ریاضی دهم
یکتا
(تجربی و ریاضی)

از مجموعه مرشد

- درس‌نامه کامل و نکته‌های کلیدی
- پرسش‌های چهارگزینه‌ای (تألیفی و کنکور)
- پاسخ‌نامه تشریحی پرسش‌ها
- برای داوطلبان رشته‌های برتر دانشگاه‌های بنام

سعید بیاتی

پیشگفتار

به نام خداوند جان و خرد
کزین برتر اندیشه برنگذرد

دانش‌آموزان گرامی

ورود شما را به دورۀ دوم متوسطه تبریک می‌گوییم. این دوره شما را برای زندگی و کار در جامعه و تحصیل در دوره‌های بالاتر آماده می‌کند. اگر بگوییم آیندۀ شغلی شما بستگی به موفقیت تحصیلی شما در این دورۀ سه‌ساله دارد، اغراق نکرده‌ایم. شما برای موفقیت در این دوره باید تلاش کنید و از مشاوران و معلمان و کتاب‌های مناسب برخوردار شوید.

ما در انتشارات مبتکران، بسیار خرسندیم که کتاب‌های ریاضی «**یکتا**» را در اختیار شما قرار می‌دهیم. این کتاب‌ها که از مجموعه کتاب‌های «**مرشد**» به حساب می‌آیند، موفقیت تحصیلی شما را تضمین می‌کنند. این مجموعه، برای دانش‌آموزانی بـه رشـتۀ تحریـر درآمده است که مایلند در بهترین رشته‌های پزشکی یا علوم پایۀ دانشگاه‌های بنام کشور یا خارج از ایران تحصیل کنند. بدیهی است با توجه به یکسان بودن کتاب ریاضی در پایۀ دهم، دانش‌آموزان رشتۀ ریاضی- فیزیک هم می‌توانند از این مجموعـه اسـتفاده کننـد. کتاب «**ریاضی دهم یکتا**» شما را برای شرکت در مسابقات، امتحانات و آزمون‌های ورودی دانشگاه‌ها آماده می‌کند.

مؤلفان مجموعۀ یکتا، پس از ارائۀ درسنامۀ جامع، بانک سؤال کاملی را در اختیار شما قرار می‌دهنـد کـه شـامل پرسـش‌هـای چهارگزینه‌ای تالیفی و کنکور گروه‌های آزمایشی تجربی و ریاضی از سال ۱۳۸۰ به بعد است. این پرسش‌ها براسـاس فصـل‌هـا و بخش‌های کتاب درسی طبقه‌بندی شده‌اند. مطالعۀ پاسخ‌نامۀ تشریحی همراه با نکتـه‌هـای کلیـدی و آموزنـده، موفقیـت شـما را تسهیل خواهد کرد.

در پایان، وظیفۀ خود می‌دانیم از مؤلف محترم این کتاب، آقای سعید بیاتی و دبیر محترم مجموعه، که کتاب زیر نظر ایشان تألیف شده است و آقای مسعود شیروانی که بنا به گزارش مولف در ویرایش کتاب با ایشان همکاری داشته‌اند، تشکر کنیم.

همچنین از خانم‌ها سکینه مظاهری و فرشته کلاهی که زحمت حروفچینی و سـمیه بهرامـی کـه زحمـت صـفحه‌آرایـی و خانم‌ها معصومه لطفی‌مقدم و بهاره خدامی (گرافیست) که زحمـت ترسـیم شـکل‌هـا و کارهـای گرافیکـی کتـاب را برعهـده داشته‌اند، بسیار ممنونیم و برای همۀ این عزیزان آرزوی موفقیت می‌کنیم.

انتشارات مبتکران

فهرست

فصل چهارم

فصل پنجم

فصل ششم

فصل هفتم

فصل اول

مجموعه، الگو و دنباله

بخش ۱ مجموعه‌های اعداد

درس‌نامه

مجموعه

هر دسته از اشیاء مشخص و دو به دو مجزا تشکیل یک مجموعه می‌دهند. این تعریف شهودی از مجموعه، اولین بار توسط ژرژ کانتور در سال ۱۸۹۵ ارائه شد.

به عنوان مثال اعداد طبیعی فرد و یا اعداد اول تشکیل مجموعه‌هایی می‌دهند.

توجه داشته باشید هیچ‌گاه دسته‌ای از اشیای نامشخص تشکیل مجموعه نمی‌دهند. مانند پنج عدد طبیعی فرد و یا هشت نویسندهٔ معروف جهان، که نمی‌توانند مجموعه‌ای تشکیل دهند.

در زیر مجموعه‌هایی از اعداد که بیش‌تر با آن‌ها سروکار داریم آمده است:

مجموعه اعداد طبیعی : $\mathbb{N}=\{۱,۲,۳,۴,...\}$

مجموعه اعداد حسابی : $W=\{۰,۱,۲,۳,۴,...\}$

مجموعه اعداد صحیح : $\mathbb{Z}=\{...,-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲,۳,...\}$

مجموعه اعداد گویا : $\mathbb{Q}=\{\frac{m}{n}|m,n\in\mathbb{Z}\ ,\ n\neq ۰\}$

مجموعه اعداد گنگ : $\mathbb{Q}'=$ مجموعه اعدادی که نتوان آن‌ها را به صورت نسبت دو عدد صحیح نوشت

مجموعه اعداد حقیقی : $\mathbb{R}=Q\cup\mathbb{Q}'$

تذکر **اگر مجموعه A دارای k عضو باشد، تعداد اعضای A را با $n(A)=k$ نشان می‌دهیم.**

مجموعه تهی: مجموعه‌ای است که دارای هیچ عضوی نباشد. مجموعهٔ تهی را با $\varnothing$ و یا $\{\ \}$ نمایش می‌دهند. توجه داشته باشید: $n(\varnothing)=۰$

زیرمجموعه: مجموعه **A** را زیرمجموعهٔ **B** گوییم اگر و تنها اگر تمام اعضای مجموعه **A** در مجموعهٔ **B** نیز باشد.

به بیان دیگر: $A\subset B\Leftrightarrow(\forall x\ ;\ x\in A\Rightarrow x\in B)$

تذکر **برای مجموعه‌های اعداد که در بالا بیان کردیم رابطهٔ $\mathbb{N}\subseteq W\subseteq\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}$ برقرار است و نیز $\mathbb{Q}'\subseteq\mathbb{R}$ می باشد.**

خواص زیرمجموعه: (الف) هر مجموعه زیر مجموعهٔ خودش می‌باشد.

(ب) تهی زیرمجموعهٔ هر مجموعه‌ای است.

(ج) اگر $A\subseteq B$ و $B\subseteq A$ آن‌گاه: $A=B$

تساوی دومجموعه: دو مجموعه **A** و **B** را مساوی هم گوییم، اگر و تنها اگر **A** زیرمجموعه **B** و **B** نیز زیرمجموعهٔ **A** باشد.

چندنکته **زیرمجموعه‌های یک مجموعه:**

۱ تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ n عضوی برابر است با: ۲^n

۲ زیرمجموعه‌های تهی و خود مجموعه را زیرمجموعه‌های بدیهی مجموعه می‌گویند همه‌ی زیرمجموعه‌های یک مجموعه به جز خودش را زیرمجموعه‌های سره یا محض مجموعه می‌گویند. پس تعداد زیرمجموعه‌های سره یک مجموعهٔ n عضوی برابر است با: $۲^n - ۱$

۳ تعداد زیرمجموعه‌های k عضوی از یک مجموعهٔ n عضوی برابر است با:

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

۴ مجموعهٔ تمام زیرمجموعه‌های یک مجموعه مانند A را مجموعهٔ توانی A می‌گویند و با P(A) نمایش می‌دهند.

مثلاً اگر $A=\{a,b,c\}$ آن‌گاه مجموعه‌های توانی A عبارت است از:

$$P(A)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$$

❊ توجه داشته باشید اگر مجموعهٔ A دارای k عضو باشد در این‌صورت: $n(P(A)) = ۲^k$

سؤال **آیا مجموعه توانی مجموعهٔ تهی، تهی است؟ چرا؟**

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

مجموعه‌ای که تعداد اعضای آن یک عدد حسابی باشد را مجموعهٔ متناهی (با پایان) می‌نامیم.

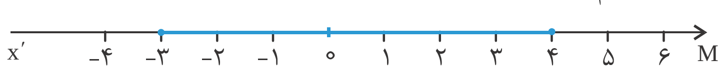
مانند مجموعهٔ اعداد اول کوچک‌تر از ۲۰ که یک مجموعهٔ متناهی است چون همان‌طور که می‌بینیم تعداد عضوهای این مجموعه برابر ۸ است: $A=\{۲,۳,۵,۷,۱۱,۱۳,۱۷,۱۹\}$

و اگر تعداد اعضای یک مجموعه را نتوان با یک عدد حسابی بیان کرد آن مجموعه را نامتناهی (بی‌پایان) می‌نامیم مانند مجموعه اعداد طبیعی و یا مجموعه اعداد اول

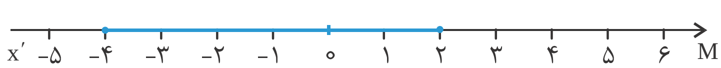
نمایش بازه‌ها روی محور اعداد حقیقی

با توجه به تناظر یک به یک بین اعداد حقیقی ($\mathbb{R}$) و نقاط یک محور می‌توانیم بازه‌ها را به‌وسیلهٔ یک پاره‌خط و یا یک نیم‌خط باز یا بسته از محور نشان دهیم همانند مثال‌های زیر:

۱ $[-۳,۴]=\{x \mid x\in\mathbb{R} \,,\, -۳ \leq x \leq ۴\}$



۲ $[-۴,۲]=\{x \mid x\in\mathbb{R} \,,\, -۴ \leq x \leq ۲\}$



بازه (فاصله)

بازه یا فاصله مجموعه‌ای است از اعداد حقیقی که بر سه نوع است:

۱) بازۀ باز ۲) بازۀ بسته ۳) بازۀ نیم‌باز و یا نیم‌بسته

① بازه باز **a** و **b** : $(a,b)=\{x|x\in\mathbb{R}\ ,\ a<x<b\}$

② بازه بسته **a** و **b**: $[a,b]=\{x|x\in\mathbb{R}\ ,\ a\le x\le b\}$

③ بازۀ نیم‌باز و یا نیم‌بسته: $(a,b]=\{x|x\in\mathbb{R}\ ,\ a<x\le b\}$

$[a,b)=\{x|x\in\mathbb{R}\ ,\ a\le x<b\}$

با توجه به تعریف $+\infty$ و $-\infty$ می‌توانیم بازه‌ها را به صورت زیر تعمیم دهیم:

(الف) بازه می‌نیمم باز a , $+\infty$: $[a,+\infty)=\{x|x\in\mathbb{R}\ ,\ x\ge a\}$

(ب) بازۀ باز a , $+\infty$: $(a,+\infty)=\{x|x\in\mathbb{R}\ ,\ x>a\}$

(ج) بازه می‌نیمم باز $-\infty$, a: $(-\infty,a]=\{x|x\in\mathbb{R}\ ,\ x\le a\}$

(د) بازۀ باز $-\infty$, a: $(-\infty,a)=\{x|x\in\mathbb{R}\ ,\ x<a\}$

اجتماع و اشتراک بین بازه‌ها

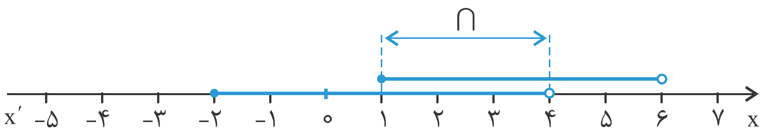
اگر **A** و **B** دو بازه باشند آن‌گاه اجتماع دو بازه که به صورت $A\cup B$ نوشته و نیز اشتراک دو بازه را که به صورت $A\cap B$ می‌نویسیم مطابق زیر تعریف می‌کنیم:

اگر $x\in A\cup B\Leftrightarrow x\in A$ یا $x\in B$ یا $x\in A,B$

اگر $x\in A\cap B\Leftrightarrow x\in A\ ,\ x\in B$

به عنوان مثال داریم:

$[-۲,۴)\cap[۱,۶)=[۱,۴)$



دو مجموعه جدا از هم

دو مجموعۀ غیرتهی را که هیچ عضو مشترکی نداشته باشند جدا از هم گویند.

اگر **A** و **B** جدا از هم باشند به صورت $A\cap B=\varnothing$ می‌نویسیم.

مجموعۀ مرجع

در هر مبحث مجموعه‌ای که همه مجموعه‌های مورد بحث، زیرمجموعۀ آن باشند را مجموعه مرجع می‌نامیم و آن را با U نشان می‌دهیم.

توجه **هرگاه U مجموعۀ مرجع باشد و $A\subseteq U$ آن‌گاه مجموعه $U-A$ را متمم A می‌نامیم و با نماد A' نشان می‌دهیم. به عبارت دیگر A' شامل عضوهایی از U می‌باشد که در A نیستند.**

چند نکته مهم

① متممِ، متمم هرمجموعه مساوی خود مجموعه است یعنی: $(A')' = A$

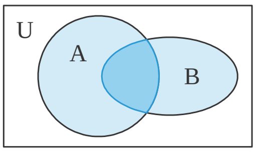
② متمم مجموعهٔ مرجع برابر تهی است یعنی: $U' = \varnothing$

③ متمم مجموعهٔ تهی برابر مجموعهٔ مرجع است یعنی: $\varnothing' = U$

④ اگر دو مجموعه مساوی باشند متمم‌های آن‌ها نیز مساوی‌اند یعنی: $A = B \Leftrightarrow A' = B'$

اجتماع دو مجموعه

منظور از اجتماع دو مجموعه **A** و **B** که با $A \cup B$ نشان داده می‌شود مجموعه‌ای است که اعضای آن متعلق به **A** و یا متعلق به **B** باشد.



ناحیه هاشورخورده $= A \cup B$

توجه همان‌طور که می‌بینیم $A \subseteq A \cup B$ و نیز $B \subseteq A \cup B$

چند نکته مهم

① اجتماع هر مجموعه با خودش مساوی خودش می‌باشد. $A \cup A = A$

② اجتماع هر مجموعه با مجموعهٔ تهی مساوی خود مجموعه است. $A \cup \varnothing = A$

③ اجتماع هر مجموعه با متممش برابر مجموعه مرجع است. $A \cup A' = U$

④ اجتماع هر مجموعه با مجموعه مرجع، برابر مجموعهٔ مرجع است. $A \cup U = U$

⑤ اگر $A \subset B$ آن‌گاه $A \cup B = B$

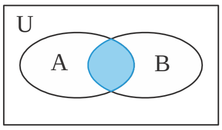
⑥ اگر $A \cup B = B$ آن‌گاه $A \subset B$

⑦ (خاصیت جابه‌جایی) $A \cup B = B \cup A$

⑧ (خاصیت شرکت‌پذیری) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

اشتراک دومجموعه

منظور از اشتراک دومجموعه **A** و **B** که به صورت $A \cap B$ نشان داده می‌شود مجموعه‌ای است که اعضای آن هم متعلق به **A** باشد و هم متعلق به **B**.



ناحیه هاشورخورده $= A \cap B$

توجه همان‌طور که در شکل بالا می‌بینیم $A \cap B \subseteq B$ و $A \cap B \subseteq A$

چند نکته مهم

① اشتراک هر مجموعه با خودش برابر خود مجموعه است. $A \cap A = A$

② اشتراک هر مجموعه با مجموعهٔ تهی برابر مجموعه $\varnothing$ است. $A \cap \varnothing = \varnothing$

③ اشتراک هر مجموعه با مجموعهٔ مرجع مساوی خود مجموعه است. $A \cap U = A$

④ اشتراک هر مجموعه با متممش برابر تهی است. $A \cap A' = \varnothing$

⑤ اگر $A \subset B$ آن‌گاه $A \cap B = A$

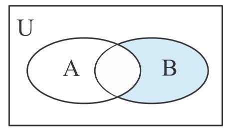
⑥ اگر $A \cap B = A$ آن‌گاه $A \subset B$

⑦ (خاصیت جابه‌جایی) $A \cap B = B \cap A$

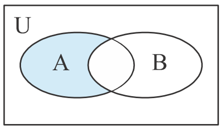
⑧ (خاصیت شرکت‌پذیری) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

تفاضل دو مجموعه

تفاضل دومجموعهٔ **A** و **B** که به صورت $A-B$ نشان می‌دهیم مجموعه‌ای است که اعضای آن متعلق به **A** باشد و متعلق به **B** نباشد.



ناحیه هاشورخورده $= \mathbf{B-A}$



ناحیه هاشورخورده $= \mathbf{A-B}$

توجه **همان‌طور که می‌بینیم:** $\mathbf{B-A\subseteq B}$ و $\mathbf{A-B\subseteq A}$

چندنکته‌مهم

۱ $\mathbf{A-B=A\cap B'}$

۲ $\mathbf{A-A=\varnothing}$

۳ $\mathbf{A-\varnothing=A\cap\varnothing'=A\cap U=A}$

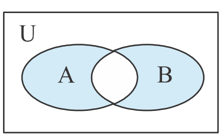
۴ $\mathbf{U-A=A'}$

۵ اگر $\mathbf{A-B=B-A\Rightarrow A=B}$

تفاضل متقارن دو مجموعه

تفاضل متقارن دو مجموعه که به صورت $A\Delta B$ نشان می‌دهیم به صورت روبه‌رو تعریف می‌شود: $A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)$

ناحیه هاشورخورده $= \mathbf{A\Delta B}$



چندنکته‌مهم

۱ $\mathbf{A\Delta B=B\Delta A}$

۲ $\mathbf{A\Delta B=(A\cup B)-(A\cap B)}$

۳ $\mathbf{A\Delta(B\Delta C)=(A\Delta B)\Delta C}$

قوانین مشترک اجتماع و اشتراک

۱ $\mathbf{A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)}$ (خاصیت‌پخشی اشتراک نسبت به اجتماع)

۲ $\mathbf{A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)}$ (خاصیت‌پخشی اجتماع نسبت به اشتراک)

۳ قوانین جذب $\begin{cases}\mathbf{A\cap(A\cup B)=A}\\ \mathbf{A\cup(A\cap B)=A}\end{cases}$

۴ قوانین دمرگان $\begin{cases}\mathbf{(A\cap B)'=A'\cup B'}\\ \mathbf{(A\cup B)'=A'\cap B'}\end{cases}$

توجه **قوانین بالا را می‌توانیم به کمک جبر مجموعه‌ها (قوانین اجتماع و اشتراک) اثبات کنیم.**

تناظر یک به یک بین دو مجموعه A و B

می‌گوییم بین دومجموعهٔ **A** و **B** یک تناظر یک به یک وجود دارد اگر تنها اگر به ازای هر عضو از مجموعهٔ **A** یک و تنها یک عضو در مجموعه **B** وجود داشته باشد. به عنوان مثال بین مجموعه اعداد طبیعی و مجموعه اعداد فرد طبیعی یک تناظر یک به یک برقرار است.

$$\begin{array}{l} \mathbb{N}=\{۱,۲,۳,۴,۵,...\} \\ \quad\ \updownarrow\ \updownarrow\ \updownarrow\ \updownarrow\ \updownarrow \\ O=\{۱,۳,۵,۷,۹,...\} \end{array}$$

دومجموعهٔ معادل یا هم‌ارز

دو مجموعهٔ **A** و **B** را معادل و یا هم‌ارز گوییم اگر و تنها اگر بتوان بین آن‌ها یک تناظر یک به یک برقرار کرد و می‌نویسیم $A \cong B$

به عنوان مثال مجموعهٔ حروف الفبای فارسی با مجموعه‌هایی که دارای ۳۲ عضو باشند معادل است.

توجه **طبق تعریف فوق، تمامی مجموعه‌هایی که دارای تعداد اعضای مساوی هستند، معادل یا هم‌ارزند.**

عدد اصلی مجموعه (کاردینالیته) Cardinal

تعداد اعضای یک مجموعهٔ متناهی مانند **A** را عدد اصلی آن مجموعه می‌گوییم و با $n(A)$ نشان می‌دهیم.

توجه **عدد اصلی مجموعه‌های نامتناهی تعریف نشده است.**

نکته‌مهم **از فرمول‌های زیر در حل مسائل مربوط به تعیین عدد اصلی اجتماع دو مجموعه و یا ... استفاده می‌شود:**

۱) تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه (عدد اصلی اجتماع دو مجموعه) برابر است با:

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

توجه اگر $A\cap B=\varnothing$ (دو مجموعه جدا از هم باشند چون $n(A\cap B)=۰$ پس داریم:

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)$$

۲) تعداد عضوهای اجتماع سه مجموعه (عدد اصلی اجتماع سه مجموعه) برابر است با:

$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C)$$

توجه **اگر سه مجموعه دو به دو جدا از هم باشند داریم:**

$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)$$

۳) اگر دو مجموعهٔ A و B را داشتیم آن‌گاه تعداد عضوهای «فقط A» برابر است با:

$$n(\text{فقط } A)=n(A)-n(A\cap B)$$

۴) اگر سه مجموعهٔ A و B و C را داشتیم آن‌گاه تعداد عضوهای «فقط A» برابر است با:

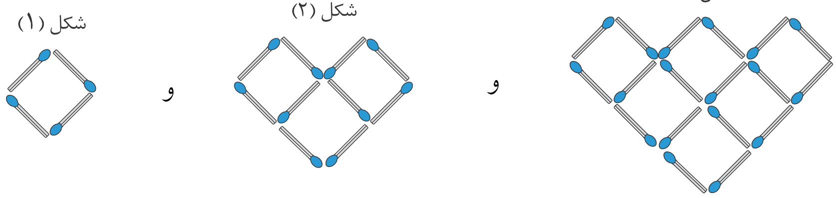
$$n(\text{فقط } A)=n(A)-n(A\cap B)-n(A\cap C)+n(A\cap B\cap C)$$

بخش ۲ الگو و دنباله

الگو

الگو یک ساختار منظم از اشکال، تصاویر، صداها، نمادها، وقایع و یا اعداد می‌باشد که ممکن است تکرار شونده یا رشد کننده و یا ترکیبی از این دو باشند.

به عنوان مثال اگر مطابق الگوی زیر با تعدادی چوب کبریت اشکالی بسازیم با توجه به تعداد چوب کبریت‌ها در چند شکل اول می‌توانیم ساختار جملات الگو را مشخص کنیم و در واقع جملهٔ عمومی الگو را به‌دست آوریم:



شکل (۱) و شکل (۲) و شکل (۳) و ...

همان‌طور که می‌بینیم در شکل اول ۴ چوب کبریت در شکل دوم ۱۰ چوب کبریت و در شکل سوم ۱۸ چوب کبریت و ... وجود دارد. با کمی دقت می‌توان نتیجه گرفت که در هر مرحله تعدادی زوج چوب کبریت به چوب‌های قبلی اضافی شده است در این‌جا اگر a_n بیانگر تعداد چوب کبریت‌های شکل **n**اُم باشد آن‌گاه جملهٔ عمومی الگوی فوق به صورت $a_n = n^۲ + ۳n$ است.

توجه داشته باشید به کمک ضابطهٔ a_n می‌توان هر جملهٔ الگو را به‌دست آورد.

مثلاً در این الگو اگر بخواهیم ببینیم در شکل ۱۵اُم چند چوب کبریت وجود دارد کافی است در فرمول جملهٔ عمومی الگو به جای **n** عدد ۱۵ قرار دهیم به صورت زیر:

$$a_{۱۵} = (۱۵)^۲ + ۳(۱۵) = ۲۲۵ + ۴۵ = ۲۷۰$$

الگوی خطی

الگوهایی که جملهٔ عمومی آن‌ها به صورت $t_n = an + b$ می‌باشد را الگوهای خطی می‌نامیم که در آن **a** و **b** اعداد حقیقی دلخواه و ثابت هستند.

مثالی که در بالا بیان شد در واقع یک الگوی غیرخطی است چون جملهٔ عمومی آن از درجه دوم بود.

دنباله

هر تعدادی از اعداد که پشت سرهم قرار می‌گیرند را یک دنباله از اعداد می‌نامند. به هر عدد که در یک دنباله قرار دارد، یک جمله آن دنباله می‌گویند. مانند دنباله $۱,۴,۹,۱۶,...,n^۲,...$ که جملهٔ اول آن عدد ۱ و جمله دوم آن عدد ۴ و... و جملهٔ **n**اُم آن عدد $n^۲$ است.

تذکر

① جملهٔ n ام دنباله را که $(n \in \mathbb{N})$، جملهٔ عمومی دنباله می‌گوییم.

② ممکن است بعضی از دنباله‌ها فاقد جملهٔ عمومی باشند.

③ اگر تعداد جملات دنباله محدود باشد آن دنباله را متناهی می‌گوییم در غیر این‌صورت دنباله را نامتناهی می‌گویند.

④ برای تعیین جملهٔ k اُم یک دنباله کافی است در فرمول جملهٔ عمومی آن به جای n عدد k قرار دهیم.

دنباله حسابی

تعریف: دنباله‌ای که هر جملهٔ آن (غیر از جملهٔ اول) با اضافه شدن عددی ثابت به جملهٔ قبل از خودش به‌دست می‌آید را دنباله حسابی می‌نامند و به این عدد ثابت قدر نسبت دنباله می‌گویند.

جملات دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول a_1 و قدر نسبت d عبارت است از: $a_1\ ,\ a_1+d\ ,\ a_1+2d\ , \dots,\ a_1+(n-1)d\ , \dots$

تذکر جملهٔ n ام (جملهٔ عمومی) دنباله حسابی به صورت $t_n = a_1+(n-1)d$ می‌باشد.

چندنکته

① در دنباله حسابی از تفاضل هر دو جملهٔ متوالی قدر نسبت به‌دست می‌آید یعنی: $d = t_n - t_{n-1}$

② اگر t_n و t_m جملات n ام و m ام یک دنباله حسابی باشند آن‌گاه قدر نسبت دنباله برابر است با:

$$d = \frac{t_m - t_n}{m-n}$$

③ اگر a جملهٔ اول و b جملهٔ آخر یک دنباله حسابی با قدر نسبت d باشد آن‌گاه تعداد جملات این تصاعد از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$n = \frac{b-a}{d}+1$$

مثال چند عدد سه رقمی مضرب ۷ وجود دارد؟

پاسخ اعداد سه رقمی مضرب ۷ تشکیل یک دنباله حسابی با قدر نسبت ۷ می‌دهند به صورت زیر:

$$\underset{\overset{\uparrow}{a}}{105}\ ,\ 112\ ,\ 119\ ,\ \dots\ ,\ \underset{\overset{\uparrow}{b}}{994} \quad \Rightarrow n = \frac{994-105}{7} = 127$$

واسطه حسابی

اعداد c,b,a سه جملهٔ متوالی از یک دنباله حسابی می‌باشند هرگاه داشته باشیم: $b = \frac{a+c}{2}$

در این‌صورت b را واسطهٔ حسابی بین دو عدد a و c می‌گوییم.

نکته در دنباله حسابی اگر $c\ ,\ b\ ,\ a$ سه جمله با فاصلهٔ یکسان باشند می‌توان گفت که: $b = \frac{a+c}{2}$

به بیان دیگر اگر جملهٔ k ام برابر b و جملهٔ $(k-p)$ ام برابر a و جملهٔ $(k+p)$ ام برابر c باشد آن‌گاه داریم:

$$t_k = \frac{t_{k-p}+t_{k+p}}{2}$$

قانون اندیس‌ها در دنباله حسابی

در دنباله حسابی مجموع جملات متساوی‌الفاصله از طرفین برابر است و اگر تعداد جملات فرد باشد مجموع هر دو جملهٔ متساوی‌الفاصله از طرفین دو برابر جملهٔ وسط است. به بیان دیگر:

اگر $m+n=p+q \Rightarrow a_m+a_n=a_p+a_q$

درج واسطهٔ حسابی

اگر بین دو عدد مفروض **a** و **b** تعداد **m** عدد (واسطه) چنان قرار دهیم که دنباله حسابی با $m+2$ جمله تشکیل دهند آن‌گاه قدر نسبت این دنباله از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید.

$$d=\frac{b-a}{m+1}$$

مثال **بین دو عدد ۳ و ۱۹ چند واسطهٔ حسابی با قدر نسبت ۲ می‌توان درج کرد؟**

پاسخ

$$2=\frac{19-3}{m+1} \Rightarrow 2m+2=16 \Rightarrow 2m=14 \Rightarrow m=7$$

مجموع جمله‌های دنباله حسابی

اگر t_1 جملهٔ اول و **d** قدر نسبت یک دنباله حسابی باشد آن‌گاه مجموع **n** جملهٔ اول این دنباله که با S_n نشان می‌دهیم از روابط زیر به‌دست می‌آید.

$$S_n=\frac{n}{2}(t_1+t_n) \xrightarrow{t_n=t_1+(n-1)d} S_n=\frac{n}{2}(2t_1+(n-1)d)$$

چندنکته

① ضریب n^2 در فرمول S_n برابر $\frac{d}{2}$ است.

② اگر S_n مجموع **n** جملهٔ اول دنباله حسابی باشد آن‌گاه $t_n=S_n-S_{n-1}$

③ در یک دنباله حسابی داریم:

$$\underset{\text{جمله اول}}{\overset{\uparrow}{t_1}}+\underset{\text{جمله آخر}}{\overset{\uparrow}{t_n}}=\frac{\text{مجموع m جملهٔ آخر}+\text{مجموع m جملهٔ اول}}{m}$$

دنباله هندسی

تعریف: دنباله‌ای که هر جملهٔ آن (غیر از جملهٔ اول) با ضرب یک عدد ثابت در جملهٔ قبل از خودش به‌دست می‌آید را دنباله هندسی می‌نامند و به این عدد ثابت قدر نسبت دنباله می‌گویند.

جملات دنباله هندسی با جملهٔ اول t_1 و قدر نسبت **q** عبارت است از: $t_1, t_1q, t_1q^2, \dots, t_1q^{n-1}, \dots$

تذکر **جمله n ام (جمله عمومی) دنباله هندسی به صورت $t_1=t_1q^{n-1}$ می‌باشد.**

چندنکته

① در دنباله هندسی از تقسیم هر دو جملهٔ متوالی قدر نسبت به‌دست می‌آید یعنی: $q=\frac{t_{n+1}}{t_n}$

② دنباله‌های ثابت مانند دنباله ...,۲,۲,۲ دنباله‌ای هندسی با قدر نسبت ۱ هستند.

③ اگر جملات یک دنباله هندسی را در عددی ضرب کنیم دنباله حاصل نیز یک دنباله هندسی است.

④ اگر جملات یک دنباله هندسی را به توان ۲ برسانیم، دنباله حاصل نیز یک دنباله هندسی است.

واسطهٔ هندسی

اعداد c,b,a سه جملهٔ متوالی از یک دنباله هندسی می‌باشند هرگاه داشته باشیم: $b^2=ac$

در این‌صورت **b** را واسطهٔ هندسی بین دو عدد **a** و **c** می‌گویند.

نکته در دنباله هندسی اگر **c ,b ,a** سه جمله با فاصله یکسان باشند آن‌گاه داریم: $b^2=ac$

به بیان دیگر اگر جملهٔ **k** ام برابر **a** و جمله $(k+n)$ ام برابر **b** و جمله $(k+2n)$ ام برابر **c** باشد آن‌گاه:

$$t_{k+n}^2=t_k \cdot t_{k+2n}$$

درج واسطهٔ هندسی

دو عدد **a , b** مفروض‌اند اگر **m** واسطهٔ هندسی بین این دو عدد درج کنیم به یک دنباله هندسی بـا $m+2$ جملـه مـی‌رسـیم کـه در این‌صورت قدر نسبت دنباله برابر است با: $q=\sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}$

توجه داشته باشید اگر **m** فرد باشد آن‌گاه: $q=\pm\sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}$

قانون اندیس‌ها در دنباله هندسی

در دنباله هندسی حاصل‌ضرب جملات متساوی‌الفاصله از طرفین با هم برابرند و اگر تعداد جملات فرد باشد، حاصـل‌ضـرب هـر دو جملهٔ متساوی‌الفاصله از طرفین برابر مربع جملهٔ وسط است و در این حالت حاصل‌ضرب تمام جملات برابر است با:

(جمله وسط)^n

مثلاً در دنباله هندسی با جملات $a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , a_5$ داریم: $a_1\times a_5=a_2\times a_4=(a_3)^2$

به بیان دیگر: اگر $m+n=p+q \Rightarrow a_m \cdot a_n=a_p \cdot a_q$

نکته‌مهم اگر جملات a_m , a_n , a_p از یک دنباله حسابی، سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ هندسی باشند آن‌گاه قدر نسبت دنباله هندسی برابر است با: $q=\frac{p-n}{n-m}$

مثال در یک دنبالهٔ حسابی جملات اول و پنجم و یازدهم به ترتیب سه جملهٔ متوالی از یک دنبالهٔ هندسی صعودی‌اند، قدر نسبت این دنباله کدام است؟

۱) $\frac{۶}{۵}$ ۲) $\frac{۵}{۴}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{۳}{۲}$

پاسخ گزینهٔ «۱»

با توجه به نکتهٔ فوق داریم:

$$q=\frac{۱۱-۵}{۵-۱}=\frac{۳}{۲}$$

مجموع جملات دنباله هندسی

در دنباله هندسی با جملهٔ اول $a_۱$ و قدر نسبت q، مجموع n جملهٔ اول از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$S_n=\frac{a_۱(۱-q^n)}{۱-q}\ ;\ q\neq ۱$$

نکته اگر S_n مجموع n جملهٔ اول دنباله هندسی باشد آن‌گاه:

$$t_n=S_n-S_{n-۱}$$

حد مجموع جملات دنباله هندسی نزولی

همان‌طور که دیدیم برای محاسبهٔ مجموع n جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی از فرمول $S_n=\frac{(۱-q^n)}{۱-q}$ استفاده می‌کنیم. اگر $|q|<۱$ $(-۱<q<۱)$ آن‌گاه با بزرگ‌تر شدن n مقدار $|q^n|$ کوچک‌تر می‌شود به عبارت دیگر هرگاه n بی‌نهایت بزرگ‌تر شود مقدار $|q^n|$ بی‌نهایت کوچک می‌شود و به صفر میل می‌کند که در این صورت حد مجموع جملات دنباله هندسی برابر $\frac{t_۱}{۱-q}$ می‌شود.

مثال مجموع تمام جملات دنبالهٔ $۲,-۱,\frac{۱}{۲},-\frac{۱}{۴},...$ کدام است؟

پاسخ همان‌طور که می‌بینید این دنباله، یک دنباله هندسی با جمله اول ۲ و قدر نسبت $-\frac{۱}{۲}$ است پس حد مجموع جملات برابر است با:

$$S_\infty=\frac{۲}{۱-(-\frac{۱}{۲})}=\frac{۴}{۳}$$

مثال عدد گویای بسط اعشاری $a=۰/۶۶۶...$ را به شکل $\frac{p}{q}$ که q , p دو عدد طبیعی نسبت به هم اول‌اند می‌نویسیم $p+q$ کدام است؟

پاسخ بسط اعشاری را می‌توانیم به صورت روبه‌رو بنویسیم: $a=۰/۶۶۶...=۰/۶+۰/۰۶+۰/۰۰۶+...$

همان‌طور که می‌بینیم این بسط در واقع حد مجموع جملات یک دنباله هندسی با جملات اول ۰/۶ قدر نسبت $\frac{۱}{۱۰}$ است پس مجموع همه جملات برابر است با:

$$a=\frac{۰/۶}{۱-۰/۱}=\frac{۶}{۹}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow \frac{p}{q}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow p+q=۵$$

فصل ۱ مجموعه ، الگو و دنباله

سوالات چهارگزینه‌ای

۱. فرض کنید $\mathbb{R},\mathbb{Z},\mathbb{N}$ به ترتیب مجموعهٔ اعداد طبیعی، صحیح و حقیقی باشند کدام رابطه درست است؟

۱) $\mathbb{Z}\cap\mathbb{N}=\mathbb{Z}$ ۲) $\mathbb{Z}\cup\mathbb{N}=\mathbb{N}$ ۳) $\mathbb{Z}\cup\mathbb{N}=\mathbb{R}$ ۴) $\mathbb{Z}\cap\mathbb{N}=\mathbb{N}$

۲. کدام گزینه نادرست است؟

۱) $(\mathbb{Q}\cap\mathbb{Z})\cap\mathbb{N}=\mathbb{N}$ ۲) $(\mathbb{R}\cup\mathbb{Z})\cap\mathbb{N}=\mathbb{N}$ ۳) $(\mathbb{N}\cup\mathbb{Z})\cap\mathbb{R}=\mathbb{Z}$ ۴) $(\mathbb{Q}\cap\mathbb{Z})\cup\mathbb{N}=\mathbb{Q}$

۳. مجموعه‌های اعداد صحیح و حسابی، طبیعی، طبیعی فرد و طبیعی زوج را به ترتیب از راست به چپ با $\mathbb{Z}$ و W و $\mathbb{N}$ و E و O نمایش می‌دهیم حاصل کدام گزینه برابر با مجموعه تهی است؟

۱) $\mathbb{Z}-\mathbb{N}$ ۲) $O-E$ ۳) $W-\mathbb{Z}$ ۴) $\mathbb{N}-O$

۴. اگر $A=\{x|x\in\mathbb{R},-1<x\le 2\}$ و $B=\{x|x\in\mathbb{R},x>1\}$ و $C=\{x|x\in\mathbb{R},x<3\}$ باشد آن‌گاه مجموعهٔ $(A\cup B)\cap C$ با کدام بازه برابر است؟

۱) $(-1,1)$ ۲) $(-1,2]$ ۳) $(-1,3)$ ۴) $(1,3)$

۵. ساده شدهٔ عبارت $((1,+\infty)\cup(-\infty,0))\cap((-2,+\infty)\cap(-\infty,3))$ کدام است؟

۱) $[-2,3]\cup(0,1]$ ۲) $(-2,0)\cup[1,3)$ ۳) $(-2,0)\cup(1,3)$ ۴) $[-2,3]$

۶. اگر مجموع مقادیر می‌نیمم و ماکزیمم مجموعه $(\alpha-1,\alpha]\cup[-\frac{2}{3},\beta)$ برابر $\frac{7}{3}$ باشد، حاصل‌ضرب مقادیر ماکزیمم و می‌نیمم کدام است؟

۱) -2 ۲) $-\frac{3}{2}$ ۳) -1 ۴) صفر

۷. اگر $A=[-2,5)$ و $B=\{x\in\mathbb{R}|(-x)\in A\}$ آن‌گاه مجموعهٔ $A-B$ کدام بازه است؟

۱) $(2,5)$ ۲) $(-5,-2)$ ۳) $(-2,2)$ ۴) $(-5,5)$

۸. اگر $A=[-3,1]$ و $A\cup B=[-5,4]$ باشد، کوچک‌ترین مجموعهٔ B دارای چند عضو صحیح است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۹. چند بازه مانند $(\frac{2n+1}{n+5},\frac{2n+3}{n+1})$ وجود دارد که شامل عدد ۱ باشد؟ $(n\in\mathbb{N})$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۰. اگر $A_n=(-\frac{2}{n},\frac{n-2}{n})$ به صورت بازه باشد، مجموعهٔ $(A_3\cup A_6)-A_3$ برابر کدام بازه است؟ (کنکور سراسری)

۱) $(-\frac{1}{3},\frac{2}{3})$ ۲) $[-\frac{1}{3},\frac{2}{3})$ ۳) $(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$ ۴) $[\frac{1}{3},\frac{2}{3})$

۱۱. اگر n عدد طبیعی و A_n بازهٔ $((-1)^n.n,2n)$ باشد، چند عدد صحیح به $\bigcap_{n=1}^{4}A_n$ تعلق دارد؟ (کنکور سراسری)

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

۱۲. اگر $n\in\mathbb{N}$ و $A_n=(-\frac{1}{n},\frac{1}{n})$ در این‌صورت $A_1\cap A_2\cap A_3\cap\dots$ کدام است؟ (کنکور سراسری)

۱) $\varnothing$ ۲) $(-1,1)$ ۳) $\{0\}$ ۴) $(-1,1)-\{0\}$

۱۳. اگر $A_n=[\frac{1}{n},\frac{2}{n}], n\in\mathbb{N}$ در این‌صورت $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ برابر کدام بازه است؟ *(کنکور سراسری)*

۱) $(0,1)$ ۲) $(0,1]$ ۳) $(0,2)$ ۴) $(0,2]$

۱۴. چندتا از مجموعه‌های زیرمتناهی است؟ *(کنکور سراسری)*

الف) مجموعه انسان‌های روی زمین
ب) مجموعه درخت‌های جنگل‌های آمازون
ج) مجموعه سلول‌های عصبی مغز یک انسان بزرگسال
د) مجموعه اعداد طبیعی زوج

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۵. کدام مجموعه زیر متناهی است؟ *(کنکور سراسری)*

۱) $\mathbb{Z}-\mathbb{N}$ ۲) $\mathbb{R}-\mathbb{N}$ ۳) $W-\mathbb{N}$ ۴) $\mathbb{Q}-\mathbb{Z}$

۱۶. کدام‌یک از مجموعه‌های زیر متناهی است؟ *(کنکور سراسری)*

۱) $A=\{x\mid x=4n-1\,;\,n\in\mathbb{N}\}$
۲) $B=\{x\mid x=\frac{1}{n}\,,\,n\in\mathbb{N}\}$
۳) $C=\{x\mid x=(-1)^{n-1}\,;\,n\in\mathbb{N}\}$
۴) $D=\{x\mid \frac{(-1)^n}{n}\,,\,n\in\mathbb{N}\}$

۱۷. اگر n عددی طبیعی باشد، کدام‌یک از مجموعه‌های زیر متناهی است؟ *(کنکور سراسری)*

۱) $\{n\mid n^3>n^2\}$ ۲) $\{n^2>2^n\}$ ۳) $\{n\mid 2^n>n^3\}$ ۴) $\{n\mid 2^n>n^2\}$

۱۸. کدام گزینه نادرست است؟ *(کنکور سراسری)*

۱) مجموعه‌ای که یک زیرمجموعه نامتناهی داشته باشد، نامتناهی است.
۲) زیرمجموعه یک مجموعهٔ متناهی، متناهی است.
۳) اشتراک دو مجموعهٔ نامتناهی، مجموعه‌ای نامتناهی است.
۴) مجموعهٔ اعداد گویا در بازهٔ $(1,2)$، نامتناهی است.

۱۹. اگر $A=\{1,2,3,4\}$ و $B=\{2,3,4,5\}$ و $(A\cap B)\subseteq X\subseteq (A\cup B)$، تعداد مجموعه‌های X کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۲۰. چه تعداد از گزاره‌های شرطی زیر صحیح است؟

الف) $A\subseteq B\cup C \Rightarrow A\subseteq B$ یا $A\subseteq C$
ب) $A\cap B=A\cup B\Rightarrow A=B$
ج) $A\cup B=A\cup C\Rightarrow B=C$
د) $A-C=B-C\Rightarrow A=B$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۱. کدام گزینه نادرست است؟

۱) اگر A و B دو مجموعه دلخواه باشند، آن‌گاه $(A-B)\subseteq A$.
۲) اگر $A\cup B=\varnothing$ باشد، آن‌گاه هر دو مجموعه A و B تهی هستند.
۳) اگر A و B دو مجموعه دلخواه باشند آن‌گاه همواره $(A\cap B)\subseteq(A\cup B)$.
۴) اگر $A\cap B=\varnothing$ باشد آن‌گاه حداقل یکی از دو مجموعه A و B تهی است.

۲۲. کدام گزینه نادرست است؟

۱) مجموعه $A=\{x\in\mathbb{N}\mid 2<x<3\}$ متناهی است.
۲) مجموعه مولکول‌های موجود در یک مول مشخص از آب، متناهی است.
۳) مجموعه $A=\{x\in\mathbb{N}\mid \frac{1}{x}\in\mathbb{Q}\}$ متناهی است.
۴) اگر $\mathbb{N}$ مجموعه مرجع باشد آن‌گاه متمم مجموعه $A=\{n\in\mathbb{N}\mid n^2>n\}$ متناهی است.