۲ + n^۲}_{y^۲} = t^۲ + tz + tz + y^۲$$

$$\xrightarrow{(*)} AB^۲ = t^۲ + tz + xy + y^۲ \xrightarrow{AB=۶} t^۲ + tz + xy + y^۲ = ۳۶$$

یادآوری: در درس اول دیدیم که چگونه از یک نقطه روی دایره، خطی را بر دایره مماس رسم می‌کنیم. حال می‌خواهیم طریقه رسم خط مماس بر دایره از یک نقطه خارج دایره را بررسی کنیم.

طریقه رسم مماس بر دایره از نقطه‌ای خارج دایره

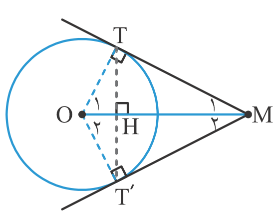


می‌خواهیم از نقطه M خارج دایره C، مماس بر دایره C رسم کنیم. برای این منظور ابتدا از M به O مرکز دایره وصل می‌کنیم. سپس دایره C′ را به قطر OM رسم می‌کنیم. این دایره، دایره C را در دو نقطه T و T′ قطع می‌کند. از M به T و T′ وصل می‌کنیم. MT و MT′ بر دایره مماس‌اند. زیرا زوایای OTM و OT′M زوایای محاطی روبرو به قطر می‌باشند، درنتیجه برابر با ۹۰° خواهند بود.

مهم / نتیجه

با توجه به مطلب فوق و یادآوری قبل می‌توان نتیجه گرفت، از یک نقطه خارج دایره دو مماس، و از یک نقطه روی دایره، تنها یک مماس بر دایره قابل رسم است.

ویژگی‌های مربوط به دو مماس رسم شده از یک نقطه خارج دایره



اگر مطابق شکل MT و MT′ دو مماس رسم شده از نقطه M بر دایره $C(O,R)$ باشند، ویژگی‌های زیر را می‌توان نتیجه گرفت (اثبات تمام ویژگی‌های به‌جز شماره ۷ (تعریف) در بخش سؤالات تشریحی بیان شده است).

۱. طول مماس‌های رسم شده از M بر دایره، با هم برابرند. یعنی $MT = MT'$.

۲. خط واصل نقطه M و O یعنی OM، نیمساز زوایای TMT′ و TOT′ است یعنی $\hat{M}_۱ = \hat{M}_۲$ و $\hat{O}_۱ = \hat{O}_۲$.

۳. OM عمودمنصف پاره‌خط TT' می‌باشد. یعنی $\hat{H} = ۹۰°$ و $TH = T'H$.

۴. $R^{۲} = OH \cdot OM$

۵. $TT'^{۲} = ۴\, OH \cdot MH$

۶. $TT' \cdot OM = ۲R \cdot MT$

۷. اگر زاویه بین دو مماس MT و MT' را برابر α درنظر بگیریم، اصطلاحاً می‌گوییم، از نقطه M دایره C با زاویه α دیده می‌شود.

ویژگی‌های شماره ۴، ۵ و ۶ نیازی به حفظ کردن ندارند. این ویژگی‌ها به‌راحتی از روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه که در زیر از هندسه ۱ یادآوری شده است، نتیجه می‌شوند.

یادآوری از هندسه ۱

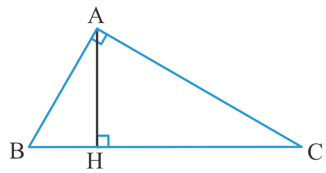
۱) $BC^{۲} = AB^{۲} + AC^{۲}$

۲) $AB \cdot AC = AH \cdot BC$

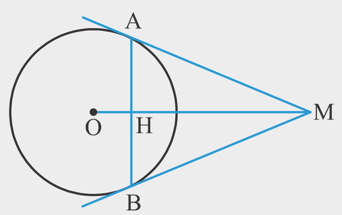
۳) $AB^{۲} = BH \cdot BC$

۴) $AC^{۲} = CH \cdot BC$

۵) $AH^{۲} = BH \cdot CH$



۱۸: در شکل زیر MA و MB مماس بر دایره $C(O,۴)$ در نقاط A و B می‌باشند و H محل برخورد AB و OM است. اگر $OH = ۲$ باشد، اندازه MA کدام است؟



۱) $۴\sqrt{۳}$ ✓ ۲) $۳\sqrt{۳}$

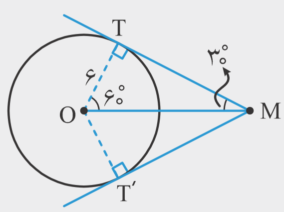
۳) $۲\sqrt{۳}$ ۴) $\sqrt{۳}$

پاسخ: از O به A وصل می‌کنیم و در مثلث قائم‌الزاویه OMA داریم:

$$OA^{۲} = OH \cdot OM \Rightarrow ۱۶ = ۲ \times OM \Rightarrow OM = ۸$$

$$\overset{\Delta}{OAM} : MA^{۲} = OM^{۲} - OA^{۲} \Rightarrow MA^{۲} = ۶۴ - ۱۶ = ۴۸ \Rightarrow MA = ۴\sqrt{۳}$$

۱۹: دایره $C(O,۶)$ از نقطه M با زاویه $۶۰°$ دیده می‌شود. اگر MT خط مماس بر دایره باشد، مساحت مثلث OTM کدام است؟



۱) $۱۲\sqrt{۳}$ ۲) $۱۴\sqrt{۳}$

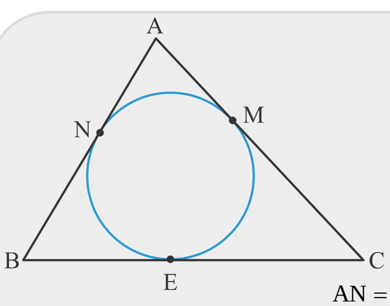
۳) $۱۶\sqrt{۳}$ ۴) $۱۸\sqrt{۳}$ ✓

پاسخ: می‌دانیم MO نیمساز زاویه TMT' است. بنابراین در مثلث قائم‌الزاویه OTM داریم:

$$tg\,۶۰° = \frac{TM}{OT} \Rightarrow \sqrt{۳} = \frac{TM}{۶} \Rightarrow TM = ۶\sqrt{۳}$$

$$S_{OTM} = \frac{OT \times TM}{۲} = \frac{۶ \times ۶\sqrt{۳}}{۲} = ۱۸\sqrt{۳}$$

۲۰: در شکل زیر، دایره در نقاط M ، N و E بر اضلاع مثلث ABC مماس است. اگر $AB = ۶$ ، $AC = ۴$ و $BC = ۸$ باشد، آنگاه اندازه $AM + AN$ کدام است؟



۱) ۱ ۲) ۲ ✓

۳) ۳ ۴) ۴

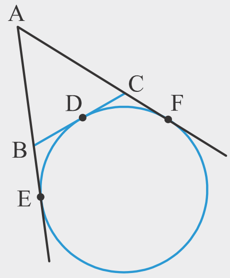
پاسخ: با توجه به اینکه طول مماس‌های رسم شده از یک نقطه خارج دایره با هم برابرند، داریم:

$$AN = AM = x \Rightarrow \begin{cases} CM = CE = ۴ - x \\ BN = BE = ۶ - x \end{cases}$$

$$BC = ۸ \Rightarrow (۶ - x) + (۴ - x) = ۸ \Rightarrow x = ۱ \Rightarrow AN + AM = ۲x = ۲$$

مسأله

۵: خطوط AE، AF و BC به‌ترتیب در نقاط E، F و D بر دایره (C) مماس هستند. مماس BC، خط‌های AE و AF را به‌ترتیب در نقاط B و C قطع کرده است. ثابت کنید با تغییر مکان نقطه D روی دایره بین دو نقطه ثابت E و F محیط مثلث ABC ثابت می‌ماند.



پاسخ:

می‌دانیم مماس‌های رسم شده از یک نقطه خارج دایره با هم برابرند.

بنابراین داریم:

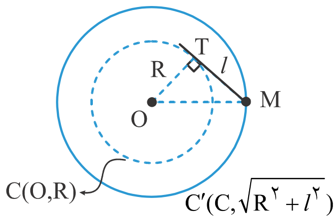
$$AE = AF \text{ و } BD = BE \text{ و } CD = CF$$

$$\text{محیط مثلث } ABC = AB + BC + AC = AB + (BD + DC) + AC = AB + (BE + CF) + AC$$
$$= (AB + BE) + (CF + AC) = AE + AF = 2AE = 2AF$$

که چون نقاط A، E و F ثابت‌اند، اندازه مماس‌های AE و AF ثابت بوده و بنابراین محیط مثلث ABC همواره مقدار ثابتی است.

مجموعه نقاطی با ویژگی‌های مشخص

الف) دایره $C(O,R)$ مفروض است. مجموعه نقاط از صفحه که بتوان از آن‌ها مماسی با طول معین l بر دایره رسم کرده، دایره‌ای است به مرکز O و شعاع $\sqrt{R^2+l^2}$.

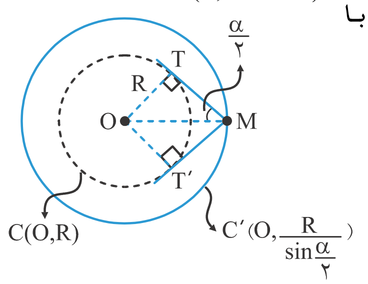


زیرا اگر M یکی از این نقاط باشد و مماس رسم شده از آن $MT = l$ باشد، داریم:

$$\overset{\Delta}{MOT}: \hat{T} = 90^\circ \Rightarrow MO^2 = R^2 + l^2 \Rightarrow MO = \sqrt{R^2+l^2}$$

یعنی نقطه M از نقطه ثابت O به فاصله ثابت $\sqrt{R^2+l^2}$ است. پس M روی دایره‌ای به مرکز O و شعاع $\sqrt{R^2+l^2}$ قرار دارد.

ب) دایره $C(O,R)$ مفروض است. مجموعه نقاط از صفحه که مماس‌های رسم شده از آن‌ها بر دایره، با یکدیگر زاویه معلوم α بسازند، دایره‌ای است به مرکز O و شعاع $\dfrac{R}{\sin\frac{\alpha}{2}}$.



زیرا اگر M یکی از این نقاط باشد، می‌دانیم OM نیمساز این زاویه است. بنابراین:

$$\overset{\Delta}{MOT}: \hat{T} = 90^\circ \Rightarrow \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{OT}{OM} \Rightarrow OM = \frac{R}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

یعنی نقطه M از نقطه ثابت O به فاصله ثابت $\dfrac{R}{\sin\frac{\alpha}{2}}$ است. پس M روی دایره‌ای به مرکزی O و شعاع $\dfrac{R}{\sin\frac{\alpha}{2}}$ قرار دارد.

* در حالت خاص اگر $\alpha = 90^\circ$ باشد، مجموعه نقاطی از صفحه که مماس‌های رسم شده از آن‌ها بر دایره، برهم عمود باشند، دایره‌ای است به مرکز O و شعاع $R\sqrt{2}$ (دایره مونژ). در این حالت چهارضلعی $OTMT'$ مربع خواهد بود و بنابراین مماس‌های رسم شده با شعاع دایره برابرند.

تست

۲۱: مماس‌های رسم شده از نقطه A بر یک دایره بر هم عمودند. اگر فاصله A تا مرکز دایره برابر ۱۰ باشد، شعاع دایره کدام است؟

۱) ۵ ✓ ۲) $5\sqrt{2}$ ۳) $10\sqrt{2}$ ۴) ۱۰

پاسخ:

فرض می‌کنیم R شعاع دایره باشد، از آنجا که مماس‌های رسم شده از A بر دایره برهم عمودند، نتیجه می‌شود فاصله A از مرکز دایره برابر با $R\sqrt{2}$ است. بنابراین:

$$R\sqrt{2} = 10 \Rightarrow R = \frac{10}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$$

تذکر

۸. در درس سوم، در مورد دایره موجود در مثال قبل صحبت می‌کنیم و ویژگی‌های مهمی را مطرح خواهیم کرد.