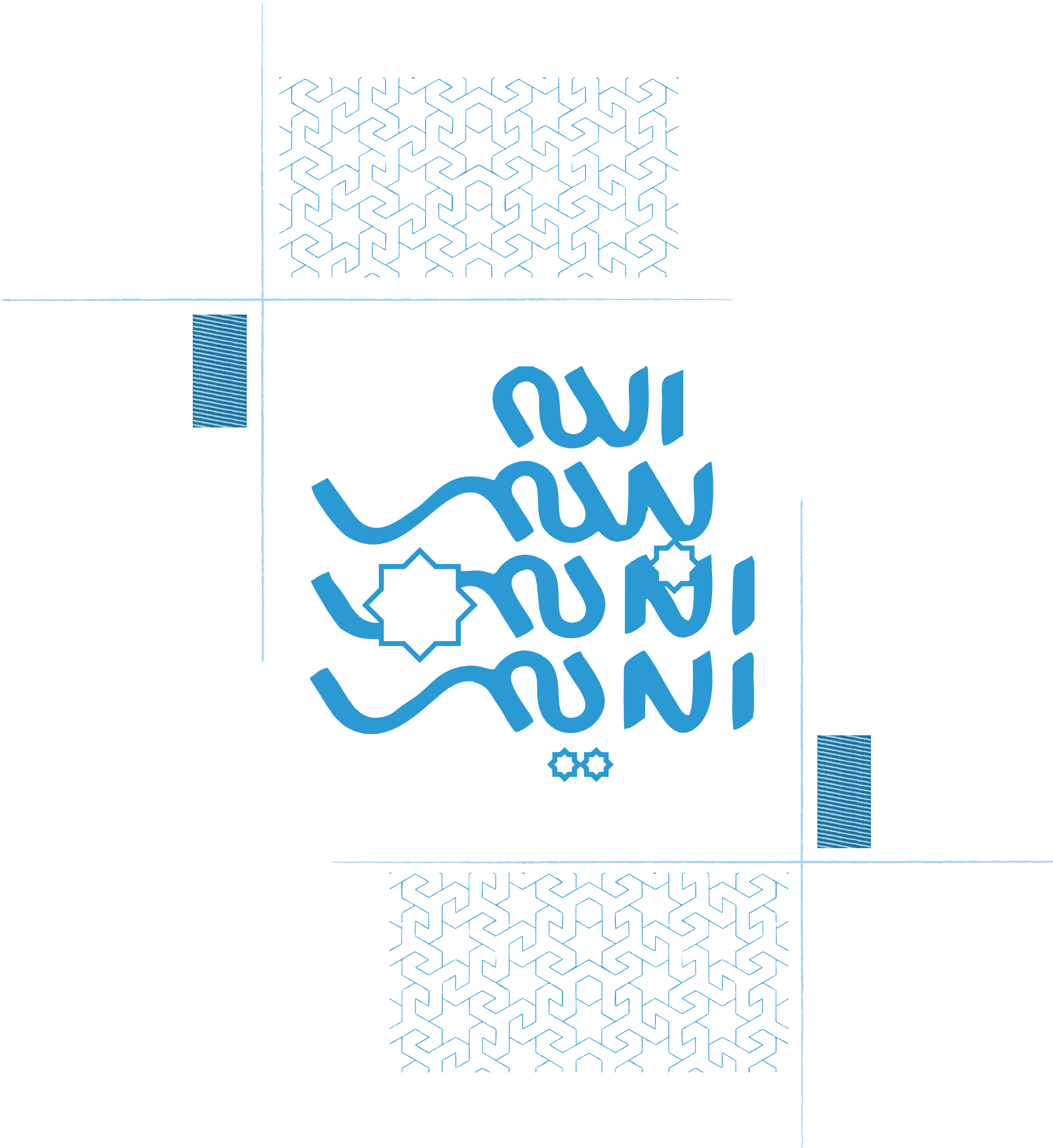
یگانه یازدهم هندسه پاسخ نامه

از مجموعه رشادت

علی صادقی



مقدمه

به‌نام خداوند جان و خرد
کزین برتر اندیشه برنگذرد

بسیار خرسندیم که کتاب «پاسخ‌نامه هندسه یازدهم یگانه» را در اختیار شمار قرار می‌دهیم.

در این کتاب پاسخ تمام سؤالات هندسه یگانه اعم از تشریحی، چهارگزینه‌ای، کنکورهای سراسری، آزمون‌ها، به تفصیل توضیح داده شده است. سطح‌بندی سؤالات نیز در این کتاب انجام گرفته است.

انتظار می‌رود کتاب هندسه یگانه، همهٔ نیازهای دانش‌آموزان کلاس یازدهم را در درس هندسه که مایل به تحصیل در بهترین دانشگاه‌ها و بهترین رشته‌های کشور هستند، پاسخ‌گو باشد.

در اینجا لازم می‌دانیم از مؤلف محترم آقای علی صادقی که کتاب را زیر نظر دبیر مجموعه تألیف کرده‌اند تشکر کنیم. هم‌چنین از خانم‌ها محبوبه شریفی (حروف‌چین و صفحه‌آرا)، سارا لطفی مقدم و سمانه مسروری و بهاره خدامی (گرافیست‌ها) و مدیران و همکاران واحدهای حروف‌چینی، تولید و فروش سپاسگزاریم.

امیدواریم دبیران محترم هندسه و دانش‌آموزان و خانواده‌های عزیز آن‌ها ما را با اعلام نظرات، پیشنهادها و انتقادها خود دربارهٔ این کتاب یاری فرمایند.

انتشارات مبتکران

فهرست

فصل ۱
دایره

فصل ۲
کاربردهای هندسی و تبدیل‌ها

فصل ۳
روابط طولی در مثلث

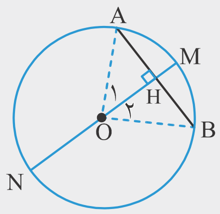
فصل ۱

دایره

پاسخ‌نامه سؤالات تشریحی فصل ۱

درس اول: مفاهیم اولیه و زاویه‌ها در دایره

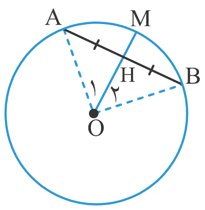
۱ A



فرض می‌کنیم AB وتر دلخواهی از دایره باشد و MN قطر عمود بر این وتر باشد.
از O مرکز دایره به A و B وصل می‌کنیم. می‌دانیم در مثلث متساوی‌الساقین، ارتفاع نظیر رأس، میانه قاعده و نیمساز زاویه رأس نیز می‌باشد. بنابراین:

$OA = OB \Rightarrow$ مثلث AOB متساوی‌الساقین $\Rightarrow$ OH ارتفاع $\Rightarrow \begin{cases} \text{OH میانه} \Rightarrow AH = HB \\ \text{OH نیمساز} \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \Rightarrow \widehat{AM} = \widehat{MB} \end{cases}$

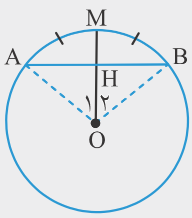
۲ A



فرض می‌کنیم H وسط وتر AB باشد. از O مرکز دایره به A و B وصل می‌کنیم.
می‌دانیم در مثلث متساوی الساقین، میانه نظیر قاعده، ارتفاع و نیمساز نظیر رأس نیز می‌باشد، بنابراین:

$OA = OB \Rightarrow$ مثلث AOB متساوی الساقین $\Rightarrow$ OH میانه $\Rightarrow \begin{cases} \text{OH ارتفاع} \Rightarrow OH \perp AB \\ \text{OH نیمساز} \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \Rightarrow \widehat{AM} = \widehat{MB} \end{cases}$

۳ A

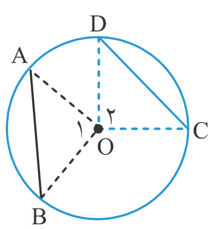


فرض می‌کنیم M وسط کمان $\widehat{AB}$ باشد. از O مرکز دایره به A و B وصل می‌کنیم.
می‌دانیم در مثلث متساوی‌الساقین، نیمساز رأس، ارتفاع و میانه نظیر قاعده نیز می‌باشد، بنابراین:

$OA = OB \Rightarrow$ مثلث AOB متساوی‌الساقین
$\widehat{AM} = \widehat{MB} \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \Rightarrow$ OH نیمساز $\Rightarrow \begin{cases} \text{OH ارتفاع} \Rightarrow OH \perp AB \\ \text{OH میانه} \Rightarrow AH = HB \end{cases}$

۴ A

از O به نقاط A، B، C و D وصل می‌کنیم.
اگر AB = CD در این صورت خواهیم داشت:



$$\begin{matrix} \overset{\Delta}{OAB} \\ \overset{\Delta}{OCD} \end{matrix} \begin{cases} OA = OD \\ OB = OC \xrightarrow{(\text{ض ض ض})} \Delta \cong \Delta \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{DC} \\ AB = CD \end{cases}$$

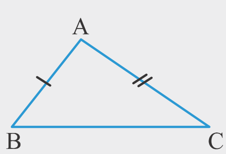
حال بعکس اگر $\widehat{AB} = \widehat{DC}$ نتیجه می‌شود $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ و بنابراین

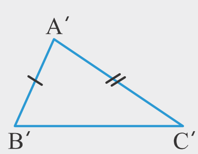
$$\begin{matrix} \overset{\Delta}{OAB} \\ \overset{\Delta}{OCD} \end{matrix} \begin{cases} OA = OD \\ OB = OC \xrightarrow{(\text{ض ز ض})} \Delta \cong \Delta \Rightarrow AB = DC \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \end{cases}$$

۵ C

برای اثبات، احتیاج به قضیه‌ای تحت عنوان قضیه لولا داریم که ابتدا این قضیه را بدون اثبات در زیر می‌آوریم، سپس به اثبات این سؤال می‌پردازیم.

قضیه لولا (قیچی):



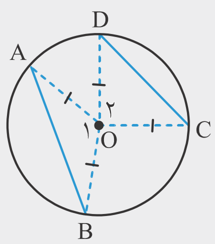


$$\begin{cases} AB = A'B' \\ AC = A'C' \Rightarrow BC > B'C' \\ \hat{A} > \hat{A}' \end{cases}$$

عکس قضیه لولا:

$$\begin{cases} AB = A'B' \\ AC = A'C' \Rightarrow \hat{A} > \hat{A}' \\ BC > B'C' \end{cases}$$

و اما اثبات سؤال: از O مرکز دایره به نقاط A، B، C و D وصل می‌کنیم.



اگر $AB > DC$ در این صورت

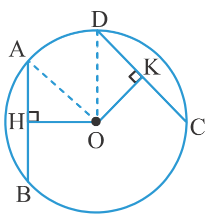
$$\begin{cases} OA = OD \\ OB = OC \\ AB > DC \end{cases} \xrightarrow{\text{عکس لولا}} \hat{O}_1 > \hat{O}_2 \Rightarrow \overset{\frown}{AB} > \overset{\frown}{CD}$$

اگر بعکس $\overset{\frown}{AB} > \overset{\frown}{DC}$ نتیجه می‌شود $\hat{O}_1 > \hat{O}_2$ و بنابراین

$$\begin{cases} OA = OD \\ OB = OC \\ \hat{O}_1 > \hat{O}_2 \end{cases} \xrightarrow{\text{لولا}} AB > DC$$

A ۶

دو وتر AB و CD را درنظر گرفته، فاصله آن‌ها تا مرکز را به‌ترتیب OH و OK درنظر می‌گیریم. می‌دانیم $AH = \frac{AB}{2}$ و $DK = \frac{DC}{2}$. از O مرکز دایره به A و D وصل می‌کنیم.



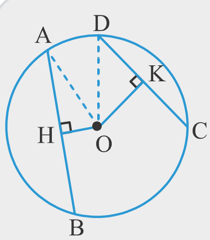
اگر $AB = DC$ در این صورت $\frac{DC}{2} = \frac{AB}{2}$ و لذا $AH = DK$ بنابراین:

$$\begin{matrix} \overset{\Delta}{OAH} \\ \overset{\Delta}{ODK} \end{matrix} \begin{cases} OA = OD \\ AH = DK \\ \hat{H} = \hat{K} = 90^\circ \end{cases} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} \Delta \cong \Delta \Rightarrow OH = OK$$

اگر بعکس $OH = OK$، در این صورت:

$$\begin{matrix} \overset{\Delta}{OAH} \\ \overset{\Delta}{ODK} \end{matrix} \begin{cases} OA = OD \\ OH = OK \\ \hat{H} = \hat{K} = 90^\circ \end{cases} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} \Delta \cong \Delta \Rightarrow AH = DK \Rightarrow AB = DC$$

A ۷



دو وتر AB و CD را درنظر گرفته، فاصله آن‌ها تا مرکز را به‌ترتیب OH و OK درنظر می‌گیریم.

می‌دانیم $AH = \frac{AB}{2}$ و $DK = \frac{DC}{2}$. از O به A و D وصل می‌کنیم. داریم:

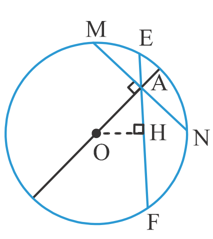
$$\begin{matrix} \overset{\Delta}{OAH} : OA^2 = AH^2 + OH^2 \\ \overset{\Delta}{ODK} : OD^2 = DK^2 + OK^2 \end{matrix} \xrightarrow{OA=OD} AH^2 + OH^2 = DK^2 + OK^2 \Rightarrow AH^2 - DK^2 = OK^2 - OH^2 \quad (*)$$

$$AB > CD \Leftrightarrow \frac{AB}{2} > \frac{CD}{2} \Leftrightarrow AH > DK \Leftrightarrow AH^2 > DK^2 \xleftrightarrow{(*)} OK^2 > OH^2 \Leftrightarrow OK > OH$$

توجه شود که خود سؤال و عکسش را با دو طرفه کردن جهت فلش‌ها، یکباره ثابت کردیم.

B ۸

فرض می‌کنیم MN وتری باشد که در نقطه A بر قطر گذرنده از A عمود باشد. می‌خواهیم ثابت کنیم MN کوچکترین وتر گذرنده از A است. برای این منظور فرض می‌کنیم EF وتر دلخواهی باشد که از A گذشته است، نشان می‌دهیم $MN < EF$. فاصله هر یک از وترهای MN و EF تا مرکز را بررسی می‌کنیم.

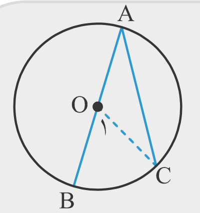


فاصله MN تا مرکز $= OA$

فاصله EF تا مرکز $= OH$

$$\overset{\Delta}{OAH} : \hat{H} = 90^\circ \Rightarrow \underbrace{OA}_{\text{وتر}} > OH \xrightarrow[\text{قبل}]{\text{طبق سوال}} MN < EF$$

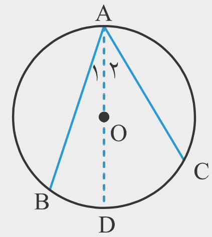
۹ B



در سه حالت زیر، مطلب را ثابت می‌کنیم.

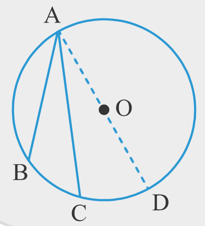
حالت اول: حالتی که یکی از اضلاع زاویهٔ محاطی از مرکز عبور کند. در این صورت از C به O مرکز دایره وصل می‌کنیم. داریم:

$$\left.\begin{array}{l} OA = OC \Rightarrow \hat{A} = \hat{C} \\ \overset{\Delta}{AOC}: (\text{خارجی})\ \hat{O}_1 = \hat{A} + \hat{C} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{O}_1 = 2\hat{A} \xrightarrow{\text{مرکزی } \hat{O}_1} \overset{\frown}{BC} = 2\hat{A} \Rightarrow \hat{A} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2}$$



حالت دوم: حالتی که اضلاع زاویهٔ محاطی در طرفین مرکز باشند. در این صورت قطر گذرنده از A را رسم می‌کنیم تا دایره را در D قطع کند.

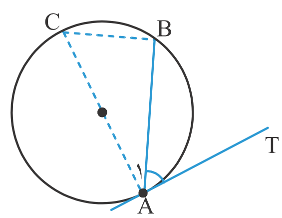
$$\hat{A} = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 \xrightarrow{\text{طبق حالت اول}} \hat{A} = \frac{\overset{\frown}{BD}}{2} + \frac{\overset{\frown}{DC}}{2} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2} \Rightarrow \hat{A} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2}$$



حالت سوم: حالتی که اضلاع زاویهٔ محاطی در یک طرف مرکز باشند. در این صورت قطر گذرنده از A را رسم می‌کنیم تا دایره را در D قطع کند.

$$\hat{A} = B\hat{A}D - C\hat{A}D \xrightarrow{\text{طبق حالت اول}} \hat{A} = \frac{\overset{\frown}{BCD}}{2} - \frac{\overset{\frown}{DC}}{2} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2} \Rightarrow \hat{A} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2}$$

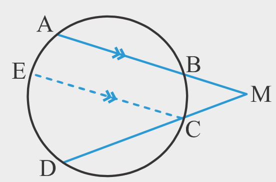
۱۰ B



قطر گذرنده از A را رسم می‌کنیم تا دایره را در C قطع کند، سپس C را به B وصل می‌کنیم. داریم:

$$\left.\begin{array}{l} \text{مماس } AT \Rightarrow AT \perp AC \Rightarrow \hat{A}_1 + \hat{A} = 90^\circ \\ (\text{محاطی})\ \hat{B} = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ \Rightarrow \hat{A}_1 + \hat{C} = 90^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{A} = \underset{\text{محاطی}}{\hat{C}} \Rightarrow \hat{A} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$$

۱۱ A



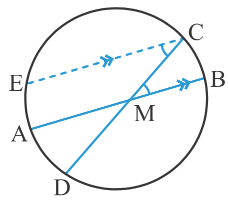
از نقطه C خطی به موازات AB رسم می‌کنیم تا دایره را در E قطع کند. داریم:

$$AB \parallel EC \Rightarrow \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{AE}$$

$$\left\{\begin{array}{l} AM \parallel EC \Rightarrow \hat{M} = \hat{C} \\ (\text{محاطی})\ \hat{C} = \frac{\overset{\frown}{ED}}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \hat{M} = \frac{\overset{\frown}{ED}}{2} \Rightarrow \hat{M} = \frac{\overset{\frown}{AD} - \overset{\frown}{AE}}{2} = \frac{\overset{\frown}{AD} - \overset{\frown}{BC}}{2}$$

بنابراین: $\hat{M} = \frac{\left|\overset{\frown}{AD} - \overset{\frown}{BC}\right|}{2}$

۱۲ A

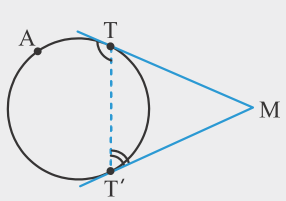


از نقطه C خطی به موازات AB رسم می‌کنیم تا دایره را در E قطع کند. داریم:

$$AB \parallel CE \Rightarrow \overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{BC}$$

$$\left\{\begin{array}{l} AB \parallel CE \Rightarrow \hat{M} = \hat{C} \\ (\text{محاطی})\ \hat{C} = \frac{\overset{\frown}{DAE}}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \hat{M} = \frac{\overset{\frown}{DAE}}{2} = \frac{\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{AE}}{2} = \frac{\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{BC}}{2}$$

۱۳ A

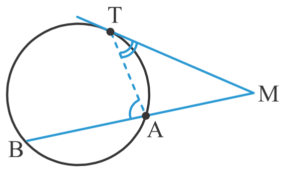


از T به T′ وصل می‌کنیم. داریم:

$$\left\{\begin{array}{l} \overset{\Delta}{MTT'}: (\text{خارجی})\ \hat{T} = \hat{T}' + \hat{M} \\ (\text{ظلی})\ \hat{T} = \frac{\overset{\frown}{TAT'}}{2} \\ (\text{ظلی})\ \hat{T}' = \frac{\overset{\frown}{TT'}}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \frac{\overset{\frown}{TAT'}}{2} = \frac{\overset{\frown}{TT'}}{2} + \hat{M} \Rightarrow \hat{M} = \frac{\left|\overset{\frown}{TAT'} - \overset{\frown}{TT'}\right|}{2}$$

۱۴ A

از T به A وصل می‌کنیم. داریم:



$$\begin{cases} \overset{\Delta}{TAM}: \text{(خارجی)}\ \hat{A} = \hat{T} + \hat{M} \\ \text{(ظلی)}\ \hat{T} = \dfrac{\overset{\frown}{TA}}{۲} \\ \text{(ظلی)}\ \hat{A} = \dfrac{\overset{\frown}{TB}}{۲} \end{cases} \Rightarrow \frac{\overset{\frown}{TB}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{TA}}{۲} + \hat{M} \Rightarrow \hat{M} = \frac{|\overset{\frown}{TB} - \overset{\frown}{TA}|}{۲}$$

۱۵ A

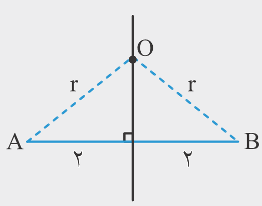
– همه زوایای مرکزی یک دایره متساویند. (نادرست)
– رأس هر زاویه مرکزی از یک دایره بر مرکز آن دایره واقع است. (درست)
– هر دایره، فقط شامل دو نیم دایره است. (نادرست)
– هر نیم‌دایره، یک کمان از دایره است. (درست)
– هر دایره، فقط یک قطر دارد. (نادرست)
– هر دایره، با هر وتر آن، تنها در دو نقطه مشترک است. (درست)
– هر قطر دایره، وتری از دایره است. (درست)
– هر وتر دایره، یک قطر دایره است. (نادرست)
– قطرهای یک دایره، هم‌اندازه‌اند. (درست)
– بعضی از وترهای یک دایره، شعاع دایره‌اند. (نادرست)
– بزرگترین وتری که از یک نقطه داخل دایره می‌گذرد، قطری است که بر آن نقطه مرور می‌کند. (درست)

۱۶ A

– کمان‌های مساوی یک دایره، زاویه‌های مرکزی **مساوی** دارند.
– در دو دایره نامساوی، کمان‌های **مساوی** زاویه‌های مرکزی مساوی دارند.
– هر شعاع از یک دایره، زیرمجموعه‌ای از نقاط **داخل دایره** است.
– نیمساز هر زاویه مرکزی از یک دایره، کمان نظیر آن زاویه را **نصف می‌کند.**

۱۷ B

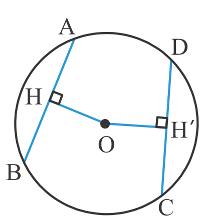
توجه شود مرکز دوایر گذرنده از A و B روی عمودمنصف AB قرار دارند. با توجه به نامساوی مثلثی در مثلث OAB می‌توان پاسخ هر قسمت را داد.



الف) بی‌شمار
ب) یک
پ) دو
ت) هیچ
ث) دو

۱۸ B

می‌دانیم در دایره وتری که بزرگتر است، به مرکز دایره نزدیکتر است. بنابراین:



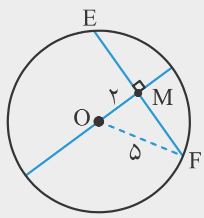
$$AB > CD \Rightarrow OH < OH' \Rightarrow ۶ - x < ۲x - ۳ \Rightarrow ۳x > ۹ \Rightarrow x > ۳$$

از طرفی طول پاره‌خط همواره مثبت است. درنتیجه:

$$\begin{cases} OH > ۰ \Rightarrow ۶ - x > ۰ \Rightarrow x < ۶ \\ OH' > ۰ \Rightarrow ۲x - ۳ > ۰ \Rightarrow x > \dfrac{۳}{۲} \end{cases}$$

اشتراک این سه بازه، حدود x را تعیین می‌کند. بنابراین $۳ < x < ۶$.

۱۹ B



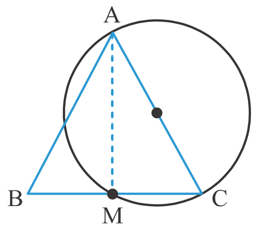
می‌دانیم بزرگترین وتر گذرنده از یک نقطه در دایره، قطر گذرنده از آن نقطه است و کوچکترین وتر گذرنده از آن نقطه، وتری است که در آن نقطه بر قطر عمود است. بنابراین:

$$\text{M طول بزرگترین وتر گذرنده از} = \text{قطر} = ۱۰$$

$$\overset{\Delta}{OMF}: MF^۲ = OF^۲ - OM^۲ \Rightarrow MF^۲ = ۲۵ - ۴ = ۲۱ \Rightarrow MF = \sqrt{۲۱} \Rightarrow EF = ۲\sqrt{۲۱}$$

$$\text{M طول کوچکترین وتر گذرنده از} = EF = ۲\sqrt{۲۱}$$

۲۰ B

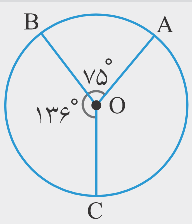


از A به M (محل برخورد دایره با ضلع BC) وصل می‌کنیم.

$$\text{(محاطی)}\ A\hat{M}C = \frac{\overset{\frown}{AC}}{۲} = \frac{۱۸۰^\circ}{۲} = ۹۰^\circ \Rightarrow AM \perp BC \Rightarrow \text{ارتفاع } AM$$

$$AB = AC \Rightarrow \text{متساوی الساقین } \overset{\Delta}{ABC} \underset{\text{ارتفاع } AM}{} \Rightarrow \text{میانه } AM \Rightarrow BM = CM$$

۲۱ A

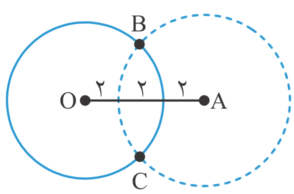


توجه شود که منظور از کمان AC، کمان کوچکتر AC است.

$$A\hat{O}C = ۳۶۰^\circ - (۷۵^\circ + ۱۳۶^\circ) = ۱۴۹^\circ$$

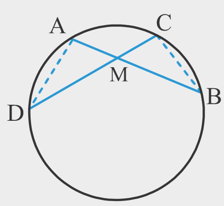
$$\overset{\frown}{AC} = A\hat{O}C = ۱۴۹^\circ$$

۲۲ B



برای یافتن نقاط کافی است به مرکز A و به شعاع ۴، دایره‌ای رسم کنیم. محل برخورد این دایره با دایره $C(O,۴)$، نقاط موردنظر است. (نقاط B و C)

۲۳ B

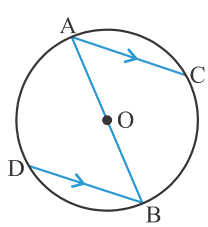


فرض کنیم دو وتر AB و CD دو وتر مساوی باشند که در نقطه M متقاطع باشند. از A به D و از B به C وصل می‌کنیم. داریم:

$$AB = CD \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD} \Rightarrow \overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{CD} - \overset{\frown}{AC} \Rightarrow \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{AD} \Rightarrow BC = AD$$

$$\begin{cases} \hat{A} = \hat{C} = \dfrac{\overset{\frown}{BD}}{۲} \\ AD = BC \\ \hat{D} = \hat{B} = \dfrac{\overset{\frown}{AC}}{۲} \end{cases} \xrightarrow{\text{(ز ض ز)}} \overset{\Delta}{AMD} \cong \overset{\Delta}{CMB} \Rightarrow \begin{cases} AM = MC \\ DM = MB \end{cases}$$

۲۴ B

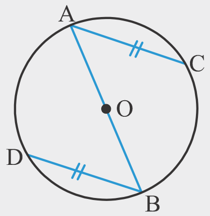


فرض کنیم دو وتر AC و BD دو وتر موازی باشند که بر دو انتهای قطر AB گذشته‌اند.

$$AC \parallel DB \Rightarrow \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BC} \quad \text{(I)}$$

$$\begin{cases} \overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BC} = ۱۸۰^\circ \\ \overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{DB} = ۱۸۰^\circ \end{cases} \Rightarrow \overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{DB} \xrightarrow{\text{(I)}} \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{DB} \Rightarrow AC = DB$$

۲۵ B

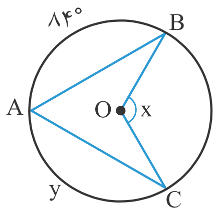


فرض می‌کنیم دو وتر AC و BD دو وتر مساوی باشند که بر دو انتهای قطر AB گذشته‌اند.

$AC = DB \Rightarrow \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{DB} \quad (I)$

$\begin{cases} \overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BC}=۱۸۰^\circ \\ \overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{DB}=۱۸۰^\circ \end{cases} \Rightarrow \overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{DB} \xrightarrow{(I)} \overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{AD} \Rightarrow \hat{A}=\hat{B} \Rightarrow AC \parallel DB$

۲۶ A



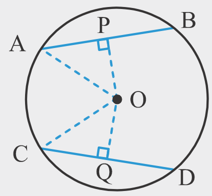
الف)

$\hat{y}=۱۴۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{BC}=۳۶۰^\circ-(۱۴۰^\circ+۸۴^\circ)=۱۳۶^\circ \Rightarrow x=۱۳۶^\circ$

ب)

$\hat{x}=۱۶۵^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{BC}=۱۶۵^\circ \Rightarrow \hat{y}=۳۶۰^\circ-(۱۶۵^\circ+۸۴^\circ)=۱۱۱^\circ \Rightarrow \hat{y}=۱۱۱^\circ$

۲۷ A



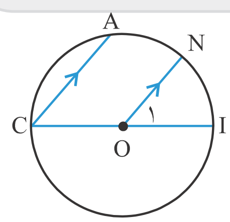
الف)

$\overset{\triangle}{OPA}: AP^۲=OA^۲-OP^۲ \Rightarrow AP^۲=۱۰۰-۳۶=۶۴ \Rightarrow AP=۸ \Rightarrow AB=۱۶$

ب) $\overset{\triangle}{OCQ}: CQ^۲=OC^۲-OQ^۲ \xrightarrow{CQ=OQ} CQ^۲=۲-CQ^۲ \Rightarrow ۲CQ^۲=۲ \Rightarrow CQ^۲=۱ \Rightarrow CQ=۱$

$\Rightarrow DQ=۱ \Rightarrow CD=۲$

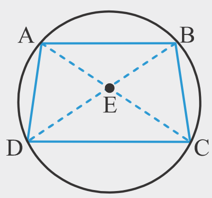
۲۸ B



$CA \parallel ON \Rightarrow \hat{C}=\hat{O}_۱ \Rightarrow \frac{\overset{\frown}{ANI}}{۲}=\overset{\frown}{NI} \Rightarrow \overset{\frown}{ANI}=۲\overset{\frown}{NI}$

$\Rightarrow \overset{\frown}{AN}+\overset{\frown}{NI}=۲\overset{\frown}{NI} \Rightarrow \overset{\frown}{AN}=\overset{\frown}{NI}$

۲۹ A



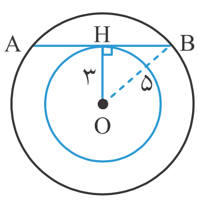
الف)

$AD=BC \Rightarrow \overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BC} \Rightarrow \overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{AB} \Rightarrow \overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{AC} \Rightarrow BD=AC$

ب)

$AC=BD \Rightarrow \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD} \Rightarrow \cancel{\overset{\frown}{AB}}+\overset{\frown}{BC}=\cancel{\overset{\frown}{AB}}+\overset{\frown}{AD} \Rightarrow \overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{AD} \Rightarrow BC=AD$

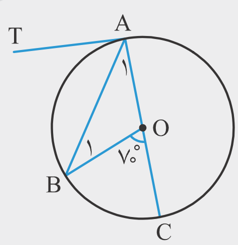
۳۰ B



می‌دانیم شعاع بر مماس، در نقطه تماس، عمود است و قطر عمود بر وتر، وتر را نصف می‌کند. بنابراین داریم:

$\overset{\triangle}{OHB}: \hat{H}=۹۰^\circ \Rightarrow HB^۲=OB^۲-OH^۲ \Rightarrow HB^۲=۲۵-۹=۱۶ \Rightarrow HB=۴ \Rightarrow AB=۸$

۳۱ B

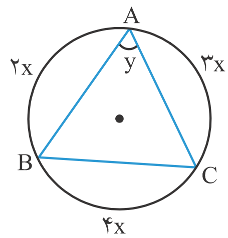


$\begin{cases} OA=OB \Rightarrow \hat{A}_۱=\hat{B}_۱ \\ \overset{\triangle}{AOB}: \text{خارجی}\ \hat{O}=\hat{A}_۱+\hat{B}_۱ \end{cases} \Rightarrow ۷۰^\circ=۲\hat{A}_۱ \Rightarrow \hat{A}_۱=۳۵^\circ$

مماس $AT \Rightarrow AT \perp AC \Rightarrow T\hat{A}B+\hat{A}_۱=۹۰^\circ \Rightarrow T\hat{A}B+۳۵^\circ=۹۰^\circ \Rightarrow T\hat{A}B=۵۵^\circ$

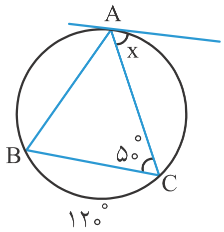
۳۲ A

الف)



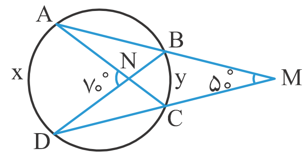
$$۲x + ۳x + ۴x = ۳۶۰°$$
$$۹x = ۳۶۰° \Rightarrow x = ۴۰°$$
$$y = \frac{۴x}{۲} \Rightarrow y = ۲x = ۸۰°$$

ب)



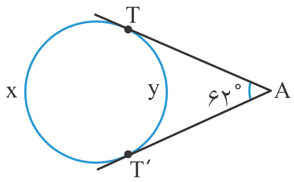
$$\hat{C} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲} \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = ۲\hat{C} = ۱۰۰°$$
$$\overset{\frown}{AC} = ۳۶۰° - (۱۰۰° + ۱۲۰°) = ۱۴۰°$$
$$x = \frac{\overset{\frown}{AC}}{۲} \Rightarrow x = \frac{۱۴۰°}{۲} = ۷۰°$$

پ)



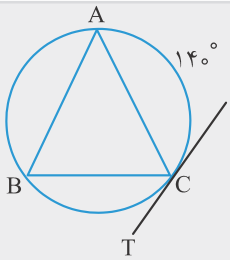
$$۵۰° = \frac{x-y}{۲} \Rightarrow x - y = ۱۰۰°$$
$$۷۰° = \frac{x+y}{۲} \Rightarrow x + y = ۱۴۰°$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x = ۱۲۰° \\ y = ۲۰° \end{cases}$$

ت)



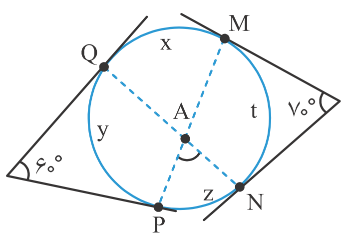
$$۶۲° = \frac{x-y}{۲} \Rightarrow x - y = ۱۲۴°$$
$$x + y = ۳۶۰°$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x = ۲۴۲° \\ y = ۱۱۸° \end{cases}$$

۳۳ A



$$AB = AC \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC} = ۱۴۰°$$
$$\overset{\frown}{BC} = ۳۶۰° - (۱۴۰° + ۱۴۰°) = ۸۰° \Rightarrow B\hat{C}T = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲} = \frac{۸۰°}{۲} = ۴۰°$$

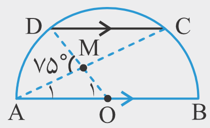
۳۴ A



مطابق شکل، کمان‌ها را نامگذاری می‌کنیم. داریم:

$$۶۰° = \frac{(x+t+z)-y}{۲} \Rightarrow x + t + z - y = ۱۲۰°$$
$$۷۰° = \frac{(x+y+z)-t}{۲} \Rightarrow x + y + z - t = ۱۴۰°$$
$$\xrightarrow{\oplus} ۲x + ۲z = ۲۶۰° \Rightarrow x + z = ۱۳۰°$$
$$\hat{A} = \frac{x+z}{۲} \Rightarrow \hat{A} = \frac{۱۳۰°}{۲} = ۶۵°$$

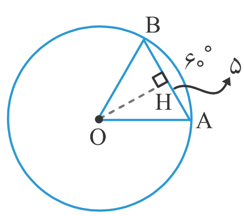
۳۵ B



$\overset{\Delta}{MAO}$: خارجی $\hat{M} = \hat{A}_۱ + \hat{O}_۱ \Rightarrow \hat{A}_۱ + \hat{O}_۱ = ۷۵° \Rightarrow \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲} + \overset{\frown}{AD} = ۷۵°$ (I)

$$AB \parallel CD \Rightarrow \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BC} \quad (II)$$
$$(I), (II) \Rightarrow \frac{\overset{\frown}{AD}}{۲} + \overset{\frown}{AD} = ۷۵° \Rightarrow ۳\ \overset{\frown}{AD} = ۱۵۰° \Rightarrow \overset{\frown}{AD} = ۵۰° = \overset{\frown}{BC}$$
$$\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{DC} + \overset{\frown}{BC} = ۱۸۰° \Rightarrow ۵۰° + \overset{\frown}{DC} + ۵۰° = ۱۸۰° \Rightarrow \overset{\frown}{DC} = ۸۰°$$

۳۶ B

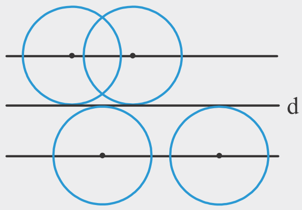


$\begin{cases} OA = OB \Rightarrow \overset{\Delta}{OAB} \text{ متساوی الساقین} \\ OH \text{ ارتفاع} \end{cases} \Rightarrow$ OH نیمساز

$$\overset{\frown}{AB} = ۶۰° \Rightarrow \hat{O} = ۶۰° \Rightarrow A\hat{O}H = ۳۰°$$
$$\overset{\Delta}{OAH}: \hat{H} = ۹۰° \Rightarrow tg\ ۳۰° = \frac{OH}{OH} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۳} = \frac{۵}{OH} \Rightarrow OH = \frac{۱۵}{\sqrt{۳}} = ۵\sqrt{۳}$$

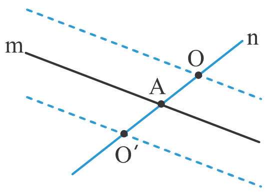
۳۷ B

مطابق شکل مرکز این دایره‌ها روی دو خط موازی بـا d و بـه فاصلـه R از آن قرار می‌گیرند.



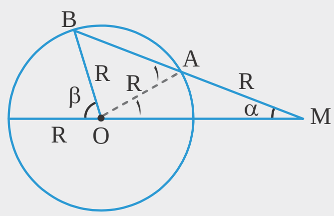
۳۸ B

مطابق شکل مرکز دایره‌هایی به شعاع ۲ که بر خط m مماس باشند، روی دو خـط موازی l و l' قرار می‌گیرند (l و l' دو خط موازی با m و به فاصله ۲ از آن می‌باشند). بنابراین محل برخورد دو خط موازی l و l' با خط n مرکز دایره موردنظر است. خطوط موازی l و l' خط n را در دو نقطه O و O' قطع می‌کنند. دایره‌هایی که به مرکز O و O' و به شعاع ۲ رسم می‌شوند، بر m مماس می‌شوند.



۳۹ A

از O، مرکز دایره به A وصل می‌کنیم. داریم:



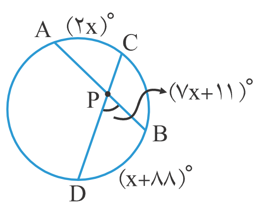
$OA = AM = R \Rightarrow$ متساوی الساقین $\overset{\Delta}{OAM} \Rightarrow \hat{O}_۱ = \hat{M} = \alpha$

$\overset{\Delta}{OAM}:$ (خارجی) $\hat{A}_۱ = \hat{O}_۱ + \hat{M} = \alpha + \alpha = ۲\alpha$

$OA = OB = R \Rightarrow$ متساوی الساقین $\overset{\Delta}{OAB} \Rightarrow \hat{B} = \hat{A}_۱ = ۲\alpha$

$\overset{\Delta}{BOM}:$ (خارجی) $\beta = \hat{B} + \hat{M} \Rightarrow \beta = ۲\alpha + \alpha \Rightarrow \beta = ۳\alpha$

۴۰ A

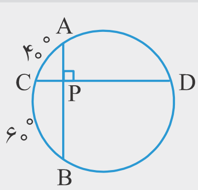


$$\hat{P} = \frac{\widehat{AC} + \widehat{BD}}{۲} \Rightarrow ۷x + ۱۱° = \frac{۲x + x + ۸۸°}{۲} \Rightarrow ۱۴x + ۲۲° = ۳x + ۸۸°$$

$$\Rightarrow ۱۱x = ۶۶° \Rightarrow x = ۶°$$

$$\hat{P} = (۷x + ۱۱)° = (۷ \times ۶ + ۱۱)° = ۵۳°$$

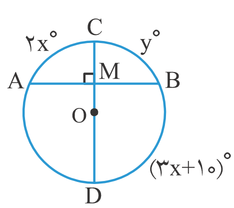
۴۱ A



$$۹۰° = \frac{۴۰° + \widehat{BD}}{۲} \Rightarrow ۴۰° + \widehat{BD} = ۱۸۰° \Rightarrow \widehat{BD} = ۱۴۰°$$

$$۴۰° + ۶۰° + ۱۴۰° + \widehat{AD} = ۳۶۰° \Rightarrow \widehat{AD} = ۱۲۰°$$

۴۲ A

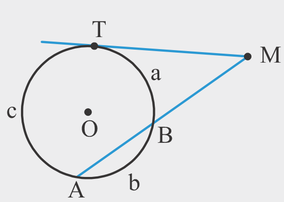


(قطر) $CD \perp AB \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BC} \Rightarrow y° = ۲x° \quad (I)$

$$۹۰° = \frac{۲x° + (۳x + ۱۰°)}{۲} \Rightarrow ۲x° + ۳x° + ۱۰° = ۱۸۰° \Rightarrow ۵x° = ۱۷۰° \Rightarrow x = ۳۴°$$

$$(I) \Rightarrow y = ۲(۳۴°) = ۶۸°$$

۴۳ A



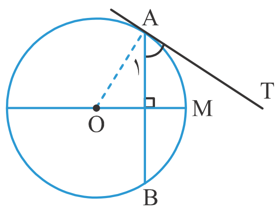
$$\frac{a}{۱} = \frac{b}{۴} = \frac{c}{۷} \Rightarrow \frac{\overbrace{a + b + c}^{۳۶۰°}}{۱ + ۴ + ۷} = a = \frac{b}{۴} = \frac{c}{۷}$$

$$\Rightarrow a = \frac{b}{۴} = \frac{c}{۷} = \frac{۳۶۰°}{۱۲} = ۳۰° \Rightarrow \begin{cases} a = ۳۰° \\ b = ۱۲۰° \\ c = ۲۱۰° \end{cases}$$

$$\hat{M} = \frac{c - a}{۲} \Rightarrow \hat{M} = \frac{۲۱۰° - ۳۰°}{۲} = ۹۰°$$

۴۴ B

از A به O وصل می‌کنیم. داریم:

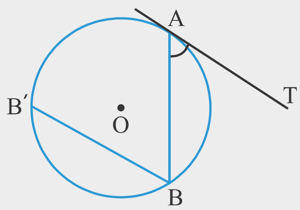


$$OM \perp AB \Rightarrow \overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{MB} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲} \quad (I)$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{مماس } AT \Rightarrow OA \perp AT \Rightarrow \hat{A}_۱ + \hat{A} = ۹۰^\circ \\ \hat{A}_۱ + \hat{O} = ۹۰^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{A} = \hat{O}_{\text{مرکزی}} = \overset{\frown}{AM} \quad (II)$$

$$(I)\ ,\ (II) \Rightarrow \hat{A} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$$

۴۵ B

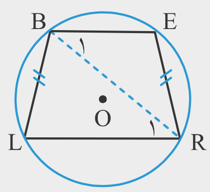


$$\left\{\begin{array}{l} AT \parallel BB' \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AB'} \\ AT \parallel BB' \Rightarrow \hat{A} = \hat{B}_{\text{محاطی}} = \frac{\overset{\frown}{AB'}}{۲} \end{array}\right. \Rightarrow \hat{A} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$$

۴۶ C

$$\left.\begin{array}{l} \text{متوازی الاضلاع } DIAN \Rightarrow \hat{N} = \hat{I} \\ \hat{N} = \hat{M} = \frac{\overset{\frown}{AD}}{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{I} = \hat{M} \Rightarrow \overset{\Delta}{BMI} \text{ متساوی الساقین} \Rightarrow DM = DI$$

۴۷ B



$$\left.\begin{array}{l} BL = ER \Rightarrow \overset{\frown}{BL} = \overset{\frown}{ER} \\ \hat{R}_۱ = \frac{\overset{\frown}{BL}}{۲} \\ \hat{B}_۱ = \frac{\overset{\frown}{ER}}{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{R}_۱ = \hat{B}_۱ \Rightarrow BE \parallel LR$$

۴۸ C

$$\left\{\begin{array}{l} AC = AB \Rightarrow \hat{B} = \hat{C} \\ (\text{محاطی})\ \hat{B} = \frac{\overset{\frown}{AD}}{۲} \\ (\text{ظلی})\ D\hat{A}C = \frac{\overset{\frown}{AD}}{۲} \end{array}\right. \Rightarrow \hat{B} = D\hat{A}C \Rightarrow D\hat{A}C = \hat{C} \Rightarrow \overset{\Delta}{ADC} \text{ متساوی الساقین}$$

۴۹ A

الف)

$$\hat{A} = \frac{\overset{\frown}{EC} - \overset{\frown}{BD}}{۲} \Rightarrow ۳۰^\circ = \frac{x - ۷۰^\circ}{۲} \Rightarrow x - ۷۰^\circ = ۶۰^\circ \Rightarrow x = ۱۳۰^\circ$$

$$(\text{مرکزی})\ \hat{O} = \overset{\frown}{BC} \Rightarrow \overset{\frown}{BC} = ۵۰^\circ$$

$$y = ۳۶۰^\circ - (۷۰^\circ + ۵۰^\circ + ۱۳۰^\circ) = ۱۱۰^\circ$$

ب)

$$(\text{محاطی})\ \hat{A} = \frac{\overset{\frown}{CD}}{۲} \Rightarrow ۴۰^\circ = \frac{\overset{\frown}{CD}}{۲} \Rightarrow \overset{\frown}{CD} = ۸۰^\circ$$

$$x = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD}}{۲} \Rightarrow x = \frac{۷۰^\circ + ۸۰^\circ}{۲} = \frac{۱۵۰^\circ}{۲} = ۷۵^\circ$$

$$(\text{ظلی})\ y = \frac{\overset{\frown}{AD}}{۲} \Rightarrow y = \frac{۱۲۰^\circ}{۲} = ۶۰^\circ$$

۵۰ **A**

الف)

$$(\text{محاطی})\ \hat{D} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲} \Rightarrow ۲۰° = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲} \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = ۴۰°$$

$$\overset{\frown}{BAD} = ۱۸۰° \Rightarrow \overset{\frown}{BA} + z = ۱۸۰° \Rightarrow ۴۰° + z = ۱۸۰° \Rightarrow z = ۱۴۰°$$

$$\overset{\frown}{BCD} = ۱۸۰° \Rightarrow \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CD} = ۱۸۰° \Rightarrow \overset{\frown}{BC} + ۱۰۰° = ۱۸۰° \Rightarrow \overset{\frown}{BC} = ۸۰° \Rightarrow y = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲} = ۴۰°$$

$$\begin{cases} (\text{محاطی})\ \hat{A} = \frac{\overset{\frown}{CD}}{۲} \\ (\text{محاطی})\ x = \frac{\overset{\frown}{CD}}{۲} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = ۵۰° \\ \overset{\frown}{CD} = ۱۰۰° \end{cases}$$

ب)

$$(\text{مرکزی})\ \hat{O} = z \Rightarrow z = ۱۱۵°$$

$$(\text{محاطی})\ x = \frac{z}{۲} \Rightarrow x = \frac{۱۱۵°}{۲} = ۵۷/۵°$$

$$\overset{\frown}{AC} + y + z = ۳۶۰° \Rightarrow ۱۲۰° + y + ۱۱۵° = ۳۶۰° \Rightarrow y = ۱۲۵°$$

پ)

$$(\text{محاطی})\ \hat{T} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲} \Rightarrow ۱۱۰° = \frac{z}{۲} \Rightarrow z = ۲۲۰°$$

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = ۳۶۰° \Rightarrow x + y + ۲۲۰° = ۳۶۰° \Rightarrow x + y = ۱۴۰° \\ \hat{M} = \frac{\overset{\frown}{TB} - \overset{\frown}{TA}}{۲} \Rightarrow ۲۰° = \frac{y - x}{۲} \Rightarrow y - x = ۴۰° \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x = ۵۰° \\ y = ۹۰° \end{cases}$$

۵۱ **B**

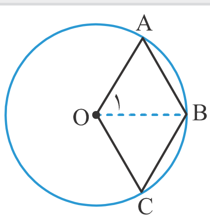
$$۷۰° = \frac{y + t}{۲} \Rightarrow y + t = ۱۴۰° \quad (I)$$

$$۸۰° = \frac{(y + z + t) - x}{۲} \Rightarrow y + z + t - x = ۱۶۰° \xrightarrow{(I)} z - x = ۲۰°$$

$x + y = ۹۰°$ و $t + z = ۹۰°$

$$\left.\begin{array}{l} \begin{cases} y + t = ۱۴۰° \\ t + z = ۹۰° \end{cases} \Rightarrow y - z = ۵۰° \\ \begin{cases} x + y = ۹۰° \\ z - x = ۲۰° \end{cases} \Rightarrow y + z = ۱۱۰° \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} y = ۸۰° \\ z = ۳۰° \end{cases} \xrightarrow[t + z = ۹۰°]{x + y = ۹۰°} \begin{cases} x = ۱۰° \\ t = ۶۰° \end{cases}$$

۵۲ **B**

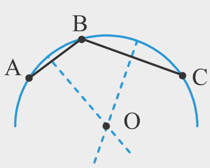


$OABC$ متوازی‌الاضلاع $\Rightarrow OC = AB \Rightarrow OA = OB = AB \Rightarrow \overset{\Delta}{OAB}$ متساوی‌الاضلاع

$$\Rightarrow \hat{O}_۱ = ۶۰° \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = ۶۰°$$

۵۳ **C**

روی کمان معلوم، سه نقطه A و B و C را اختیار می‌کنیم. محل تلاقی عمودمنصف‌های دو وتر AB و BC مرکز دایره است. (هر نقطه روی عمودمنصف پاره‌خط از دو سر پاره‌خط به یک فاصله است.)

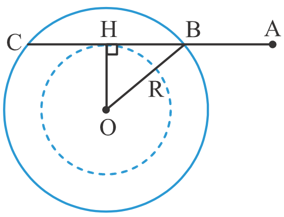


۵۴ **C**

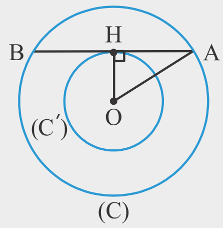
فرض می‌کنیم قاطع ABC جواب مسأله باشد، یعنی $BC = a$. داریم:

$$\overset{\Delta}{OHB}: OH^۲ = R^۲ - HB^۲ = R^۲ - (\frac{a}{۲})^۲ \Rightarrow OH = \frac{۱}{۲}\sqrt{۴R^۲ - a^۲}$$

پس برای رسم وتر موردنظر، ابتدا دایره‌ای به مرکز O و به شعاع $\frac{۱}{۲}\sqrt{۴R^۲ - a^۲}$ رسم می‌کنیم. سپس از نقطه A مماسی بر دایره جدید رسم می‌کنیم. وتر ایجاد شده روی دایره اول، جواب مسأله است.



۵۵



از O به A و H وصل می‌کنیم. می‌دانیم که OH عمودمنصف وتر AB است. بنابراین:

$$AH = HB = \frac{AB}{۲} = \frac{۲۴}{۲} = ۱۲$$

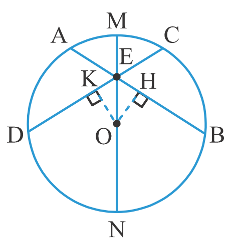
از طرف دیگر، $OA = R$، $OH = R'$ و $\frac{R'}{R} = \frac{۱}{۲}$ و یا $R = ۲R'$ است.

$$\overset{\Delta}{OHA}: OA^{۲} = OH^{۲} + AH^{۲}$$

$$(۲R')^{۲} = R'^{۲} + ۱۲^{۲} \Rightarrow ۴R'^{۲} = R'^{۲} + ۱۴۴ \Rightarrow ۳R'^{۲} = ۱۴۴ \Rightarrow R'^{۲} = ۴۸$$

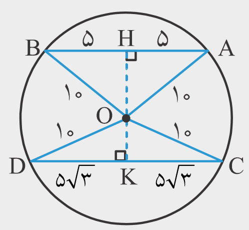
$$\Rightarrow R' = ۴\sqrt{۳} \Rightarrow R = ۲R' = ۲(۴\sqrt{۳}) = ۸\sqrt{۳}$$

۵۶



می‌خواهیم ثابت کنیم که $A\hat{E}M = M\hat{E}C$ و یا $B\hat{E}N = D\hat{E}N$ است. برای اثبات از نقطه O مرکز دایره، دو عمود OH و OK را به‌ترتیب بر AB و CD فرود می‌آوریم. از آنجا $AB = DC$، بنابراین از مرکز دایره به یک فاصله‌اند یعنی $OK = OH$. در نتیجه نقطه O از دو خط متقاطع AB و CD به یک فاصله است. این بدین معنی است که نقطه O روی نیمساز زاویه بین این دو خط متقاطع قرار دارد. به‌عبارت دیگر OE نیمساز زاویه BED (یا AEC) است.

۵۷



قطر عمود بر این دو وتر موازی را رسم می‌کنیم. نقطه برخورد آن با AB و CD را به‌ترتیب H و K می‌نامیم و از O به A و C وصل می‌کنیم. می‌دانیم قطر عمود بر وتر، آن وتر و کمان نظیرش را نصف می‌کند. بنابراین:

$$AH = \frac{AB}{۲} = \frac{۱۰}{۲} = ۵$$

$$\overset{\Delta}{AOH}: \sin A\hat{O}H = \frac{AH}{OA} = \frac{۵}{۱۰} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow A\hat{O}H = ۳۰^\circ$$

$$CK = \frac{CD}{۲} = \frac{۱۰\sqrt{۳}}{۲} = ۵\sqrt{۳}$$

$$\overset{\Delta}{COK}: \sin C\hat{O}K = \frac{CK}{OC} = \frac{۵\sqrt{۳}}{۱۰} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow C\hat{O}K = ۶۰^\circ$$

پس داریم:

$$A\hat{O}H + C\hat{O}K = ۳۰^\circ + ۶۰^\circ = ۹۰^\circ \Rightarrow A\hat{O}C = ۱۸۰^\circ - ۹۰^\circ = ۹۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD} = A\hat{O}C = ۹۰^\circ$$

۵۸

الف)

$$A\hat{M}B = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{A'B'}}{۲} = \frac{۸۰^\circ + ۶۰^\circ}{۲} = \frac{۱۴۰^\circ}{۲} = ۷۰^\circ$$

ب)

$$\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{A'B'} = ۳۶۰^\circ - (\overset{\frown}{A'B} + \overset{\frown}{AB'}) = ۳۶۰^\circ - ۲۰۰^\circ = ۱۶۰^\circ$$

$$A\hat{M}B = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{A'B'}}{۲} = \frac{۱۶۰^\circ}{۲} = ۸۰^\circ$$

پ)

$$A\hat{M}B' = ۱۱۰^\circ \Rightarrow A\hat{M}B = ۱۸۰^\circ - ۱۱۰^\circ = ۷۰^\circ$$

$$A\hat{M}B = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{A'B'}}{۲} \Rightarrow ۷۰^\circ = \frac{\overset{\frown}{AB} + ۳\overset{\frown}{AB}}{۲} \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = ۳۵^\circ$$

۵۹ B

$$(\text{ظلی})\ \alpha = \frac{\overset{\frown}{ABC}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC}}{۲}$$

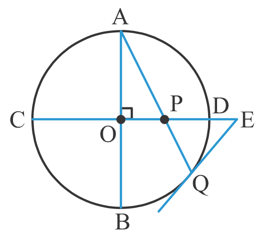
$$(\text{ظلی})\ \beta = \frac{\overset{\frown}{BAC}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{AC}}{۲}$$

$$\gamma = \frac{\overset{\frown}{BCA}-\overset{\frown}{AB}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{AC}-\overset{\frown}{AB}}{۲}$$

$$\alpha+\beta+\frac{\gamma}{۲} = \frac{\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC}}{۲}+\frac{\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{AC}}{۲}+\frac{\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BC}-\overset{\frown}{AB}}{۴} = \frac{۲\overset{\frown}{AB}+۲\overset{\frown}{BC}+۲\overset{\frown}{AB}+۲\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BC}-\overset{\frown}{AB}}{۴}$$

$$= \frac{۳\overset{\frown}{AB}+۳\overset{\frown}{AC}+۳\overset{\frown}{BC}}{۴} = \frac{۳(\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BC})}{۴} = \frac{۳\times ۳۶۰^\circ}{۴} = ۲۷۰^\circ$$

۶۰ B



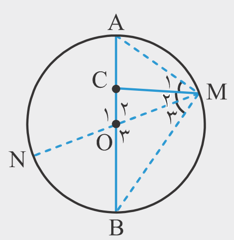
می‌دانیم $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{AC}$. بنابراین داریم:

$$(\text{ظلی})\ \hat{Q} = \frac{\overset{\frown}{AQ}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{DQ}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{DQ}}{۲} \quad (I)$$

$$\hat{P} = \frac{\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{DQ}}{۲} \quad (II)$$

$$(I)\ \text{و}\ (II) \Rightarrow \hat{Q} = \hat{P} \Rightarrow PE = QE$$

۶۱ D



شعاع OM را امتداد می‌دهیم تا دایره را در N قطع کند. سپس M را به A و B وصل می‌کنیم.

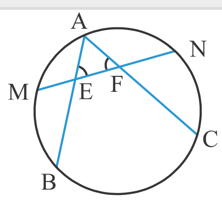
$$\hat{O}_۱ = \hat{O}_۳ \Rightarrow \overset{\frown}{AN} = \overset{\frown}{MB} \Rightarrow A\hat{M}N = \hat{A}\ (\text{زوایای محاطی روبرو به کمان‌های برابر})$$

$$\hat{M}_۱ < A\hat{M}N \Rightarrow \hat{M}_۱ < \hat{A} \xrightarrow{\overset{\Delta}{AMC}} AC < CM \quad (I)$$

$$\hat{O}_۲ = \hat{O}_۴ \Rightarrow \overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{NB} \Rightarrow \hat{B} = \hat{M}_۳ \Rightarrow \hat{M}_۳ + \hat{M}_۲ > \hat{B}$$

$$\Rightarrow C\hat{M}B > \hat{B} \xrightarrow{\overset{\Delta}{CMB}} BC > CM \quad (II) \qquad (I),(II) \Rightarrow AC < CM < BC$$

۶۲ B

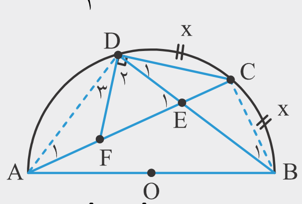


می‌دانیم $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{MB}$ و $\overset{\frown}{AN} = \overset{\frown}{NC}$ بنابراین داریم:

$$\hat{E} = \frac{\overset{\frown}{AN}+\overset{\frown}{MB}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{NC}+\overset{\frown}{AM}}{۲} = \hat{F} \Rightarrow \hat{E} = \hat{F} \Rightarrow \text{متساوی الساقین}\ \overset{\Delta}{AEF}$$

۶۳ C

از C به B وصل کرده، فرض می‌کنیم $\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{DC} = x$. زوایای $\hat{D}_۱$ و $\hat{B}_۱$ زوایای محاطی روبرو به دو کمان برابرند، بنابراین $\hat{D}_۱ = \hat{B}_۱ = \frac{x}{۲}$.



$$\hat{D}_۱ + \hat{D}_۲ = ۹۰^\circ \Rightarrow \hat{D}_۲ = ۹۰^\circ - \frac{x}{۲} \quad (I)$$

$$\overset{\frown}{AD} = ۱۸۰^\circ - (x+x) = ۱۸۰^\circ - ۲x$$

$$\hat{E}_۱ = \frac{\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{BC}}{۲} = \frac{۱۸۰^\circ - ۲x + x}{۲} = \frac{۱۸۰^\circ - x}{۲} = ۹۰^\circ - \frac{x}{۲} \quad (II)$$

$$(I),(II) \Rightarrow \hat{D}_۲ = \hat{E}_۱ \Rightarrow EF = DF \quad (۱)$$

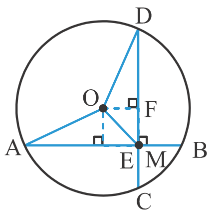
حال از D به A وصل می‌کنیم. زاویه $A\hat{D}B$ زاویه محاطی روبرو به قطر است، بنابراین $A\hat{D}B = ۹۰^\circ$ یعنی $\hat{D}_۲ + \hat{D}_۳ = ۹۰^\circ$.

$$\left.\begin{array}{l} \hat{D}_۲ + \hat{D}_۳ = ۹۰^\circ \Rightarrow \hat{D}_۳ = ۹۰^\circ - \hat{D}_۲ \xrightarrow{(I)} \hat{D}_۳ = ۹۰^\circ - (۹۰^\circ - \frac{x}{۲}) = \frac{x}{۲} \\ (\text{محاطی})\ \hat{A}_۱ = \frac{\overset{\frown}{DC}}{۲} \Rightarrow \hat{A}_۱ = \frac{x}{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{D}_۳ = \hat{A}_۱ \Rightarrow DF = AF \quad (۲)$$

$$(۱),(۲) \Rightarrow AF = EF$$

۶۴ D

عمودهای OE و OF را از مرکز دایره به‌ترتیب بر وترهای AB و CD فرود می‌آوریم و از O به نقاط M، A و D وصل می‌کنیم. می‌دانیم AE = EB و DF = FC و چهارضلعی OEMF مستطیل است.



$$\left.\begin{array}{l}\overset{\Delta}{OAE}: AE^۲ = OA^۲ - OE^۲ = R^۲ - OE^۲ \\ \overset{\Delta}{OFD}: DF^۲ = OD^۲ - OF^۲ = R^۲ - OF^۲\end{array}\right\} \xrightarrow{\oplus} AE^۲ + DF^۲ = ۲R^۲ - (OE^۲ + OF^۲)$$

از طرفی در مستطیل OEMF داریم: $OE^۲ + OF^۲ = OM^۲$. بنابراین: $AE^۲ + DF^۲ = ۲R^۲ - OM^۲$.

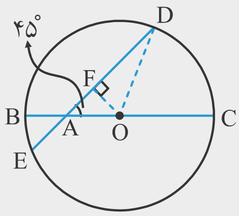
می‌دانیم $DF = \frac{CD}{۲}$ و $AE = \frac{AB}{۲}$ درنتیجه خواهیم داشت:

$$AB^۲ + CD^۲ = ۴(AE^۲ + DF^۲) = ۴(۲R^۲ - OM^۲) = ۸R^۲ - ۴OM^۲$$

با توجه به اینکه R و OM مقادیر ثابتی می‌باشند پس $AB^۲ + CD^۲$ مقداری ثابت است.

۶۵ C

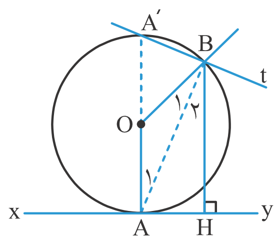
از O عمود OF را بر وتر DE رسم می‌کنیم. می‌دانیم EF = FD و مثلث OAF قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است. بنابراین AF = FO.



$$AD = AF + FD = FO + FD$$
$$AE = EF - AF = FD - FO$$
$$AD^۲ + AE^۲ = (OF + FD)^۲ + (FD - OF)^۲ = ۲(OF^۲ + FD^۲) = ۲OD^۲$$
$$AD^۲ + AE^۲ = ۲R^۲$$

۶۶ D

از A به B وصل می‌کنیم.

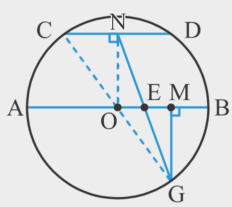


$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{r}\text{مماس } xy \Rightarrow AO \perp xy \\ BH \perp xy\end{array}\right\} \Rightarrow AO \parallel BH \Rightarrow \hat{A}_۱ = \hat{B}_۲ \\ OA = OB \Rightarrow \hat{A}_۱ = \hat{B}_۱\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{B}_۱ = \hat{B}_۲$$

بنابراین AB نیمساز زاویه OBH است. از طرفی طبق فرض، Bt نیمساز زاویه مکمل و مجانب زاویه OBH می‌باشد. لذا $AB \perp Bt$ (نیمسازهای دو زاویه مجانب بر هم عمودند) یعنی $A\hat{B}t = ۹۰^\circ$. پس اگر نقطه تقاطع دیگر Bt با دایره را A′ بنامیم، خواهیم داشت $A\hat{B}A' = ۹۰^\circ$. یعنی Bt از نقطه A′ انتهای دیگر قطر گذرنده از A که نقطه ثابتی است، می‌گذرد.

۶۷ C

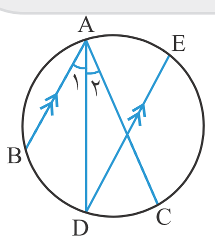
از نقطه O به نقاط C، N و G وصل می‌کنیم، چون نقطه N وسط وتر CD است، پس ON عمودمنصف این وتر می‌باشد و داریم: $NC = \frac{CD}{۲} = \frac{R}{۲}$.



$$\left\{\begin{array}{l}OC = OG = R \\ CN = OM = \frac{R}{۲} \\ \hat{N} = \hat{M} = ۹۰^\circ\end{array}\right. \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} \overset{\Delta}{OCN} \cong \overset{\Delta}{OGM} \Rightarrow ON = MG$$

دو مثلث قائم‌الزاویه $\overset{\Delta}{ONE}$ و $\overset{\Delta}{GME}$ به حالت (ز ض ز) همنهشت بوده و بنابراین NE = EG. یعنی نقطه E وسط پاره‌خط NG است. به عبارت دیگر پاره خط NG به‌وسیله قطر AB نصف شده است.

۶۸ B



$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}_۱ = \hat{A}_۲ \Rightarrow \overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{DC} \\ AB \parallel DE \Rightarrow \overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{BD}\end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{DC} \Rightarrow \overset{\frown}{AE} + \overset{\frown}{EC} = \overset{\frown}{DC} + \overset{\frown}{EC} \Rightarrow \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{DE} \Rightarrow AC = DE$$