



■ مبلغی که امروز بابت خرید این کتاب می پردازید،

در مقابل هزینه‌هایی که در آینده بابت

نخواندن آن پرداخت خواهید کرد،

بسیار ناچیز است ...

لی‌لی‌پوت

آمار و احتمال یازدهم

شناسنامه

سرشناسه: منصف شگری، علی

عنوان: لی‌لی‌پوت آمار و احتمال یازدهم

مشخصات نشر: تهران، شرکت انتشارات کلاغ سپید،

۱۳۹۷

مشخصات ظاهری: ۲۴۰ ص، مصور (رنگی)

فرست: مجموعه کتاب‌های لی‌لی‌پوت

شابک: ۹۷۸-۶۰۰-۹۹۹۲۱-۶-۴

نوبت چاپ: اول

قیمت: ۱۵۰۰۰ تومان

وضعیت فهرست نویسی: فبپای مختصر

شماره کتابشناسی ملی: ۵۱۷۵۱۹۶

- ناشر: شرکت انتشارات کلاغ سپید
- رئیس هیأت مدیره: مهندس ابوالفضل جوکار
- معاونت علمی: مهندس محمد جوکار
- مدیران تألیف: مهندس محمد صحت‌کار، مهندس علی منصف شگری
- عنوان کتاب: لی‌لی‌پوت آمار و احتمال یازدهم
- مؤلف: علی منصف شگری
- ویراستاران علمی: کیوان دارابی، محمدرضا حسینی فرد، سجاد عظمتی
- ویراستاران فنی: راضیه انتخابی فرد، فرحناز عباسی، کبری مهدی‌خانی
- امور اجرایی: محمدرضا الکاکی
- سرپرست واحد فنی: سامان شاهین پور
- گرافیکست و طراح جلد: آزاده نوریان
- صفحه‌آرا: زهره توماری
- رسام: منصوره محمدی
- حروف نگار: معصومه میناسرشت، آرزو راضی
- چاپ و صحافی: گاج
- مدیر چاپ: علی مزرعی
- نوبت چاپ: اول (۱۳۹۷)
- شمارگان: ۲۰۰۰ نسخه
- قیمت: ۱۵۰۰۰ تومان
- تلفن: ۶۴۲۰ - ۰۲۱
- صندوق پستی: ۳۷۷ - ۱۳۱۴۵
- دفتر مرکزی: تهران، خیابان انقلاب، بین چهارراه ولیعصر (عج) و فلسطین، شماره ۹۱۹

کلیه حقوق این کتاب برای انتشارات گاج محفوظ است. هیچ شخص حقیقی یا حقوقی حق چاپ و نشر تمام یا بخشی از این اثر را به هر صورت اعم از فتوکپی، چاپ کتاب و جزوه ندارد و متخلفین به موجب ماده ۵ قانون حمایت از حقوق مؤلفان، مصنفان و هنرمندان مصوب ۱۳۴۸/۱۱/۱۱ تحت پیگرد قانونی قرار می‌گیرند.

مقدمه مدیر تألیف

داستان «سفرهای گالیور» داستان سفر به یک شهر رؤیایی با آدم‌هایی کوچک و خیال‌گونه است؛ روایت زندگی آدم‌هایی پرشور و دوست‌داشتنی در سرزمین جادویی لی‌لی‌پوت!

در داستان شهر لی‌لی‌پوت، گالیور- قهرمان داستان که بر اثر حادثه‌ای پا بر این سرزمین گذاشته- همراه با آدم کوچولوهای قصه، دست ما را می‌گیرند و با خود به این شهر جادویی می‌برند تا در روایتی مابین واقعیت و رؤیا، از گنجی بزرگ که در این سرزمین کوچک نهان شده، پرده بردارند...

این داستان زیبا و بسیار جذاب، بنیان طرحی شد در ضمیر ما تا این بار نه در عالم خیال بلکه در واقعیت، مردانی بزرگ را در انتشارات کلاغ سپید گرد هم آوریم تا داستان شما را بگیرند و با خود به سرزمین خیال‌انگیز کتاب‌ها ببرند و داستانی جدیدتر و متفاوت از آن چه تا کنون در کلاس‌های مدرسه یاد گرفته‌اید را برای شما روایت کنند؛ داستانی شورانگیز از گنج‌های پنهان شده در کتاب‌ها و شگفتی‌های برزبان نیامده در کلاس‌ها ... پس همین امروز دستت را به ما بده

و با ما به **لی‌لی‌پوت** قدم بگذار!

در دست‌های ما نقشه گنجی بزرگ نهان است.

مقدمه مؤلف



■ به آرامی آغاز به مردن می‌کنی
اگر برای مطمئن در نامطمئن خطر نکنی
اگر ورای رؤیاهای نیروی
اگر سفر نکنی
اگر کتابی نخوانی

تو به آرامی آغاز به مردن می‌کنی
اگر رنگ‌های متفاوت به تن نکنی
اگر همیشه از یک راه تکراری بروی
اگر به اصوات زندگی گوش ندهی
اگر از چیزهایی که چشمانت را
به درخشش وامی‌دارند
و ضربان قلبت را تندتر می‌کنند
دوری کنی
اگر به خودت اجازه ندهی
که حداقل یک بار در تمام زندگی
ورای مصلحت‌اندیشی بروی

امروز زندگی را آغاز کن
امروز مخاطره کن!
امروز کاری کن!

■ پابلو نرودا، شاعر شیلیایی

تیم تألیف

کتاب‌های ریاضی لی‌لی‌پوت



A. Monsef Shokri
علی منصف شکری

دانش‌آموخته مهندسی عمران
از دانشگاه تهران



M. Sehatkar
محمد صحت‌کار

دانش‌آموخته مهندسی مخابرات
از دانشگاه صنعتی خواجه نصیر



K. Darabi
کیوان دارابی

دانش‌آموخته مهندسی الکترونیک
از دانشگاه علم و صنعت



M. Azizi
مهدی عزیز

دانش‌آموخته ریاضی
از دانشگاه شهید بهشتی



M.R. Hosseinifard
محمد رضا حسینی‌فرد

دانش‌آموخته مهندسی پلیمر
از دانشگاه صنعتی امیرکبیر



S. Azemati
سجاد عظمتی

دانش‌آموخته مهندسی برق
از دانشگاه شهید بهشتی

فهرست

فصل ۱

آشنایی با مبانی ریاضیات

- درس اول: آشنایی با منطق ریاضی ۸
- درس دوم: مجموعه - زیرمجموعه ۳۸
- درس سوم: قوانین و اعمال بین مجموعه‌ها (جبر مجموعه‌ها) ۵۴

فصل ۲

احتمال

- درس اول: مبانی احتمال ۷۴
- درس دوم: احتمال غیرهم‌شانس ۸۹
- درس سوم: احتمال شرطی ۹۵
- درس چهارم: پیشامدهای مستقل و وابسته ۱۳۱

فصل ۳

آمار توصیفی

- درس اول: توصیف و نمایش داده‌ها ۱۴۴
- درس دوم: معیارهای گرایش به مرکز ۱۵۹
- درس سوم: معیارهای پراکندگی ۱۸۰

فصل ۴

آمار استنباطی

- درس اول: گردآوری داده‌ها ۱۹۶
- درس دوم: برآورد ۲۱۳

پروفیسور لطفی زادہ

۱۹۲۱ - ۲۰۱۷

پدر علم منطق فازی

1

CHAPTER

• آشنایی با مبانی ریاضیات

- آشنایی با منطق ریاضی
- مجموعه و زیرمجموعه
- جبر مجموعه‌ها

درس اول: آشنایی با منطق ریاضی

TEST 001

کدام یک از جملات زیر گزاره است؟

- (۱) کاش باران بیارد.
- (۲) عدد ۱۳ عددی نحس است.
- (۳) میازار موری که دانه کش است.
- (۴) بین مجذور هر دو عدد متوالی یک عدد اول هست.

LILIPOOTBOX

تشخیص گزاره

🍏 هر جمله خبری که در حال حاضر یا آینده، دارای ارزش درست یا ارزش نادرست باشد را گزاره می نامند.

🍷 مجموع هر دو عدد فرد، همواره عددی زوج است.

🍷 عدد $1 - 10^1$ عددی اول است.

🍏 جملات امری، پرسشی، عاطفی، احساسی، تعجبی و دعایی گزاره محسوب نمی شوند.

🍷 کتاب ها را روی میز بگذارید. (امری)

🍷 آیا ۹۹۷ عددی اول است؟ (پرسشی)

🍷 نامت سپیده دمی است که بر پیشانی آسمان می گذرد. (احساسی و عاطفی)

🍷 چه هوای دل انگیزی! (تعجبی)

🍷 ای کاش نرفته بودی! (دعایی)

🍏 حدس های ریاضی که هنوز درستی آن ها اثبات یا رد نشده است، گزاره محسوب می شوند.

🍷 هر عدد زوج بزرگتر از ۲ را می توان به صورت مجموع دو عدد اول نوشت. (حدس گلدباخ)

🍷 بی نهایت عدد اول مانند p وجود دارد که $p+2$ هم اول باشد.

ANALYSE

🍏 گزینه (۱) جمله تعجبی است. گزینه (۲) جمله عاطفی و احساسی و گزینه (۳) یک جمله امری است و

هیچ کدام گزاره محسوب نمی شوند. اما گزینه (۴) یک حدس ریاضی مشهور به حدس لژاندر است و گزاره

محسوب می شود.

پاسخ گزینه ۴

برای ۴ گزاره p، q، r و s اگر بدانیم ارزش گزاره r درست و ارزش گزاره s نادرست است. از نظر ارزش، برای این ۴ گزاره چند حالت مختلف وجود دارد؟

۱۶ (۱)

۱۴ (۲)

۲ (۳)

۴ (۴)

LILIPOOTBOX

ارزش گزاره

p	q
د	د
د	ن
ن	د
ن	ن

هر گزاره همواره دارای یکی از دو ارزش درست یا نادرست است. بنابراین اگر دو گزاره مانند p و q را در نظر بگیرید، آن گاه برای ارزش آن‌ها می‌توان یک جدول به شکل مقابل تشکیل داد که دارای ۴ حالت است.

اگر ارزش یک گزاره همواره درست باشد آن را با T و اگر ارزش آن همواره نادرست باشد با F نشان می‌دهند. (این دو حرف، حروف اول کلمات True و False هستند.)

به طور کلی اگر n گزاره داشته باشیم، جدول ارزش آن‌ها دارای 2^n حالت است.

ANALYSE

گزاره r درست است، پس همواره یک ارزش دارد. گزاره s، همواره نادرست است، پس این گزاره نیز یک حالت دارد، اما چون ارزش سایر گزاره‌ها فعلاً معلوم نشده است، همچنان دو حالت برای آن‌ها وجود دارد، بنابراین تعداد کل حالات، طبق اصل ضرب برابر است با:

$$\text{تعداد حالات} = 2 \times 2 \times 1 \times 1 = 4$$

↓ p
 ↓ q
 ↓ r
 ↓ s

پاسخ گزینه ۴

TEST 003

نقیض گزاره «مریم ریاضی دان است.» کدام گزینه نیست؟

- (۱) مریم ریاضی دان نیست .
 (۲) این طور نیست که مریم ریاضی دان است .
 (۳) مریم ریاضی کار نمی کند .
 (۴) مریم ریاضی نمی داند .

LILIPOOTBOX

نقیض گزاره

ساده ترین روش برای ساختن نقیض یک گزاره، آوردن عبارت «این طور نیست که» قبل از گزاره اصلی یا «منفی کردن فعل جمله خبری» است. نقیض گزاره p را با $\sim p$ نشان می دهند و به علامت « \sim » ناقض می گویند.

نقیض کلمات و نمادهای مهم و پرکاربرد را در جدول زیر ببینید:

نقیض نمادها	
$<$	\geq
$>$	\leq
\neq	$=$

نقیض کلمات	
فرد	زوج
گنگ	گویا
نیست	است

ANALYSE

در صورت تست، صحبتی از کار کردن در ریاضی مطرح نشده است بلکه صحبت از دانستن است. بنابراین گزینه (۳) نادرست است. اما دلیل درستی سایر گزینه ها به صورت زیر است:

مریم ریاضی نمی داند \equiv مریم ریاضی دان نیست \equiv این طور نیست که مریم ریاضی دان است \equiv (مریم ریاضی دان است) \sim

پاسخ گزینه ۳

گزاره «این‌طور نیست که ۵ عددی اول نیست» معادل با کدام گزینه است؟

- (۱) ممکن است ۵ عددی غیر اول باشد.
 (۲) ۵ عددی اول است.
 (۳) ۵ عددی مرکب است.
 (۴) ۵ عددی اول نیست.

LILIPOOTBOX

نقیض نقیض یک گزاره

🍏 اگر p یک گزاره باشد، نقیض نقیض گزاره p را به صورت $(\sim p)$ نشان می‌دهند که همواره هم‌ارز منطقی با خود گزاره p است، یعنی:

$$\sim(\sim p) \equiv p$$

🍏 معمولاً برای ساده کردن گزاره‌هایی که فعل‌های منفی در آن‌ها به کار رفته، می‌توان از نقیض نقیض استفاده کرد.

🍀 گزاره «۲۴ عددی غیرزوج نیست» معادل است با:

$$24 \text{ عددی زوج است} \equiv (24 \text{ عددی غیرزوج است}) \equiv \sim(24 \text{ عددی غیرزوج نیست}) \sim$$

ANALYSE

📌 چون از عبارت «این‌طور نیست که» در صورت تست استفاده شده که یک فعل منفی به حساب می‌آید، بهتر است از نقیض نقیض استفاده کنیم:

$$5 \text{ عددی اول است} \equiv (5 \text{ عددی اول نیست}) \equiv \sim(5 \text{ عددی اول نیست}) \sim$$

پاسخ گزینه ۲

TEST 005

اگر گزاره $p \vee q \sim$ یک گزاره نادرست باشد، ارزش کدام یک از گزاره‌های زیر نادرست است؟

q (۱)

p (۲)

$p \vee q$ (۳)

$p \vee \sim q$ (۴)

LILIPOOTBOX

ترکیب فصلی

🍏 اگر p و q دو گزاره باشند، ترکیب **فصلی** آن‌ها را به صورت $p \vee q$ نشان می‌دهند و « p یا q » خوانده می‌شود. به نماد \vee «فصلی» می‌گویند.

🍏 ارزش ترکیب **فصلی** فقط وقتی نادرست است که هر دو گزاره p و q نادرست باشند و در غیر این صورت ارزش گزاره درست است.

🍷 گزاره «۲ عددی فرد است یا ۵ عددی اول است.» گزاره درستی است چون یکی از مؤلفه‌های آن ارزش درست دارد.

🍏 اگر چند گزاره با هم ترکیب فصلی شده باشند، در صورتی ارزش این گزاره مرکب درست خواهد شد که لاقلاً (دست کم) یکی از گزاره‌ها درست باشد.

ANALYSE

🍷 چون ترکیب فصلی دو گزاره نادرست است، بنابراین هر دو مؤلفه $\sim p$ و q نادرست هستند. حال تک تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) $q \equiv F$

۲) $p \equiv T$

۳) $p \vee q \equiv T \vee F \equiv T$

۴) $p \vee \sim q \equiv T \vee T \equiv T$

پاسخ گزینه ۱

اگر گزاره $p \wedge q \sim$ گزاره‌ای درست باشد، کدام یک از گزاره‌های زیر درست است؟

(۱) $p \vee \sim q$

(۲) $p \wedge q$

(۳) $p \vee q$

(۴) $p \wedge \sim q$

LILIPOOTBOX

ترکیب عطفی

🍎 اگر p و q دو گزاره باشند، ترکیب عطفی آن‌ها را با نماد $p \wedge q$ نشان می‌دهند و « p و q » خوانده می‌شود. به نماد « \wedge » عطف می‌گویند.

p	q	$p \wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

🍊 ارزش ترکیب عطفی فقط وقتی درست است که هر دو گزاره p و q درست باشند و در غیر این صورت ارزش گزاره نادرست است.

🌟 گزاره «تهران پایتخت ایران است و عربستان یک کشور اروپایی است» گزاره‌ای نادرست است چون یکی از مؤلفه‌های آن ارزش نادرست دارد.

🍋 اگر چندین گزاره با هم ترکیب عطفی شده باشند، ارزش گزاره مرکب در صورتی درست است که همه گزاره‌ها درست باشد و در غیر این صورت نادرست است.

ANALYSE

📌 می‌دانیم ارزش ترکیب عطفی تنها وقتی درست است که هر دو مؤلفه آن درست باشد، بنابراین هر دو گزاره $p \sim$ و q درست‌اند. به عبارت دیگر p نادرست و q درست است. پس هر یک از دو گزاره $p \sim$ و همچنین q درست‌اند. حال ارزش هر کدام از گزاره‌های موجود در گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) $p \vee \sim q \equiv F \vee F \equiv F$

۲) $p \wedge q \equiv F \wedge T \equiv F$

۳) $p \vee q \equiv F \vee T \equiv T$

۴) $p \wedge \sim q \equiv F \wedge F \equiv F$

پاسخ گزینه ۳

TEST 007

اگر عکس گزاره $p \Rightarrow q$ نادرست باشد، ارزش کدام گزاره نادرست است؟

- ۱) $q \Rightarrow q$ ۲) $\sim p \vee q$ ۳) $p \wedge \sim q$ ۴) $\sim p \Rightarrow q$

LILIPOOTBOX

ترکیب شرطی

🍏 اگر p و q دو گزاره باشند، ترکیب شرطی آن‌ها را با نماد $p \Rightarrow q$ نشان می‌دهند و «اگر p آنگاه q » خوانده می‌شود. در ترکیب شرطی، گزاره p را **مقدم** و q را **تالی** می‌نامند.

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

🍏 ارزش ترکیب شرطی فقط وقتی نادرست است که مقدم درست و تالی نادرست باشد. در غیر این صورت ارزش ترکیب شرطی درست است.

🍇 گزاره «اگر ۲ زوج باشد، آنگاه ۵ نیز زوج است» گزاره

نادرستی است چون مقدم درست و تالی نادرست است.

🍏 اگر مقدم یک ترکیب شرطی نادرست باشد، ارزش آن

ترکیب شرطی درست است و به ارزش تالی بستگی ندارد.



[این قانون را **انتفای مقدم** می‌نامند.]

🍇 ارزش گزاره «اگر ۲ فرد باشد، آنگاه همهٔ مربع‌ها دایره هستند» درست است چون مقدم دارای ارزش

نادرست است. [اگر روزی برسد که ۲ فرد شود دیگر هیچ چیز از هیچ کس بعید نیست و سنگ روی سنگ

بند نخواهد شد. بنابراین بیراه نیست که در این چنین شرایط بغرنجی، همهٔ مربع‌ها دایره شوند.]

🍏 اگر تالی یک ترکیب شرطی درست باشد، ارزش آن ترکیب شرطی درست است و به ارزش مقدم



بستگی ندارد.

🍏 اگر $p \Rightarrow q$ یک گزاره شرطی باشد، گزاره $q \Rightarrow p$ را عکس ترکیب شرطی می‌نامند.

ANALYSE

🍏 اگر عکس ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$ نادرست باشد، یعنی $p \Rightarrow q$ نادرست است. و می‌دانیم گزاره شرطی

تنها در یک حالت نادرست است و آن در حالتی است که مقدم یعنی p درست و تالی یعنی q نادرست

باشد. بنابراین اکنون می‌توانیم ارزش تک تک گزینه‌ها را بررسی کنیم:

۱) $q \Rightarrow q \equiv F \Rightarrow F \equiv T$

۲) $\sim p \vee q \equiv F \vee F \equiv F$

۳) $p \wedge \sim q \equiv T \wedge T \equiv T$

۴) $\sim p \Rightarrow q \equiv F \Rightarrow F \equiv T$

عکس نقیض گزاره «اگر او متدین باشد، آنگاه درستکار است» کدام گزینه است؟

- (۱) اگر او درستکار باشد، آنگاه او متدین است.
- (۲) اگر او متدین نباشد، آنگاه او درستکار نیست.
- (۳) اگر او درستکار نباشد، آنگاه او متدین نیست.
- (۴) او درستکار نیست ولی او متدین است.

LILIPOOTBOX

عکس نقیض ترکیب شرطی

🍏 اگر $p \Rightarrow q$ یک گزاره شرطی باشد، آنگاه گزاره $\sim p \Rightarrow \sim q$ را عکس نقیض ترکیب شرطی می نامند. یعنی برای ساختن عکس نقیض یک ترکیب شرطی جای فرض (مقدم) و حکم (تالی) عوض شده و هر دو گزاره نقیض می شود.

🍎 اگر عددی اول باشد، آنگاه فرد است ← عکس نقیض ← اگر عددی زوج باشد، آنگاه اول نیست.

🍊 عکس نقیض هر ترکیب شرطی با خود ترکیب شرطی هم ارز است. یعنی همواره داریم:

$$p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$$

🍎 اگر در مثلث ABC داشته باشیم $a^2 = b^2 + c^2$ آنگاه $\hat{A} = 90^\circ$ است. « معادل است با «اگر در مثلث ABC، زاویه \hat{A} برابر 90° نباشد، آنگاه $a^2 = b^2 + c^2$ نیست»

ANALYSE

📌 باید جای فرض (مقدم) و حکم (تالی) را عوض کرده و هر دو گزاره را نیز نقیض کنیم. یعنی:

او متدین نیست \Rightarrow او درستکار نیست \equiv (او متدین است) $\sim \Rightarrow$ (او درستکار است) \sim

بنابراین عکس نقیض گزاره «اگر او متدین باشد، آنگاه درستکار است» به صورت «اگر او درستکار نباشد آنگاه او متدین نیست» خواهد بود.

پاسخ: گزینه ۳

TEST 009

تساوی $x=y$ چه شرطی برای $|x|=|y|$ است؟

(۱) لازم و کافی

(۲) لازم و غیر کافی

(۳) غیر لازم و کافی

(۴) غیر لازم و غیر کافی

LILIPOOTBOX خواندنی

شرط لازم و کافی

🍏 گزاره $p \Rightarrow q$ را به صورت‌های زیر نیز می‌توانیم بخوانیم:

👉 p شرط کافی برای q است.

👉 q شرط لازم برای p است.

🍏 اگر بخواهیم ببینیم گزاره x چه شرطی برای گزاره y است، باید $x \Rightarrow y$ و همچنین $y \Rightarrow x$ را

تشکیل دهیم. در این صورت:

👉 اگر $x \Rightarrow y$ درست باشد، x شرط کافی برای y است.

👉 اگر $y \Rightarrow x$ درست باشد، x شرط لازم برای y است.

ANALYSE

🍏 گزاره‌های زیر را تشکیل می‌دهیم:

شرط کافی $x=y \Rightarrow |x|=|y|$ 🍏

شرط غیر لازم $|x|=|y| \not\Rightarrow x=y$ 🍏

حتماً می‌دانید که اگر $|x|=|y|$ باشد، الزاماً $x=y$ نخواهد بود و $x=\pm y$ است. البته باید دقت کنیم که این سؤال تا حدی از آزمون‌های کتاب درسی فاصله دارد و جزء مطالب خواندنی کتاب درسی است.

پاسخ گزینه ۳