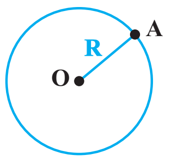
# فصل ۱ ترسیم‌های هندسی و استدلال

**۱. ترسیم‌های هندسی واستدلال**
- **ترسیم‌های هندسی**
  - نقاط متساوی‌الفاصله از خط و نقطه
  - ویژگی نیمساز یک زاویه
  - ویژگی عمودمنصف یک زاویه

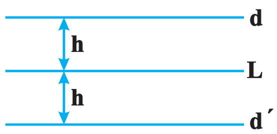
## درس‌نامه

### نقاط متساوی‌الفاصله از یک نقطه:



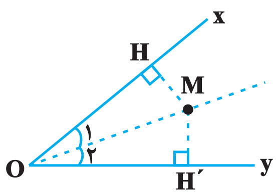

مجموعهٔ نقاطی از صفحه که از نقطهٔ ثابت $O$ به فاصلهٔ ثابت $R$ باشند، روی دایره‌ای بـه مرکـز $O$ و بـه شعاع $R$ قرار دارند. در شکل مقابل، نقطهٔ $A$ روی دایره قرار دارد، پس $OA = R$ است.

### نقاط متساوی‌الفاصله از یک خط:

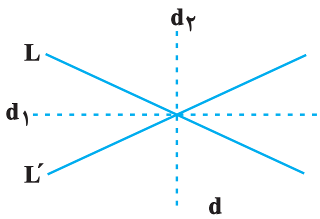



مجموعهٔ نقاطی از صفحه که از یکی از خطوط صفحه به فاصلهٔ معلومی باشـند، دو خـط موازی با آن خط هستند که در طرفین آن خط قرار دارند. به عنوان مثال در شکل مقابل، مجموعهٔ نقاطی از صفحه که از خط $L$ به فاصلهٔ معلوم $h$ باشند، دو خط $d$ و $d'$ در طرفین خط $L$ هستند.

### ویژگی نیمساز یک زاویه:

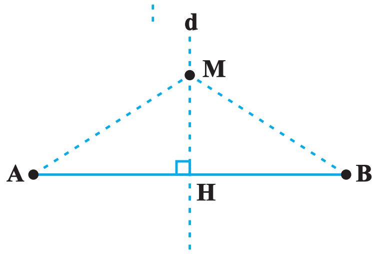



هر نقطه که روی نیمساز یک زاویه قرار داشته باشد، از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است و هر نقطه از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد، روی نیمساز آن زاویه قرار دارد. در شکل مقابـل اگـر $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ باشـد، آن‌گـاه $MH = MH'$ اسـت و در صـورتی‌کـه $MH = MH'$ باشد، آن‌گاه $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ است.

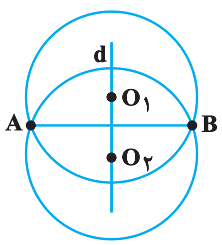



مجموعهٔ نقاطی از صفحه که از دو خط متقاطع $L$ و $L'$ به یک فاصلـه باشـند، نیمساز هر یک از زاویه‌هایی است که بین دو خط تشکیل می‌شود. این دو نیمساز در نقطهٔ تقاطع دو خط، برهم عمود هستند.

### ویژگی عمودمنصف یک پاره‌خط:




هر نقطه که روی عمودمنصف یک پاره‌خط باشد، از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است و هر نقطه که از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله باشد، روی عمودمنصف آن پاره‌خط قرار دارد. یعنی در شکل زیر، اگر نقطهٔ $M$ روی خط $d$ (عمودمنصف پاره‌خط $AB$ ) قرار داشته باشد، آن‌گاه $MA = MB$ است و درصورتی‌که $MA = MB$ باشد، آن‌گـاه نقطهٔ $M$ روی خط $d$ (عمودمنصف پاره‌خط $AB$ ) قرار دارد.




مراکز دایره‌هایی که از دو نقطهٔ $A$ و $B$ عبـور مـی‌کننـد، بـر روی عمودمنصـف پاره‌خط $AB$ قرار دارند. در شکل زیر $O_1$ و $O_2$ مرکز دو دایره‌ای هستند که از نقاط $A$ و $B$ عبور کرده‌اند و $d$ عمودمنصف پاره‌خط $AB$ است.

۱. مثلثی با معلوم‌بودن طول سه ضلع آن قابل‌رسم است. برای رسم این مثلث چند کمان باید رسم کنیم؟

(کار در کلاس ۱ و ۲ صفحهٔ ۱۱ کتاب درسی)

۱) ۱
۲) ۲
۳) حداقل ۲
۴) حداکثر ۲

۲. نقطه‌ی A به فاصله‌ی ۴ سانتی‌متر از نقطه‌ی B قرار دارد. در صفحه چند نقطه وجود دارد که از A به فاصله‌ی ۷ سانتی‌متر و از B به فاصله‌ی ۳ سانتی‌متر باشد؟ (کار در کلاس ۳ صفحه‌ی ۱۱ کتاب درسی)

① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ ۴

۳. کدام گزینه، نمی‌تواند تعداد جواب‌های مسأله‌ی زیر باشد:

«دو نقطه‌ی A و B به‌فاصله‌ی x از هم قرار دارند. چند نقطه وجود دارد که از A به‌فاصله‌ی y و از B به‌فاصله‌ی z باشد؟»

(کار در کلاس ۳ صفحه‌ی ۱۱ کتاب درسی)

① صفر ② یک ③ دو ④ بی‌شمار

۴. سه نقطه‌ی A، B و C مفروض‌اند. چند نقطه در صفحه وجود دارد که از A، B و C به‌ترتیب به فاصله‌ی ۴، ۳ و ۲ باشد؟

(کار در کلاس صفحه‌ی ۱۱ کتاب درسی)

① ۱ ② ۲ ③ حداقل ۱ ④ حداکثر ۲

۵. در مثلث ABC، دو رأس A و B ثابت هستند. با داشتن طول ارتفاع وارد بر AB، رأس C همواره روی کدام شکل قرار دارد؟

(مرتبط با فعالیت صفحه‌ی ۱۲ کتاب درسی) (آزمون کانون – ۲۳ مهر ۹۵)

① نیم‌دایره‌ای به قطر AB ② دایره‌ای به قطر AB ③ یک خط موازی AB ④ دو خط موازی AB

۶. تعداد نقاطی در صفحه که از خط d و نقطه‌ی A به فاصله‌ی ۸ باشند، چند مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد؟

(مرتبط با فعالیت‌های صفحه‌های ۱۰ و ۱۵ کتاب درسی) (آزمون کانون – ۷ آبان ۹۵)

① ۲ ② ۳ ③ ۴ ④ ۵

۷. زاویه‌ی $x\hat{O}y = ۶۰^\circ$ را در نظر گرفته و به مرکز O، کمانی به شعاع دو واحد رسم کرده‌ایم تا Ox و Oy را در P و Q قطع کند. برای آن‌که بتوانیم نیمساز $x\hat{O}y$ را رسم کنیم، حداقل شعاع کمان‌هایی که باید به مرکز P و Q رسم شوند، چقدر است؟

(فعالیت صفحه‌ی ۱۲ کتاب درسی)

① ۲ ② ۱/۵ ③ ۱ ④ ۰/۵

۸. خط موربی دو خط موازی d و $d'$ را به ترتیب در نقاط B و C قطع می‌کند. اگر نقطه‌ی O از هر سه خط بـه یـک فاصلـه باشـد، زاویه‌ی BOC چند درجه است؟ (مرتبط با فعالیت صفحه‌ی ۱۲ کتاب درسی) (آزمون کانون - ۸۶)

① ۱۰۵ ② ۹۵ ③ ۹۰ ④ ۷۵

۹. در مثلث ABC، نیمساز زاویه‌ی داخلی A، ضلع BC را در نقطه‌ی D قطع می‌کند. از نقطـه‌ی D عمودهـای DE و DF را بـه ترتیب بر اضلاع AB و AC رسم می‌کنیم. طول‌های کدام دو پاره‌خط، همواره با هم مساوی است؟

(نتیجه‌ی صفحه‌ی ۱۲ کتاب درسی) (آزمون کانون - ۸۸)

① CF و BE ② AE و CF ③ AF و AE ④ AF و BE

۱۰. در مثلث ABC، نقاط D و E را به‌ترتیب روی اضلاع AB و AC به‌گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که AD = AE باشد. از D عمودی بر AB و از E عمودی بر AC رسم می‌کنیم تا همدیگر را در نقطه‌ی M قطع کنند. نقطه‌ی M همواره بر کدام‌یک از خطوط زیر واقع است؟ (مرتبط با فعالیت صفحه‌ی ۱۲ کتاب درسی) (آزمون کانون – ۲۳ مهر ۹۵)

① نیم‌ساز زاویه‌ی A ② میانه‌ی نظیر رأس A ③ ارتفاع نظیر رأس A ④ عمودمنصف ضلع BC

۱۱. در مثلث متساوی‌الساقین ABC داریم AB = AC و $\hat{A} = ۸۰^\circ$. عمودمنصف‌های ساق‌هـا هـم‌دیگـر را در نقطـه‌ی O قطـع می‌کنند. کوچک‌ترین زاویه‌ی مثلث OBC چند درجه است؟ (نتیجه‌ی صفحه‌ی ۱۳ کتاب درسی) (آزمون کانون - ۹۳)

① ۱۰ ② ۱۵ ③ ۲۰ ④ ۲۵

۱۲. در مثلث ABC طول‌های دو ضلع AB و AC به ترتیب ۴ و ۶ سانتی‌متر و مقدار مساحت برابر ۱۰ سـانتی‌مترمربـع اسـت. اگـر نیمساز داخلی $\hat{A}$، ضلع BC را در نقطه‌ی D قطع کرده باشد، فاصله‌ی نقطه‌ی D از ضلع AB کدام است؟

(نتیجه‌ی صفحه‌ی ۱۲ کتاب درسی) (آزمون کانون - ۹۳)

① $\frac{۱}{۲}$ ② ۲ ③ ۱ ④ $\frac{۳}{۲}$

**۱۳.** دو خط $d$ و $d'$ برهم عمودند. اگر خط $L$، این دو خط را در نقاط متمایز $A$ و $B$ قطع کند، آن‌گاه حداکثر چند نقطه روی خط $L$ می‌توان یافت که از $d$ و $d'$ به یک فاصله باشند؟ (نتیجه‌ی صفحه‌ی ۱۲ کتاب درسی) (آزمون کانون – ۲۳ مهر - ۹۵)

۱) هیچ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

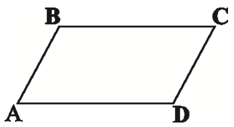
**۱۴.** دو خط متقاطع $d_1$ و $d_2$ و نقطه‌ی $O$ مفروض‌اند. چند نقطه در صفحه وجود دارد که از این دو خط به یک فاصله باشد و از نقطه‌ی $O$ به فاصله‌ی ۵ سانتی‌متر باشد؟ (مرتبط با فعالیت‌های صفحه‌های ۱۰ و ۱۲ کتاب درسی)

۱) ۲ ۲) حداقل ۲ ۳) ۴ ۴) حداکثر ۴

**۱۵.** روی اضلاع متوازی‌الاضلاع $ABCD$ چند نقطه وجود دارد که از قطرهای آن به یک فاصله هستند؟ (نتیجه‌ی صفحه‌ی ۱۲ کتاب درسی)

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) بی‌شمار

**۱۶.** از تقاطع عمودمنصف‌های اضلاع متوازی‌الاضلاع زیر، لزوماً کدام شکل ایجاد می‌شود؟ (مرتبط با صفحه‌ی ۱۴ کتاب درسی) (آزمون کانون – ۲۳ مهر - ۹۵)




۱) مستطیل
۲) مربع
۳) لوزی
۴) متوازی‌الاضلاع

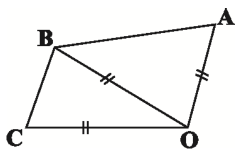
**۱۷.** پاره‌خط $AB$ در صفحه مفروض است. برای رسم عمودمنصف این پاره‌خط، به‌کمک خط‌کش و پرگار باید چند کمان رسم کرد؟ (فعالیت صفحه‌ی ۱۴ کتاب درسی)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) حداکثر ۳

**۱۸.** مثلث $OAB$ مفروض است. عمودمنصف پاره‌خط‌های $OA$ و $OB$ را رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطه‌ی $T$ قطع کنند. نقطه‌ی $T$ لزوماً ... (مرتبط با صفحه‌ی ۱۹ کتاب درسی) (آزمون کانون – ۲۱ آبان - ۹۵)

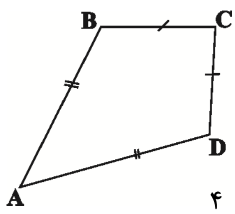
۱) روی نیم‌ساز زاویه‌ی $AOB$ قرار دارد. ۲) روی پاره‌خط $AB$ قرار دارد.
۳) روی عمودمنصف پاره‌خط $AB$ قرار دارد. ۴) درون مثلث است.

**۱۹.** در شکل مقابل، کدام گزینه لزوماً صحیح است؟ (مرتبط با صفحه‌ی ۱۹ کتاب درسی) (آزمون کانون – ۷ آبان - ۹۵)




۱) $O$ روی نیم‌ساز $A\hat{B}C$ واقع است.
۲) $B$ روی نیم‌ساز $A\hat{O}C$ واقع است.
۳) $O$ روی عمودمنصف $AC$ واقع است.
۴) $B$ روی عمودمنصف $AC$ واقع است.

**۲۰.** در چهارضلعی $ABCD$ مطابق شکل، چه تعداد از موارد زیر همواره صحیح است؟ (مرتبط با صفحه‌های ۱۱ تا ۱۳ کتاب درسی) (آزمون کانون– ۷ آبان - ۹۵)



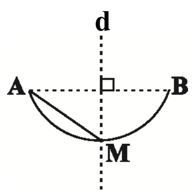

الف) قطر $AC$ نیم‌ساز زاویه‌ی $C$ است.
ب) قطر $BD$ نیم‌ساز زاویه‌ی $B$ است.
پ) قطر $AC$ بخشی از عمودمنصف قطر $BD$ است.
ت) قطر $BD$ بخشی از عمودمنصف قطر $AC$ است.

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

**۲۱.** از مثلث $ABC$، ضلع $BC$ و نقطه‌ی $H$ پای ارتفاع وارد بر ضلع $BC$ ثابت است. با تغییر نقطه‌ی $A$ در صفحه، وسط ضلع $AB$ بر روی کدام‌یک از خطوط زیر جابه‌جا می‌شود؟ (مرتبط با صفحه‌ی ۱۳ کتاب درسی) (آزمون کانون– ۲۱ آبان - ۹۵)

۱) عمودمنصف $BH$ ۲) عمودمنصف $BC$ ۳) خطی موازی $BC$ ۴) نیم‌ساز زاویه‌ی $AHB$

**۲۲.** مطابق شکل، کمان $AB$ قسمتی از یک دایره به شعاع ۳ و خط $d$ عمودمنصف پاره‌خط $AB$ است. اگر $AM = ۲$ باشد، فاصله‌ی مرکز دایره تا وسط $AM$ کدام است؟ (مرتبط با صفحه‌ی ۱۳ کتاب درسی) (آزمون کانون– ۲۱ آبان - ۹۵)




۱) ۱
۲) $\sqrt{۲}$
۳) $۲\sqrt{۲}$
۴) $\sqrt{۵}$

**۲۳.** دو نقطه‌ی $A$ و $B$ و خط $d$ داده شده‌اند. می‌خواهیم مثلث متساوی‌الساقینی رسم کنیم که رأسش روی $d$ و قاعده‌ی آن پاره‌خط $AB$ باشد، با توجه به اوضاع $A$، $B$ و $d$، تعداد جواب‌های ممکن برای رسم مثلث کدام نمی‌تواند باشد؟

(مرتبط با صفحه‌ی ۱۳ کتاب درسی) (آزمون کانون– ۲۱ آبان - ۹۵)

① یک جواب ② دو جواب ③ هیچ جواب ④ بی‌شمار جواب

**۲۴.** در چهارضلعی $ABCD$، $\hat{B}=90^\circ$ و رأس $C$ محل تقاطع نیم‌ساز زاویه‌ی داخلی $A$ و عمودمنصف ضلع $AD$ است. اگر $AB=4$ و مساحت چهارضلعی ۱۸ باشد، محیط $ABCD$ کدام است؟

(مرتبط با صفحه‌های ۱۱ تا ۱۳ کتاب درسی) (آزمون کانون– ۲۱ آبان - ۹۵)

① ۱۶ ② ۱۸ ③ ۲۰ ④ ۲۴

**۲۵.** در مثلث $ABC$، نقطه‌ی $H$ (پای ارتفاع $AH$) از اضلاع $AB$ و $AC$ به یک فاصله است. مثلث $ABC$ لزوماً چگونه است؟

(مرتبط با صفحه‌های ۱۱ و ۱۲ کتاب درسی) (آزمون کانون– ۱۹ آذر - ۹۵)

① فقط قائم‌الزاویه ② فقط متساوی‌الساقین ③ متساوی‌الاضلاع ④ متساوی‌الساقین قائم‌الزاویه

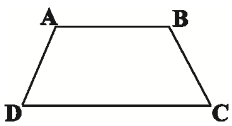
**۲۶.** نقاط $A$، $B$ و $C$ روی یک خط قرار دارند. چند نقطه در صفحه وجود دارد که از این سه نقطه به یک فاصله باشد؟

(مثال صفحه‌های ۱۳ و ۱۴ کتاب درسی)

① صفر ② ۱ ③ ۴ ④ بی‌شمار

**۲۷.** در یک ذوزنقه، نقطه‌ای از دو سر قاعده‌ی $CD$ به یک فاصله و همچنین از قاعده‌ی $CD$ و ساق $AD$ به یک فاصله است. این نقطه حاصل برخورد کدام است؟

(مرتبط با صفحه‌های ۱۱ تا ۱۳ کتاب درسی) (آزمون کانون– ۲۳ مهر - ۹۵)




① نیم‌سازهای $\hat{C}$ و $\hat{D}$

② عمودمنصف‌های دو ساق

③ عمودمنصف $CD$ و نیم‌ساز زاویه‌ی $D$

④ دو دایره با شعاع یکسان و به مرکز اوساط قاعده‌ها

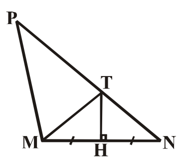
**۲۸.** در مثلث متساوی‌الساقین $ABC$، عمودمنصف ساق $AB$ با ساق $AC$ در نقطه‌ی $M$ متقاطع است. اگر $M\hat{B}C=57^\circ$، آنگاه زاویه‌ی حاده‌ی $A$ چند درجه است؟ $(\hat{A}<90)$

(مرتبط با صفحه‌ی ۱۳ کتاب درسی) (آزمون کانون - ۹۲)

① ۲۱ ② ۲۲ ③ ۲۳ ④ ۲۴

**۲۹.** در مثلث $MNP$، $P\hat{M}N=3P\hat{N}M$ و عمودمنصف ضلع $MN$، ضلع $PN$ را در نقطه‌ی $T$ قطع کرده است. اگر $PM=6$ و $PN=10$، آنگاه طول $MT$ چقدر است؟

(مرتبط با صفحه‌ی ۱۳ کتاب درسی) (آزمون کانون - ۸۸)




① ۸

② ۶

③ ۴

④ ۳/۵

**۳۰.** نقاط $A$ و $B$ در صفحه ثابت هستند و نقطه‌ی $C$ طوری در صفحه تغییر می‌کند که $A\hat{B}C=2B\hat{A}C$. وقتی $C$ تغییر می‌کند، مجموعه نقاطی که محل تلاقی نیمساز زاویه‌ی $A\hat{B}C$ با پاره‌خط $AC$ هستند، کدام است؟

(مرتبط با صفحه‌ی ۱۳ کتاب درسی) (آزمون کانون – ۸ بهمن - ۹۵)

① یک نقطه ② یک دایره ③ خطی موازی با $AB$ ④ عمودمنصف $AB$

**۳۱.** روی محیط مثلث قائم‌الزاویه‌ی $ABC$ $(\hat{A}=90^\circ)$ نقطه‌ای وجود دارد که از رأس‌های $B$ و $C$ به‌فاصله‌ی ۵ سانتی‌متر و از رأس $A$ به‌فاصله‌ی ۳ سانتی‌متر قرار دارد. اندازه‌ی وتر این مثلث کدام است؟

(مرتبط با صفحه‌ی ۱۳ کتاب درسی)

① $3\sqrt{20}$ ② $4\sqrt{5}$ ③ ۲۰ ④ $5\sqrt{20}$

**۳۲.** در چهارضلعی $ABCD$، اگر $AB=AD$ و $CB=CD$، آن‌گاه روی قطر $AC$ چند نقطه وجود دارد که از دو رأس $B$ و $D$ به یک فاصله باشند؟ (نتیجه‌ی صفحه‌ی ۱۳ کتاب درسی) (آزمون کانون - ۹۲)

① ۱ ② ۲ ③ ۴ ④ بی‌شمار

**۳۳.** در مثلث متساوی‌الساقین $ABC$، $(AB=AC)$ $\hat{A}=4\hat{B}$ است. عمودمنصف اضلاع $AB$ و $AC$، ضلع $BC$ را به ترتیب در نقاط $M$ و $N$ قطع می‌کنند. اگر $BC=24$ باشد آنگاه طول پاره‌خط $BN$ کدام است؟

(نتیجه‌ی صفحه‌ی ۱۳ کتاب درسی) (آزمون کانون - ۸۸)

① ۱۵ ② ۲۰ ③ ۱۶ ④ ۱۸

**۳۴.** قطر $AB$ در دایره‌ای مفروض است. عمودمنصف $AB$ دایره را در نقطه‌ی $C$ قطع می‌کند. مثلث $ABC$ همواره چگونه مثلثی است؟ (مرتبط با صفحه‌ی ۱۳ کتاب درسی) (آزمون کانون – ۷ آبان- ۹۵)

① متساوی‌الساقین غیرقائم‌الزاویه ② متساوی‌الاضلاع
③ قائم‌الزاویه‌ی غیرمتساوی‌الساقین ④ قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین

**۳۵.** در مثلثی که زاویه‌های آن حاده هستند، اگر عمودمنصف‌های دو ضلع $AC$ و $AB$ یکدیگر را در نقطه‌ی $O$ قطع کنند، آنگاه زاویه‌ی $B\hat{O}C$ همواره برابر کدام است؟ (نتیجه‌ی صفحه‌ی ۱۳ کتاب درسی) (آزمون کانون - ۹۰)

① $90^\circ+\frac{1}{2}\hat{A}$ ② $\hat{B}+\hat{C}$ ③ $\frac{1}{2}(\hat{B}+\hat{C})$ ④ $2\hat{A}$

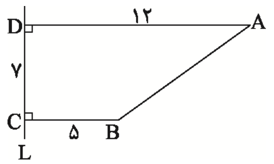
**۳۶.** در مثلث $ABC$ داریم $AB=AC$ و $\hat{A}=80^\circ$، عمودمنصف‌های دو ساق مثلث، قاعده‌ی $BC$ را در $M$ و $N$ قطع می‌کنند. کوچک‌ترین زاویه‌ی مثلث $AMN$ چند درجه است؟ (نتیجه‌ی صفحه‌ی ۱۳ کتاب درسی) (سراسری تجربی- ۹۲)

① ۱۵ ② ۲۰ ③ ۲۵ ④ ۳۰

**۳۷.** در مثلث متساوی‌الساقین $ABC$ $(AB=AC)$، به طول ساق ۵ و قاعده‌ی ۶، نیمساز زاویه‌ی $B$، ضلع $AC$ را در نقطه‌ی $D$ قطع می‌کند. فاصله‌ی نقطه‌ی $D$ از ضلع $AB$ چند برابر $\frac{1}{11}$ است؟ (مرتبط با صفحه‌ی ۱۲ کتاب درسی) (آزمون کانون - ۹۴)

① ۲۴ ② ۲۱ ③ ۲۶ ④ ۲۳

**۳۸.** در شکل زیر با کمک خط‌کش و پرگار، نقطه‌ی $O$ را چنان پیدا کرده‌ایم که از $A$ و $B$ به یک فاصله بوده و فاصله‌ی $O$ از خط $L$ برابر ۸ است. طول $OA$ کدام می‌تواند باشد؟ (مرتبط با صفحه‌ی ۱۳ کتاب درسی) (آزمون کانون - ۹۵)




① $2\sqrt{3}$
② $3\sqrt{2}$
③ ۵
④ $4\sqrt{2}$

**۳۹.** چند لوزی متمایز با قطرهای به‌طول ۱۲ و ۱۶ و طول ضلع ۹ می‌توان رسم کرد؟

(مرتبط با تمرین ۳ صفحه‌ی ۱۶ کتاب درسی)

① صفر ② ۱ ③ ۲ ④ بی‌شمار

**۴۰.** چند متوازی‌الاضلاع متمایز با معلوم بودن طول دو قطر و زاویه‌ی بین آن‌ها می‌توان رسم کرد؟

(مرتبط با تمرین ۱ صفحه‌ی ۱۵ کتاب درسی)

① ۱ ② ۲ ③ صفر ④ بی‌شمار

**۴۱.** پاره‌خط $AB$ به طول ۶ مفروض است. عمودمنصف $AB$ را رسم می‌کنیم. از نقطه‌ی $A$ دایره‌ای به شعاع ۵ رسم کرده تا عمودمنصف $AB$ را در نقاط $C$ و $D$ قطع کند. چهارضلعی $ACBD$ کدام است؟

(مرتبط با تمرین ۳ صفحه‌ی ۱۶ کتاب درسی)

① مربع به قطر ۶ ② لوزی به قطرهای ۵ و ۶ ③ مستطیل به اضلاع ۵ و ۶ ④ لوزی به قطرهای ۶ و ۸

**۴۲.** در کدام‌یک از ترسیم‌های زیر، یک شکل منحصربه‌فرد حاصل نمی‌شود؟ (مرتبط با صفحه‌ی ۲۶ کتاب درسی)

① رسم یک لوزی با معلوم‌بودن دو قطر ② رسم یک مستطیل با معلوم‌بودن یک قطر و یک ضلع
③ رسم یک مربع با معلوم‌بودن قطر ④ رسم متوازی‌الاضلاع با معلوم‌بودن یک قطر و یک ضلع

**۴۳.** در کدام مورد زیر، با اطلاعات داده شده، فقط یک شکل قابل رسم است؟ (مکمل تمرین‌های صفحه‌های ۱۵ و ۱۶ کتاب درسی)

① متوازی‌الاضلاعی با طول قطر ۲ و ۷ ② مربعی با طول قطر ۶
③ لوزی با طول ضلع ۵ ④ دایره‌ای با یک وتر به طول ۲ که آن وتر قطر دایره نیست.

**۴۴.** اگر طول ضلع یک لوزی برابر با ۱۰ باشد، آن‌گاه حداقل طول قطر بزرگ آن، چه‌قدر باشد تا لوزی قابل رسم گردد؟
(مکمل تمرین‌های ۲ و ۳ صفحه‌ی ۱۶ کتاب درسی) (آزمون کانون – ۷ آبان ۹۵)

① ۱۰ ② $۱۰\sqrt{۲}$ ③ $۱۰\sqrt{۳}$ ④ ۲۰

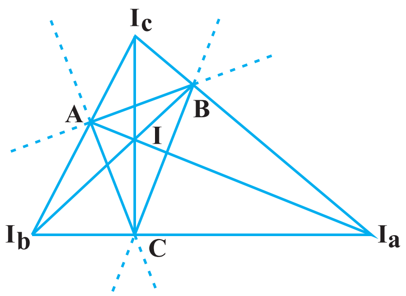
**۴۵.** کدام چهارضلعی را نمی‌توان رسم کرد؟
(مرتبط با تمرین‌های ۲ و۴ صفحه‌ی ۱۶ و تمرین ۶ صفحه‌ی ۲۷ کتاب درسی) (آزمون کانون – ۲۱ آبان ۹۵)

① مستطیلی که طول یک ضلع آن ۴ و طول قطر آن ۱۰ باشد.
② متوازی‌الاضلاعی که طول ضلع‌هایش ۳ و ۵ و طول یک قطر آن ۶ باشد.
③ مستطیلی که طول قطر آن ۱۰ و زاویه‌ی بین دو قطر °۶۰ باشد.
④ لوزی که طول ضلع آن ۵ و طول یک قطر آن ۱۲ باشد.

**۱. ترسیم‌های هندسی واستدلال** — **۲. استدلال** — **همرسی اجزای فرعی مثلث**

## درس‌نامه

### همرسی نیمسازها:




سه نیمساز داخلی هر مثلث همرسند، نقطه‌ی همرسی نیمسازهای داخلی، از هر سه ضلع مثلث، به یک فاصله است و همواره داخل مثلث قرار دارد. هم‌چنین هر دو نیمساز خارجی مثلث با نیمساز داخلی زاویه‌ی سوم همرسند، این نقطه‌ی همرسی از یک ضلع و امتداد دو ضلع دیگر، به یک فاصله است، یعنی در شکل مقابل داریم:

$I$ : نقطه‌ی همرسی نیمسازهای داخلی مثلث ABC که از هر سه ضلع AB، AC و BC به یک فاصله است.

$I_a$ : نقطه‌ی همرسی نیمساز داخلی زاویه‌ی $\hat{A}$ و نیمسازهای خارجی $\hat{B}$ و $\hat{C}$ که از ضلع BC و امتداد AB و AC به یک فاصله است.

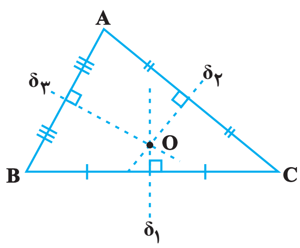
$I_b$ : نقطه‌ی همرسی نیمساز داخلی زاویه‌ی $\hat{B}$ و نیمسازهای خارجی $\hat{A}$ و $\hat{C}$ که از ضلع AC و امتداد AB و BC به یک فاصله است.

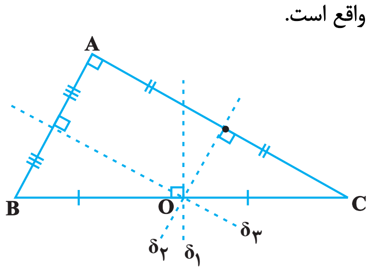
$I_c$ : نقطه‌ی همرسی نیمساز داخلی زاویه‌ی $\hat{C}$ و نیمسازهای خارجی $\hat{A}$ و $\hat{B}$ که از ضلع AB و امتداد AC و BC به یک فاصله است.

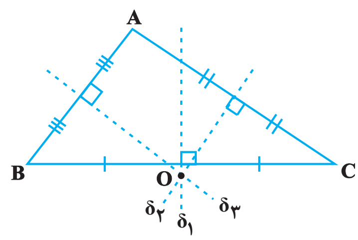
یعنی چهار نقطه‌ی $I$، $I_a$، $I_b$ و $I_c$ از اضلاع مثلث ABC یا امتداد آن‌ها، به یک فاصله هستند.

### همرسی عمودمنصف‌ها:

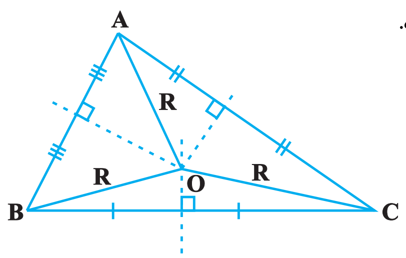
عمود منصف‌های ضلع های هر مثلث همرسند. نقطه‌ی همرسی عمود منصف‌ها بسته به این‌که مثلث حاده الزاویه، قائم الزاویه و یا منفرجه الزاویه باشد، به ترتیب داخل مثلث، وسط وتر و خارج مثلث واقع است.



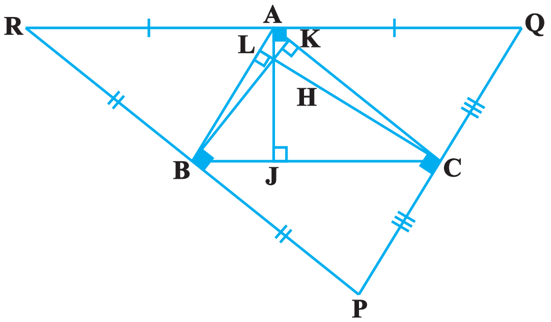




◉ نقطه‌ی همرسی عمود منصف‌های هر مثلث، از سه رأس آن مثلث به یک فاصله است.

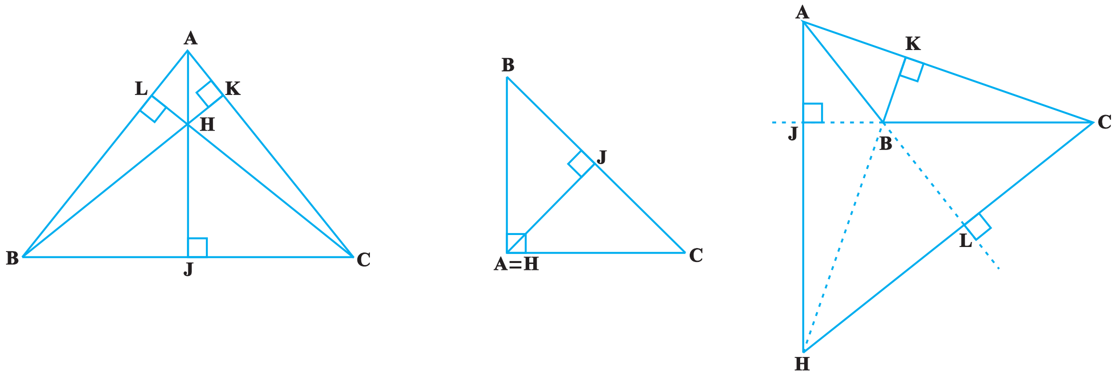


## همرسی ارتفاع‌ها:

**قضیه:** اگر از رئوس مثلث ABC، خطوطی به موازات اضلاع آن رسم کنیم تا مثلث PQR بـه دسـت آیـد، آن‌گـاه ارتفـاع‌هـای مثلـث ABC ، عمودمنصف‌های مثلث PQR هستند. از این قضیه می‌توان نتیجه گرفت که ارتفاع‌های هر مثلث همرسند.




نقطه‌ی همرسی ارتفاع‌های مثلث، بسته به این‌که آن مثلث حاده الزاویه، قائم الزاویه و یا منفرجه الزاویه باشد، به ترتیب داخل مثلث، رأس قائمه و خارج مثلث واقع است.




۴۶. برای مثلث متساوی‌الساقین $ABC\ (AB = AC)$ به قاعده‌ی ۶ سانتی‌متر نقطه‌ای وجود دارد کـه از هـر رأس آن بـه فاصـله‌ی ۵ سانتی‌متر است. مساحت این مثلث چقدر است؟ (مرتبط با مثال صفحه‌ی ۱۸ کتاب درسی)

۱) ۱۸ ۲) ۲۷ ۳) ۲۴ ۴) ۳۰

۴۷. در مثلث متساوی‌الساقین $ABC(AB = AC)$، $BC = ۸$ و فاصله‌ی نقطه‌ی همرسی عمودمنصف‌های اضلاع از قاعده‌ی مثلث برابر ۳ است. طول ساق مثلث به شرط آن که از قاعده بزرگ‌تر باشد، کدام است؟

(مرتبط با مثال صفحه‌ی ۱۹ کتاب درسی) (آزمون کانون - ۸۰)

۱) ۹ ۲) $۳\sqrt{۵}$ ۳) ۶ ۴) $۴\sqrt{۵}$

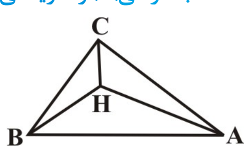
۴۸. چهار نقطه‌ی A، B، C و D در یک صفحه وجود دارند. چند نقطه در این صفحه وجود دارد که از این چهار نقطه به یک فاصله باشد؟ (مرتبط با مثال صفحه‌ی ۱۹ کتاب درسی)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۴ ۴) حداکثر ۱

۴۹. در مثلث ABC که $\hat{B} = ۶۰^\circ$ و $\hat{C} = ۵۰^\circ$، اگر O نقطه‌ی همرسی عمودمنصف‌های اضلاع باشد، آن‌گاه اندازه‌ی زاویه‌ی BOC چند درجه است؟ (مرتبط با مرتبط با مثال صفحه‌ی ۱۹ کتاب درسی)

۱) ۱۱۰ ۲) ۱۳۰ ۳) ۱۲۰ ۴) ۱۴۰

۵۰. در مثلث ABC که در آن $\hat{A} = ۴۰^\circ$ و $\hat{B} = ۶۰^\circ$ و H محل تلاقی سه ارتفاع است. زاویه‌ی $\angle AHC$ چند برابر زاویه‌ی $\angle BHC$ است؟ (مرتبط با مثال صفحه‌ی ۱۹ کتاب درسی) (آزاد ریاضی ۸۸)



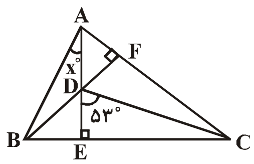

۱) $\frac{۵}{۶}$ ۲) $\frac{۵}{۷}$ ۳) $\frac{۶}{۷}$ ۴) $\frac{۷}{۵}$

**۵۱.** در مثلث $ABC$، داریم $\hat{A}=40^\circ$ و $\hat{B}=60^\circ$، اگر نقطه‌ی تلاقی سه ارتفاع $H$ باشد، زاویه‌ی $CHA$ چند درجه است؟

(مثال صفحه‌ی ۱۹ کتاب درسی) (آزاد ریاضی – ۹۰)

(۱) ۱۰۰ (۲) ۱۲۰ (۳) ۱۴۰ (۴) ۸۰

**۵۲.** با توجه به شکل مقابل، مقدار $x$ کدام است؟ (مرتبط با مثال صفحه‌ی ۱۹ کتاب درسی) (آزمون کانون - ۹۲)




(۱) ۳۷
(۲) ۵۳
(۳) ۳۶
(۴) ۲۳

**۵۳.** مثلث دلخواه $ABC$ را در نظر می‌گیریم. از رئوس $A$، $B$ و $C$ خطوطی به موازات اضلاع روبه‌رویشان رسم می‌کنیم تا این خطوط مثلث $A'B'C'$ را تشکیل دهند. نقطه‌ی تلاقی ارتفاع‌های مثلث $ABC$ برای مثلث $A'B'C'$ چه نقطه‌ای است؟

(مرتبط با مثال صفحه‌ی ۱۹ کتاب درسی) (آزمون کانون - ۹۲)

(۱) نقطه‌ی تلاقی میانه‌ها (۲) نقطه‌ی تلاقی ارتفاع‌ها
(۳) محل تلاقی نیمسازها (۴) محل تلاقی عمودمنصف‌ها

**۵۴.** مثلث $ABC$ مفروض است. وسط‌های اضلاع آن‌را $M$، $N$ و $P$ می‌نامیم. کدام گزینه همواره درست است؟

(مرتبط با مثال صفحه‌ی ۱۹ کتاب درسی)

(۱) نقطه‌ی همرسی ارتفاع‌های $MNP$ از سه ضلع آن به یک فاصله است.
(۲) نقطه‌ی همرسی ارتفاع‌های $MNP$ از سه رأس آن به یک فاصله است.
(۳) نقطه‌ی همرسی ارتفاع‌های $MNP$ از سه ضلع مثلث $ABC$ به یک فاصله است.
(۴) نقطه‌ی همرسی ارتفاع‌های $MNP$ از سه رأس مثلث $ABC$ به یک فاصله است.

**۵۵.** اگر در مثلث $ABC$ زاویه‌ی $\hat{A}=92^\circ$، کدام‌یک از گزاره‌های زیر صحیح است؟

(مرتبط با مثال صفحه‌ی ۱۹ کتاب درسی) (آزاد پزشکی- ۷۹)

(۱) نقطه‌ی تلاقی سه میانه خارج مثلث است. (۲) نقطه‌ی تلاقی سه نیم‌ساز خارج مثلث است.
(۳) نقطه‌ی تلاقی سه ارتفاع خارج مثلث است. (۴) نقطه‌ی تلاقی سه ارتفاع روی ضلع $BC$ است.

**۵۶.** در مثلث غیرقائم‌الزاویه‌ی $ABC$، اگر نقطه‌ی $O$ محل تلاقی سه ارتفاع باشد، نقطه‌ی $A$ برای مثلث $OBC$ چه نقطه‌ای است؟

(مرتبط با مثال صفحه‌ی ۱۹ کتاب درسی) (آزمون کانون - ۹۱)

(۱) محل تلاقی سه ارتفاع (۲) محل تلاقی سه میانه
(۳) محل تلاقی نیمسازها (۴) محل تلاقی عمودمنصف‌ها

**۵۷.** اگر $\hat{A}$، $\hat{B}$ و $\hat{C}$ زاویه‌های یک مثلث به ترتیب با اعداد ۱، ۲ و ۳ متناسب باشند و نیم‌سازهای داخلی در نقطه‌ی $D$ متقاطع باشند، زاویه‌ی $A\hat{D}C$ کدام است؟ (مرتبط با مثال صفحه‌ی ۱۹ کتاب درسی) (آزاد ریاضی- ۷۶)

(۱) $145^\circ$ (۲) $120^\circ$ (۳) $95^\circ$ (۴) $140^\circ$

**۵۸.** در مثلث $ABC$ که زاویه‌ها به نسبت ۲، ۳ و ۷ است، زاویه‌ی بزرگ‌تر $A$ بوده و $D$ محل تلاقی سه نیم‌ساز است. حاصل $A\hat{D}B+A\hat{D}C-B\hat{D}C$ کدام است؟ (مرتبط با مثال صفحه‌ی ۱۹ کتاب درسی) (آزاد ریاضی- ۸۷)

(۱) $105^\circ$ (۲) $75^\circ$ (۳) $60^\circ$ (۴) $90^\circ$

**۵۹.** کدام‌یک از نقاط زیر از سه ضلع مثلث به یک فاصله است؟ (مرتبط با مثال صفحه‌ی ۱۹ کتاب درسی) (آزاد ریاضی- ۶۶)

(۱) نقطه‌ی تلاقی سه میانه (۲) نقطه‌ی تلاقی سه ارتفاع
(۳) نقطه‌ی تلاقی سه عمود منصف (۴) نقطه‌ی تلاقی سه نیم‌ساز

**۶۰.** در صفحه‌ی یک مثلث، چند نقطه می‌توان یافت که از سه ضلع آن مثلث یا امتداد آن‌ها به یک فاصله باشند؟

(مرتبط با مثال صفحه‌ی ۱۹ کتاب درسی) (سراسری تجربی – ۸۰)

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۶۱. از تقاطع نیمسازهای خارجی مثلث $ABC$، مثلث $PQR$ ایجاد شده است. نقطه‌ی همرسی نیمسازهای داخلی $\overset{\Delta}{ABC}$، برای $\overset{\Delta}{PQR}$ چه نقطه‌ای است؟ (مرتبط با مثال صفحه‌ی ۱۹ کتاب درسی)

۱) نقطه‌ی تقاطع نیمسازهای داخلی
۲) نقطه‌ی تقاطع عمودمنصف‌ها
۳) نقطه‌ی تقاطع میانه‌ها
۴) نقطه‌ی تقاطع ارتفاع‌ها

۶۲. چه تعداد از گزاره‌های زیر همواره صحیح است؟ (مرتبط با مثال صفحه‌ی ۱۹ کتاب درسی)

الف) نقطه‌ی همرسی عمودمنصف‌های یک مثلث از سه ضلع آن مثلث به یک فاصله است.

ب) نقطه‌ی همرسی نیمسازهای زاویه‌های داخلی هر مثلث از سه رأس آن به یک فاصله است.

ج) نقطه‌ی همرسی ارتفاع‌های هر مثلث همواره یا داخل مثلث واقع است یا خارج مثلث.

۱) هیچ
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

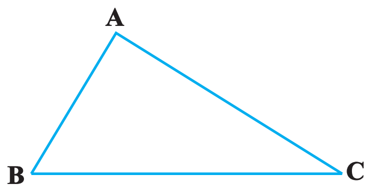
۱. ترسیم‌های هندسی واستدلال — ۲. استدلال — نامساوی‌های هندسی

## درس‌نامه

### نامساوی‌های هندسی:

**قضیهٔ ضلع برتر:**

اگر در مثلثی دو ضلع نابرابر باشند، آن‌گاه زاویهٔ روبه‌رو به ضلع بزرگ‌تر، از زاویهٔ روبه‌رو به ضلع کوچک‌تر، بزرگ‌تر است. در مثلث $ABC$، اگر $AC > AB$، آن‌گاه $\hat{B} > \hat{C}$.



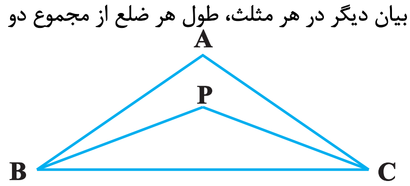

**قضیهٔ زاویهٔ برتر:**

اگر در مثلثی دو زاویه نابرابر باشند، آن‌گاه ضلع روبه‌رو به زاویهٔ بزرگ‌تر، از ضلع روبه‌رو به زاویهٔ کوچک‌تر، بزرگ‌تر است. در مثلث $ABC$، اگر $\hat{B} > \hat{C}$، آن‌گاه $AC > AB$.

**قضیهٔ نامساوی مثلث:**

در هر مثلث، مجموع طول هر دو ضلع، از طول ضلع سوم بزرگ‌تر است، یعنی در مثلث $ABC$ داریم: $AB + AC > BC$، $AB + BC > AC$ و $AC + BC > AB$

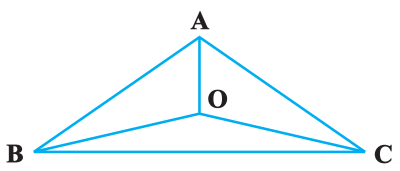
- اگر $a$، $b$ و $c$، طول اضلاع یک مثلث باشند، آن‌گاه $|b-c| < a < b+c$. به بیان دیگر در هر مثلث، طول هر ضلع از مجموع دو ضلع دیگر کم‌تر و از قدرمطلق تفاضل دو ضلع دیگر بیش‌تر است.




- اگر از نقطهٔ دلخواه $P$ درون مثلث $ABC$، به دو رأس $B$ و $C$ وصل کنیم، آن‌گاه $\hat{P} > \hat{A}$ و $PB + PC < AB + AC$.

- مجموع فواصل هر نقطهٔ دلخواه داخل مثلث از سه رأس آن، از محیط مثلث کوچک‌تر و از نصف محیط مثلث بزرگ‌تر است.

$$\frac{AB + AC + BC}{۲} < OA + OB + OC < AB + AC + BC.$$




۶۳. در مثلث $ABC$ اگر $AB + AC = ۲BC$ و $AB > AC$، آن‌گاه در مورد زاویه‌های این مثلث کدام گزینه درست است؟

(مرتبط با قضیهٔ ۱ صفحه‌ی ۲۱ کتاب درسی) (آزمون کانون - ۹۲)

۱) $\hat{C} > \hat{A} > \hat{B}$
۲) $\hat{C} < \hat{A} < \hat{B}$
۳) $\hat{A} > \hat{B} > \hat{C}$
۴) $\hat{B} < \hat{C} < \hat{A}$

۶۴. اگر در مثلث $ABC$، $\hat{A} = ۵۲^\circ$ آن‌گاه کدام‌یک از گزاره‌های زیر لزوماً درست است؟

(مرتبط با عکس قضیهٔ ۱ صفحه‌ی ۲۲ کتاب درسی)

۱) ضلع $BC$ کوچک‌ترین ضلع مثلث است.
۲) ضلع $BC$ کوچک‌ترین ضلع مثلث نیست.
۳) ضلع $BC$ بزرگ‌ترین ضلع مثلث است.
۴) ضلع $BC$ بزرگ‌ترین ضلع مثلث نیست.

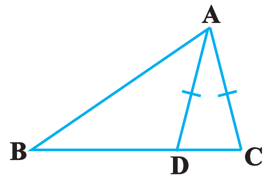
**۶۵.** در مثلث $ABC$ نیم‌ساز داخلی زاویه‌ی $A$ ضلع $BC$ را در نقطه‌ی $D$ قطع می‌کند، کدام نامساوی همواره صحیح است؟
(تمرین ۶ صفحه‌ی ۲۷ کتاب درسی) (سراسری ریاضی - ۸۰)

۱) $BA > BD$  ۲) $DA > DB$  ۳) $AB > AD$  ۴) $DB > DA$

**۶۶.** در مثلث قائم‌الزاویه‌ی $ABC$، که $\hat{A} = 90^\circ$ و $AB > AC$ نقطه‌ی $O$ نقطه‌ی همرسی نیمسازهای آن است. کدام گزینه نادرست است؟
(مرتبط با عکس قضیه‌ی ۱ صفحه‌ی ۲۲ کتاب درسی)

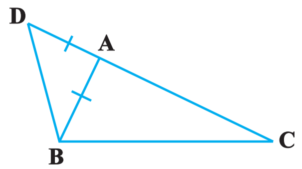
۱) $AO < BO$  ۲) $AO < CO$  ۳) $CO < BO$  ۴) $AC < CO$

**۶۷.** در شکل مقابل $AD = AC$. کدام گزینه لزوماً صحیح است؟ (مرتبط با عکس قضیه‌ی ۱صفحه‌ی ۲۲ کتاب درسی)



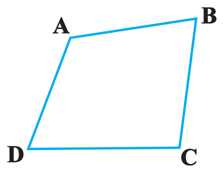

۱) $BC > AB$
۲) $BD > AD$
۳) $AB > AD$
۴) $BC > AD$

**۶۸.** مطابق شکل ضلع $AC$ از مثلث $ABC$ را به اندازه‌ی ضلع $AB$ ادامه داده‌ایم تا به نقطه‌ی $D$ برسیم. کدام گزینه لزوماً صحیح است؟
(مرتبط با عکس قضیه‌ی ۱ صفحه‌ی ۲۲ کتاب درسی)




۱) $AC > AB$
۲) $BC > AC$
۳) $BC > AB$
۴) $DC > BC$

**۶۹.** در چهارضلعی $ABCD$ شکل مقابل، $AB$ کوچک‌ترین ضلع و $DC$ بزرگ‌ترین ضلع‌اند. کدام گزینه لزوماً صحیح است؟
(مرتبط با قضیه‌ی ۱ صفحه‌ی ۲۱ کتاب درسی)




۱) $\hat{B} > \hat{D}$
۲) $\hat{A} < \hat{C}$
۳) $\hat{B} > \hat{C}$
۴) $\hat{B} < \hat{C}$

**۷۰.** در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ که $AB > AD$ کدام گزینه لزوماً صحیح است؟ (مرتبط با قضیه‌ی ۱ صفحه‌ی ۲۱ کتاب درسی)

۱) $D\hat{A}C > B\hat{A}C$  ۲) $B\hat{D}C > A\hat{D}B$
۳) $D\hat{A}B > A\hat{B}C$  ۴) $D\hat{A}B < A\hat{B}C$

**۷۱.** با کدام سه طول داده شده می‌توان مثلث ساخت؟ $(a,b,c > 0)$ (نتیجه‌ی تمرین ۶ صفحه‌ی ۲۷ کتاب درسی) (آزاد ریاضی - ۷۳)

۱) $a+b+1 , b , a$  ۲) $a+b , b+1 , a+1$
۳) $2a^2+3a+1 , (a+1)^2 , a^2$  ۴) $3a , 2a , a-2$

**۷۲.** فرض کنیم $0 < a < b < c$ باشد، برای آن‌که $a$ و $b$ و $c$ اضلاع مثلثی باشند، لازم و کافی است داشته باشیم:
(نتیجه‌ی تمرین ۶ صفحه‌ی ۲۷ کتاب درسی) (سراسری ریاضی - ۴۹)

۱) $c < a+b$  ۲) $a < b+c$  ۳) $b < a+c$  ۴) $c^2 < a^2+b^2$

**۷۳.** کدام دسته از اعداد زیر می‌تواند سه ضلع یک مثلث باشد؟
(نتیجه‌ی تمرین ۶ صفحه‌ی ۲۷ کتاب درسی) (آزاد ریاضی - ۷۵)

۱) ۳ و ۵ و ۷  ۲) ۲ و ۳ و ۶  ۳) ۱و۲و۳  ۴) ۱و۳و۴

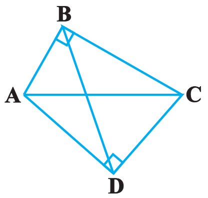
**۷۴.** اگر $a$، $b$ و $c$ طول اضلاع یک مثلث باشند، کدام گزینه لزوماً درست نیست؟
(نتیجه‌ی تمرین ۶ صفحه‌ی ۲۷ کتاب درسی) (آزاد - ۷۷)

۱) $2a$، $2b$ و $2c$ طول سه ضلع مثلثی هستند.  ۲) $a^2$، $ab$ و $ac$ طول سه ضلع مثلثی هستند.
۳) $\frac{a}{2}$، $\frac{b}{2}$ و $\frac{c}{2}$ طول سه ضلع مثلثی هستند.  ۴) $a+2$، $b+4$ و $c+7$ طول سه ضلع مثلثی هستند.

۷۵. سه پاره‌خط به طول‌های $۴x-۴$ و $x+۷$ و $۶x$ اضلاع مثلثی هستند، مقادیر $x$ به کدام صورت است؟
(نتیجه‌ی تمرین ۶ صفحه‌ی ۲۷ کتاب درسی) (سراسری ریاضی- ۸۲)

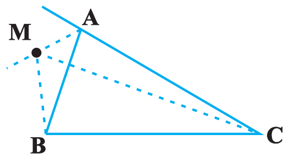
① $\frac{۱۱}{۹}<x<۳$ ② $\frac{۵}{۳}<x<۳$ ③ $۲<x<۳$ ④ $\frac{۱۱}{۹}<x<۴$

۷۶. در چهار ضلعی $ABCD$، $\hat{B}=\hat{D}=۹۰^\circ$ و $AB<CD$ است. کدام یک از نامساوی‌های زیر همواره درست است؟
(نتیجه‌ی تمرین ۶ صفحه‌ی ۲۷ کتاب درسی) (آزمون کانون - ۸۵)




① $BC<AD$
② $BD<AC$
③ $AB<AD$
④ $CD<BC$

۷۷. در شکل زیر، نقطه‌ی $M$ روی نیمساز خارجی زاویه‌ی $A$ است. نسبت $\frac{MB+MC}{AB+AC}$، چگونه است؟
(نتیجه‌ی تمرین ۶ صفحه‌ی ۲۷ کتاب درسی) (سراسری خارج کشور ریاضی - ۹۴)




① بزرگ‌تر از ۱
② کمتر از ۱
③ برابر با ۱
④ غیرمشخص

۷۸. مثلث $ABC$ با محیط $۲P$ مفروض است، اگر $M$ نقطه‌ای در درون این مثلث و مجموع فاصله‌های $M$ از سه رأس مثلث برابر $L$ باشد، همواره داریم:
(نتیجه‌ی تمرین ۶ صفحه‌ی ۲۷ کتاب درسی) (سراسری تجربی- ۵۷)

① $L>۲P$ ② $L>P$ ③ $L=P$ ④ $L<P$

۷۹. در مثلثی به طول اضلاع ۳، $۲\sqrt{۲}-۳$ و $۲\sqrt{۲}+۲$ واحد، نقطه‌ی $M$ داخل مثلث تغییر مکان می‌دهد. کدام عدد برای مجموع فواصل نقطه‌ی $M$ از سه رأس مثلث، مورد قبول است؟
(نتیجه‌ی تمرین ۶ صفحه‌ی ۲۷ کتاب درسی) (سراسری خارج کشور ریاضی -۸۸)

① $۵-\sqrt{۲}$ ② ۴ ③ $۴\sqrt{۲}$ ④ ۸

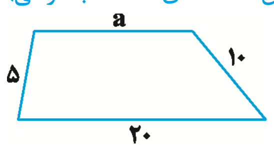
۸۰. از نقطه‌ی دلخواه $O$ در داخل مثلث $ABC$ به سه رأس آن وصل می‌کنیم. اگر مجموع طول این سه پاره‌خط، برابر ۸ باشد، محیط مثلث در کدام بازه‌ی زیر قرار دارد؟ ($P$ محیط مثلث $ABC$ است.)
(نتیجه‌ی تمرین ۶ صفحه‌ی ۲۷ کتاب درسی) (آزمون کانون - ۸۵)

① $۱۶<P<۲۴$ ② $P>۱۶$ ③ $P>۱۷$ ④ $۸<P<۱۶$

۸۱. متوازی‌الاضلاعی با معلوم بودن طول ضلع‌های آن ۴ و ۶ و طول قطر $x$ قابل رسم است. اگر $x$ عددی صحیح باشد، چند متوازی‌الاضلاع می‌توان رسم کرد؟
(نتیجه‌ی تمرین ۶ صفحه‌ی ۲۷ کتاب درسی)

① شش ② هفت ③ هشت ④ نه

۸۲. اگر ذوزنقه زیر قابل رسم باشد، آن‌گاه محدوده‌ی $a$ کدام است؟
(نتیجه‌ی تمرین ۶ صفحه‌ی ۲۷ کتاب درسی)




① $۵<a<۲۵$ ② $۵<a<۱۵$
③ $۵<a<۱۰$ ④ $۱۰<a<۲۵$

۱. ترسیم‌های هندسی واستدلال — ۲. استدلال — مفاهیم استدلال

## درس‌نامه

### استدلال:

**قضیه:**

برخی نتایج مهم و پرکاربرد که با استدلال استنتاجی به‌دست می‌آید، قضیه نامیده می‌شود.

**عکس قضیه:**

اگر در یک قضیه، جای فرض و حکم را عوض کنیم به آن چه حاصل می‌شود «عکس قضیه» گفته می‌شود. عکس قضیه ممکن است درست یا نادرست باشد.

**قضیهٔ دو شرطی:**

اگر عکس یک قضیه‌ی شرطی، خود یک قضیهٔ شرطی باشد، آن‌گاه این دو قضیهٔ شرطی را می‌توان به‌صورت یک قضیه بیان کرد. چنین قضیه‌ای، قضیهٔ دوشرطی نامیده می‌شود.

قضیه‌های دوشرطی را می‌توان با نماد $\Leftrightarrow$ (اگر و تنها اگر) بیان کرد.

**گزاره:**

گزاره یک جمله‌ی خبری است که دقیقاً درست یا نادرست باشد، اگرچه درست یا نادرست بودن آن بر ما معلوم نباشد، گزاره می‌تواند تنها یک خبر را اعلام کند که به آن گزاره‌ی ساده می‌گویند و می‌تواند بیش از یک خبر را اعلام کند و ترکیبی از چند گزاره‌ی ساده باشد که به آن گزاره‌ی مرکب می‌گویند.

**نقیض یک گزاره:** همان‌طور که می‌دانیم، ارزش یک گزاره یا درست است یا نادرست. نقیض یک گزاره، ارزشی دقیقاً مخالف ارزش خود گزاره دارد.

**مثال نقض:**

به مثالی که نشان دهد یک نتیجه‌گیری کلی یا حدس کلی نادرست است، مثال نقض گفته می‌شود. به‌عنوان مثال برای حکم کلی «همهٔ اعداد اول، فرد هستند.» می‌توان عدد ۲ را به‌عنوان مثال نقض ارائه کرد که عدد اول است ولی فرد نیست.

**برهان خلف:**

نوعی از استدلال که در مسائل ریاضی و هندسی کاربرد دارد، برهان غیرمستقیم یا برهان خلف است. بدین صورت که به‌جای آن‌که به‌طور مستقیم از فرض شروع کنیم و به‌درستی حکم برسیم، فرض می‌کنیم حکم غلط باشد (نقیض حکم درست باشد) و به یک تناقض با فرض یا یک امر غیرممکن می‌رسیم.

**۸۳.** عکس کدام یک از قضایای شرطی زیر، یک قضیه‌ی شرطی نیست؟

(مرتبط با صفحه‌ی ۲۲ کتاب درسی) (آزمون کانون - ۹۱)

① مساحت‌های هر دو مثلث همنهشت با هم برابرند.

② اگر سه ضلع مثلثی برابر باشند، آنگاه هر زاویه‌ی آن $۶۰^\circ$ است.

③ مثلثی که دو زاویه‌ی برابر دارد، دارای دو ضلع برابر است.

④ در یک مثلث قائم‌الزاویه، مربع وتر برابر مجموع مربع‌های دو ضلع دیگر است.

**۸۴.** «برهان خلف» نوعی . . . است. (مرتبط با صفحه‌ی ۲۴ کتاب درسی)

① مثال نقض ② استدلال استقرایی ③ استدلال استنتاجی ④ گزاره‌ی شرطی

**۸۵.** در اثبات یک قضیه به روش اثبات غیرمستقیم یا برهان خلف از کدام اصل استفاده می‌شود؟

(مرتبط با صفحه‌ی ۲۴ کتاب درسی)

① فرض را درست می‌گیریم و به حکم درست دست می‌یابیم.

② فرض را نادرست می‌گیریم و به حکم نادرست می‌رسیم.

③ حکم را نادرست می‌گیریم و با فرض نادرست مواجه می‌شویم.

④ حکم را درست می‌گیریم و به فرض درست می‌رسیم.

**۸۶.** در اثبات حکم «عمودمنصف هر پاره‌خط یکتاست.» به روش برهان خلف، تناقض پدید آمده کدام است؟

(مرتبط با صفحه‌ی ۲۴ کتاب درسی) (آزمون کانون – ۱۹ آذر– ۹۵)

① از یک نقطه خارج یک خط، دو خط به موازات آن خط رسم شده است.

② از یک نقطه خارج یک خط، دو خط بر آن خط عمود رسم شده است.

③ مجموع زوایای یک مثلث بیش‌تر از $۱۸۰^\circ$ رسم شده است.

④ دو خط متقاطع، موازی یکدیگر شده‌اند.

**۸۷.** کدام قضیه به صورت دو شرطی بیان نمی‌شود؟ (مرتبط با صفحه‌ی ۲۵ کتاب درسی) (سراسری ریاضی- ۷۸)

① در مثلث متساوی‌الساقین ارتفاع و میانه یک ضلع بر هم منطبق‌اند.

② در مثلث قائم‌الزاویه عمودمنصف اضلاع بر روی وتر متقاطع‌اند.

③ در مثلث قائم‌الزاویه یکی از میانه‌ها نصف وتر است.

④ در هر مثلث ضلع مقابل به زاویه‌ی $۹۰^\circ$ بزرگ‌ترین ضلع است.

۸۸. کدام‌یک از قضیه‌های زیر را نمی‌توان به‌صورت یک قضیه‌ی دوشرطی نوشت؟
(مرتبط با صفحه‌ی ۲۵ کتاب درسی) (آزمون کانون – ۵ آذر ۹۵)

① اگر در مثلث $ABC$، $AB > AC$ باشد، آن‌گاه $\hat{C} > \hat{B}$ است.
② اگر یک چهارضلعی لوزی باشد، آن‌گاه قطرهایش عمودمنصف یکدیگرند.
③ اگر دو مثلث هم‌نهشت باشند، آن‌گاه هم‌مساحت‌اند.
④ اگر دو دایره محیط‌های برابر داشته باشند، آن‌گاه مساحت برابر دارند.

۸۹. کدام‌یک از احکام زیر را نمی‌توان به‌صورت یک قضیه‌ی دوشرطی نوشت؟
(مرتبط با صفحه‌ی ۲۵ کتاب درسی) (آزمون کانون – ۵ آذر ۹۵)

① مجموع زوایای داخلی هر چهارضلعی محدب، $360°$ است.
② نقطه‌ی همرسی عمودمنصف‌های اضلاع هر مثلث، از سه رأس آن مثلث به یک فاصله است.
③ قضیه‌ی فیثاغورس
④ ارتفاع‌های نظیر اضلاع مساوی در هر مثلث، باهم برابرند.

۹۰. کدام گزینه، یک قضیه‌ی دوشرطی نیست؟ (مرتبط با صفحه‌ی ۲۵ کتاب درسی)

① متوازی‌الاضلاعی که دو ضلع مجاورش برابرند، لوزی است.
② مربع، مستطیلی است که طول اقطارش برابر است.
③ هر ذوزنقه، اگر متساوی‌الساقین باشد، دو قطر آن برابرند.
④ مثلثی که نیمساز یک زاویه‌ی آن، میانه‌ی ضلع مقابل به آن زاویه است، متساوی‌الساقین است.

۹۱. کدام‌یک از گزینه‌های زیر مثال نقض عبارت :«در مثلثی که اضلاع نامساوی دارد، بزرگ‌ترین ضلع روبه‌رو به زاویه‌ی منفرجه است» می‌باشد؟ (مرتبط با صفحه‌های ۲۵ و ۲۶ کتاب درسی)

① مثلث متساوی‌الاضلاع ② مثلث متساوی‌الساقین ③ مثلث قائم‌الزاویه ④ مثلث مختلف‌الاضلاع

۹۲. با استفاده از استدلال استقرایی حدس می‌زنیم که «در هر مثلث نقطه‌ی همرسی عمودمنصف‌های اضلاع در داخل یا در خارج مثلث واقع است.» نتیجه‌گیری کلی از این حدس با کدام روش رد می‌شود؟ (مرتبط با صفحه‌های ۲۵ و ۲۶ کتاب درسی)

① استدلال استنتاجی ② اثبات غیرمستقیم ③ مثال نقض ④ استدلال استقرایی

۹۳. برای کدام یک از گزاره‌های زیر، نمی‌توان مثال نقض ارائه کرد؟ (مرتبط با صفحه‌های ۲۵ و ۲۶ کتاب درسی)

① نقطه‌ی همرسی عمودمنصف‌های اضلاع یک مثلث، داخل یا خارج مثلث قرار دارد.
② نقطه‌ی همرسی ارتفاع‌های یک مثلث، همواره داخل مثلث واقع است.
③ هر زاویه‌ی خارجی یک چند ضلعی، از هر زاویه‌ی داخلی آن بزرگ‌تر است.
④ نقطه‌ی همرسی نیمسازهای زاویه‌های داخلی یک مثلث، همواره داخل مثلث قرار دارد.

۹۴. مثال نقض حدس کلی زیر، کدام گزینه است؟ (مرتبط با صفحه‌های ۲۵ و ۲۶ کتاب درسی)
«چهارضلعی که دو ضلع آن برابر و دو ضلع دیگر آن موازی باشند، متوازی‌الاضلاع است.»

① مستطیل ② ذوزنقه‌ی قائم‌الزاویه ③ ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین ④ لوزی

۹۵. کدام گزینه تنها یک مثال نقض دارد؟ (مرتبط با صفحه‌های ۲۵ و ۲۶ کتاب درسی) (آزمون کانون – ۱۹ آذر ۹۵)

① محل همرسی ارتفاع‌های هر مثلث یا داخل آن است و یا خارج آن.
② چندضلعی که همه‌ی زوایای آن با هم برابر باشند، منتظم است.
③ هر دو مستطیل هم‌مساحت، هم‌نهشت می‌باشند.
④ حاصل‌ضرب هر عدد صحیح در $\sqrt{2}$ عددی گنگ است.

۹۶. کدام گزینه مثال نقض دارد؟ (مرتبط با صفحه‌های ۲۵ و ۲۶ کتاب درسی) (آزمون کانون – ۵ آذر ۹۵)

① مجذور هر عدد بین صفر و یک کوچک‌تر از خود عدد است.
② برای هر دو مجموعه‌ی $A$ و $B$ داریم $A \subseteq B$ یا $B \subseteq A$.
③ هر دو مثلث هم‌نهشت هم مساحت هستند.
④ در هر مثلث که همه‌ی زوایای آن کوچک‌تر از $90°$ باشد محل برخورد ارتفاع‌ها داخل مثلث است.

**۹۷.** کدام مورد مثال نقض دارد؟ (مرتبط با صفحه‌های ۲۵ و ۲۶ کتاب درسی) (آزمون کانون – ۵ آذر – ۹۵)

(۱) عمودمنصف‌های هر مثلث همرس‌اند.

(۲) چهارضلعی که قطرهایش منصف یکدیگر باشند، متوازی‌الاضلاع است.

(۳) در حالت کلی تعداد نقاط برخورد دو خط موازی با دایره، پنج حالت مختلف می‌تواند داشته باشد.

(۴) مربع چهارضلعی است که قطرهایش هم‌اندازه و عمود برهم باشند.

**۹۸.** نقیض چه تعداد از گزاره‌های زیر، درست نوشته شده است؟ (مرتبط با صفحه‌ی ۲۳ کتاب درسی) (آزمون کانون – ۵ آذر – ۹۵)

الف) گزاره: « $a$ بزرگ‌تر از $b$ است.» - نقیض گزاره: « $b$ بزرگ‌تر از $a$ است.»

ب) گزاره: «مربع هر عدد صحیح، بزرگ‌تر از صفر است.» - نقیض گزاره: «مربع هر عدد صحیح، کوچک‌تر یا مساوی صفر است.»

پ) گزاره: «محل همرسی عمودمنصف‌های هر مثلث، داخل یا خارج مثلث است.» - نقیض گزاره: «محل همرسی عمودمنصف‌های هر مثلث، روی محیط آن مثلث است.»

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

**۹۹.** نقیض گزاره‌ی «هیچ مثلثی بیش از یک زاویه‌ی قائمه ندارد.» کدام است؟

(مرتبط با صفحه‌ی ۲۳ کتاب درسی) (آزمون کانون – ۵ آذر – ۹۵)

(۱) هر مثلثی بیش از یک زاویه‌ی قائمه دارد.

(۲) هر مثلثی بیش از یک زاویه‌ی قائمه ندارد.

(۳) مثلثی وجود دارد که بیش از یک زاویه‌ی قائمه ندارد.

(۴) مثلثی وجود دارد که بیش از یک زاویه‌ی قائمه دارد.

**۱۰۰.** کدام گزینه در مورد مثال نقض صحیح نمی‌باشد؟ (مرتبط با صفحه‌های ۲۵ و ۲۶ کتاب درسی) (آزمون کانون – ۱۹ آذر – ۹۵)

(۱) اگر در مورد یک حکم کلی نتوانیم مثال نقض بیاوریم، نمی‌توانیم در مورد درستی آن نتیجه‌ای بگیریم.

(۲) به مثالی که نشان می‌دهد یک حکم کلی نادرست است، مثال نقض گفته می‌شود.

(۳) نتایج حاصل از این نوع استدلال به عنوان یک قضیه مطرح می‌شود.

(۴) احکامی وجود دارند که برای رد آن‌ها بیش از یک مثال نقض وجود دارد.

**۱۰۱.** نقیض کدام گزاره‌ی زیر یک قضیه‌ی شرطی درست است؟ (مرتبط با صفحه‌ی ۲۳ کتاب درسی) (آزمون کانون – ۱۹ آذر – ۹۵)

(۱) یک چهارضلعی محدب وجود دارد که مجموع زوایای داخلی‌اش برابر $360^\circ$ نیست.

(۲) مجموع زوایای داخلی هر مثلث $180^\circ$ است.

(۳) در هر مثلث متساوی‌الساقین ارتفاع‌های نظیر دو ساق برابرند.

(۴) از نقطه‌ی $A$ واقع بر خط $d$ نمی‌توان بیش از یک عمود بر آن خط رسم کرد.

**۱۰۲.** عکس کدام‌یک از قضیه‌های شرطی زیر، درست نیست؟ (مرتبط با صفحه‌ی ۲۵ کتاب درسی) (آزمون کانون – ۱۹ آذر – ۹۵)

(۱) اگر متوازی‌الاضلاع $ABCD$، لوزی باشد، آن‌گاه قطرهای آن برهم عمود هستند.

(۲) اگر مستطیل $ABCD$، مربع باشد، آن‌گاه طول قطرهای آن مساوی یکدیگرند.

(۳) اگر لوزی $ABCD$، مربع باشد، آن‌گاه اضلاع مجاور آن بر هم عمود هستند.

(۴) اگر ذوزنقه‌ی $ABCD$، متساوی‌الساقین باشد، آن‌گاه طول قطرهای آن مساوی یکدیگرند.

**۱۰۳.** عکس کدام قضیه‌ی شرطی زیر درست نیست؟ (مرتبط با صفحه‌ی ۲۵ کتاب درسی) (آزمون کانون – ۱۹ آذر – ۹۵)

(۱) در یک دایره اگر دو کمان برابر باشند، وترهای نظیر آن‌ها با هم برابرند.

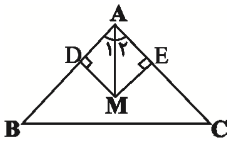
(۲) اگر دو زاویه مساوی باشند، مکمل‌های آن‌ها نیز با یکدیگر مساوی‌اند.

(۳) اگر یک چهارضلعی مستطیل باشد، قطرهای آن یکدیگر را نصف می‌کنند.

(۴) اگر در یک چهارضلعی اضلاع روبه‌رو دوبه‌دو مساوی باشند، آن چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

**۱۰. گزینه ۱**

مطابق شکل در دو مثلث AMD و AME داریم:



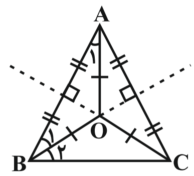

$$\left.\begin{array}{l} AM = AM \\ AD = AE \\ \hat D = \hat E = 90^\circ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{(وتر و یک ضلع قائمه)}} \overset{\Delta}{AMD} \cong \overset{\Delta}{AME}$$

$$\Rightarrow \hat A_1 = \hat A_2$$

بنابراین نقطه‌ی M روی نیمساز زاویه‌ی A قرار دارد.

**۱۱. گزینه ۱**

اگر از O به A وصل کنیم به علت آن‌که O روی عمودمنصف AB واقع است OA = OB و از آن‌جا که O روی عمودمنصف AC واقع است، OA = OC، پس OB = OC و مثلث‌های OAB، OAC و OBC متساوی‌الساقین هستند، داریم:



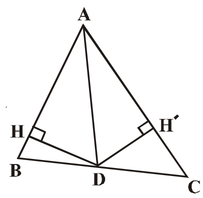

$$\overset{\Delta}{OAB}: \hat B_1 = \hat A_1 = \frac{\hat A}{2} = 40^\circ$$

$$\overset{\Delta}{ABC}: A\hat BC = \frac{180^\circ - B\hat AC}{2} = \frac{180^\circ - 80^\circ}{2} = 50^\circ$$

$$\Rightarrow \hat B_2 = A\hat BC - \hat B_1 = 50^\circ - 40^\circ = 10^\circ$$

**۱۲. گزینه ۲**

مجموع مساحت‌های دو مثلث ABD و ACD برابر مساحت مثلث ABC است. طول‌های ارتفاع این دو مثلث را DH و DH' فرض می‌کنیم که چون نقطه‌ی D روی نیمساز قرار دارد این دو فاصله با هم برابرند، پس:




$$DH = DH' = h$$

$$S(\overset{\Delta}{ABC}) = \frac{1}{2}AB \times DH + \frac{1}{2}AC \times DH'$$

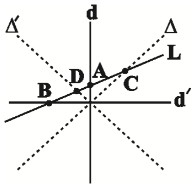
$$= \frac{1}{2} \times 4h + \frac{1}{2} \times 6h = 5h$$

طبق صورت سؤال مساحت مثلث ABC برابر ۱۰ است، پس:

$$10 = 5h \Rightarrow h = 2$$

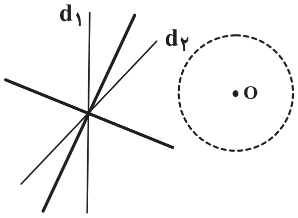
**۱۳. گزینه ۳**

مجموعه‌ی نقاطی از صفحه که از دو خط متقاطع d و d' به یک فاصله باشند، دو خط Δ و Δ' (نیمسازهای زوایای بین دو خط d و d') هستند که محل تلاقی آن‌ها با خط L یعنی نقاط C و D جواب مورد نظر می‌باشد. واضح است که اگر L موازی یکی از دو خط Δ و Δ' باشد، مسأله تنها یک جواب دارد. بنابراین مسأله حداکثر دو جواب دارد.



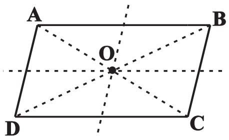

**۱۴. گزینه ۴**

نقاطی که از دو خط متقاطع $d_1$ و $d_2$ به یک فاصله‌اند، نیمسازهای زوایای بین آن‌ها می‌باشند که دو خط عمود بر هم‌اند و نقاطی که از نقطه‌ی O به فاصله‌ی ۵ سانتی‌مترانـد دایره‌ای به مرکز O و به شعاع ۵ اند. نقاط برخورد این دو خط عمود بر هم و دایره جواب است که حداکثر چهار نقطه است.




**۱۵. گزینه ۳**

نقاطی که از قطرهای متوازی‌الاضلاع به یک فاصله‌اند، همان نقاط روی نیمسازهای زوایای بین این دو خط‌اند که در چهار نقطه با اضلاع متوازی‌الاضلاع تلاقی دارند.

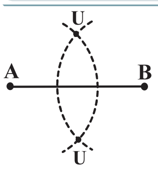



**۱۶. گزینه ۴**

چون اضلاع متوازی‌الاضلاع دوبه‌دو باهم موازی‌اند و عمودمنصف‌های وارد بر دو ضلع موازی نیز باهم موازی هستند، پس چهارضلعی تشکیل‌شده متوازی‌الاضلاع است.

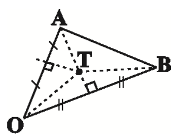
**۱۷. گزینه ۲**

با توجه به روش رسم عمودمنصف یک پاره‌خط، برای رسم آن احتیاج به رسم دو کمان داریم.




**۱۸. گزینه ۳**

اگر نقطه‌ای روی عمودمنصف یک پاره‌خط قرار داشته باشد، از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است.




نقطه‌ی T روی عمودمنصف OA قرار دارد، پس OT = TA

نقطه‌ی T روی عمودمنصف OB قرار دارد، پس OT = TB

در نتیجه TA = TB است.

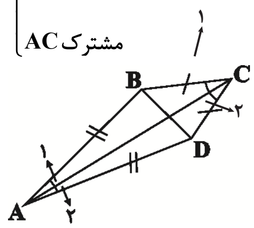
اگر نقطه‌ای از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله باشد، روی عمودمنصف آن پاره‌خط قرار دارد. در نتیجه نقطه‌ی T روی عمودمنصف پاره‌خط AB نیز قرار دارد.

**۱۹.** گزینه ۳

چون $OA = OC$ است، پس $O$ از دو سر پاره‌خط $AC$ به یک فاصله است. یعنی $O$ روی عمودمنصف $AC$ واقع است.

**۲۰.** گزینه ۳

$$\begin{cases} AB = AD \\ BC = CD \xrightarrow{(\text{ض ض ض})} \overset{\triangle}{ABC} \cong \overset{\triangle}{ADC} \\ AC \text{ مشترک} \end{cases}$$



$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \\ C_1 = C_2 \end{cases} \Rightarrow$$ $AC$ نیمساز زوایای $\hat{A}$ و $\hat{C}$

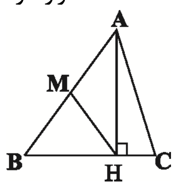
$\left.\begin{array}{l} AB = AD \Rightarrow BD \text{ روی عمودمنصف } A \\ CB = CD \Rightarrow BD \text{ روی عمودمنصف } C \end{array}\right\}$

$\Rightarrow BD$ عمودمنصف $AC$

بنابراین ۲ مورد صحیح است.

**۲۱.** گزینه ۱

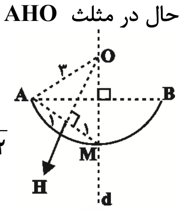
مثلث $ABH$ قائم‌الزاویه است و در نتیجه $MH$ ( $M$ وسط ضلع $AB$ است) نصف وتر است، یعنی $MH = BM$. بنابراین نقطه‌ی $M$ که از دو سر پاره‌خط $BH$ به یک فاصله است، همواره بر روی عمودمنصف $BH$ قرار دارد.



**۲۲.** گزینه ۳

مرکز دایره نقطه‌ای است که همه‌ی نقاط روی دایره از آن به یک فاصله هستند. مرکز دایره روی خط $d$ قرار دارد، چون $d$ عمودمنصف وتر $AB$ است، برای دقیق مشخص شدن مرکز دایره، عمودمنصف $AM$ را رسم کرده و با $d$ قطع می‌دهیم. این نقطه همان مرکز دایره است. چون $AO = MO = BO$

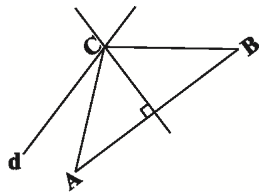
حال در مثلث $AHO$ داریم:



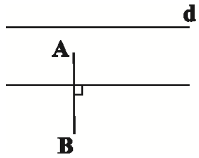
$$AO^2 = AH^2 + OH^2$$
$$\Rightarrow OH^2 = 3^2 - 1^2 = 8 \Rightarrow OH = 2\sqrt{2}$$

**۲۳.** گزینه ۲

برای رسم این مثلث کافی‌است عمودمنصف پاره‌خط $AB$ را رسم کرده و محل برخورد آن با خط $d$ را $C$ بنامیم. در این صورت مثلث $ABC$ جواب مسئله است. در صورتی که عمودمنصف $AB$ خط $d$ را در یک نقطه قطع کند مسئله یک جواب دارد.



و اگر عمودمنصف $AB$ با خط $d$ موازی باشد، مسئله جواب ندارد.



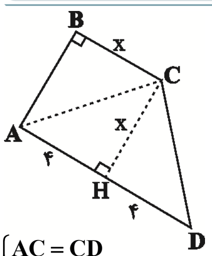
و چنانچه عمودمنصف $AB$ بر خط $d$ منطبق باشد، مسئله بی‌شمار جواب دارد.

**۲۴.** گزینه ۳

نقطه‌ی $C$ روی نیمساز زاویه‌ی $A$ قرار دارد. پس:

$$\begin{cases} BC = CH = x \\ AB = AH = 4 \end{cases}$$

نقطه‌ی $C$ روی عمودمنصف ضلع $AD$ قرار دارد. پس:



$$\begin{cases} AC = CD \\ AH = HD = 4 \end{cases}$$

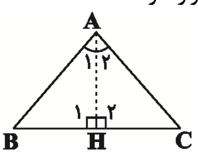
طبق شکل داریم:

$$S_{ABCD} = S_{\overset{\triangle}{ABC}} + S_{\overset{\triangle}{ACD}}$$
$$\frac{4x}{2} + \frac{8x}{2} = 18 \Rightarrow x = 3$$
$$\Rightarrow AC = CD = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

محیط چهارضلعی: $4 + 3 + 5 + 8 = 20$

**۲۵.** گزینه ۲

اگر نقطه‌ای به فاصله‌ی یکسان از دو ضلع یک زاویه باشد، آن نقطه روی نیمساز قرار دارد.



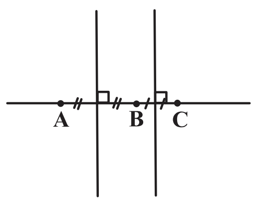
پس نقطه‌ی $H$ روی نیمساز زاویه‌ی $B\hat{A}C$ قرار دارد، پس $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$. داریم:

$$\begin{cases} \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \\ \hat{H}_1 = \hat{H}_2 \\ AH = AH \end{cases} \Rightarrow \overset{\triangle}{ABH} \cong \overset{\triangle}{ACH} \Rightarrow AB = AC$$

در نتیجه مثلث $ABC$ متساوی‌الساقین است.

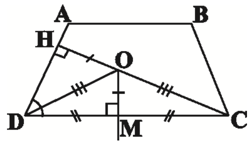
**۲۶.** گزینه ۱

نقطه‌ای که از سه نقطه‌ی $A$، $B$ و $C$ به یک فاصله است، محل برخورد عمودمنصف‌های پاره‌خط‌های $AB$ و $BC$ است که چون این دو موازی‌اند، چنین نقطه‌ای وجود ندارد.



**۲۷. گزینه ۳**

در ذوزنقه‌ی ABCD مطابق شکل، O نقطه‌ی برخورد عمودمنصف قاعده‌ی CD و نیمساز زاویه‌ی D است.

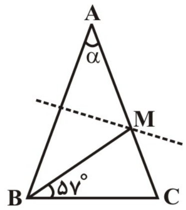



**۲۸. گزینه ۲**

اگر اندازه‌ی $\hat{A}$ را $\alpha$ فرض کنیم، داریم:

$$\hat{B}=\hat{C}=۹۰^\circ-\frac{\alpha}{۲}$$

$$MA=MB\Rightarrow A\hat{B}M=\hat{A}=\alpha$$

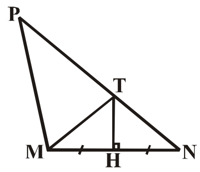



$$\hat{B}=M\hat{B}C+A\hat{B}M\Rightarrow ۹۰^\circ-\frac{\alpha}{۲}=۵۷^\circ+\alpha$$

$$\Rightarrow\frac{۳}{۲}\alpha=۳۳^\circ\Rightarrow\alpha=۲۲^\circ$$

**۲۹. گزینه ۳**

T روی عمودمنصف ضلع MN قرار دارد پس $MT=TN$ و در نتیجه $\widehat{TMN}=\widehat{PNM}$ که در این صورت داریم:



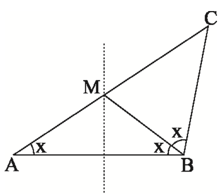

$$\begin{cases}\widehat{PTM}=\widehat{PNM}+\widehat{TMN}=۲\widehat{PNM} & \text{: زاویه‌ی خارجی}\\ \widehat{PMT}=\widehat{PMN}-\widehat{TMN}=۳\widehat{PNM}-\widehat{PNM}=۲\widehat{PNM}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\widehat{PTM}=\widehat{PMT}\Rightarrow PT=PM=۶$$

$$\Rightarrow MT=TN=PN-PT=۱۰-۶=۴$$

**۳۰. گزینه ۴**

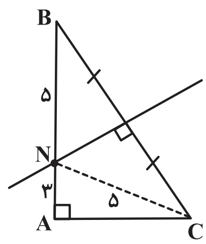
اگر $B\hat{A}C=x$ باشد، آن‌گاه $A\hat{B}C=۲x$ است. طبق شکل اگر نیمساز $A\hat{B}C$ را رسم کنیم تا AC را در نقطه‌ی M قطع کند، آن‌گاه همواره مثلث ABM متساوی‌الساقین خواهد بود.




پس $MA=MB$ و M روی عمودمنصف AB قرار دارد.

**۳۱. گزینه ۲**

هر نقطه‌ای که از B و C به یک فاصله است روی عمودمنصف BC قرار دارد پس نقطه‌ی موردنظر محل برخورد عمودمنصف ضلع BC با اضلاع مثلث است و بنابراین نقطه‌ی موردنظر همان نقطه N در شکل مقابل است. طبق قضیه‌ی فیثاغورس:

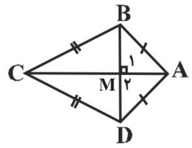



$$\overset{\Delta}{ACN}: AC=\sqrt{۲۵-۹}=۴$$

$$\overset{\Delta}{ABC}: BC=\sqrt{۸^۲+۴^۲}=۴\sqrt{۵}$$

**۳۲. گزینه ۴**

با توجه به مفروضات سؤال، دو مثلث ABC و ACD طبق حالت تساوی سه ضلع، هم‌نهشت هستند و بنابراین دو مثلث ABM و AMD طبق حالت تساوی دو ضلع و زاویه‌ی بین با هم هم‌نهشت هستند، پس:




$$\begin{cases}\hat{M}_۱=\hat{M}_۲\xrightarrow{\hat{M}_۱+\hat{M}_۲=۱۸۰^\circ}\hat{M}_۱=\hat{M}_۲=۹۰^\circ\\ BM=MD\end{cases}$$

یعنی قطر AC عمود منصف قطر BD است، بنابراین، بی‌شمار نقطه روی خط AC وجود دارند که از B و D به یک فاصله‌اند.

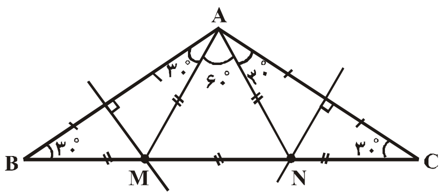
**۳۳. گزینه ۳**

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ,\hat{A}=۴\hat{B},\hat{B}=\hat{C}$$

$$\Rightarrow\hat{A}=۱۲۰^\circ,\hat{B}=\hat{C}=۳۰^\circ$$

عمودمنصف یک پاره‌خط، مجموعه نقاطی از صفحه است که از دو سر پاره‌خط به یک فاصله است. پس:

$$\begin{cases}AM=BM\Rightarrow\widehat{MAB}=\hat{B}=۳۰^\circ\\ AN=CN\Rightarrow\widehat{NAC}=\hat{C}=۳۰^\circ\end{cases}\Rightarrow\widehat{MAN}=۶۰^\circ$$




به راحتی (بنا به تقارن شکل) می‌توان نشان داد که $BM=AM=AN=NC=MN$. (بررسی کنید.) پس:

$$BM=MN=NC=\frac{BC}{۳}=۸$$

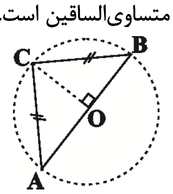
$$\Rightarrow BN=BM+MN=۱۶$$

**۳۴. گزینه ۴**

چون نقطه‌ی C روی عمودمنصف AB قرار دارد، پس $BC=AC$ است. از طرفی داریم:

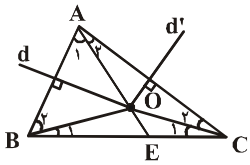
$$\overset{\Delta}{BOC}:\begin{cases}OB=OC=R\\ \hat{O}=۹۰^\circ\end{cases}\Rightarrow B\hat{C}O=\hat{B}=۴۵^\circ$$

به همین ترتیب، $\hat{A}=۴۵^\circ$ بنابراین $\hat{C}=۹۰^\circ$ است. پس $\overset{\Delta}{ABC}$ قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین است.



**۳۵.** گزینه «۴»

هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است، پس:




$$d \text{ عمودمنصف ضلع } AB \Rightarrow OA = OB \Rightarrow \hat{A}_۱ = \hat{B}_۲$$

$$d' \text{ عمودمنصف ضلع } AC \Rightarrow OA = OC \Rightarrow \hat{A}_۲ = \hat{C}_۲$$

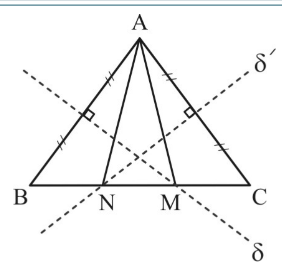
اگر مطابق شکل، امتداد پاره‌خط $OA$، ضلع $BC$ را در نقطهٔ $E$ قطع کند، آنگاه:

$$B\hat{O}C = B\hat{O}E + C\hat{O}E = (\hat{A}_۱ + \hat{B}_۲) + (\hat{A}_۲ + \hat{C}_۲)$$

$$\Rightarrow B\hat{O}C = ۲\hat{A}_۱ + ۲\hat{A}_۲ = ۲(\hat{A}_۱ + \hat{A}_۲) = ۲\hat{A}$$

توجه کنید که چون $\hat{A}$ حاده است، نقطهٔ $O$ درون مثلث می‌افتد.
اما اگر $\hat{A}$ منفرجه باشد، آنگاه نقطهٔ $O$ خارج مثلث قرار دارد که در آن صورت داریم: $B\hat{O}C = ۳۶۰^\circ - ۲\hat{A}$

**۳۶.** گزینه «۲»




$$\hat{A} = ۸۰^\circ \;,\; AB = AC \Rightarrow \hat{B} = \hat{C} = \frac{۱۸۰ - \hat{A}}{۲} = ۵۰^\circ$$

هر نقطه واقع بر عمود منصف یک پاره‌خط، از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است، پس:

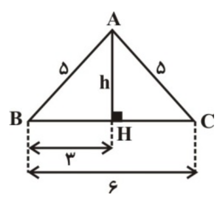
$$\begin{cases} M \in \delta \Rightarrow MA = MB \\ \Rightarrow B\hat{A}M = \hat{B} = ۵۰^\circ \Rightarrow A\hat{M}B = ۸۰^\circ \\ N \in \delta' \Rightarrow NA = NC \\ \Rightarrow C\hat{A}N = \hat{C} = ۵۰^\circ \Rightarrow A\hat{N}C = ۸۰^\circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow M\hat{A}N = ۱۸۰^\circ - (A\hat{M}B + A\hat{N}C) = ۲۰^\circ$$

بنابراین، کوچکترین زاویهٔ مثلث $AMN$ زاویهٔ $M\hat{A}N = ۲۰^\circ$ است.

**۳۷.** گزینه «۱»

مثلث $ABC$ به صورت مقابل است، با توجه به شکل:

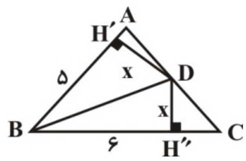



$$h^۲ = ۵^۲ - ۳^۲ \Rightarrow h^۲ = ۱۶ \Rightarrow h = ۴$$

پس مساحت مثلث $ABC$ برابر است با:

$$S = \frac{h \times BC}{۲} = \frac{۴ \times ۶}{۲} = ۱۲ \quad (*)$$

حال نیمساز زاویهٔ $B$ را رسم می‌کنیم. این نیمساز، ضلع $AC$ را در نقطهٔ $D$ قطع می‌کند. می‌دانیم فاصلهٔ هر نقطه روی نیمساز یک زاویه، از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است. پس $DH'' = DH' = x$. مساحت مثلث $ABC$ را به طریق دیگری محاسبه می‌کنیم:




$$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = S_{\overset{\Delta}{ABD}} + S_{\overset{\Delta}{BDC}}$$

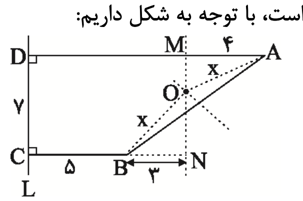
$$\xrightarrow{(*)} ۱۲ = \frac{x \times ۵}{۲} + \frac{x \times ۶}{۲}$$

$$\Rightarrow ۱۲ = \frac{۱۱x}{۲}$$

$$\Rightarrow x = \frac{۲۴}{۱۱} = ۲۴(\frac{۱}{۱۱})$$

**۳۸.** گزینه «۳»

چون $O$ از $A$ و $B$ به یک فاصله است، پس روی عمودمنصف $AB$ قرار دارد و چون $O$ از خط $L$ به فاصلهٔ ۸ می‌باشد، پس روی خطی موازی با $L$ قرار دارد. برخورد این دو خط همان نقطهٔ $O$ است، با توجه به شکل داریم:



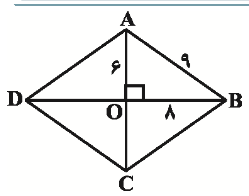

$$\begin{rcases} \Delta AMO : x^۲ = ۱۶ + OM^۲ \\ \Delta BNO : x^۲ = ۹ + ON^۲ = ۹ + (۷ - OM)^۲ \end{rcases}$$

$$\xrightarrow{\text{تفاضل}} OM^۲ - (۷ - OM)^۲ + ۷ = ۰$$

$$\Rightarrow ۱۴OM - ۴۲ = ۰$$

$$\Rightarrow OM = ۳ \Rightarrow OA = OB = x = ۵$$

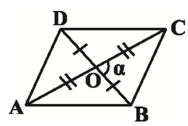
**۳۹.** گزینه «۱»




می‌دانیم در لوزی قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند. پس با توجه به اطلاعات داده شده و شکل مقابل طول ضلع‌های مثلث $OAB$ برابر ۸، ۶ و ۹ است.

از طرفی در لوزی قطرها بر هم عمودند. پس این مثلث قائم‌الزاویه است. پس ضلع‌های این مثلث باید در قضیه فیثاغورس صدق کنند که اعداد ۶، ۸ و ۹ صدق نمی‌کنند. $(۹^۲ \neq ۶^۲ + ۸^۲)$ درنتیجه چنین لوزی‌ای وجود ندارد.

**۴۰.** گزینه «۱»

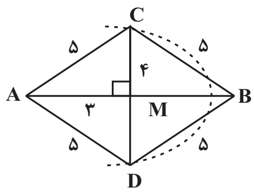



فرض می‌کنیم $ABCD$ متوازی‌الاضلاع موردنظر باشد، مثلث $BOC$ با معلوم بودن دو ضلع $OC = \frac{AC}{۲}$ و $OB = \frac{BD}{۲}$ و زاویهٔ بین آن‌ها $(\alpha)$ قابل رسم است.

مثلث $BOC$ را رسم کرده، $OB$ و $OC$ را از نقطهٔ $O$ به‌اندازهٔ خودشان امتداد می‌دهیم تا نقاط $D$ و $A$ به‌دست

می‌آیند و ABCD متوازی‌الاضلاع خواسته شده است و مسئله همواره یک جواب دارد.

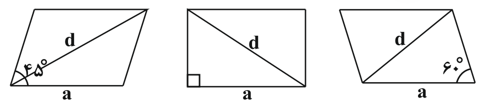
**۴۱. گزینه ۴**




مطابق شکل، چون C و D روی عمودمنصف AB می‌باشند، پس $AD=BD=۵$ و $AC=BC=۵$ می‌باشد.

به کمک قضیهٔ فیثاغورس در مثلث‌های قائم‌الزاویه، مقدار $MC=MD=۴$ می‌باشد. چون قطرها عمودمنصف یکدیگرند، پس یک لوزی به اقطار ۶ و ۸ و ضلع ۵ داریم.

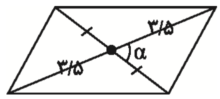
**۴۲. گزینه ۴**



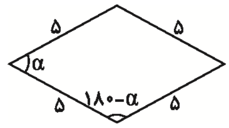

**۴۳. گزینه ۲**

به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

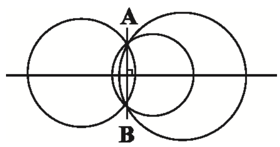
گزینهٔ «۱»: چون زاویهٔ بین دو قطر معلوم نیست، بنابراین چهار مثلث به‌وجود آمده توسط قطرها، به‌صورت منحصربه‌فرد قابل رسم نیستند و لذا بی‌شمار متوازی‌الاضلاع قابل رسم است.




گزینهٔ «۳»: چون زاویهٔ بین اضلاع مشخص نیستند، بنابراین واضح است که با تغییر α بی‌شمار لوزی قابل رسم است.




گزینهٔ «۴»: می‌دانیم مرکز دایره‌ای که AB وتر آن است روی عمودمنصف AB قرار دارد. چون هر نقطه روی عمودمنصف AB می‌تواند حکم مرکز را داشته باشد، بنابراین مطابق شکل بی‌شمار دایره از AB می‌گذرد.




گزینهٔ «۲» مطابق فعالیت صفحهٔ ۱۵ کتاب درسی هر مربع با داشتن قطر آن به‌صورت منحصربه‌فرد قابل رسم است.

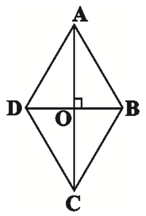
**۴۴. گزینه ۲**

اگر AC قطر بزرگ لوزی باشد، آن‌گاه $AC \ge BD$ و به‌طور مشابه $OA \ge OB$. در مثلث OAB داریم:

$$OA^{۲} \ge OB^{۲} \Rightarrow ۲OA^{۲} \ge OA^{۲}+OB^{۲} \Rightarrow ۲OA^{۲} \ge AB^{۲}$$

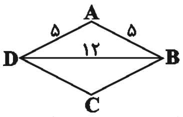
$$\xrightarrow{AB=۱۰} ۲OA^{۲} \ge ۱۰۰ \Rightarrow OA^{۲} \ge ۵۰ \Rightarrow OA \ge ۵\sqrt{۲}$$

بنابراین حداقل طول قطر بزرگ لوزی (AB) برابر $۲\times ۵\sqrt{۲}=۱۰\sqrt{۲}$ است.




**۴۵. گزینه ۴**

مستطیل گزینهٔ «۱» بنابر تمرین ۲ صفحهٔ ۱۶ قابل رسم است. متوازی‌الاضلاع گزینهٔ «۲» را می‌توان طبق آنچه در تمرین ۴ صفحهٔ ۱۶ آموخته‌اید رسم کرد. برای رسم مستطیل گزینهٔ «۳»، دو خط با زاویهٔ $۶۰^\circ$ رسم می‌کنیم. دایره‌های به شعاع $۵=\frac{۱۰}{۲}$ رسم می‌کنیم. محل تلاقی دایره با دو خط رئوس مستطیل مورد نظر را مشخص می‌کند. لوزی با معلومات گزینهٔ «۴» را نمی‌توان رسم کرد، زیرا:

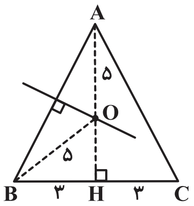



$$\overset{\Delta}{ABD}: ۵+۵<۱۲$$

یادآوری: در هر مثلث، مجموع هر دو ضلع از ضلع سوم بزرگ‌تر است.

**۴۶. گزینه ۲**

نقطه‌ای که از سه رأس مثلث به یک فاصله است محل همرسی عمودمنصف‌های اضلاع مثلث است. مطابق شکل داریم:

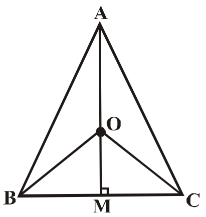



$$\overset{\Delta}{BOH}: OH=\sqrt{BO^{۲}-BH^{۲}}$$

$$\Rightarrow OH=۴ \Rightarrow AH=۹$$

$$S(\overset{\Delta}{ABC})=\frac{۹\times ۶}{۲}=۲۷$$

**۴۷. گزینه ۴**




مطابق شکل نقطهٔ M وسط قاعده BC و نقطهٔ O محل همرسی عمودمنصف‌های اضلاع مثلث است. در مثلث قائم‌الزاویه OBM داریم:

$$OM=۳ \,,\, BM=\frac{BC}{۲}=۴ \Rightarrow OB=\sqrt{۹+۱۶}=۵$$

از آنجا که نقطهٔ O (محل همرسی عمودمنصف‌های اضلاع) از سه رأس مثلث به یک فاصله است، پس $OA=OB=OC=۵$.

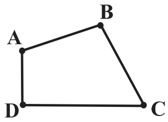
در مثلث قائم‌الزاویه ABM داریم:

$$AM=OA+OM=۵+۳=۸ \,,\, MB=۴$$

$$\Rightarrow AB=\sqrt{AM^{۲}+MB^{۲}}=\sqrt{۶۴+۱۶}=\sqrt{۸۰}=۴\sqrt{۵}$$

**۴۸. گزینه ۴**

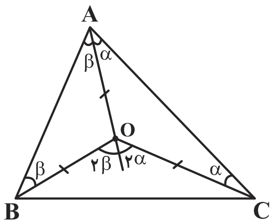
نقطه‌ای که از چهار نقطه‌ی $A$، $B$، $C$ و $D$ به یک فاصله است، محل تقاطع عمودمنصف‌های اضلاع چهارضلعی $ABCD$ است. بنابراین اگر عمودمنصف‌های اضلاع این چهارضلعی همرس باشند، یک نقطه وجود دارد که از این چهار نقطه به یک فاصله است و در غیر این صورت چنین نقطه‌ای وجود ندارد.




**۴۹. گزینه ۴**

نقطه‌ی همرسی عمودمنصف‌های اضلاع مثلث از سه رأس مثلث، به یک فاصله است $(OA = OB = OC)$.

مطابق شکل اگر $O$ داخل مثلث واقع باشد، بنا به قضیه‌ی زاویه‌ی خارجی داریم:




$$B\hat{O}C = ۲\alpha + ۲\beta = ۲(\alpha + \beta) = ۲\hat{A}$$

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{A} + ۶۰^\circ + ۵۰^\circ = ۱۸۰^\circ$$

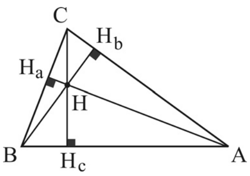
$$\Rightarrow \hat{A} = ۷۰^\circ$$

در نتیجه:

$$B\hat{O}C = ۲\hat{A} = ۱۴۰^\circ$$

**۵۰. گزینه ۳**

در چهارضلعی $BH_aHH_c$، داریم:




$$\hat{B} + \hat{H}_a + H_a\hat{H}H_c + \hat{H}_c = ۳۶۰^\circ$$

$$\Rightarrow ۶۰^\circ + ۹۰^\circ + H_a\hat{H}H_c + ۹۰^\circ = ۳۶۰^\circ$$

$$\Rightarrow H_a\hat{H}H_c = ۱۲۰^\circ$$

و چون این زاویه با زاویه‌ی $AHC$ متقابل به رأس است، پس $A\hat{H}C = ۱۲۰^\circ$.

در چهارضلعی $AH_bHH_c$، داریم:

$$\hat{A} + \hat{H}_b + H_b\hat{H}H_c + \hat{H}_c = ۳۶۰^\circ \Rightarrow$$

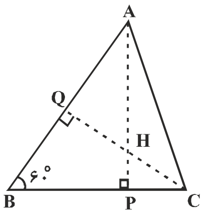
$$۴۰^\circ + ۹۰^\circ + H_b\hat{H}H_c + ۹۰^\circ = ۳۶۰^\circ \Rightarrow H_b\hat{H}H_c = ۱۴۰^\circ$$

و چون این زاویه با زاویه‌ی $B\hat{H}C$ متقابل به رأس است، پس $B\hat{H}C = ۱۴۰^\circ$.

$$\Rightarrow \frac{A\hat{H}C}{B\hat{H}C} = \frac{۱۲۰^\circ}{۱۴۰^\circ} = \frac{۶}{۷}$$

**۵۱. گزینه ۲**

دو ارتفاع $AP$ و $CQ$ را رسم می‌کنیم تا همدیگر را در نقطه‌ی $H$ قطع کنند، در چهارضلعی $BPHQ$ مجموع زاویه‌های داخلی $۳۶۰^\circ$ است، پس:



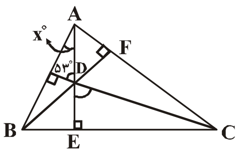

$$۶۰^\circ + ۹۰^\circ + ۹۰^\circ + P\hat{H}Q = ۳۶۰^\circ \Rightarrow P\hat{H}Q = ۱۲۰^\circ$$

و از آن‌جا که $C\hat{H}A$ با $P\hat{H}Q$ متقابل به رأس است، داریم:

$$C\hat{H}A = P\hat{H}Q = ۱۲۰^\circ$$

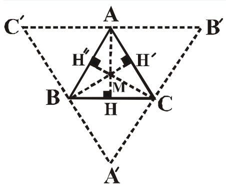
**۵۲. گزینه ۱**

چون $D$ نقطه‌ی همرسی ارتفاع‌های مثلث $ABC$ است، پس امتداد $CD$ ضلع $AB$ را با زاویه‌ی قائمه قطع می‌کند.




$$x = ۹۰^\circ - ۵۳^\circ = ۳۷^\circ$$

**۵۳. گزینه ۴**




$\begin{cases} AH \perp BC \\ BC \parallel B'C' \end{cases}$: اثبات عمودبودن $AH$ برای $B'C'$

$$\Rightarrow AH \perp B'C'$$

$C: \begin{cases} BC \parallel B'C' \\ AB \parallel A'B' \end{cases}$ اثبات منصف‌بودن $AH$

$\Rightarrow$ متوازی‌الاضلاع است $AB'CB$ $\Rightarrow AB' = BC \quad (۱)$

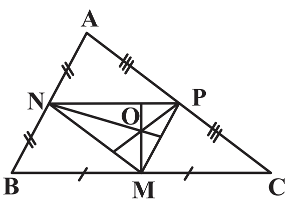
به‌طور مشابه، $ACBC'$ نیز متوازی‌الاضلاع است، پس:

$AC' = BC \quad (۲)$

پس از (۱) و (۲) داریم: $AB' = AC'$، یعنی $AH$ عمودمنصف ضلع $B'C'$ است و به همین ترتیب $BH'$ و $CH''$ نیز عمودمنصف‌های اضلاع $A'C'$ و $A'B'$ از مثلث $A'B'C'$ هستند. بنابراین نقطه‌ی تلاقی ارتفاع‌های مثلث $ABC$، نقطه‌ی تلاقی عمودمنصف‌های مثلث $A'B'C'$ است.

**۵۴. گزینه ۴**

اضلاع مثلث $MNP$ با اضلاع مثلث $ABC$ موازی است $(MN \parallel AC, PM \parallel AB, NP \parallel BC)$ پس عمودمنصف‌های اضلاع $\overset{\Delta}{ABC}$ بر اضلاع $\overset{\Delta}{MNP}$ عمودند پس $O$ نقطه‌ی همرسی ارتفاع‌های مثلث $MNP$ است و این یعنی $O$ از سه رأس مثلث $ABC$ به یک فاصله است (طبق خاصیت نقطه‌ی همرسی عمودمنصف‌ها در هر مثلث)

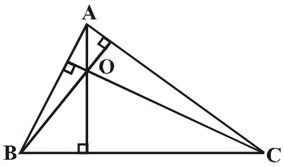


**۵۵.** گزینه ۳

اگر در مثلثی یک زاویه منفرجه باشد، ارتفاع‌های آن در خارج مثلث همرس هستند.

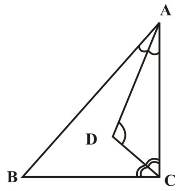
**۵۶.** گزینه ۱

در شکل زیر روشن است که امتدادهای سه ارتفاع مثلث BOC از نقطه‌ی A می‌گذرد. پس نقطه‌ی A محل برخورد ارتفاع‌های مثلث BOC است.




**۵۷.** گزینه ۲

طبق فرض، $\frac{\hat{C}}{۳}=\frac{\hat{B}}{۲}=\frac{\hat{A}}{۱}$ و در نتیجه $\hat{B}=۲\hat{A}$ و $\hat{C}=۳\hat{A}$.



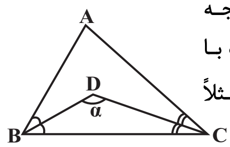

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{A}+۲\hat{A}+۳\hat{A}=۱۸۰^\circ$$

$$\Rightarrow ۶\hat{A}=۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{A}=۳۰^\circ \Rightarrow \hat{B}=۲\hat{A}=۶۰^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{C}=۳\hat{A}=۹۰^\circ$$

حال به سراغ محاسبه‌ی زاویه‌ی ADC می‌رویم، داریم:

یادآوری: در هر مثلث، زاویه‌ی منفرجه بین هر دو نیمساز داخلی، برابر است با $۹۰^\circ$ به‌علاوه‌ی نصف زاویه‌ی سوم، مثلاً در شکل مقابل داریم:




$$\alpha=۹۰^\circ+\frac{\hat{A}}{۲}$$

$$A\hat{D}C=۹۰^\circ+\frac{\hat{B}}{۲}=۹۰^\circ+\frac{۶۰^\circ}{۲}=۹۰^\circ+۳۰^\circ=۱۲۰^\circ$$

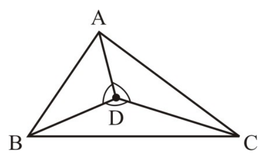
**۵۸.** گزینه ۲

طبق فرض، زاویه‌های مثلث ABC، به نسبت ۲، ۳ و ۷ هستند پس می‌توانیم در نظر بگیریم $\hat{A}=۷k$ ، $\hat{B}=۳k$ و $\hat{C}=۲k$، از آن‌جا که مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث $۱۸۰^\circ$ است، داریم:

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ \Rightarrow ۷k+۳k+۲k=۱۸۰^\circ$$

$$\Rightarrow ۱۲k=۱۸۰^\circ \Rightarrow k=۱۵^\circ \Rightarrow \begin{cases} \hat{A}=۱۰۵^\circ \\ \hat{B}=۴۵^\circ \\ \hat{C}=۳۰^\circ \end{cases}$$

از آن‌جا که AD، BD و CD نیمسازهای زاویه‌های مثلث هستند، همان‌طور که از تست قبل می‌دانیم، می‌توانیم بنویسیم:

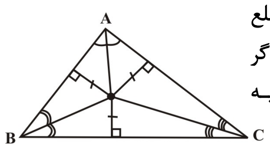



$$\begin{cases} A\hat{D}B=۹۰^\circ+\frac{\hat{C}}{۲} \\ A\hat{D}C=۹۰^\circ+\frac{\hat{B}}{۲} \\ B\hat{D}C=۹۰^\circ+\frac{\hat{A}}{۲} \end{cases}$$

$$\Rightarrow A\hat{D}B+A\hat{D}C-B\hat{D}C=۹۰^\circ+(\frac{\hat{C}+\hat{B}-\hat{A}}{۲})$$

$$=۹۰^\circ+(\frac{۳۰^\circ+۴۵^\circ-۱۰۵^\circ}{۲})=۹۰^\circ-۱۵^\circ=۷۵^\circ$$

**۵۹.** گزینه ۴

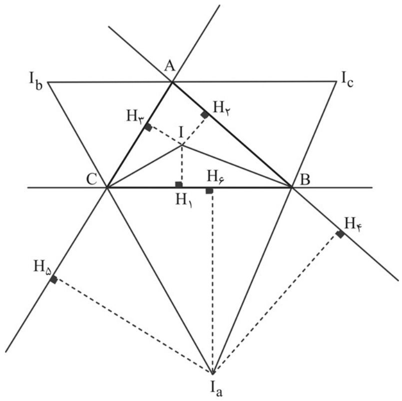



می‌دانیم که، یک نقطه از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله است، اگر و تنها اگر روی نیمساز آن زاویه واقع باشد.

پس اگر نقطه‌ای از سه ضلع یک مثلث به یک فاصله باشد، باید بر روی نیمسازهای زاویه‌های مثلث واقع باشد، یعنی باید نقطه‌ی مشترکی بین سه نیمساز مثلث باشد. تنها نقطه‌ای که این ویژگی را دارد محل تلاقی سه نیمساز یک مثلث است.

**۶۰.** گزینه ۴

مطابق شکل زیر، مثلث ABC را در نظر گرفته و نیمسازهای زاویه‌های داخلی B و C و نیمسازهای زاویه‌های خارجی A، B و C را رسم می‌کنیم، از آنجا که هر نقطه واقع بر نیمساز یک زاویه، از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است، بنابراین:




نقطه‌ی I روی نیمساز داخلی زاویه‌ی B قرار دارد، پس:

$IH_۱=IH_۲$

نقطه‌ی I روی نیمساز داخلی زاویه‌ی C قرار دارد، پس:

$IH_۱=IH_۳$

در نتیجه $IH_۱=IH_۲=IH_۳$، یعنی نقطه‌ی I از سه ضلع AB، BC و AC به یک فاصله است.

نقطه‌ی $I_a$ روی نیمساز زاویه‌ی خارجی B قرار دارد، پس:

$I_aH_۴=I_aH_۶$

نقطه‌ی $I_a$ روی نیمساز زاویه‌ی خارجی C قرار دارد، پس:

$I_aH_۵=I_aH_۶$

در نتیجه $I_aH_۴=I_aH_۵=I_aH_۶$، یعنی نقطه‌ی $I_a$ از ضلع BC و امتداد ضلع‌های AB و AC به یک فاصله است.

با نظیر استدلال اخیر، می‌توان ثابت کرد که:

– نقطه‌ی $I_b$ از ضلع AC و امتداد ضلع‌های AB و BC به یک فاصله است.

– نقطه‌ی $I_c$ از ضلع AB و امتداد ضلع‌های AC و BC به یک فاصله است.