

## (فصل ۶)

### تابع

- درس ۱: مفهوم تابع ۱۳۹  
 درس ۲: تابع یک‌به‌یک و وارون ۱۵۸  
 درس ۳: اعمال جبری و ترکیب توابع ۱۶۹

## (فصل ۷)

### توابع نمایی و لگاریتمی

- درس ۱: تابع نمایی ۱۸۶  
 درس ۲: تابع لگاریتمی ۱۹۴

## (فصل ۸)

### مثلثات

- درس ۱: زاویه و نسبت‌های مثلثاتی ۲۱۱  
 درس ۲: دایره مثلثاتی ۲۲۲  
 درس ۳: اتحادهای مثلثاتی ۲۳۰  
 درس ۴: توابع مثلثاتی ۲۴۱

## (فصل ۹)

### حد و پیوستگی

- درس ۱: همسایگی و مفهوم حد ۲۴۹  
 درس ۲: محاسبه حد توابع کسری (حالت  $\frac{0}{0}$ ) ۲۶۱  
 درس ۳: پیوستگی ۲۷۲

## (فصل ۱۰)

### هندسه تحلیلی

- درس ۱: معادله خط ۲۸۶

- پاسخ‌نامه تشریحی ۳۰۲  
 پاسخ‌نامه کلیدی ۵۴۹

## (فصل ۱)

### الگو و دنباله

- درس ۱: الگو و دنباله ۸  
 درس ۲: دنباله حسابی ۱۷  
 درس ۳: دنباله هندسی ۲۷

## (فصل ۲)

### توان‌های گویا و عبارات‌های جبری

- درس ۱: ریشه‌گیری و توان‌های گویا ۴۱  
 درس ۲: عبارات‌های جبری، اتحادها و تجزیه ۵۵  
 درس ۳: گویا کردن مخرج کسرها ۶۳

## (فصل ۳)

### معادله و تابع درجه دوم

- درس ۱: معادله درجه دو ۶۹  
 درس ۲: تابع درجه دوم ۸۳

## (فصل ۴)

### معادله و نامعادله

- درس ۱: معادلات گویا ۹۵  
 درس ۲: تعیین علامت و نامعادله گویا ۱۰۰  
 درس ۳: معادلات گنگ (رادیکالی) ۱۰۷

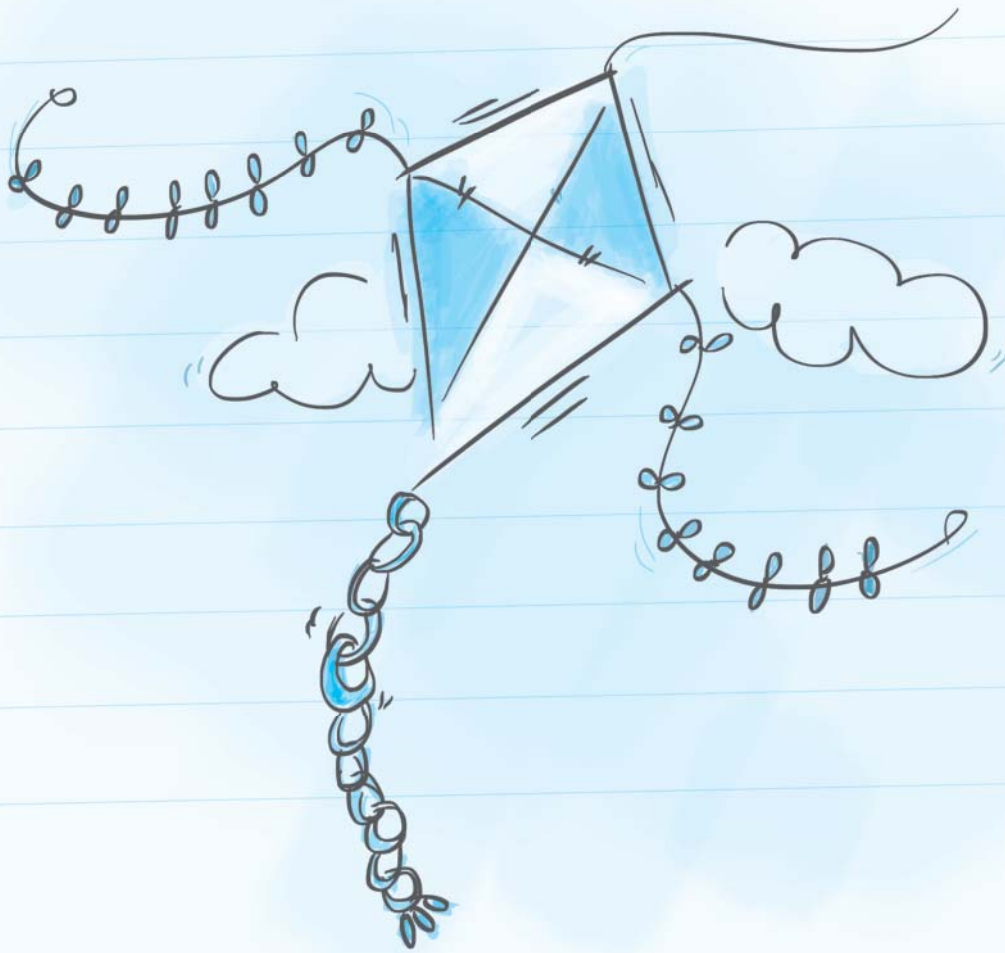
## (فصل ۵)

### قدر مطلق و جزء صحیح

- درس ۱: قدر مطلق ۱۱۵  
 درس ۲: جزء صحیح ۱۲۸

(فصل ١)

# الگوودنیاله

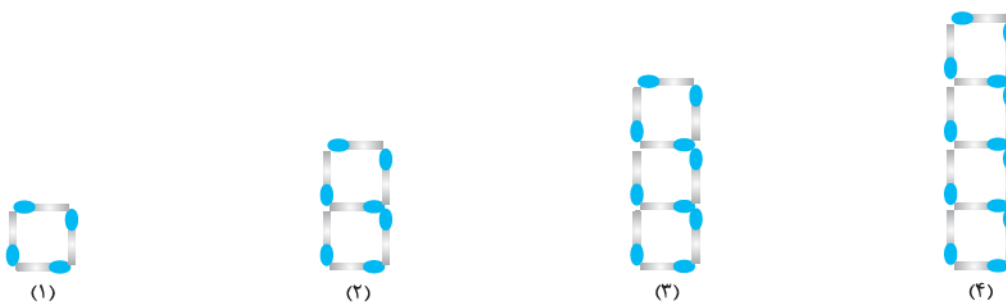


# الگو و دنباله

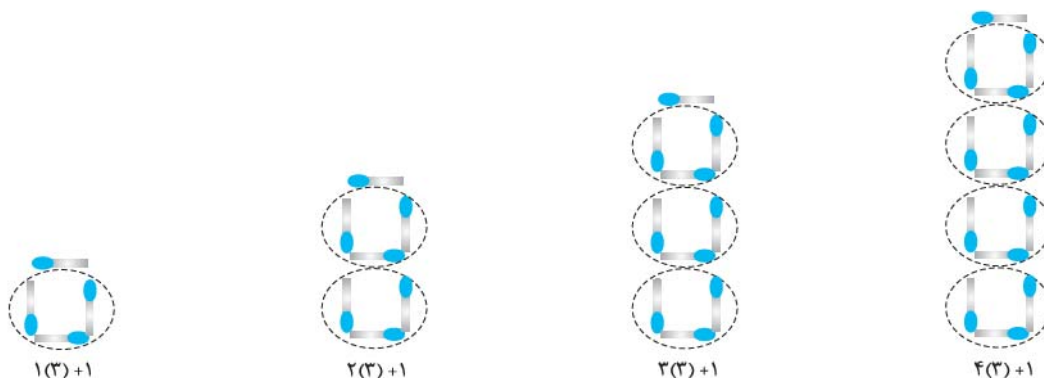
## الگو

به شکل‌های زیر نگاه کنید:

بعضی وقت‌ها یک ساختار منظمی از اشکال داریم که این ساختار منظم و روند آن‌ها از یک شکل به شکل دیگر و از یک مرحله به مرحله دیگر رعایت می‌شود. برای این شکل‌ها و روند تغییر آن‌ها می‌توانیم یک الگو پیدا کنیم و براساس آن روند هر شکل و هر مرحله را تعیین کنیم. به عنوان مثال:



می‌خواهیم برای تعداد چوب‌کبریت‌های استفاده‌شده در هر مرحله، یک الگو یا فرمول پیدا کنیم. برای این کار می‌توانیم هر شکل را به صورت زیر دسته‌بندی کنیم:



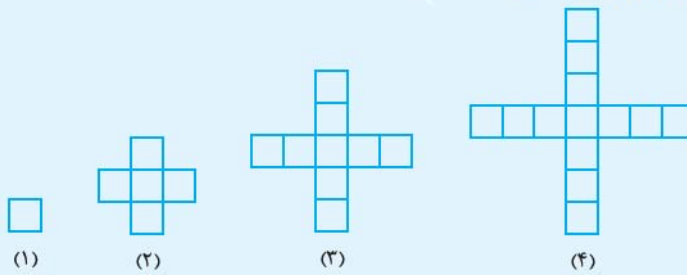
از خط‌چین‌هایی که دور چوب‌کبریت‌ها کشیدیم، می‌فهمیم در هر شکل به اندازه شماره شکل، دسته‌های ۳ تایی و ۱ چوب‌کبریت تک هم داریم، یعنی این:  $\text{تعداد چوب‌کبریت‌ها} = (3 \times \text{شماره شکل}) + 1$  حالا بیایید تعداد چوب‌کبریت‌های شکل‌ها را در یک جدول بنویسیم. بعضی وقت‌ها اعداد بهتر از شکل با آدم صحبت می‌کنند.

شماره شکل	۱	۲	۳	۴
تعداد چوب‌کبریت‌ها	۴	۷	۱۰	۱۳

اگر اعداد سطر اول جدول را در ۳ ضرب کنیم و با ۱ جمع کنیم، تعداد چوب‌کبریت‌ها به دست می‌آید؛ پس می‌توانیم نتیجه بگیریم که:  $a_n = 3n + 1$

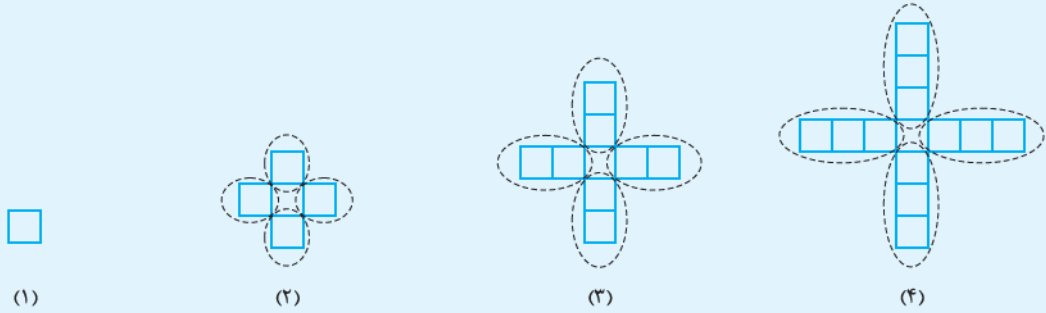
پس اگر تعداد چوب‌کبریت‌های شکل  $n$ ام را با  $a_n$  نشان دهیم، آن وقت: حالا خیلی راحت می‌توانیم بگوییم مثلاً شکل بیستم چند چوب‌کبریت دارد: پس بعضی وقت‌ها ما با جدول اعداد می‌توانیم به الگوی موردنظر برسیم، بعضی وقت‌ها هم به کمک الگویی که در شکل‌ها می‌بینیم.

**تست** با توجه به شکل زیر، تعداد مربع‌ها در شکل چندم برابر با ۱۲۵ است؟



- ۳۰ (۱)
- ۳۱ (۲)
- ۳۲ (۳)
- ۳۳ (۴)

**پاسخ گزینه ۳** اگر به شکل‌ها به صورت زیر نگاه کنیم، الگوی تعداد مربع‌ها به دست می‌آید:

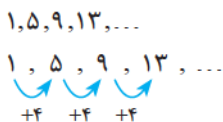


شماره شکل	۱	۲	۳	۴
تعداد مربع‌ها	۱	$4 \times 1 + 1$	$4 \times 2 + 1$	$4 \times 3 + 1$

با توجه به الگوی بالا، تعداد مربع‌ها در هر شکل از رابطه روبه‌رو به دست می‌آید:  
 پس تعداد مربع‌های شکل  $n$ ام از رابطه  $a_n = 4(n-1) + 1 = 4n - 3$  به دست می‌آید.  
 برای آن که ببینیم تعداد مربع‌های کدام شکل برابر با ۱۲۵ است، باید معادله زیر را حل کنیم:  
 $a_n = 125 \Rightarrow 4n - 3 = 125 \Rightarrow n = 32$

**الگوی خطی**

گفتیم جمله  $n$ ام یک الگو را با  $a_n$  نشان می‌دهیم. به جمله  $n$ ام یک الگو، جمله عمومی آن الگو هم می‌گوییم. برگردیم به مثال قبل. تعداد مربع‌های شکل‌ها به صورت روبه‌رو بود:



هر جمله این الگو، دقیقاً ۴ واحد از جمله قبلی‌اش بیشتر است:

به الگوهایی مثل الگوی بالا که اختلاف هر دو جمله پشت سر هم آن، عددی ثابت باشد، الگوی خطی می‌گوییم.

جمله عمومی الگوی ۱، ۵، ۹، ۱۳، ... به صورت  $a_n = 4n - 3$  شد. در این الگو به موارد زیر توجه کنید:

اولاً جمله عمومی آن مثل معادله خط یک عبارت درجه یک (بر حسب  $n$ ) شد، برای همین به آن الگوی خطی می‌گوییم.

ثانیاً اختلاف هر دو جمله متوالی آن ۴ است که این عدد همان ضریب  $n$  در جمله عمومی دنباله است.

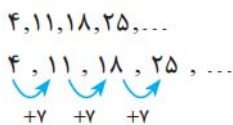
پس دو نکته زیر را در مورد الگوهای خطی مدنظر داشته باشیم:

① جمله عمومی آن به صورت  $t_n = an + b$  است.

② اختلاف دو جمله متوالی آن برابر با ضریب  $n$  یعنی  $a$  است.

مثلاً می‌خواهیم جمله عمومی الگوی خطی روبه‌رو را بنویسیم:

اختلاف جمله‌های متوالی آن ۷ است:



$t_n = 7n + b$

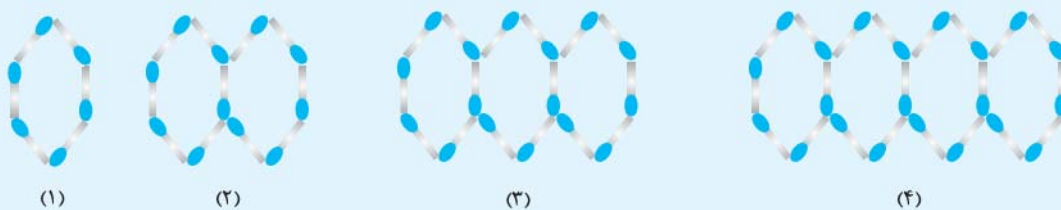
$t_1 = 4 \Rightarrow 7(1) + b = 4 \Rightarrow b = -3$

پس در جمله عمومی آن، ضریب  $n$  برابر ۷ است:

با جمله اول،  $b$  را به دست می‌آوریم:

پس جمله عمومی آن به صورت  $t_n = 7n - 3$  است.

**تست** با توجه به الگوی زیر، در شکل چندم تعداد چوب کبریت‌ها ۳۵۶ است؟



(۱) ۷۰ (۱) (۲) ۷۱ (۲) (۳) ۷۲ (۳) (۴) ۷۳ (۴)

**پاسخ** گزینه ۲ تعداد چوب کبریت‌های شکل‌ها را در یک جدول می‌نویسیم:

جمله الگو	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$
تعداد چوب کبریت‌ها	۶	۱۱	۱۶	۲۱

$\xrightarrow{+5}$        $\xrightarrow{+5}$        $\xrightarrow{+5}$

چون تفاضل دو جمله متوالی این الگو برابر ۵ است، پس این الگو، یک الگوی خطی است که ضریب آن در جمله عمومی آن برابر ۵ است، پس جمله عمومی این الگو به صورت  $t_n = 5n + b$  درمی‌آید.

حالا کافی است  $t_1 = 6$  را در آن قرار دهیم تا  $b$  به دست آید:

$$t_1 = 6 \Rightarrow 5(1) + b = 6 \Rightarrow b = 1$$

پس جمله عمومی آن به صورت  $t_n = 5n + 1$  است. برای آن که بینیم جمله چندم آن ۳۵۶ است، باید معادله زیر را حل کنیم:

$$t_n = 356 \Rightarrow 5n + 1 = 356 \Rightarrow n = 71$$

**تست** در یک الگوی خطی، جملات پنجم و سیزدهم به ترتیب  $-7$  و  $5$  هستند. مقدار جمله چندم این الگوی خطی با شماره آن جمله برابر است؟

(۱) ۲۸ (۲) ۲۹ (۳) ۳۰ (۴) ۳۱

**پاسخ** گزینه ۲ فرض می‌کنیم جمله عمومی این الگوی خطی به صورت  $t_n = an + b$  است، پس داریم:

$$t_5 = -7 \Rightarrow 5a + b = -7$$

$$t_{13} = 5 \Rightarrow 13a + b = 5$$

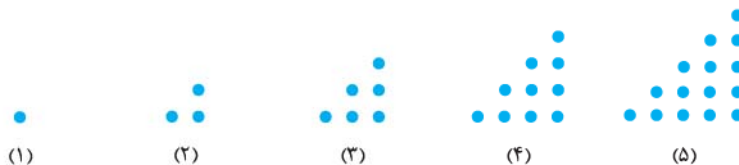
با حل دستگاه بالا داریم  $a = \frac{3}{2}$  و  $b = -\frac{29}{2}$ ؛ پس جمله عمومی این دنباله به صورت  $t_n = \frac{3}{2}n - \frac{29}{2}$  است. برای آن که بینیم مقدار

جمله چندم این دنباله با شماره آن جمله برابر است، باید معادله زیر را حل کنیم:

$$t_n = n \Rightarrow \frac{3}{2}n - \frac{29}{2} = n \xrightarrow{\times 2} 3n - 29 = 2n \Rightarrow n = 29$$

**الگوهای غیرخطی**

الگوی زیر را ببینید:



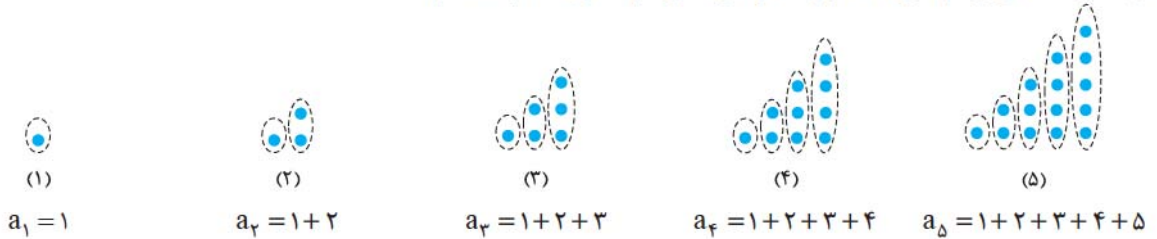
شماره شکل	۱	۲	۳	۴	۵
تعداد نقطه‌ها	۱	۳	۶	۱۰	۱۵

جملات این الگو به صورت روبه‌رو هستند:

$$1, 3, 6, 10, 15, \dots$$

$\xrightarrow{+2}$        $\xrightarrow{+3}$        $\xrightarrow{+4}$        $\xrightarrow{+5}$

می بینید که یک مقدار ثابت به جمله‌ها اضافه نشده است، پس این الگو، الگوی خطی نیست. حالا برویم سراغ پیدا کردن جمله عمومی این الگوی غیر خطی. اگر دقت کنید، می‌توانیم الگوی به کار رفته در این شکل‌ها را خیلی ساده پیدا کنیم:



در واقع جمله  $a_n$  آن برابر با مجموع اعداد طبیعی از ۱ تا  $n$  است:

$$a_n = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$$

می‌دانیم مجموع اعداد طبیعی متوالی از ۱ تا  $n$  از رابطه  $\frac{n(n+1)}{2}$  به دست می‌آید، پس:

جمله عمومی الگوی بالا به صورت  $a_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$  به دست آمد. الگوهایی که جمله عمومی آن به صورت  $t_n = an + b$  نباشد، الگوهای غیر خطی می‌نامیم.

معروف‌ترین نوع الگوهای غیر خطی، الگوی درجه دوم است. جمله عمومی آن‌ها به صورت  $a_n = bn^2 + cn + d$  است.



بیا یک بار تعداد نقطه‌های شکل‌های الگوی بالا را بنویسیم:

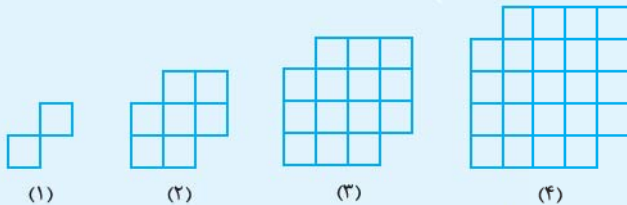
تفاضل دو جمله پشت سر هم آن‌ها به صورت  $2, 3, 4, 5, \dots$  است که یک دنباله حسابی با قدرنسبت ۱ است. ضرب  $n^2$  در جمله عمومی این الگو  $\frac{1}{2}$  بود که نصف همین قدرنسبت است.

دو نکته زیر را در مورد الگوی درجه دوم بلد باشیم:

۱) جمله عمومی آن به صورت  $a_n = bn^2 + cn + d$  است.

۲) تفاضل هر دو جمله متوالی آن تشکیل یک دنباله حسابی می‌دهند. نصف قدرنسبت این دنباله حسابی برابر با ضرب  $n^2$  در جمله عمومی یعنی  $b$  است.

**تست** با توجه به الگوی زیر، تعداد مربع‌های کوچک شکل دهم کدام است؟



- ۱۱۹ (۱)
- ۹۸ (۲)
- ۱۲۳ (۳)
- ۱۲۵ (۴)

**پاسخ گزینه ۱** **راه اول** تعداد مربع‌های کوچک شکل‌ها را در یک جدول می‌نویسیم:

جمله الگو	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$
تعداد مربع‌ها	۲	۷	۱۴	۲۳
		+۵	+۷	+۹

تفاضل جملات متوالی الگوی بالا به صورت  $5, 7, 9, \dots$  است که با هم تشکیل یک دنباله حسابی با قدرنسبت ۲ می‌دهند، پس این الگو یک الگوی درجه دوم است و نصف قدرنسبت یعنی ۱، برابر با ضرب  $n^2$  است؛ بنابراین جمله عمومی این الگو به صورت  $a_n = n^2 + cn + d$  است. با جای‌گذاری جملات اول و دوم، مقدار مجهولات  $c$  و  $d$  را هم به دست می‌آوریم:

$$a_1 = 2 \Rightarrow 1 + c + d = 2 \Rightarrow c + d = 1$$

$$a_2 = 7 \Rightarrow 4 + 2c + d = 7 \Rightarrow 2c + d = 3$$

با حل دو معادله بالا داریم  $c = 2$  و  $d = -1$ .

پس جمله عمومی این الگو به صورت  $a_n = n^2 + 2n - 1$  است و جمله دهم آن برابر است با:

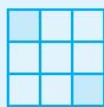
$$a_{10} = 10^2 + 2(10) - 1 = 119$$

۱- دنباله حسابی دنباله‌ای است که هر جمله آن از افزودن یک عدد ثابت به جمله قبلی‌اش به دست می‌آید. آن عدد ثابت را قدرنسبت می‌گوییم. در درس بعد این دنباله را کامل بررسی می‌کنیم.

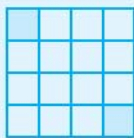
**راه دو:** اگر به هر شکل ۲ مربع در گوشه‌های خالی شکل اضافه کنیم، به اعداد مربع کامل می‌رسیم:



(۱)



(۲)



(۳)



(۴)

با توجه به شکل بالا می‌توانیم الگوی روبه‌رو را بنویسیم:

$$a_n = (n+1)^2 - 2 = n^2 + 2n + 1 - 2 = n^2 + 2n - 1$$

پس  $a_n$  برابر است با:

## دنباله

به تعدادی عدد که پشت سر هم نوشته شوند، یک دنباله می‌گوییم. هر کدام از این اعداد، یک جمله از دنباله هستند.

(۱) دنباله: ۱, ۴, ۹, ۱۶, ۲۵, ...

به دو دنباله زیر نگاه کنید:

(۲) دنباله: ۷, -۲,  $\frac{3}{4}$ , ۱, -۱۱, ...

جملات یک دنباله می‌توانند الگو داشته باشند، مثل دنباله (۱) که الگوی آن  $a_n = n^2$  است. بعضی وقت‌ها هم جملات یک دنباله، الگوی خاصی ندارند، مثل دنباله (۲).

به جمله  $n$ ام یک دنباله که با  $a_n$  نشان می‌دهیم، جمله عمومی آن دنباله می‌گوییم. مثلاً جمله عمومی دنباله (۱) به صورت  $a_n = n^2$  بود. حواستان هم باشد که  $n$  (شماره جمله‌ها)، همیشه یک عدد طبیعی است.

**تست** در جدول زیر، چند جمله اول سه دنباله را می‌بینید. کدام گزینه جمله عمومی هیچ‌کدام از این سه دنباله نیست؟

	جمله اول	جمله دوم	جمله سوم	جمله چهارم	...
$a_n$	-۳	۱	۵	۹	...
$b_n$	-۲	۳	-۴	۵	...
$c_n$	۳	۸	۱۵	۲۴	...

(۱)  $n^2 + 2n$

(۲)  $-n^2 + 4n$

(۳)  $4n - 7$

(۴)  $(-1)^n (n+1)$

**پاسخ گزینه ۲** جمله عمومی هر سه دنباله را به دست می‌آوریم.

جملات دنباله  $a_n$  تا ۴ تا ۴ اضافه شده‌اند، پس یک الگوی خطی به صورت  $a_n = 4n + c$  است. با جای‌گذاری  $a_1 = -3$ ،  $c$  را به دست می‌آوریم:

$$a_1 = -3 \Rightarrow 4(1) + c = -3 \Rightarrow c = -7 \Rightarrow a_n = 4n - 7$$

اگر جملات  $b_n$  را بدون علامت ببینیم، به صورت «۲, ۳, ۴, ۵, ...» هستند که جمله عمومی این دنباله  $n+1$  می‌شود. چون جملات یکی در میان، منفی و مثبت هستند، باید  $(-1)^n$  هم در  $n+1$  ضرب شود، پس جمله عمومی دنباله دوم به صورت  $b_n = (-1)^n (n+1)$  است.

در دنباله سوم که «۳, ۸, ۱۵, ۲۴, ...» است، اختلاف جملات متوالی به صورت «۵, ۷, ۹, ...» است که با هم تشکیل یک دنباله حسابی با قدرنسبت ۲ می‌دهند؛ پس این دنباله یک الگوی درجه دوم است و ضریب  $n^2$  در آن نصف قدرنسبت یعنی ۱ است:  $c_n = n^2 + cn + d$ . حالا با جای‌گذاری جمله اول و دوم، مقدار  $c$  و  $d$  را حساب می‌کنیم:

$$\left. \begin{aligned} c_1 = 3 &\Rightarrow 1 + c + d = 3 \Rightarrow c + d = 2 \\ c_2 = 8 &\Rightarrow 4 + 2c + d = 8 \Rightarrow 2c + d = 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow c = 2, d = 0 \Rightarrow c_n = n^2 + 2n$$

پس فقط جمله عمومی (۲) مربوط به هیچ‌کدام از دنباله‌های داخل جدول نیست.

البته می‌توانید با محاسبه چند جمله اول هر دنباله و مقایسه با جملات هر دنباله در جدول، جواب را بیابید.

**تست** مجموع جملات مثبت دنباله  $a_n = \frac{5n-11}{17-3n}$  کدام است؟

۹/۹ (۴)

۹/۶ (۳)

۹/۳ (۲)

۹ (۱)

**پاسخ گزینه ۲** برای آن که جملات مثبت  $a_n$  را پیدا کنیم، باید نامعادله  $a_n > 0$  را حل کنیم:

$$a_n > 0 \Rightarrow \frac{5n-11}{17-3n} > 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} \frac{11}{5} < n < \frac{17}{3}$$

	$\frac{11}{5}$	$\frac{17}{3}$
$5n-11$	-	+
$17-3n$	+	-
$a_n$	-	+

چون  $n \in \mathbb{N}$  است، فقط اعداد طبیعی محدوده  $\frac{11}{5} < n < \frac{17}{3}$  را می‌توانیم بپذیریم:

پس جملات سوم، چهارم و پنجم این دنباله، اعدادی مثبت هستند. آن‌ها را حساب کرده و با هم جمع می‌کنیم:

$$a_3 = \frac{15-11}{17-9} = \frac{1}{2}, \quad a_4 = \frac{20-11}{17-12} = \frac{9}{5}, \quad a_5 = \frac{25-11}{17-15} = 7$$

$$a_3 + a_4 + a_5 = \frac{1}{2} + \frac{9}{5} + 7 = \frac{5+18+70}{10} = \frac{93}{10} = 9 \frac{3}{10}$$

جمله عمومی بعضی از دنباله‌ها را به صورت دوضابطه‌ای می‌توان نوشت. برای مثال به دنباله  $-1, 2, -1, 4, -1, 6, \dots$  توجه کنید. در این دنباله جملات فرد، مقدار ثابت  $-1$  و جملات زوج اعداد زوج طبیعی و متوالی هستند؛ بنابراین جمله عمومی دنباله را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$a_n = \begin{cases} -1, & \text{فرد } n \\ n, & \text{زوج } n \end{cases}$$

(جمله دوم برابر ۲، جمله چهارم برابر ۴ و ... است؛ پس جمله عمومی جملات زوج برابر  $n$  است.)

بعضی وقت‌ها ممکن است جمله عمومی یک دنباله را رک و پوست‌کنده به ما ندهند، مثلاً یک رابطه بین جملات دنباله و یک جمله از دنباله (مثل  $a_1$ ) را به ما بدهند. در این جور دنباله‌ها باید با جای‌گذاری اعداد طبیعی به جای  $n$  در رابطه داده‌شده، جملات دنباله را پیدا کنیم.

**تست** در یک دنباله اعداد،  $a_1 = 1$  و برای هر  $n \in \mathbb{N}$  داریم  $a_{n+1} = a_n + n + 1$ . جمله شانزدهم این دنباله کدام است؟

۱۳۶ (۴)

۱۳۴ (۳)

۱۲۴ (۲)

۱۲۰ (۱)

**پاسخ گزینه ۴** در رابطه  $a_{n+1} = a_n + n + 1$  جای  $n$  اعداد طبیعی قرار می‌دهیم تا جملات دنباله به دست آیند:

$$n=1 \Rightarrow a_2 = a_1 + 2 = 1 + 2$$

$$n=2 \Rightarrow a_3 = a_2 + 3 = 1 + 2 + 3$$

$$n=3 \Rightarrow a_4 = a_3 + 4 = 1 + 2 + 3 + 4$$

$$a_{16} = 1 + 2 + 3 + \dots + 16 = \frac{16(17)}{2} = 136 \quad \text{از الگوی بالا می‌توانیم نتیجه بگیریم، جمله شانزدهم این دنباله به صورت روبه‌رو است.}$$

تا قبل از این، دنباله‌هایی که دیده بودیم، جمله عمومی‌شان را داشتیم. در دنباله مثال بالا، جمله عمومی را نداشتیم و یک رابطه بین جملات به صورت  $a_1 = 1$  و  $a_{n+1} = a_n + n + 1$  داشتیم که مقدار هر جمله به مقدار جمله قبلی خود وابسته بود. به این مدل دنباله‌ها، دنباله‌هایی با رابطه بازگشتی می‌گوییم.

### پرسش‌های چهارگزینه‌ای

الگو

۱- با توجه به الگوی مقابل، تعداد چوب‌کبریت‌ها در مرحله نهم کدام است؟



(۱)

(۲)

(۳)

۱۹ (۲)

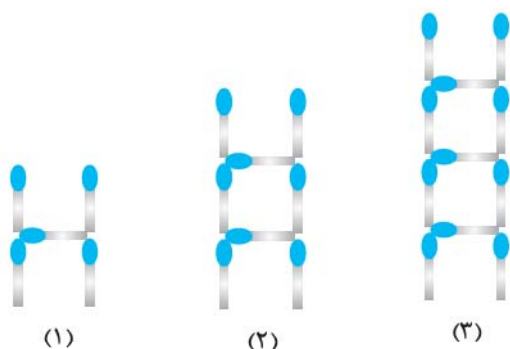
۱۷ (۱)

۲۳ (۴)

۲۱ (۳)



۲- با توجه به الگوی مقابل، تعداد چوب‌کبریت‌ها در مرحله  $n$ ام کدام است؟



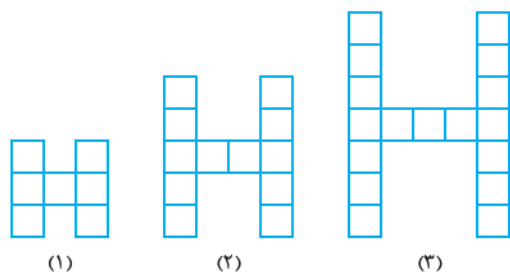
(۱)  $2n + 3$

(۲)  $4n + 1$

(۳)  $3n + 2$

(۴)  $6n - 1$

۳- با توجه به الگوی روبه‌رو، در کدام مرحله تعداد مربع‌ها برابر ۲۱۲ است؟



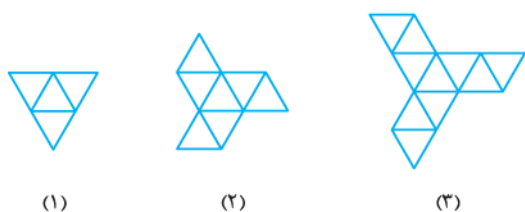
(۱) ۳۸

(۲) ۳۶

(۳) ۴۴

(۴) ۴۲

۴- شکل‌های الگوی زیر از پاره‌خطهایی به طول ۲ واحد ساخته شده‌اند. مجموع طول پاره‌خطها در شکل پانزدهم کدام است؟



(۱) ۱۹۶

(۲) ۱۹۴

(۳) ۱۸۶

(۴) ۱۸۴

۵- در الگوهای زیر، تفاضل تعداد دایره‌های توپر در دو شکل دهم و یازدهم کدام است؟



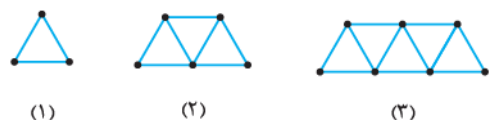
(۱) ۱۷

(۱) صفر

(۲) ۲۱

(۳) ۱۹

۶- با توجه به الگوی زیر، به ازای ۴۷ رأس، تعداد اضلاع کدام خواهد بود؟



(۱) ۸۵

(۱) ۸۳

(۲) ۹۱

(۳) ۸۹

۷- جمله عمومی یک الگوی خطی است. اگر  $f_6 = 27$  و  $f_{13} = 55$  باشد، جمله چندم دنباله برابر ۹۹ است؟

(۱) ۲۵

(۲) ۲۴

(۳) ۲۳

(۴) ۲۲

۸- جمله عمومی یک الگوی خطی به صورت  $f_n = (k-2)n^2 + pn + k$  است. اگر هر جمله (غیر از جمله اول) ۴ واحد از جمله قبل از خود بیشتر باشد، جمله دهم چند برابر جمله سوم است؟

(۱) ۲/۵

(۲) ۱/۵

(۳) ۳

(۴) ۴

۹- در کدام مرحله از الگوی روبه‌رو، تعداد دایره‌ها ۵۱ واحد از مرحله قبل خود بیشتر است؟



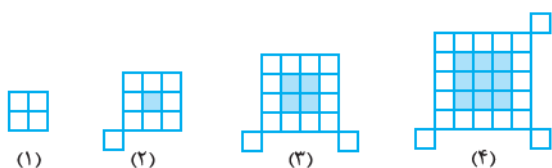
(۱) بیست و چهارم

(۲) بیست و سوم

(۳) بیست و دوم

(۴) بیست و پنجم

۱۰- با توجه به الگوی زیر، در کدام مرحله تعداد مربع‌های رنگی ۴۶ واحد از تعداد مربع‌های سفید بیشتر است؟



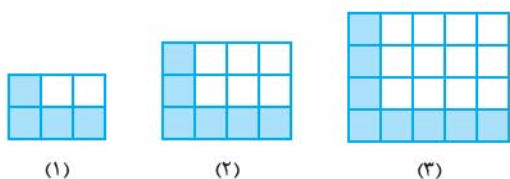
(۱) دهم

(۲) یازدهم

(۳) دوازدهم

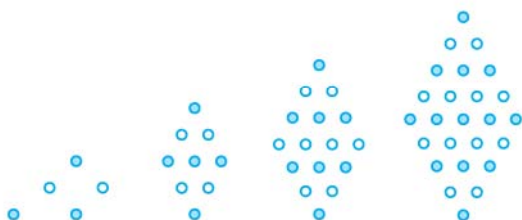
(۴) سیزدهم

۱۱- با توجه به الگوی زیر، در مرحله‌ای که تعداد خانه‌های رنگی ۳۸ است، تعداد خانه‌های سفید چقدر است؟



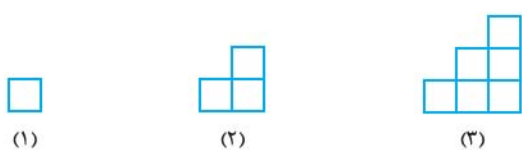
- (۱) ۳۰۶
- (۲) ۳۴۲
- (۳) ۳۸۰
- (۴) ۴۲۰

۱۲- در الگوی مقابل، تعداد دایره‌های توپ در جمله یازدهم کدام است؟



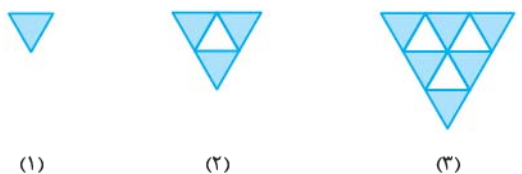
- (۱) ۶۱
- (۲) ۶۲
- (۳) ۶۳
- (۴) ۶۴

۱۳- برای ساخت الگوی پله‌ای زیر از قطعه‌های مربعی استفاده شده است. در مرحله‌ای که ۱۶ پله دارد، چند قطعه مربعی استفاده شده است؟



- (۱) ۱۰۵
- (۲) ۱۲۰
- (۳) ۱۲۸
- (۴) ۱۳۶

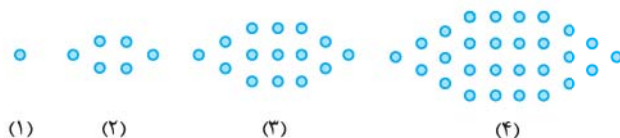
۱۴- در الگوی زیر، در کدام شکل تعداد مثلث‌های کوچک رنگی ۵/۵۲ درصد تعداد کل مثلث‌های کوچک است؟



- (۱) هجدهم
- (۲) بیستم
- (۳) بیست و دوم
- (۴) بیست و چهارم

(تمرین کتاب ریاضی ۱)

۱۵- تعداد نقطه‌ها در شکل دوازدهم الگوی زیر کدام است؟



- (۱) ۲۸۴
- (۲) ۳۰۰
- (۳) ۲۵۶
- (۴) ۲۷۶

۱۶- جملات دنباله درجه دوم  $t_n = an^2 + bn + c$  به صورت ۱، ۳، ۷، ۱۳، ... است.  $b - c$  کدام است؟

- (۱) ۲
- (۲) -۲
- (۳) ۳
- (۴) -۳

۱۷- در الگوی درجه دوم  $t_n = an^2 + bn$ ، یکی از جملات ۱۷ واحد از جمله قبل خود بیشتر و ۲۱ واحد از جمله بعد از خود کم تر است. اگر جمله سوم دنباله برابر ۱۵ باشد، جمله ششم آن کدام است؟

- (۱) ۶۶
- (۲) ۹۱
- (۳) ۱۰۸
- (۴) ۴۵

دنباله

۱۸- جمله عمومی یک دنباله به صورت  $a_n = \frac{2n}{n+1}$  است. مجموع جملات سوم و پنجم کدام است؟

- (۱)  $\frac{7}{3}$
- (۲)  $\frac{8}{3}$
- (۳)  $\frac{17}{6}$
- (۴)  $\frac{19}{6}$

۱۹- جمله چندم دنباله  $a_n = \frac{n+1}{3n-2}$  برابر  $\frac{3}{8}$  است؟

- (۱) ۱۲
- (۲) ۱۳
- (۳) ۱۴
- (۴) ۱۵

۲۰- اگر  $a_{2n+3} = \frac{n+1}{n+2}$ ، آن‌گاه جمله نوزدهم دنباله  $\{a_n\}$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{0}{72}$
- (۲)  $\frac{0}{8}$
- (۳)  $\frac{0}{14}$
- (۴)  $\frac{0}{9}$

۲۱- جمله عمومی دنباله  $\dots, \frac{25}{64}, -\frac{16}{8}, \frac{9}{8}, -4$  به صورت  $a_n = \frac{b_n}{n}$  است. دنباله  $b_n$  کدام است؟

(۱)  $\pm \frac{(n+1)^2}{n^2}$  (۲)  $\frac{(n+1)^2}{(-n)^2}$  (۳)  $(-1)^n (1 + \frac{1}{n})^2$  (۴)  $(-1)^n (1 - \frac{3}{n})^2$

۲۲- در دنباله  $a_n = \frac{n}{16} + (-\frac{1}{4})^n$  چند جمله منفی وجود دارد؟

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۱ (۴) ۴

۲۳- کمترین مقدار دنباله  $a_n = 2n^2 - 18n + 1$  کدام است؟

(۱) -۳۹ (۲) -۳۹/۵ (۳) -۴۰ (۴) -۴۰/۵

۲۴- کمترین جمله دنباله  $a_n = \frac{n+1}{2n-9}$  چه مقداری دارد؟

(۱) -۶ (۲)  $-\frac{7}{3}$  (۳) -۵ (۴)  $-\frac{4}{3}$

۲۵- جمله دهم دنباله  $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$  کدام است؟

(۱) ۳۴ (۲) ۵۵ (۳) ۸۹ (۴) ۱۴۴

(تجربی ۹۵)

۲۶- در یک دنباله اعداد  $a_1 = 1$  و برای هر  $n \geq 2$  داریم  $a_n = 2a_{n-1} + 1$ . جمله هشتم این دنباله کدام است؟

(۱) ۱۲۷ (۲) ۱۵۹ (۳) ۲۴۷ (۴) ۲۵۵

۲۷- مجموع نود و نه جمله اول دنباله  $a_n = \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}}$  کدام است؟

(۱)  $9 + \sqrt{99}$  (۲)  $10 + \sqrt{99}$  (۳)  $\frac{10}{\sqrt{99+1}}$  (۴)  $\frac{10}{\sqrt{99-1}}$

# دنباله حسابی

## جمله عمومی دنباله حسابی

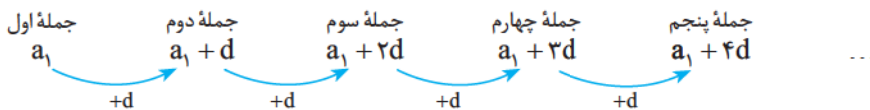
در درس قبل الگوهای خطی و غیر خطی را دیدید. اسم دیگر الگوهای خطی، «دنباله حسابی» است.

همان تعریفی که برای الگوی خطی گفتیم، برای دنباله حسابی هم می‌شود بیان کرد:

«به دنباله‌ای که در آن هر جمله (به غیر از جمله اول) با اضافه شدن یک مقدار ثابت به جمله قبل از خودش به دست می‌آید، یک دنباله حسابی و به آن مقدار ثابت، قدرنسبت دنباله می‌گوییم.»

دنباله اعداد «... ۳، ۸، ۱۳، ۱۸» یک دنباله حسابی است، چون هر جمله آن با اضافه شدن ۵ واحد به جمله قبلی‌اش به دست می‌آید. جمله اول این دنباله ۳ و قدرنسبت آن ۵ است.

جمله‌های یک دنباله حسابی با جمله اول  $a_1$  و قدرنسبت  $d$  را به شکل زیر نشان می‌دهیم:



از الگوی بالا می‌توانیم این جوری نتیجه بگیریم که جمله عمومی دنباله حسابی از رابطه روبه‌رو به دست می‌آید:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

الان هر جمله‌ای از دنباله را که بخواهیم، می‌توانیم بر حسب  $a_1$  و  $d$  بنویسیم، مثلاً جمله‌های هشتم و بیستم دنباله حسابی بر حسب  $a_1$  و  $d$  به صورت مقابل هستند:

$$a_8 = a_1 + 7d, \quad a_{20} = a_1 + 19d$$

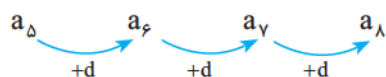
این را هم حواستان باشد که در جمله عمومی، ضریب  $n$  همان  $d$  است، یعنی اگر جمله عمومی یک دنباله حسابی  $a_n = 4n - 1$  باشد، قدرنسبت آن ۴ است.

### چند رابطه بین جملات دنباله حسابی

یک سری رابطه داریم که اگر آن‌ها را بلد باشیم، بعضی وقت‌ها در حل سریع‌تر تست‌ها به ما کمک می‌کنند. این رابطه‌ها را با هم ببینیم:

① دو جمله هشتم و پنجم دنباله حسابی با هم به اندازه ۳ برابر قدرنسبت فاصله دارند، یعنی:

$$a_8 - a_5 = (8-5)d = 3d$$



$$a_m - a_n = (m-n)d$$

در حالت کلی برای تفاضل دو جمله دنباله حسابی رابطه روبه‌رو را داریم:

② اگر  $m+n = p+q$  باشد، آن‌گاه مجموع دو جمله  $a_m$  و  $a_n$  با مجموع دو جمله  $a_p$  و  $a_q$  برابر است:

$$n+m = p+q \Rightarrow a_n + a_m = a_p + a_q$$

مثلاً چون  $2+10 = 5+7$  است، پس  $a_2 + a_{10} = a_5 + a_7$  یا چون  $2+10 = 6+6$  است، پس  $a_2 + a_{10} = 2a_6$ . در تساوی  $a_2 + a_{10} = 2a_6$ ، دقت کنید که جمله وسط  $a_6$  و  $a_1$  است اما باید توجه کرد که  $a_{12} \neq a_2 + a_1$ .

**تست** در یک دنباله حسابی، جملات پنجم و نهم به ترتیب ۵۳ و ۷۷ هستند. جمله چهاردهم کدام است؟

۱۰۹ (۴)

۱۰۷ (۳)

۱۰۳ (۲)

۱۰۱ (۱)

**پاسخ گزینه ۳** اول از رابطه گفته شده  $d$  را به دست می‌آوریم:

$$a_9 - a_5 = (9-5)d \Rightarrow 77 - 53 = 4d \Rightarrow d = 6$$

حالا همین رابطه را بین جملات چهاردهم و نهم می‌نویسیم:

$$a_{14} - a_9 = (14-9)d \Rightarrow a_{14} - 77 = 5 \times 6 \Rightarrow a_{14} = 77 + 30 = 107$$

۲ اگر  $X, Y, Z$  سه جمله متوالی از دنباله حسابی باشند، چون تفاضل دو جمله متوالی آن مقداری ثابت (قدرنسبت) است، داریم:

$$\underbrace{y-x}_{\text{قدرنسبت}} = \underbrace{z-y}_{\text{قدرنسبت}} \Rightarrow 2y = x + z \Rightarrow y = \frac{x+z}{2}$$

در واقع در سه جمله متوالی دنباله حسابی، جمله وسط، میانگین دو جمله دیگر است.

وقتی  $Y = \frac{X+Z}{2}$  باشد، به  $Y$  واسطه حسابی دو عدد  $X$  و  $Z$  هم می‌گوییم. در واقع واسطه حسابی دو عدد  $a$  و  $b$  همان میانگینشان یعنی  $\frac{a+b}{2}$  است.

**تست** در دنباله حسابی روبه‌رو، جمله چندم برابر با ۱۳۲ است؟  
 ۱۸ (۱)      ۱۹ (۲)      ۲۰ (۳)      ۲۱ (۴)

**پاسخ** گزینه ۳ اعداد  $X-6, 2X-4, 4X-7, \dots$  سه جمله متوالی یک دنباله حسابی اند، پس جمله وسط برابر میانگین دو جمله

دیگر است:  

$$2X-4 = \frac{(4X-7) + (X-6)}{2} \Rightarrow 4X-8 = 5X-13 \Rightarrow X=5$$

با جای گذاری  $X=5$ ، جملات دنباله را می‌نویسیم:

$-1, 6, 13, \dots$   
 قدرنسبت این دنباله را حساب می‌کنیم:

با داشتن  $a_1 = -1$  و  $d = 7$ ، جمله عمومی دنباله را می‌نویسیم:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_n = -1 + (n-1)(7) \Rightarrow a_n = 7n - 8$$

حالا کافی است معادله  $a_n = 132$  را حل کنیم تا ببینیم جمله چندم این معادله ۱۳۲ است.

$$a_n = 132 \Rightarrow 7n - 8 = 132 \Rightarrow n = 20$$

### درج واسطه حسابی

می‌خواهیم بین دو عدد ۷ و ۶۲، چهار عدد قرار دهیم به طوری که این اعداد با هم یک دنباله حسابی تشکیل دهند. به چنین کاری، درج واسطه حسابی می‌گوییم. خوب می‌توانیم چهار عدد را این طوری تصور کنیم:

$$7, \text{ ( ) }, \text{ ( ) }, \text{ ( ) }, 62$$

الان یک دنباله حسابی با ۶ جمله داریم که جمله اول آن ۷ و جمله ششم آن ۶۲ است. قدرنسبت را به دست می‌آوریم:

$$a_6 = a_1 + 5d \Rightarrow 62 = 7 + 5d \Rightarrow d = 11$$

$$7, \text{ (18)}, \text{ (29)}, \text{ (40)}, \text{ (51)}, 62$$

+11      +11      +11      +11

از عدد ۷، تا ۱۱ تا ۱۱ تا جلو می‌رویم تا ۴ جمله مورد نظر را بنویسیم:

دیدید که بدون فرمول خاصی توانستیم از پس این سوال بربیاییم ولی اوتایی که دنبال فرمول هستن، نکته زیر رو بخونن.

$$d = \frac{b-a}{k+1}$$

اگر بین دو عدد  $a$  و  $b$ ، به تعداد  $k$  واسطه حسابی درج کنیم، آن‌گاه قدرنسبت دنباله حسابی حاصل برابر است با:

**تست** بین دو عدد ۲۵ و ۹۳، شانزده واسطه حسابی درج کرده‌ایم. واسطه دهم کدام است؟ (جملات دنباله به صورت افزایشی است).  
 ۵۷ (۱)      ۶۱ (۲)      ۶۵ (۳)      ۶۹ (۴)

**پاسخ** گزینه ۳ دنباله مورد نظر را به صورت روبه‌رو در نظر می‌گیریم:

پس جمله اول این دنباله ۲۵ و جمله هجدهم آن ۹۳ است:  
 $a_1 = 25, a_{18} = 93$

$$a_{18} = a_1 + 17d \Rightarrow d = \frac{a_{18} - a_1}{17} = \frac{93 - 25}{17} = \frac{68}{17} = 4$$

ما واسطه دهم را می‌خواهیم. واسطه دهم، جمله یازدهم دنباله‌ای حسابی با جمله اول ۲۵ و قدرنسبت ۴ است:

$$a_{11} = a_1 + 10d = 25 + 10(4) = 65$$

### جملات مشترک دو دنباله حسابی

$$b_n: 1, 4, 7, \dots$$

$$c_n: 2, 6, 10, \dots$$

دو دنباله حسابی روبه‌رو را ببینید:

می‌خواهیم دنباله‌ای بنویسیم که اعداد آن جملات مشترک این دو دنباله باشد.

قدرنسبت دنباله  $b_n$  برابر با ۳ و قدرنسبت دنباله  $c_n$  برابر با ۴ است.

جمله‌های این دو دنباله را ادامه می‌دهیم تا به اولین جمله مشترک برسیم:

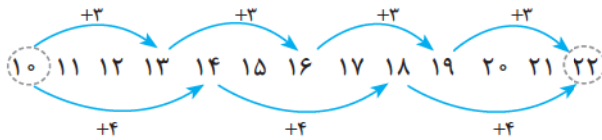
$$b_n: 1, 4, 7, 10, 13, \dots$$

$$c_n: 2, 6, 10, 14, \dots$$

پس اولین جمله مشترک این دو دنباله ۱۰ است.

اعداد دنباله  $b_n$ ، ۳ تا ۳ و اعداد دنباله  $c_n$ ، ۴ تا ۴ زیاد می‌شوند. اولین مضرب مشترک ۳ و ۴ عدد ۱۲ است؛ پس برای یافتن جمله مشترک

بعدی باید از عدد ۱۰ به اندازه ۱۲ تا جلو برویم:



در این جا جمله اول دنباله جملات مشترک  $a_1 = 10$  و قدرنسبت  $d = 12$  شد، پس جمله عمومی دنباله جملات مشترک به صورت زیر است:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_n = 10 + (n-1)(12) \Rightarrow a_n = 12n - 2$$

جمله‌های مشترک دو دنباله حسابی با قدرنسبت‌های  $d_1$  و  $d_2$ ، یک دنباله حسابی با قدرنسبت ک.م.م  $d_1$  و  $d_2$  است:

$$d_{\text{مشترک‌ها}} = [d_1, d_2]$$

**تست** دو دنباله حسابی  $\{-3, 3, 9, \dots\}$  و  $\{-1, 7, 15, \dots\}$  چند جمله مشترک ۳ رقمی کوچک‌تر از ۳۰۰ دارند؟

$$10 \text{ (۴)}$$

$$9 \text{ (۳)}$$

$$8 \text{ (۲)}$$

$$7 \text{ (۱)}$$

جملات دو دنباله را آن قدر می‌نویسیم تا به اولین جمله مشترکشان برسیم:

**پاسخ** گزینه ۲

$$\begin{cases} \text{دنباله اول: } -3, 3, 9, 15, 21, 27, \dots \\ \text{دنباله دوم: } -1, 7, 15, 23, 31, \dots \end{cases}$$

اولین جمله مشترک دو دنباله،  $a_1 = 15$  است، قدرنسبت دنباله اول ۶ و قدرنسبت دنباله دوم ۸ است، پس:

$$d_{\text{مشترک‌ها}} = [d_1, d_2] = [6, 8] = 24$$

جملات مشترک دو دنباله، دنباله‌ای حسابی با جمله اول  $a_1 = 15$  و قدرنسبت  $d = 24$  تشکیل دادند. جمله عمومی این دنباله را می‌نویسیم:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_n = 15 + (n-1)(24) \Rightarrow a_n = 24n - 9$$

$$99 < a_n < 300 \Rightarrow 99 < 24n - 9 < 300 \Rightarrow \frac{108}{24} < n < \frac{309}{24}$$

$$\Rightarrow 4 \dots < n < 12 \dots \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} 5 \leq n \leq 12 \Rightarrow n = \{5, 6, 7, \dots, 12\}$$

تعداد این اعداد ۸ تا است.

### مجموع جملات دنباله حسابی

دیدیم که جمله  $n$ ام یک دنباله حسابی از رابطه  $a_n = a_1 + (n-1)d$  به دست می‌آید. الان می‌خواهیم برای مجموع  $n$  جمله اول یک دنباله

حسابی یعنی  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$  یک رابطه بیان کنیم.

فارسی‌ها به «جمع» می‌گویند «sum» ما هم حرف اولش یعنی  $S$  را برای مجموع در ریاضی استفاده می‌کنیم. مجموع  $n$  جمله اول یک دنباله حسابی را با  $S_n$  نشان

می‌دهیم و از رابطه رو به رو به دست می‌آید:

$$1) \quad S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$2) \quad S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$$

البته می‌توان در این رابطه،  $a_n = a_1 + (n-1)d$  را جای‌گذاری کرد و به فرمول روبه‌رو رسید:

**تست** مجموع بیست جمله اول دنباله حسابی روبه‌رو کدام است؟

- ۹۸۰ (۱)      ۹۹۰ (۲)      ۱۰۰۰ (۳)      ۱۰۱۰ (۴)

**پاسخ** گزینه ۳ ابتدا قدرنسبت این دنباله را حساب می‌کنیم:

حالا با داشتن  $a_1 = -7$  و  $d = 6$ ، مقدار  $S_{20}$  را به دست می‌آوریم:

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] \Rightarrow S_{20} = \frac{20}{2}[2(-7) + 19(6)] = 10 \times [-14 + 114] = 1000$$

**تست** مجموع تمام جملات دنباله حسابی روبه‌رو کدام است؟

- ۹۴۶ (۱)      ۹۳۸ (۲)      ۹۳۲ (۳)      ۹۲۶ (۴)

**پاسخ** گزینه ۱ خب اول قدرنسبت را حساب می‌کنیم:

حالا تعداد جملات را به دست می‌آوریم. برای محاسبه تعداد جملات، با توجه به این‌که جمله اول و جمله آخر (جمله  $n$ ام) را داریم،

می‌توانید از فرمول جمله عمومی یا از رابطه « $1 + \frac{\text{اولی} - \text{آخری}}{\text{قدرنسبت}}$  = تعداد جملات»، استفاده کنید.

$$\text{تعداد} = \frac{\text{اولی} - \text{آخری}}{\text{قدرنسبت}} + 1 = \frac{85 - 1}{4} + 1 = 22$$

چون جمله اول و آخر را داریم، از رابطه اول استفاده می‌کنیم:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \Rightarrow S_{22} = \frac{22}{2}(1 + 85) = 11 \times 86 = 946$$

بعضی وقت‌ها احساس می‌کنید اطلاعات سؤال کم است ولی نترسید! جلو بروید و سعی کنید یک عبارت را با یک عدد جایگزین کنید. تست زیر را ببینید.

**تست** در یک دنباله حسابی، مجموع جمله چهارم و یازدهم، ۱۲ است. مجموع چهارده جمله اول این دنباله کدام است؟

- ۱۶۸ (۱)      ۸۴ (۲)      ۱۹۲ (۳)      ۹۶ (۴)

**پاسخ** گزینه ۲ مجموع جملات چهارم و یازدهم برابر ۱۲ است، پس:

$$a_4 + a_{11} = 12 \Rightarrow a_1 + 3d + a_1 + 10d = 12 \Rightarrow 2a_1 + 13d = 12$$

مجموع ۱۴ جمله اول این دنباله را می‌نویسیم و هر جا لازم شد از رابطه  $2a_1 + 13d = 12$  استفاده می‌کنیم:

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] \Rightarrow S_{14} = \frac{14}{2}[\underbrace{2a_1 + 13d}_{12}] = 7 \times 12 = 84$$

یک مدل سؤال هم که کنکور علاقه زیادی به آن نشان داده، دسته‌بندی جملات یک دنباله است و بعد «مجموع جملات یک دسته خاص» یا «جمله اول یا آخر یک دسته خاص» را از ما می‌خواهد. یک نمونه از این سؤال‌ها را حل می‌کنیم:

**تست** مضارب طبیعی ۵ را به گونه‌ای دسته‌بندی کرده‌ایم که تعداد جملات هر دسته، با شماره آن دسته برابر باشد. مجموع جملات

دسته بیستم کدام است؟

- ۱۹۰۰۰ (۱)      ۱۹۵۰۰ (۲)      ۲۰۰۰۰ (۳)      ۲۰۰۵۰ (۴)

**پاسخ** گزینه ۲ در هر دسته به تعداد شماره آن دسته عدد داریم، پس تا آخر دسته نوزدهم به تعداد  $1 + 2 + 3 + \dots + 19$  عدد

داریم. مجموع اعداد طبیعی ۱ تا ۱۹ را حساب می‌کنیم:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{19}{2}(1 + 19) = 190$$

پس اولین عدد دسته بیستم، ۱۹۱امین مضرب ۵ است:

$$191 \times 5 = 955$$

دسته بیستم دارای ۲۰ عدد است که اولین آن‌ها ۹۵۵ است. چون این اعداد مضرب ۵ هستند، پس با هم یک دنباله حسابی با قدرنسبت

۵ تشکیل می‌دهند. مجموع آن‌ها را حساب می‌کنیم:

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \Rightarrow S_{20} = \frac{20}{2}(2(955) + 19(5)) = 10(1910 + 95) = 20050$$

جملات شماره فرد، جملات شماره زوج

یکی از ویژگی‌هایی که طراحان دوست داشتند بوش علاقه دارن، بازی کردن با جمله‌های شماره فرد و جمله‌های شماره زوج دنباله مسایه.

● جمله‌های شماره فرد دنباله یعنی جمله‌های اول، سوم، پنجم و ... با هم تشکیل یک دنباله حسابی با جمله اول  $a_1$  و قدرنسبت  $2d$  می‌دهند:

$$a_1, \overset{+2d}{\curvearrowright} a_1 + 2d, \overset{+2d}{\curvearrowright} a_1 + 4d, \overset{+2d}{\curvearrowright} a_1 + 6d \dots$$

● جمله‌های شماره زوج یعنی جمله‌های دوم، چهارم، ششم و ... نیز یک دنباله حسابی تشکیل می‌دهند. این بار جمله اول  $a_1 + d$  ولی قدرنسبت همان  $2d$  است:

$$a_1 + d, \overset{+2d}{\curvearrowright} a_1 + 3d, \overset{+2d}{\curvearrowright} a_1 + 5d, \overset{+2d}{\curvearrowright} a_1 + 7d \dots$$

حالا یک بحث دیگر در این مورد:

می‌دانیم اختلاف دو جمله متوالی دنباله حسابی برابر با قدرنسبت است، مثلاً:  $a_2 - a_1 = d$ ,  $a_3 - a_2 = d$  و ...

حالا فرض کنید در  $2n$  جمله اول یک دنباله، می‌خواهیم تفاضل «مجموع جملات با شماره زوج» و «مجموع جملات با شماره فرد» را حساب کنیم:

$$\begin{aligned} & (a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{2n}) - (a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{2n-1}) \\ &= \underbrace{(a_2 - a_1)}_d + \underbrace{(a_4 - a_3)}_d + \underbrace{(a_6 - a_5)}_d + \dots + \underbrace{(a_{2n} - a_{2n-1})}_d = \underbrace{d + d + d + \dots + d}_{2n} = nd \end{aligned}$$

**تست** در ۴۰ جمله اول یک دنباله حسابی، مجموع جملات شماره‌های فرد ۲۲۰ و مجموع جملات شماره‌های زوج ۲۳۰ می‌باشد. تفاضل جمله اول و قدرنسبت این دنباله کدام است؟

۱ (۱)      ۲ (۳)      ۳ (۲)      ۵ (۴)

**پاسخ گزینه ۱:** جمله اول این دنباله حسابی را  $a_1$  و قدرنسبت آن را  $d$  در نظر می‌گیریم.

● جملات فرد آن با هم تشکیل یک دنباله حسابی با جمله اول  $a_1$  و قدرنسبت  $2d$  می‌دهند که تعدادشان ۲۰ تا است:

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \Rightarrow S_{\text{فرد}} = \frac{20}{2}(2a_1 + 19(2d)) \Rightarrow 220 = 10(2a_1 + 38d) \xrightarrow{-20} a_1 + 19d = 11$$

● جملات زوج آن با هم تشکیل یک دنباله حسابی با جمله اول  $a_2 = a_1 + d$  و قدرنسبت  $2d$  می‌دهند که تعداد آن‌ها هم ۲۰ تا است:

$$S_{\text{زوج}} = \frac{20}{2}(2(a_1 + d) + 19(2d)) \Rightarrow 230 = 10(2a_1 + 40d) \xrightarrow{-10} 2a_1 + 40d = 23$$

$$\left. \begin{aligned} a_1 + 19d &= 11 \\ 2a_1 + 40d &= 23 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a_1 = \frac{3}{2}, \quad d = \frac{1}{2}$$

با حل دو معادله به دست آمده، مقدار  $a_1$  و  $d$  را حساب می‌کنیم:

$$a_1 - d = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$$

پس تفاضل  $a_1$  و  $d$  برابر است با:

به دست آوردن جملات دنباله با داشتن  $S_n$

دنباله حسابی «... ۱، ۴، ۷، ۱۰» را در نظر بگیرید. جمله اول  $a_1 = 1$  و قدرنسبت  $d = 3$  است. مجموع  $n$  جمله اول آن را به دست می‌آوریم:

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] = \frac{n}{2}[2(1) + (n-1)(3)] = \frac{n}{2}[3n - 1] \Rightarrow S_n = \frac{3}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$$

درباره  $S_n$  در دنباله حسابی دو نکته زیر را باید بلد باشیم:

① ضریب  $n^2$ ، نصف قدرنسبت است. در این جا ضریب  $n^2$  عدد  $\frac{3}{2}$  و قدرنسبت ۳ بود.

② مجموع جملات دنباله حسابی یک عبارت درجه دو بدون عدد ثابت بر حسب  $n$  است.

حالا فرض کنید  $S_n$  را داریم و دنبال جمله پنجم دنباله هستیم. فب کافیه مجموع ۵ جمله اول ( $S_5$ ) را منهای مجموع ۴ جمله اول ( $S_4$ ) کنیم:

$$a_5 = (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5) - (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) \Rightarrow a_5 = S_5 - S_4$$







۳۲- تفاضل جمله دهم از جمله دوازدهم یک دنباله حسابی، ۵ و مجموع دو جمله دهم و دوازدهم ۲۵ است. جمله بیست و یکم این دنباله کدام است؟

(ریاضی قارچ از کشور ۸۴)

- ۳۵ (۱)      ۳۶ (۲)      ۳۷/۵ (۳)      ۳۸/۵ (۴)

۳۳- جمله هشتم یک دنباله حسابی ۶ واحد از جمله چهارم آن بیشتر است و مجذور جمله نهم ۱۷۱ واحد از مجذور جمله سوم بیشتر است. جمله اول دنباله کدام است؟

- ۱/۵ (۱)      ۲ (۲)      ۲/۵ (۳)      ۳ (۴)

۳۴- در یک دنباله،  $a_1 = 3$  و  $a_{n-1} = a_n + 4$  است. جمله چندم دنباله برابر ۹۷- است؟

- ۲۵ (۱)      ۲۴ (۲)      ۲۷ (۳)      ۲۶ (۴)

۳۵- جمله چندم دنباله حسابی  $17, a, 2, \dots$  برابر  $110/5$  است؟

- (۱) شانزدهم      (۲) هجدهم      (۳) بیستم      (۴) بیست و دوم

۳۶- در یک دنباله حسابی، مجموع جملات سوم و هفتم برابر ۱۲ است. اگر جملات دوم و پنجم قرینه هم باشند، آن گاه جمله چندم دنباله برابر ۵۰ است؟

- (۱) شانزدهم      (۲) هفدهم      (۳) هجدهم      (۴) نوزدهم

۳۷- دنباله  $1, 6, 13, \dots, 342$  چند جمله بزرگتر از ۵۰ دارد؟

- ۴۰ (۱)      ۴۱ (۲)      ۴۲ (۳)      ۴۳ (۴)

۳۸- در یک دنباله حسابی مجموع سه جمله اول ۳ و مجموع سه جمله دوم ۳۹ است. جمله هفتم دنباله چند برابر جمله اول است؟

- ۵ (۱)      -۵ (۲)      ۷ (۳)      -۷ (۴)

۳۹- در دنباله حسابی  $a_1 = 3 + \sqrt{2}$  و  $a_4 = 5 + \sqrt{2}$  مجموع چهار جمله چهارم، چه قدر از مجموع چهار جمله دوم بیشتر است؟

- ۸ (۱)      ۶۴ (۲)      ۱۶ (۳)      ۸۲ (۴)

۴۰- اضلاع مثلث قائم الزاویه ای تشکیل دنباله حسابی می دهند. اگر محیط مثلث ۳۶ باشد، مساحت مثلث کدام است؟

- ۴۸ (۱)      ۵۴ (۲)      ۶۰ (۳)      ۶۴ (۴)

۴۱- مجموع جملات سوم، چهارم و پنجم یک دنباله حسابی با قدرنسبت منفی برابر ۲۴ و حاصل ضرب آن ها ۴۴۰ است. جمله هشتم دنباله کدام است؟

- ۵ (۱)      -۴ (۲)      -۳ (۳)      -۲ (۴)

(ریاضی ۸۲)

۴۲- اگر  $a, 2a, 6a + 5$  سه جمله متوالی یک دنباله حسابی باشند، قدرنسبت کدام است؟

- ۵ (۱)      ۱۰ (۲)      ۱۵ (۳)      ۲۰ (۴)

۴۳- در یک دنباله حسابی اگر  $a_7 + a_8 + a_{13} + a_{15} = 32$ ، آن گاه جمله نهم دنباله کدام است؟

- ۷ (۱)      ۸ (۲)      ۹ (۳)      ۱۰ (۴)

۴۴- در دنباله حسابی  $a_n$ ،  $a_7 + a_8 = 10$ ، آن گاه حاصل  $a_7 - a_6 + a_9$  کدام است؟

- ۵ (۱)      ۸ (۲)      ۱۰ (۳)      ۱۲ (۴)

۴۵- مجموع جملات دوم و چهارم یک دنباله حسابی برابر ۱۶ و حاصل ضرب جملات سوم و پنجم برابر ۱۱۲ است. جمله دهم دنباله کدام است؟

- ۲۷ (۱)      ۲۹ (۲)      ۳۳ (۳)      ۳۵ (۴)

۴۶- اعداد  $1-x$ ،  $x-2$  و  $2x+1$  به ترتیب جملات دوم، پنجم و هشتم یک دنباله حسابی هستند. جمله دهم دنباله کدام است؟

- ۱۹ (۱)      ۲۳ (۲)      ۲۶ (۳)      ۲۹ (۴)

۴۷- بین دو عدد ۱۸ و ۱۳۸ چند واسطه حسابی با قدرنسبت ۵ می توان قرار داد؟

- ۲۲ (۱)      ۲۳ (۲)      ۲۴ (۳)      ۲۵ (۴)

۴۸- در دنباله حسابی  $2, \frac{7}{4}, \dots$  جملات  $a_7, a_8, a_{12}, \dots$  تشکیل دنباله حسابی دیگری می دهند. قدرنسبت دنباله جدید چه قدر است؟

- $-\frac{1}{4}$  (۱)      -۱ (۲)      -۴ (۳)       $\frac{1}{4}$  (۴)

۴۹- در دنباله حسابی ...  $\frac{5}{3}, \frac{7}{3}, \dots$  جمله اول را با  $\frac{8}{3}$ ، جمله دوم را با  $\frac{7}{3}$  و جمله سوم را با  $\frac{6}{3}$  و ... جمع می‌کنیم. جمله شصت و پنجم دنباله جدید چه قدر است؟

- (۱)  $\frac{139}{3}$  (۲) ۱۲۵ (۳) ۲۵ (۴) ۲۴

۵۰- در یک دنباله حسابی که ۳۰ جمله دارد، جمله سوم ۶ واحد از جمله ششم بیشتر است. اگر جملات با شماره زوج این دنباله را حذف کنیم و جمله هشتم دنباله جدید برابر ۲۵ باشد، جمله هشتم دنباله اولیه کدام است؟

- (۱) ۴۱ (۲) ۴۰ (۳) ۳۹ (۴) ۳۸

۵۱- در پنجاه جمله اول دنباله‌های حسابی مقابل چند جمله مشترک وجود دارد؟

- (۱) ۱۴ (۲) ۱۱ (۳) ۱۲ (۴) ۱۳
- $\begin{cases} -1, 3, 7, \dots \\ 2, 5, 8, \dots \end{cases}$

۵۲- در دنباله‌های حسابی «... ۲، ۹، ۱۶، ۲۳» و «... ۱۲، ۱۷، ۲۲، ۲۷» چند عدد سه‌رقمی مشترک کوچک‌تر از ۳۰۰ موجود است؟

- (ریاضی قارچ از کشور ۹۵)
- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

### مجموع جملات دنباله حسابی

۵۳- مجموع هشت جمله اول دنباله ... ۸، ۳، ۲- کدام است؟

- (۱) ۱۲۱ (۲) ۱۲۳ (۳) ۱۲۴ (۴) ۱۲۸

۵۴- در یک دنباله حسابی، جمله پنجم برابر ۳ و هر جمله از جمله ماقبل خود به اندازه  $\frac{1}{4}$  کم‌تر است. مجموع ۱۰ جمله اول آن کدام است؟

(تبریزی ۸۲)

- (۱)  $22/5$  (۲) ۲۵ (۳)  $27/5$  (۴) ۳۰

۵۵- اعداد  $\dots, \frac{5}{4}, y, x, 1$  چهار جمله اول یک دنباله حسابی‌اند. مجموع پانزده جمله اول این دنباله کدام است؟

(ریاضی قارچ از کشور ۸۶)

- (۱) ۵۷ (۲)  $62/5$  (۳)  $67/5$  (۴) ۶۸

۵۶- در یک دنباله حسابی، جمله هفتم نصف جمله سوم است. مجموع چند جمله اول دنباله صفر است؟

(تبریزی قارچ از کشور ۸۸)

- (۱) ۱۸ (۲) ۱۹ (۳) ۲۰ (۴) ۲۱

۵۷- در یک دنباله حسابی، مجموع چهار جمله اول ۱۵ و مجموع پنج جمله بعدی آن ۳۰ می‌باشد. جمله یازدهم این دنباله کدام است؟

(ریاضی قارچ از کشور ۸۵)

- (۱)  $7/5$  (۲) ۸ (۳)  $8/5$  (۴) ۹

۵۸- در یک دنباله حسابی با جمله اول  $a$ ، اگر یک واحد به قدرنسبت جملات افزوده شود، آن‌گاه به مجموع ۲۰ جمله اول چه قدر افزوده می‌شود؟

(ریاضی ۸۳)

- (۱) ۱۶۰ (۲) ۱۷۰ (۳) ۱۸۰ (۴) ۱۹۰

۵۹- اگر مجموع هشت جمله از دنباله حسابی با دو جمله  $a_1 = 1 + 2P$  و  $a_7 = P - 1$  برابر ۶۰ باشد، قدرنسبت دنباله چه قدر است؟

- (۱) ۹ (۲) ۷ (۳) -۹ (۴) -۷

۶۰- در دنباله حسابی  $\dots, -21, x, -27$  مجموع جملات منفی کدام است؟

- (۱) -۱۳۵ (۲) -۱۵۰ (۳) -۷۵ (۴) -۲۷۰

۶۱- در یک دنباله حسابی  $S_n$  مجموع  $n$  جمله اول،  $S_6 = 12$  و  $S_{10} = 30$  است.  $S_{16}$  کدام است؟

- (۱) ۴۲ (۲) ۷۲ (۳) ۸۴ (۴) ۹۶

۶۲- در یک دنباله حسابی، مجموع بیست جمله اول، سه برابر مجموع دوازده جمله اول آن است. اگر جمله سوم برابر ۶ باشد، جمله دهم کدام است؟

(ریاضی ۹۰)

- (۱) ۳۲ (۲) ۳۴ (۳) ۳۶ (۴) ۳۸



۶۳- در بیست جمله اول از یک دنباله حسابی، مجموع جملات ردیف زوج  $15^\circ$  و مجموع جملات ردیف فرد  $135$  است. جمله اول کدام است؟

(تشریحی خارج از کشور ۱۸۵)

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۶۴- مقدار  $x$  در معادله  $1 + 5 + 9 + \dots + x = 231$  کدام است؟

- (۱) ۴۳ (۲) ۳۹ (۳) ۴۱ (۴) ۳۷

(تشریحی ۱۸۹)

۶۵- در یک دنباله حسابی، جمله  $n$ ام به صورت  $a_n = \frac{3}{4}n - 5$  است. مجموع ۱۵ جمله اول این دنباله کدام است؟

- (۱) ۹۰ (۲) ۱۰۵ (۳) ۱۲۰ (۴) ۱۳۵

۶۶- مجموع جملات دنباله  $2, 1, 4, \dots, 52, -2$  کدام است؟

- (۱) ۴۶۶ (۲) ۴۶۸ (۳) ۴۷۱ (۴) ۴۷۵

۶۷- در دنباله  $a_n = n^2 - (n+1)^2$  مجموع ۱۹ جمله اول کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۳۹۹ (۳) ۴۰۱ (۴) -۴۰۰

۶۸- جمله یازدهم یک دنباله حسابی برابر ۱۲ است. مجموع جملات شروع از جمله پنجم و ختم به جمله هفدهم کدام است؟

- (۱) ۱۴۸ (۲) ۱۵۰ (۳) ۱۵۶ (۴) ۱۶۲

۶۹- در یک دنباله حسابی افزایشی که ۱۰ جمله دارد، مجموع جملات  $245$  و تفاضل جملات اول و آخر  $45$  است. قدرنسبت دنباله کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

۷۰- به ازای کدام مقدار  $x$  تساوی  $725 = (x^2 + 74) + \dots + (x^2 + 6) + (x^2 + 2) + (x^2 - 2)$  برقرار است؟

- (۱) ۲ (۲)  $\frac{1}{2}$  (۳)  $\sqrt{3}$  (۴)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$

۷۱- حاصل  $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$  کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) ۲۲۱ (۲) ۲۳۴ (۳) ۲۴۸ (۴) ۲۵۶

۷۲- روی محیط دایره‌ای ۱۲ نقطه متمایز قرار دارد. از هر نقطه به نقاط دیگر وصل می‌کنیم. تعداد کل وترهای تشکیل شده کدام است؟

(تمرین کتاب حسابان ۱)

- (۱) ۶۶ (۲) ۷۸ (۳) ۴۵ (۴) ۵۵

۷۳- در دنباله اعداد طبیعی از ۱ تا  $50$ ، مجموع مربع جملات با شماره زوج چه قدر از مجموع مربع جملات با شماره فرد بیشتر است؟

- (۱) ۱۲۴۰ (۲) ۱۲۷۵ (۳) ۱۳۰۰ (۴) ۱۳۲۵

۷۴- اگر  $S = 1^2 + 5^2 + 9^2 + \dots + 37^2$  و  $S' = 3^2 + 7^2 + 11^2 + \dots + 39^2$  حاصل  $S' - S$  کدام است؟

- (۱) ۷۲۲ (۲) ۸۰۰ (۳) ۸۸۴ (۴) ۹۶۲

۷۵- بین دو عدد ۱۵ و ۳۵ تعدادی واسطه حسابی قرار می‌دهیم که مجموع همه اعداد  $225$  شود. قدرنسبت دنباله حاصل کدام است؟

- (۱)  $2/5$  (۲)  $1/5$  (۳) ۲ (۴) ۳

۷۶- بین دو عدد ۱۳ و ۴۵ تعدادی واسطه حسابی طوری قرار می‌دهیم که واسطه آخر ۲۸ واحد بیشتر از واسطه اول باشد. مجموع همه واسطه‌ها

کدام است؟

- (۱) ۴۱۵ (۲) ۴۳۵ (۳) ۴۶۰ (۴) ۴۸۰

۷۷- در یک دنباله حسابی با تعداد جملات محدود مجموع سه جمله اول دنباله ۳۵ و مجموع سه جمله آخر ۱۷۵ است. اگر مجموع جملات این

دنباله ۳۵۰ باشد، تعداد جملات کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۱۰ (۳) ۱۲ (۴) ۱۴

۷۸- مجموع سه جمله اول یک دنباله حسابی ۲۷ و مجموع سه جمله آخر آن ۵۷ و مجموع همه جملات آن ۱۱۲ است. قدرنسبت دنباله کدام است؟

- (۱)  $\frac{5}{4}$  (۲)  $\frac{3}{4}$  (۳) ۳ (۴) ۲

۷۹- مجموع اعداد طبیعی فرد، بخش پذیر بر ۳ و کوچک‌تر از ۱۰۱ کدام است؟

- (۱) ۸۱۶ (۲) ۸۵۲ (۳) ۸۶۷ (۴) ۸۸۴

۸۰- مجموع تمام اعداد طبیعی دورقمی که باقی‌مانده تقسیم آن‌ها بر ۷ برابر ۲ باشد، کدام است؟

- ۴۸۶ (۱)      ۶۵۴ (۲)      ۵۳۲ (۳)      ۵۴۶ (۴)

۸۱- اعداد طبیعی را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم که آخرین جمله هر دسته مجذور کامل باشد. ... (۱, ۲, ۳, ۴), (۵, ۶, ۷, ۸, ۹), ... مجموع جملات در دسته دهم کدام است؟

(ریاضی خارج از کشور ۸۴)

- ۱۶۹۱ (۱)      ۱۷۱۰ (۲)      ۱۷۲۹ (۳)      ۱۷۴۸ (۴)

۸۲- اعداد طبیعی را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد جملات هر دسته برابر شماره آن دسته باشد. ... (۱), (۲, ۳), (۴, ۵, ۶), (۷, ۸, ۹, ۱۰), ... مجموع جملات در دسته بیستم کدام است؟

(تجربی خارج از کشور ۹۳)

- ۴۰۱۰ (۱)      ۴۰۲۰ (۲)      ۴۰۳۰ (۳)      ۴۰۴۰ (۴)

۸۳- اعداد طبیعی فرد را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد جملات هر دسته برابر با شماره آن دسته باشد مانند ... (۱), (۳, ۵), (۷, ۹, ۱۱), ... جمله آخر در دسته بیستم کدام است؟

(ریاضی خارج از کشور ۹۱)

- ۴۱۵ (۱)      ۴۱۹ (۲)      ۴۲۱ (۳)      ۴۲۳ (۴)

۸۴- مجموع  $n$  جمله اول یک دنباله حسابی به صورت  $S_n = n^2 - 3n$  است. کدام جمله دنباله برابر ۲۴ است؟

- دوازدهم (۱)      سیزدهم (۲)      چهاردهم (۳)      پانزدهم (۴)

۸۵- مجموع  $n$  جمله اول از یک دنباله حسابی به صورت  $S_n = \frac{n(n-15)}{6}$  است. در این دنباله مجموع جملات، شروع از جمله هفتم و ختم به جمله هجدهم کدام است؟

(ریاضی خارج از کشور ۹۰)

- ۹ (۱)       $\frac{29}{3}$  (۲)       $\frac{49}{3}$  (۳)      ۱۸ (۴)

۸۶- اگر  $S_n$  مجموع  $n$  جمله اول یک دنباله حسابی باشد و  $S_{n+2} - S_n = 4n + 3$ ، مجموع هشت جمله اول دنباله کدام است؟

- ۶۰ (۱)      ۶۳ (۲)      ۵۸ (۳)      ۵۵ (۴)

۸۷- دنباله مجموع  $n$  جمله اول یک دنباله حسابی  $(S_n)$  به صورت  $3, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \dots$  است. جمله دهم دنباله حسابی کدام است؟

- ۴ (۱)       $\frac{4}{5}$  (۲)      ۵ (۳)       $\frac{5}{5}$  (۴)

۳- گزینه ۳ با توجه به الگو، تعداد مربع‌ها در هر مرحله برابر است با:

$$\begin{cases} \text{مرحله اول: } a_1 = 7 \\ \text{مرحله دوم: } a_2 = 12 \Rightarrow 7, 12, 17, \dots \\ \text{مرحله سوم: } a_3 = 17 \end{cases}$$

تعداد مربع‌ها با مقدار ثابت ۵ در حال افزایش است، پس جمله عمومی دنباله به صورت  $a_n = 5n + b$  است. با توجه به این که  $a_1 = 7$  است، داریم:  $7 = 5(1) + b \Rightarrow b = 2 \Rightarrow a_n = 5n + 2$  حالا برای این که ببینیم در کدام مرحله تعداد مربع‌ها برابر با ۲۱۲ می‌شود، کافی است معادله  $a_n = 212$  را حل کنیم:

$$212 = 5n + 2 \Rightarrow 5n = 210 \Rightarrow n = 42$$

۴- گزینه ۴ جدول مربوط به تعداد پاره‌خطها در هر مرحله به صورت زیر است:

شماره شکل	۱	۲	۳	...
تعداد پاره‌خطها	۹	۱۵	۲۱	...

تعداد پاره‌خطها با مقدار ثابت ۶ در حال افزایش است. پس جمله عمومی الگو به صورت  $a_n = 6n + b$  است. از طرفی جمله اول برابر ۹ است. پس:

$$a_1 = 9 \Rightarrow 6 + b = 9 \Rightarrow b = 3 \Rightarrow a_n = 6n + 3$$

در نتیجه تعداد پاره‌خطها در شکل پانزدهم برابر است با:

$$a_{15} = 6(15) + 3 = 93$$

چون طول هر پاره‌خط ۲ واحد است، مجموع طول پاره‌خطها برابر  $2(93) = 186$  است.

۵- گزینه ۴ ابتدا دقت کنید در هر شکل، به تعداد شماره شکل، ستون و ردیف داریم. برای مثال در شکل سوم ۳ ستون و ۳ تا ردیف داریم. در سؤال تفاضل تعداد نقطه‌های توپر دو شکل خواسته شده، پس باید الگوی آن را بسازیم. (فقط دقت کنید که تفاضل دهم و یازدهم مدنظر است، پس به این که شماره شکل فرد (یازدهم) از شماره شکل زوج (دهم) بیشتر است، خوب توجه کنید.)

تفاضل تعداد دایره‌های توپر شکل‌های دوم و سوم: اگر به شکل‌ها خوب توجه کنید، می‌بینید که بعد از کم کردن نقطه‌های توپر آن‌ها از هم، نقطه‌های توپر باقی‌مانده به صورت زیر خواهند بود:



مطابق شکل دوتا دسته سه‌تایی داریم که نقطه توپر گوشه دو بار محاسبه شده که باید یک بار آن کم شود:  $2(3) - 1 = 5$

تفاضل تعداد دایره‌های توپر شکل‌های چهارم و پنجم: با انجام عمل تفاضل، شکل دایره‌های توپر باقی‌مانده به صورت زیر خواهد بود (دو تا دسته پنج‌تایی):



$$2(5) - 1 = 9$$

پس تفاضل تعداد دایره‌های توپر شکل‌های یازدهم و دهم برابر است با:  $2(11) - 1 = 21$

۱- گزینه ۲ راه اول الگو را می‌توانیم به صورت زیر در نظر بگیریم

( $n$  شماره شکل و  $a_n$  تعداد چوب‌کبریت‌ها در شکل  $n$ ام است):



$$a_1 = 1(2) + 1 \quad a_2 = 2(2) + 1 \quad a_3 = 3(2) + 1 \quad \dots$$

پس با توجه به جدول بالا تعداد چوب‌کبریت‌ها در مرحله نهم برابر است با:  $a_9 = 9(2) + 1 = 19$

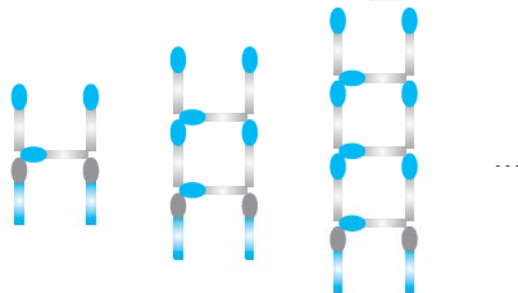
راه دوم می‌توانید الگو را به صورت زیر هم تصور کنید:



$$a_1 = 3 \quad a_2 = 3 + 1(2) \quad a_3 = 3 + 2(2) \quad \dots$$

بنابراین:  $a_9 = 3 + 8(2) = 19$

۲- گزینه ۲ راه اول الگو را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:



$$a_1 = 2 + 1(3) \quad a_2 = 2 + 2(3) \quad a_3 = 2 + 3(3) \quad \dots$$

بنابراین تعداد چوب‌کبریت‌ها در مرحله  $n$ ام برابر است با:

$$a_n = 2 + n(3) \Rightarrow a_n = 3n + 2$$

راه دوم با توجه به الگو داریم ( $a_n$ ): تعداد چوب‌کبریت‌ها در مرحله  $n$ ام است):

$$a_1 = 5, a_2 = 8, a_3 = 11$$

با توجه به این که در هر مرحله، تعداد چوب‌کبریت‌ها به اندازه ثابت ۳ واحد در حال افزایش است، پس جمله عمومی دنباله به صورت  $a_n = 3n + b$  است. از طرفی جمله اول برابر ۵ است، پس:

$$a_1 = 5 \Rightarrow 3(1) + b = 5 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow a_n = 3n + 2$$

راه سوم می‌توانیم از گزینه‌ها هم به جواب برسیم. با توجه به الگو، تعداد چوب‌کبریت‌ها در هر مرحله برابر است با:

$$a_1 = 5, a_2 = 8, a_3 = 11$$

حالا با توجه به گزینه‌ها، گزینه درست را می‌یابیم:

①  $a_n = 2n + 3 \Rightarrow a_1 = 5, a_2 = 7, \dots$

چون با تعداد چوب‌کبریت‌های الگو مطابقت ندارد، جواب نیست.

②  $a_n = 4n + 1 \Rightarrow a_1 = 5, a_2 = 9, \dots$

③  $a_n = 3n + 2 \Rightarrow a_1 = 5, a_2 = 8, a_3 = 11, \dots$

۹- گزینه ۲: الگو را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

شماره شکل	۱	۲	۳
الگو			
تعداد دایره‌ها	$3^2 - 4$	$4^2 - 4$	$5^2 - 4$

بنابراین در شکل  $n$ م تعداد دایره‌ها برابر  $a_n = (n+2)^2 - 4$  است. حالا بررسی می‌کنیم در کدام شکل تعداد دایره‌ها ۵۱ واحد از مرحله قبل از خود بیشتر است (تعداد دایره‌ها در مرحله قبل از مرحله  $n$ م یعنی همان مرحله  $(n-1)$ م. برای محاسبه آن هم در جمله عمومی الگو، به جای  $n$  باید  $(n-1)$  قرار دهیم:

$$a_n - a_{n-1} = 51$$

$$\Rightarrow ((n+2)^2 - 4) - ((n-1+2)^2 - 4) = 51$$

$$\Rightarrow (n+2)^2 - (n+1)^2 = 51$$

$$\Rightarrow n^2 + 4n + 4 - n^2 - 2n - 1 = 51 \Rightarrow 2n + 3 = 51$$

$$\Rightarrow 2n = 48 \Rightarrow n = 24$$

۱۰- گزینه ۲: اول الگوی تعداد کل مربع‌ها را بیابیم:

شماره شکل	۱	۲	۳	...	$n$
تعداد مربع‌ها	$2^2$	$3^2 + 1$	$4^2 + 2$	...	$(n+1)^2 + (n-1)$

$$\Rightarrow a_n = (n+1)^2 + (n-1)$$

هم‌چنین الگوی تعداد مربع‌های رنگی برابر است با:

شماره شکل	۱	۲	۳	...	$n$
تعداد مربع‌های رنگی	۰	$1^2$	$2^2$	...	$(n-1)^2$

بنابراین جمله عمومی الگوی مربع‌های سفید به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\text{تعداد مربع‌های رنگی} - \text{تعداد کل مربع‌ها} = \text{تعداد مربع‌های سفید}$$

$$\Rightarrow (n-1)^2 - ((n+1)^2 + n - 1) = \text{تعداد مربع‌های سفید}$$

$$= n^2 - 2n + 1 - n^2 - 2n - 1 + n - 1 = 5n - 1$$

حالا باید  $n$  را طوری بیابیم که تعداد مربع‌های رنگی ۴۶ واحد از تعداد مربع‌های سفید بیشتر باشد:

$$\text{تعداد مربع‌های سفید} + 46 = \text{تعداد مربع‌های رنگی}$$

$$\Rightarrow (n-1)^2 = 46 + 5n - 1 \Rightarrow n^2 - 2n + 1 = 46 + 5n - 1$$

$$\Rightarrow n^2 - 7n - 44 = 0 \Rightarrow (n+4)(n-11) = 0$$

$$\xrightarrow{n \geq 1} n = 11$$

۶- گزینه ۲: اول باید بررسی کنیم در کدام شکل ۴۷ تا رأس وجود دارد. پس مطابق جدول زیر جمله عمومی تعداد رأس‌ها را می‌یابیم.

شماره شکل	۱	۲	۳	...
تعداد رأس‌ها	۳	۵	۷	...

$+2$        $+2$

$$\Rightarrow \text{جمله عمومی: } a_n = 2n + b$$

جمله اول دنباله برابر ۳ است، در نتیجه:

$$a_1 = 3 \Rightarrow 2(1) + b = 3 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow a_n = 2n + 1$$

وقتی رأس داریم  $(a_n = 47)$ ، مقدار  $n$  (شماره شکل) برابر است با:

$$47 = 2n + 1 \Rightarrow 2n = 46 \Rightarrow n = 23$$

حالا باید ببینیم در شکل ۲۳ ام چندتا ضلع داریم. پس جدول تعداد اضلاع را تشکیل می‌دهیم:

شماره شکل	۱	۲	۳	...
تعداد اضلاع	۳	۷	۱۱	...

$+4$        $+4$

$$\Rightarrow a'_n = 4n + b \xrightarrow{\text{جمله اول}=3} 4(1) + b = 3 \Rightarrow b = -1$$

$$\Rightarrow a'_n = 4n - 1 \Rightarrow a'_{23} = 4(23) - 1 = 91$$

۷- گزینه ۳: جمله عمومی یک دنباله خطی به شکل  $t_n = an + b$  است، پس:

$$\begin{cases} t_6 = 27 \Rightarrow 6a + b = 27 \\ t_{13} = 55 \Rightarrow 13a + b = 55 \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} 7a = 28 \Rightarrow a = 4$$

$$\xrightarrow{6a+b=27} 6(4) + b = 27 \Rightarrow b = 3$$

پس جمله عمومی الگو به صورت  $t_n = 4n + 3$  است.

حالا برای این‌که ببینیم جمله چندم دنباله برابر ۹۹ است، باید معادله  $t_n = 99$  را حل کنیم:

$$4n + 3 = 99 \Rightarrow 4n = 96 \Rightarrow n = 24$$

۸- گزینه ۲: فرم کلی یک الگوی خطی به شکل  $t_n = an + b$

است، پس در فرم داده‌شده باید ضریب  $n^2$  را برابر صفر قرار دهیم:

$$k - 2 = 0 \Rightarrow k = 2 \Rightarrow t_n = pn + 2$$

از طرفی با توجه به این‌که هر جمله، ۴ واحد از جمله قبل خود بیشتر

است، پس ضریب  $n$  نیز برابر ۴ است:

در نهایت برای این‌که ببینیم جمله دهم چند برابر جمله سوم است،

$$\frac{t_{10}}{t_3} = \frac{4(10) + 2}{4(3) + 2} = \frac{42}{14} = 3$$

حاصل  $\frac{t_{10}}{t_3}$  را می‌یابیم:

۱۱- گزینه ۲ به جدول زیر توجه کنید:

شماره شکل	۱	۲	۳	...	n
تعداد خانه‌های رنگی	۴	۶	۸	...	$2n+2$
تعداد خانه‌های سفید	$1 \times 2$	$2 \times 3$	$3 \times 4$	...	$n(n+1)$

اول ببینیم در کدام مرحله تعداد خانه‌های رنگی برابر ۳۸ است:

$$2n+2=38 \Rightarrow 2n=36 \Rightarrow n=18$$

پس تعداد خانه‌های سفید این مرحله برابر است با:

$$\text{تعداد خانه‌های سفید} = n(n+1) = 18(19) = 342$$

۱۲- گزینه ۱ بپه فوبی باشی یک روش توپ می‌گم صف کنی!

در هر شکل تعداد کل دایره‌ها (چه توپر و چه توخالی) برابر مربع شماره شکل است، پس در شکل یازدهم داریم:

(\*)  $11^2 = 121 = \text{تعداد دایره‌های توخالی} + \text{تعداد دایره‌های توپر}$   
از طرفی در شکل‌های زوج تفاضل دایره‌های توپر و توخالی برابر صفر و در شکل‌های فرد، این تفاضل برابر یک است، پس در شکل یازدهم (که عددی فرد است):

$$1 = \text{تعداد دایره‌های توخالی} - \text{تعداد دایره‌های توپر} (**)$$

حالا طرفین رابطه‌های (\*) و (\*\*) را با هم جمع می‌کنیم:

$$2 = 121 + 1 = \text{تعداد دایره‌های توپر} + 1$$

$$61 = \text{تعداد دایره‌های توپر} \Rightarrow 122 = \text{تعداد دایره‌های توپر} + 1$$

۱۳- گزینه ۲ به جدول زیر توجه کنید:

شماره شکل	۱	۲	۳	...	n
تعداد قطعه‌ها	۱	$1+2$	$1+2+3$	...	$1+2+3+\dots+n$

پس با استفاده از نکته زیر تعداد قطعه‌ها را در هر مرحله می‌یابیم.

مجموع اعداد طبیعی از ۱ تا n برابر است با:

$$1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

با توجه به شکل‌ها، تعداد پله‌ها در هر مرحله با شماره شکل یکسان است، پس در مرحله‌ای که ۱۶ پله داریم، شماره شکل هم ۱۶ است:

$$\Rightarrow 1+2+\dots+16 = \text{تعداد قطعه‌ها در شکل شانزدهم}$$

$$= \frac{16(17)}{2} = 136$$

۱۴- گزینه ۲ تعداد کل مثلث‌ها در هر شکل برابر  $(\text{شماره شکل})^2$

است. پس تعداد کل مثلث‌ها در شکل nام برابر  $n^2$  است.

از طرفی مطابق جدول زیر تعداد مثلث‌های رنگی در هر مرحله برابر است با:

شماره شکل	۱	۲	۳	...	n
تعداد مثلث‌های رنگی	۱	$1+2$	$1+2+3$	...	$1+2+\dots+n$

$$\Rightarrow 1+2+\dots+n = \text{تعداد مثلث‌های رنگی شکل nام}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} (*)$$

حالا مرحله‌ای را می‌یابیم که تعداد مثلث‌های رنگی  $5/52$  درصد کل مثلث‌ها باشد:

$$\frac{\text{تعداد مثلث‌های رنگی}}{\text{تعداد کل مثلث‌ها}} = \frac{52/5}{100} \Rightarrow \frac{n(n+1)}{2} = \frac{525}{1000}$$

$$\Rightarrow \frac{n+1}{2n} = \frac{21}{40} \Rightarrow n=20$$

۱۵- گزینه ۲ الگو را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:



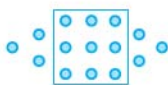
(۱)

$$1^2$$



(۲)

$$2^2 + 2(1)$$



(۳)

$$3^2 + 2(1+2)$$



(۴)

$$4^2 + 2(1+2+3)$$

پس در شکل دوازدهم تعداد نقطه‌ها برابر است با:

$$\text{تعداد نقطه‌ها} = 12^2 + 2(1+2+\dots+11) = 12^2 + 2\left(\frac{11(12)}{2}\right)$$

$$= 12^2 + 11(12) = 144 + 132 = 276$$

جمله عمومی این الگو به صورت  $a_n = n^2 + 2(1+2+\dots+n-1)$  است.

۱۶- گزینه ۲ با توجه به جملات الگو داریم:

تفاضل هر دو جمله متوالی:  $3-1, 7-3, 13-7, \dots$

$\Rightarrow 2, 4, 6, \dots$  : تفاضل هر دو جمله متوالی

همان‌طور که می‌بینید، تفاضل جملات متوالی تشکیل یک دنباله حسابی با قدرنسبت ۲ می‌دهند، چون در الگوی درجه دوم، قدرنسبت حاصل، دو برابر ضریب  $n^2$  است؛ پس:

$$2a = 2 \Rightarrow a = 1$$

$$\Rightarrow t_n = n^2 + bn + c (*)$$

$$\begin{cases} \text{از طرفی: } t_1 = 1 \xrightarrow{(*)} 1+b+c=1 \Rightarrow b+c=0 \\ t_2 = 3 \xrightarrow{(*)} 4+2b+c=3 \Rightarrow 2b+c=-1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{تفاضل}} b = -1 \xrightarrow{b+c=0} -1+c=0 \Rightarrow c=1$$

$$\Rightarrow b-c = -1-1 = -2$$

۱۷- گزینه ۱ یکی از جملات (مثلاً C) ۱۷ واحد از جمله قبل

خود بیشتر است و ۲۱ واحد از جمله بعد از خود کم‌تر است، پس:

جملات:  $\dots, c-17, c, c+21, \dots$

تفاضل جملات:  $\dots, 17, 21, \dots$

پس قدرنسبت دنباله تفاضل برابر ۴ است. در نتیجه:

$$2(n^2) = 4 \Rightarrow 2a = 4 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow t_n = 2n^2 + bn$$



جمله سوم دنباله برابر ۱۵ است. پس:

$$t_3 = 15 \Rightarrow 2(3)^2 + b(3) = 15 \Rightarrow b(3) = -3 \Rightarrow b = -1$$

$$\Rightarrow t_n = 2n^2 - n \Rightarrow t_6 = 2(6)^2 - 6 = 66$$

۱۸- گزینه ۴

$$a_7 = \frac{3}{16} + \left(-\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{16} > 0$$

در بقیه جملات،  $\frac{n}{16}$  از  $\left(-\frac{1}{8}\right)^n$  بزرگتر است و مجموع آن‌ها منفی نخواهد شد، پس این دنباله تنها یک جمله منفی دارد.

۲۳- گزینه ۱ اول فرض کنیم با تابع  $f(x) = 2x^2 - 18x + 1$

سروکار داریم. چون ضریب  $x^2$  مثبت است، تابع مینیمم دارد و طول مینیمم هم از رابطه  $x = -\frac{b}{2a}$  به دست می‌آید:

$$x = -\frac{-18}{2(2)} = 4/5$$

پس کمترین مقدار تابع به ازای  $x = 4/5$  حاصل می‌شود. اما ما این‌جا دنباله داریم که فقط مقادیر طبیعی را قبول می‌کند، پس کمترین مقدار دنباله در اولین عدد طبیعی قبل از  $4/5$  یا اولین عدد طبیعی بعد از  $4/5$  حاصل می‌شود. پس  $a_4$  و  $a_5$  را محاسبه می‌کنیم. هر کدام کم‌تر باشد کمترین مقدار دنباله است:

$$a_4 = 2(4)^2 - 18(4) + 1 = -39$$

$$a_5 = 2(5)^2 - 18(5) + 1 = -39$$

پس کمترین مقدار دنباله  $-39$  است.

۲۴- گزینه ۳ به ازای  $n \geq 5$  جملات دنباله مثبت و به ازای

$n \leq 4$  جملات دنباله منفی هستند، پس کمترین مقدار دنباله در چهار جمله اول قرار دارد:

$$a_n = \frac{n+1}{2n-9} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{2}{-7}, & a_2 = \frac{3}{-5} \\ a_3 = \frac{4}{-3}, & a_4 = \frac{5}{-1} \end{cases}$$

از بین چهار مقدار محاسبه شده کمترین مقدار برابر  $-5$  است، پس کمترین مقدار دنباله برابر  $-5$  است.

۲۵- گزینه ۲ با توجه به جملات دنباله، هر جمله (غیر از دو

جمله اول) برابر مجموع دو جمله قبل از خود است:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$$

$$a_8 = a_7 + a_6 = 13 + 8 = 21$$

بنابراین:

$$a_9 = a_8 + a_7 = 21 + 13 = 34$$

$$a_{10} = a_9 + a_8 = 34 + 21 = 55$$

دنباله  $1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$  را دنباله فیبوناتچی می‌گویند، جملات عمومی این دنباله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \quad a_1 = a_2 = 1$$

۲۶- گزینه ۴ چند جمله اول دنباله را محاسبه می‌کنیم:

$$a_n = 2a_{n-1} + 1, \quad a_1 = 1$$

$$a_2 = 2a_1 + 1 = 2(1) + 1 = 3 = 2^2 - 1$$

$$a_3 = 2a_2 + 1 = 2(3) + 1 = 7 = 2^3 - 1$$

$$a_4 = 2a_3 + 1 = 2(7) + 1 = 15 = 2^4 - 1$$

پس جمله هشتم دنباله برابر است با:

$$a_8 = 2^8 - 1 = 256 - 1 = 255$$

$$a_n = \frac{2n}{n+1} \Rightarrow \begin{cases} a_3 = \frac{2(3)}{3+1} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \\ a_5 = \frac{2(5)}{5+1} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_3 + a_5 = \frac{3}{2} + \frac{5}{3} = \frac{9+10}{6} = \frac{19}{6}$$

۱۹- گزینه ۲ باید معادله  $a_n = \frac{3}{8}$  را حل کنیم:

$$\frac{n+1}{2n-2} = \frac{3}{8} \Rightarrow 8n+8 = 6n-6 \Rightarrow n = 14$$

۲۰- گزینه ۴ جمله نوزدهم دنباله  $a_n$  برابر  $a_{19}$  است. برای

محاسبه این جمله با توجه به دنباله  $a_{2n+3} = \frac{n+1}{n+2}$  باید کاری کنیم اندیس این دنباله ۱۹ شود:

$$2n+3 = 19 \Rightarrow 2n = 16 \Rightarrow n = 8$$

$$a_{2n+3} = \frac{n+1}{n+2} \xrightarrow{n=8} a_{19} = \frac{8+1}{8+2} = \frac{9}{10} = 0.9$$

۲۱- گزینه ۳ دنباله را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$-\frac{4}{1}, \frac{9}{8}, -\frac{16}{27}, \frac{25}{64}, \dots$$

جملات یکی در میان مثبت و منفی هستند، پس حتماً در جمله عمومی  $(-1)^n$  داریم. از طرفی در صورت کسر اول  $4 = 2^2$ ، در صورت کسر

دوم،  $9 = 3^2$  و ... و در نتیجه در صورت کسر  $n^2$  داریم.

حالا بریم سراغ مخراج! در مخراج کسر اول  $1 = 1^3$ ، در مخراج کسر دوم

$8 = 2^3$  و ... و در مخراج کسر  $n^3$  داریم. در نتیجه جمله عمومی

$$a_n = (-1)^n \frac{(n+1)^3}{n^3}$$

دنباله به صورت مقابل است:

$$\text{حالا با توجه به تساوی } a_n = \frac{b_n}{n} \text{ داریم:}$$

$$b_n = na_n \Rightarrow b_n = n((-1)^n \frac{(n+1)^3}{n^3})$$

$$\Rightarrow b_n = (-1)^n \frac{(n+1)^3}{n^2} \Rightarrow b_n = (-1)^n \left(\frac{n+1}{n}\right)^2$$

$$\Rightarrow b_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2$$

۲۲- گزینه ۳ در واقع باید نامعادله  $\frac{n}{16} + \left(-\frac{1}{4}\right)^n < 0$  را حل

کنیم. اما چون حل این نامعادله پیچیده است، جملات دنباله را می‌یابیم:

$$a_1 = \frac{1}{16} + \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{3}{16} < 0, \quad a_2 = \frac{2}{16} + \left(\frac{1}{4}\right) > 0$$

۲۷- گزینه ۱

اول دنباله داده شده را گویا می‌کنیم:

$$a_n = \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} \times \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})}{n+1 - n-1} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$$

حالا مجموع نود و نه جمله اول را می‌یابیم. برای این کار جملات اول تا نود و نهم را محاسبه و با هم جمع می‌کنیم:

$$a_1 = \sqrt{1+1} - \sqrt{1-1} = \sqrt{2} - 0$$

$$a_2 = \sqrt{2+1} - \sqrt{2-1} = \sqrt{3} - 1$$

$$a_3 = \sqrt{3+1} - \sqrt{3-1} = \sqrt{4} - \sqrt{2}$$

$$a_4 = \sqrt{4+1} - \sqrt{4-1} = \sqrt{5} - \sqrt{3}$$

$$\vdots$$

$$a_{98} = \sqrt{98+1} - \sqrt{98-1} = \sqrt{99} - \sqrt{97}$$

$$a_{99} = \sqrt{99+1} - \sqrt{99-1} = \sqrt{100} - \sqrt{98}$$

$$S = -1 + \sqrt{99} + \sqrt{100} = -1 + \sqrt{99} + 10$$

$$\Rightarrow S = 9 + \sqrt{99}$$

توضیح

وقتی جمله‌ها را با هم جمع می‌کنیم، همه مقادیر قرینه با هم حذف می‌شوند. فقط از دو جمله اول مقادیر ۰ و -۱ و از دو جمله آخر مقادیر  $\sqrt{99}$  و  $\sqrt{100}$  با هیچ مقداری قرینه نیستند در نتیجه حذف نمی‌شوند. پس باید مجموع همین ۴ مقدار را محاسبه کنیم.

۲۸- گزینه ۳ بررسی می‌کنیم. گزینه‌های صحیح است که تغییرات هر دو جمله متوالی آن مقداری ثابت است:

دنباله حسابی نیست: ①  $-1, 2, 4, 6, \dots$

دنباله حسابی نیست: ②  $5, 1, -4, -8, \dots$

دنباله حسابی است: ③  $5, \frac{5}{2}, 0, -\frac{5}{2}, \dots$

تغییرات یکسان نیست، پس دنباله حسابی نیست. ④  $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \dots \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} - \frac{1}{4} = \frac{4-6}{24} = -\frac{1}{12} \end{cases}$

۲۹- گزینه ۲

اول باید قدرنسبت و جمله اول دنباله را محاسبه کنیم:

$$-1, 5, 11, \dots \Rightarrow \begin{cases} a_1 = -1 \\ d = 5 - (-1) = 6 \end{cases} (*)$$

حالا با استفاده از فرمول جمله عمومی دنباله حسابی، یعنی رابطه  $a_n = a_1 + (n-1)d$  جمله هشتم دنباله را می‌یابیم:

$$a_8 = a_1 + 7d = -1 + 7(6) = 41$$

۳۰- گزینه ۳ راه اول از فرمول جمله عمومی دنباله حسابی استفاده کرده و قدرنسبت را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} a_1 = -1 (*) \\ a_3 = 9 \Rightarrow a_1 + 2d = 9 \xrightarrow{(*)} -1 + 2d = 9 \\ \Rightarrow 2d = 10 \Rightarrow d = 5 \end{cases}$$

پس جمله پانزدهم دنباله برابر است با:

$$a_{15} = a_1 + 14d = -1 + 14(5) = 69$$

راه دوم از رابطه  $a_n - a_m = (n-m)d$  استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} a_1 = -1 \\ a_3 = 9 \end{cases} \Rightarrow a_3 - a_1 = 2d \Rightarrow 9 - (-1) = 2d \Rightarrow d = 5$$

از طرفی برای محاسبه جمله پانزدهم از جمله سوم و فرمول بالا استفاده می‌کنیم:

$$a_{15} - a_3 = 12d \Rightarrow a_{15} - 9 = 12(5) \Rightarrow a_{15} = 69$$

۳۱- گزینه ۳ راه اول باتوجه به جملات دنباله، جمله دوم برابر

$-\frac{3}{2}$  و جمله چهارم برابر  $\frac{7}{2}$  است، پس با استفاده از فرمول جمله عمومی دنباله حسابی داریم:

$$\begin{cases} a_2 = -\frac{3}{2} \Rightarrow a_1 + d = -\frac{3}{2} \\ a_4 = \frac{7}{2} \Rightarrow a_1 + 3d = \frac{7}{2} \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} 2d = 5$$

$$\Rightarrow d = \frac{5}{2} \xrightarrow{a_1+d=-\frac{3}{2}} a_1 + \frac{5}{2} = -\frac{3}{2} \Rightarrow a_1 = -\frac{8}{2} = -4$$

بنابراین جمله دوازدهم دنباله برابر است با:

$$a_{12} = a_1 + 11d = -4 + 11\left(\frac{5}{2}\right) = -4 + \frac{55}{2}$$

$$\Rightarrow a_{12} = \frac{47}{2} = 23\frac{1}{2}$$

راه دوم می‌دانیم  $a_n - a_m = (n-m)d$ ؛ بنابراین:

$$a_4 - a_2 = 2d \Rightarrow \frac{7}{2} - \left(-\frac{3}{2}\right) = 2d \Rightarrow 2d = 5 \Rightarrow d = \frac{5}{2}$$

برای محاسبه جمله دوازدهم، از جمله چهارم و فرمول بالا استفاده می‌کنیم:

$$a_{12} - a_4 = 8d \Rightarrow a_{12} - \frac{7}{2} = 8\left(\frac{5}{2}\right)$$

$$\Rightarrow a_{12} - 3\frac{1}{2} = 20 \Rightarrow a_{12} = 23\frac{1}{2}$$

۳۲- گزینه ۳ راه اول تفاضل جمله دهم از دوازدهم برابر ۵ است، پس:

$$\overbrace{a_{12} - a_{10}}^{2d} = 5 \Rightarrow d = \frac{5}{2}$$

از طرفی مجموع دو جمله دهم و دوازدهم برابر ۲۵ است، پس:

$$a_{12} + a_{10} = 25$$

با توجه به رابطه  $a_n = a_1 + (n-1)d$  داریم:

$$a_1 + 11d + a_1 + 9d = 25 \Rightarrow 2a_1 + 20d = 25$$

$$\xrightarrow{d=\frac{5}{2}} 2a_1 + 20\left(\frac{5}{2}\right) = 25 \Rightarrow 2a_1 = -25 \Rightarrow a_1 = -\frac{25}{2}$$

در نتیجه جمله بیست و یکم برابر است با:

$$a_{21} = a_1 + 20d = -\frac{25}{2} + 20\left(\frac{5}{2}\right) = -12\frac{1}{2} + 50 = 37\frac{1}{2}$$



$$a_1 = 17, d = -\frac{15}{2} \rightarrow 17 + (n-1)\left(-\frac{15}{2}\right) = -110/5$$

$$\Rightarrow (n-1)\left(-\frac{15}{2}\right) = -127/5 \Rightarrow n-1 = \frac{254}{15} = 17$$

$$\Rightarrow n = 18$$

پس جمله هجدهم دنباله برابر  $-110/5$  است.

**۳۶- گزینه ۱** مجموع جملات سوم و هفتم برابر ۱۲ است.

$$a_3 + a_7 = 12 \Rightarrow a_1 + 2d + a_1 + 6d = 12$$

$$\Rightarrow 2a_1 + 8d = 12 \xrightarrow{\div 2} a_1 + 4d = 6 \quad (*)$$

جملات دوم و پنجم قرینه هم هستند:

$$a_2 = -a_5 \Rightarrow a_2 + a_5 = 0 \Rightarrow a_1 + d + a_1 + 4d = 0$$

$$\Rightarrow 2a_1 + 5d = 0 \Rightarrow 2a_1 = -5d \Rightarrow a_1 = -\frac{5}{2}d$$

با استفاده از تساوی (\*) داریم:

$$\xrightarrow{(*)} -\frac{5}{2}d + 4d = 6 \Rightarrow \frac{3}{2}d = 6 \Rightarrow d = 4$$

با توجه به این که  $a_1 = -\frac{5}{2}d$ ، بنابراین:  $a_1 = -10$

در نهایت برای این که ببینیم کدام جمله دنباله مقدار ۵۰ دارد، باید معادله  $a_n = 50 \Rightarrow a_1 + (n-1)d = 50$  را حل کنیم:

مقادیر  $d = 4$  و  $a_1 = -10$  را جای گذاری می‌کنیم:

$$-10 + (n-1)(4) = 50 \Rightarrow (n-1)4 = 60 \Rightarrow n-1 = 15$$

$$\Rightarrow n = 16$$

**۳۷- گزینه ۳** اول جمله عمومی دنباله را محاسبه می‌کنیم. به روش *باال یارتون بدم!* قدرنسبت دنباله ۷ است، پس جمله عمومی به صورت  $a_n = 7n + b$  است. چون جمله اول  $-1$  است ( $a_1 = -1$ )، پس:

$$-1 = 7(1) + b \Rightarrow b = -8 \Rightarrow a_n = 7n - 8$$

حالا برای این که ببینیم دنباله چند جمله بزرگ‌تر از ۵۰ دارد، باید نامعادلات  $50 < 7n - 8 \leq 342$  را حل کنیم:

$$50 < 7n - 8 \leq 342 \xrightarrow{+8} 58 < 7n \leq 350$$

$$\Rightarrow \frac{58}{7} < n \leq \frac{350}{7} \Rightarrow 8 \frac{2}{7} < n \leq 50 \Rightarrow 9 \leq n \leq 50$$

بنابراین  $42 (= 50 - 9 + 1)$  جمله دنباله بزرگ‌تر از ۵۰ است.

اگر  $a$  و  $b$  اعدادی صحیح باشند، تعداد اعداد صحیح از  $a$  تا  $b$  (خود  $a$  و  $b$  نیز هستند) برابر  $b - a + 1$  است.

**۳۸- گزینه ۱ راه اول** مجموع سه جمله اول ۳ است، پس:

$$a_1 + a_2 + a_3 = 3 \Rightarrow a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) = 3$$

$$\Rightarrow 3a_1 + 3d = 3 \xrightarrow{\div 3} a_1 + d = 1 \quad (*)$$

مجموع سه جمله دوم ۳۹ است، پس:

$$a_2 + a_5 + a_6 = 39$$

$$\Rightarrow (a_1 + d) + (a_1 + 4d) + (a_1 + 5d) = 39$$

$$\Rightarrow 3a_1 + 12d = 39 \xrightarrow{\div 3} a_1 + 4d = 13 \quad (**)$$

**راه دوم** اما یک روش بهتر: قدرنسبت که به همان روش قبل  $d = \frac{5}{2}$  محاسبه می‌شود. از طرفی با توجه به اطلاعات مسئله داریم:

$$\begin{cases} a_{12} - a_1 = 5 \\ a_{12} + a_1 = 25 \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع}} 2a_{12} = 30 \Rightarrow a_{12} = 15$$

حالا با استفاده از فرمول  $a_n - a_m = (n-m)d$  و جمله دوازدهم، جمله بیست و یکم را محاسبه می‌کنیم:

$$a_{21} - a_{12} = (21-12)d \Rightarrow a_{21} - 15 = 9\left(\frac{5}{2}\right)$$

$$\Rightarrow a_{21} = 15 + 22 \frac{5}{2} = 37 \frac{5}{2}$$

**۳۳- گزینه ۲** جمله هشتم دنباله، ۶ واحد از جمله چهارم بیشتر است، پس:

$$a_8 = a_4 + 6 \Rightarrow a_8 - a_4 = 6 \Rightarrow 4d = 6 \Rightarrow d = \frac{3}{2}$$

مجذور جمله نهم هم ۱۷۱ واحد از مجذور جمله سوم بیشتر است:

$$a_9^2 = a_3^2 + 171 \Rightarrow a_9^2 - a_3^2 = 171$$

$$\Rightarrow \underbrace{(a_9 - a_3)}_{6d} (a_9 + a_3) = 171 \Rightarrow 6\left(\frac{3}{2}\right)(a_9 + a_3) = 171$$

$$\Rightarrow a_9 + a_3 = 19$$

حالا با استفاده از فرمول جمله عمومی، جمله اول دنباله را محاسبه می‌کنیم:

$$a_1 + 8d + a_1 + 2d = 19 \Rightarrow 2a_1 + 10d = 19$$

$$\xrightarrow{d=\frac{3}{2}} 2a_1 + 10\left(\frac{3}{2}\right) = 19 \Rightarrow 2a_1 + 15 = 19$$

$$\Rightarrow 2a_1 = 4 \Rightarrow a_1 = 2$$

**۳۴- گزینه ۲** به تساوی داده شده خوب دقت کنید:

$$a_{n-1} = a_n + 4 \Rightarrow a_n - a_{n-1} = -4$$

یعنی تفاضل هر دو جمله متوالی. پس با توجه به تساوی، تفاضل هر دو جمله متوالی مقدار ثابت  $-4$  شده، در نتیجه با یک دنباله حسابی با قدرنسبت  $-4$  سروکار داریم. جمله اول را هم که خود مسئله داده، پس جمله عمومی دنباله برابر است با:

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ d = -4 \end{cases} \Rightarrow a_n = 3 + (n-1)(-4) \quad (*)$$

برای این که ببینیم جمله چندم برابر  $-97$  است، معادله  $a_n = -97$  را حل می‌کنیم:

$$\xrightarrow{(*)} 3 + (n-1)(-4) = -97 \Rightarrow (n-1)(-4) = -100$$

$$\Rightarrow n-1 = 25 \Rightarrow n = 26$$

**۳۵- گزینه ۲** جمله اول دنباله ۱۷ است، قدرنسبت دنباله را هم به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} a_1 = 17 \\ a_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow a_3 - a_1 = 2d \Rightarrow 2d = 2 - 17 = -15$$

$$\Rightarrow d = -\frac{15}{2}$$

حالا برای این که بفهمیم کدام جمله برابر  $-110/5$  است، باید معادله  $a_n = -110/5$  را حل کنیم و  $n$  را محاسبه کنیم:

$$a_n = -110/5 \Rightarrow a_1 + (n-1)d = -110/5$$

قدرنسبت از جمله چهارم بیشتر (یعنی  $a_4 + d$ ) و جمله سوم به اندازه یک قدرنسبت از جمله چهارم کمتر است (یعنی  $a_4 - d$ ). در نتیجه جملات به صورت روبه‌رو خواهند بود:

$$a_4 - d, a_4, a_4 + d$$

مجموع این سه جمله برابر ۲۴ است، پس:

$$(a_4 - d) + a_4 + (a_4 + d) = 24 \Rightarrow 3a_4 = 24 \Rightarrow a_4 = 8$$

حاصل ضرب سه جمله برابر ۴۴۰ است، در نتیجه:

$$(a_4 - d)(a_4)(a_4 + d) = 440$$

$$\xrightarrow{a_4=8} (\lambda - d)(\lambda)(\lambda + d) = 440$$

قدرنسبت دنباله منفی است، پس  $d = -3$  قابل قبول است. برای محاسبه جمله هشتم از رابطه  $a_n - a_m = (n - m)d$  استفاده می‌کنیم:

$$a_8 - a_4 = 4d \Rightarrow a_8 - 8 = 4(-3) \Rightarrow a_8 - 8 = -12$$

$$\Rightarrow a_8 = -4$$

۴۲- گزینه ۳ اگر  $a, b, c$  سه جمله متوالی یک دنباله حسابی باشند، آن‌گاه:

$$2b = a + c$$

بنابراین در سه جمله متوالی  $a, 3a, 5a$  داریم:

$$2(3a) = a + 5a \Rightarrow 6a = a + 5a \Rightarrow a = 5$$

در نتیجه جملات دنباله به صورت  $5, 15, 25, 35, 45$  هستند که قدرنسبت این دنباله برابر ۱۵ است.

۴۳- گزینه ۲ می‌دانیم اگر  $n + m = p + q$  باشد، در دنباله حسابی داریم:

$$a_n + a_m = a_p + a_q$$

در نتیجه با توجه به این که جمله نهم را می‌خواهیم، تساوی داده شده را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$a_3 + a_5 + a_7 + a_9 = 32 \Rightarrow 4a_6 = 32 \Rightarrow a_6 = 8$$

۴۴- گزینه ۱ با توجه به نکته تست قبل می‌توان نوشت: (دقت کنید در تساوی داده شده، جمع اندیس‌ها ۱۲ است.)

$$a_4 + a_8 = a_7 + a_5 = 2a_6$$

از آن‌جا که  $a_4 + a_8 = 10$  است، پس:

$$\begin{cases} a_7 + a_5 = 10 \\ 2a_6 = 10 \Rightarrow a_6 = 5 \end{cases} \Rightarrow a_7 - a_5 + a_6 = 10 - 5 = 5$$

۴۵- گزینه ۲ مجموع جملات دوم و چهارم برابر ۱۶ است:

$$a_2 + a_4 = 16 \Rightarrow 2a_3 = 16 \Rightarrow a_3 = 8 (*)$$

از طرفی حاصل ضرب جملات سوم و پنجم برابر ۱۱۲ است:

$$a_3 \cdot a_5 = 112 \xrightarrow{(*)} 8(a_5) = 112 \Rightarrow a_5 = 14$$

بنابراین:

$$\begin{cases} a_3 = 8 \\ a_5 = 14 \end{cases} \Rightarrow a_5 - a_3 = 2d \Rightarrow 14 - 8 = 2d \Rightarrow d = 3$$

برای محاسبه جمله دهم از جمله پنجم استفاده می‌کنیم:

$$a_{10} - a_5 = 5d \Rightarrow a_{10} - 14 = 5(3) \Rightarrow a_{10} = 29$$

طرفین تساوی‌های  $(**)$  و  $(*)$  را از هم کم می‌کنیم:

$$3d = 12 \Rightarrow d = 4 \xrightarrow{(*)} a_1 + 4 = 1 \Rightarrow a_1 = -3$$

حالا جمله هفتم را حساب کنیم:  $a_7 = a_1 + 6d = -3 + 6(4) = 21$

پس جمله هفتم  $7 - \left(\frac{21}{-3}\right) = 7$  برابر جمله اول است.

راه دوم

$$a_1 + a_7 + a_7 = 3 \Rightarrow 3a_7 = 3 \Rightarrow a_7 = 1$$

$$a_4 + a_4 + a_6 = 39 \Rightarrow 3a_4 = 39 \Rightarrow a_4 = 13$$

$$\xrightarrow{\text{تفاضل}} a_4 - a_7 = 12 \Rightarrow 3d = 12 \Rightarrow d = 4$$

حالا جمله هفتم و جمله اول را حساب می‌کنیم:

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 = a_7 - d = 1 - 4 = -3 \\ a_7 = a_7 + 5d = 1 + 5(4) = 21 \end{cases} \Rightarrow \frac{a_7}{a_1} = -7$$

۳۹- گزینه ۲ جمله اول و دوم را داریم. پس قدرنسبت را هم داریم:

$$d = a_2 - a_1 = (5 + \sqrt{2}) - (3 + \sqrt{2}) = 2$$

حالا ببینیم مسئله چی می‌فواد!

$$a_{13} + a_{14} + a_{15} + a_{16} = \text{مجموع چهار جمله چهارم}$$

$$a_5 + a_6 + a_7 + a_8 = \text{مجموع چهار جمله دوم}$$

برای این که بررسی کنیم مجموع چهار جمله چهارم چه قدر از مجموع چهار جمله دوم بیشتر است باید تفاضل دو عبارت بالا را محاسبه کنیم:

$$64 \stackrel{d=2}{=} 32d = \text{تفاضل} \Rightarrow (a_{15} - a_7) + (a_{16} - a_8) + (a_{13} - a_5) + (a_{14} - a_6)$$

پس مجموع چهار جمله چهارم، ۶۴ واحد از مجموع چهار جمله دوم بیشتر است.

۴۰- گزینه ۲ سه ضلع مثلث قائم‌الزاویه تشکیل دنباله حسابی می‌دهند. آن‌ها را به صورت  $a-d, a, a+d$  در نظر می‌گیریم.

بنابراین با توجه به شکل، رابطه فیثاغورس را می‌نویسیم:

$$(a-d)^2 + a^2 = (a+d)^2$$

$$\Rightarrow a^2 - 4ad = 0 \Rightarrow a(a-4d) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \times \\ a = 4d (*) \end{cases}$$

از طرفی محیط مثلث برابر ۳۶ است، در نتیجه:

$$(a-d) + a + (a+d) = 36 \Rightarrow 3a = 36 \Rightarrow a = 12$$

$$\xrightarrow{(*)} 12 = 4d \Rightarrow d = 3$$

بنابراین مساحت مثلث با توجه به شکل برابر است با:

$$S = \frac{a(a-d)}{2} = \frac{12(12-3)}{2} = 54$$

۴۱- گزینه ۲ چون با سه جمله متوالی سروکار داریم، مبنا را بر جمله وسط یعنی جمله چهارم می‌گذاریم. جمله پنجم به اندازه یک

شماره اندیس‌ها به صورت  $2n-1$  است، پس جمله هشتم این دنباله همان  $a_{15}$  است.

$$a_{2(8)-1} = a_{15} \\ a_{15} = 25 \Rightarrow a_1 + 14d = 25 \xrightarrow{d=-2} a_1 - 28 = 25 \\ \Rightarrow a_1 = 53$$

بنابراین جمله هشتم دنباله اولیه برابر است با:

$$a_8 = a_1 + 7d = 53 + 7(-2) = 39$$

برای یافتن جمله هشتم می‌توانید به صورت زیر عمل کنید: دنباله  $a_1, a_3, \dots, a_{29}$  یک دنباله حسابی با جمله اول  $a_1$  و قدرنسبت  $(a_3 - a_1) = 2d$  است؛ بنابراین جمله هشتم آن برابر است با:

$$a_8 = a_1 + (7)(2d) = a_1 + 14d$$

**۵۱- گزینه ۳ راه اول** قدرنسبت دنباله جملات مشترک برابر ک.م.م قدرنسبت دنباله‌هاست.

قدرنسبت دنباله اول ۴ و قدرنسبت دنباله دوم ۳ است، پس قدرنسبت دنباله جملات مشترک برابر است با:

$$d = [3, 4] = 12$$

همچنین اولین جمله دنباله با جملات مشترک برابر است با:

$$\begin{cases} -1, 3, 7, 11, \dots \\ 2, 5, 8, 11, \dots \end{cases} \Rightarrow a_1 = 11$$

پس جمله عمومی دنباله جملات مشترک برابر است با:

$$a_n = a_1 + (n-1)d = 11 + (n-1)12 \\ \Rightarrow a_n = 12n - 1 \quad (*)$$

حالا باید بررسی کنیم در پنجاه جمله اول دو دنباله، چند جمله مشترک وجود دارد. برای این کار باید اول ببینیم دو دنباله حداکثر تا چه عددی می‌توانند جمله مشترک داشته باشند، پس جمله پنجاهم دو دنباله را می‌یابیم:

$$\begin{cases} \xrightarrow{+4} \\ -1, 3, 7, \dots \Rightarrow a_{49} = -1 + (49)4 = 195 \\ \xrightarrow{+3} \\ 2, 5, 8, \dots \Rightarrow a'_{49} = 2 + (49)(3) = 149 \end{cases}$$

پس حداکثر تا عدد ۱۴۹ می‌توانند در ۵۰ جمله اول جملات مشترک داشته باشند. در نتیجه با حل نامعادله  $a_n \leq 149$ ، تعداد جملات مشترک را می‌یابیم:

$$\begin{aligned} (*) \rightarrow 12n - 1 &\leq 149 \Rightarrow 12n \leq 150 \Rightarrow n \leq \frac{150}{12} \\ \Rightarrow n &\leq 12/5 \end{aligned}$$

پس دو دنباله، ۱۲ جمله مشترک دارند.

**راه دوم** قدرنسبت دنباله جملات مشترک برابر ۱۲ و اولین جمله مشترک ۱۱ است. حالا به دنباله با قدرنسبت کوچک‌تر یعنی دنباله دوم و جملات آن توجه کنید:

$$2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, \dots$$

پس در هر چهار جمله، یک جمله مشترک وجود دارد. در نتیجه در ۵۰ جمله اول تعداد جملات مشترک برابر است با:

$$n = \frac{50}{4} = 12/5 \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} n = 12$$

**۴۶- گزینه ۱** با توجه به رابطه بین اندیس‌ها و جملات در دنباله

حسابی رابطه بین جملات دوم  $(a_2)$ ، پنجم  $(a_5)$  و هشتم  $(a_8)$

$$a_2 + a_8 = 2a_5 \\ \text{به صورت روبه‌رو است:} \\ \Rightarrow (1-x) + (2x+1) = 2(x-2) \Rightarrow x+2 = 2x-4 \\ \Rightarrow x = 6$$

پس جملات پنجم و هشتم دنباله برابرند با:

$$\begin{cases} a_5 = x - 2 = 6 - 2 = 4 \\ a_8 = 2x + 1 = 2(6) + 1 = 13 \end{cases}$$

در نتیجه قدرنسبت دنباله برابر است با:

$$a_8 - a_5 = 3d \Rightarrow 13 - 4 = 3d \Rightarrow d = 3$$

حالا مقدار جمله دهم را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$a_{10} - a_8 = 2d \Rightarrow a_{10} - 13 = 2(3) \Rightarrow a_{10} = 19$$

**۴۷- گزینه ۲ راه اول** فرض کنیم  $k$  واسطه قرار دهیم. در این صورت داریم:

$$18, \underbrace{\square, \dots, \square}_{k}, 138$$

پس جمله اول برابر  $a_1 = 18$  و جمله  $(k+2)$  ام برابر  $a_{k+2} = 138$  است.  $(k)$  جمله اول واسطه و دو تا جمله  $18$  و  $138$  هم که داریم، پس کلاً  $(k+2)$  تا جمله داریم. پس با استفاده از فرمول جمله عمومی دنباله حسابی  $k$  را می‌یابیم:

$$a_{k+2} = a_1 + (k+2-1)d \Rightarrow 138 = 18 + (k+1)d \\ \Rightarrow 120 = d(k+1) \Rightarrow k+1 = 24 \Rightarrow k = 23$$

**راه دوم** از فرمول استفاده می‌کنیم. اگر بین دو عدد  $a$  و  $b$  واسطه حسابی قرار دهیم آن‌گاه قدرنسبت دنباله حاصل برابر است با:

$$d = \frac{b-a}{k+1} \Rightarrow 5 = \frac{138-18}{k+1} \Rightarrow k+1 = \frac{120}{5} = 24 \\ \Rightarrow k = 23$$

**۴۸- گزینه ۲** اگر  $d$  قدرنسبت دنباله اصلی باشد، آن‌گاه:

$$d = \frac{7}{4} - 2 = -\frac{1}{4}$$

قدرنسبت دنباله جدید برابر است با:

$$d' = a_8 - a_4 = 4d = 4\left(-\frac{1}{4}\right) = -1$$

**۴۹- گزینه ۳** با تغییرات گفته‌شده، جملات دنباله به صورت زیر خواهند شد:

$$1 + \frac{8}{3}, \frac{5}{3} + \frac{7}{3}, \frac{7}{3} + \frac{6}{3}, \dots \\ \Rightarrow \text{جملات: } \frac{11}{3}, \frac{12}{3}, \frac{13}{3}, \dots$$

این جملات بیان‌کننده یک دنباله حسابی با جمله اول  $\frac{11}{3}$  و قدرنسبت  $\frac{1}{3}$  هستند. پس جمله شصت و پنجم دنباله جدید برابر است با:

$$a_{65} = a_1 + 64d = \frac{11}{3} + 64\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{75}{3} = 25$$

**۵۰- گزینه ۳** جمله سوم ۶ واحد از جمله ششم بیشتر است، پس:

$$a_3 = a_6 + 6 \Rightarrow a_6 - a_3 = -6 \Rightarrow 3d = -6 \Rightarrow d = -2$$

وقتی جملات با شماره زوج حذف می‌شوند، جملات با شماره فرد باقی می‌مانند:

$$a_1, a_3, \dots, a_{29}$$

۵۶- گزینه ۲ **راه اول** جمله هفتم نصف جمله سوم است، پس با توجه به فرمول جمله عمومی دنباله داریم:

$$a_7 = \frac{1}{2}a_3 \Rightarrow a_1 + 6d = \frac{1}{2}(a_1 + 2d)$$

$$\xrightarrow{\times 2} 2a_1 + 12d = a_1 + 2d \Rightarrow a_1 = -10d \quad (*)$$

حالا برای این که بینیم مجموع چند جمله دنباله صفر است، باید معادله  $S_n = 0$  را حل کنیم:

$$S_n = 0 \Rightarrow \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] = 0$$

$$\xrightarrow{(*)} \frac{n}{2}[-20d + nd - d] = 0 \Rightarrow \frac{n}{2}[(n-21)d] = 0$$

$$\xrightarrow{d \neq 0} n - 21 = 0 \Rightarrow n = 21$$

**راه دوم** جمله هفتم نصف جمله سوم است، پس:

$$a_7 = \frac{1}{2}a_3 \Rightarrow a_1 = -10d \Rightarrow a_1 + 10d = 0 \Rightarrow a_{11} = 0$$

حالا اگر از رابطه  $S_n = \frac{n}{2}[a_1 + a_n]$  برای محاسبه مجموع استفاده کنیم، باید  $n$  را طوری بیابیم که داخل کروشه  $a_{11}$  تشکیل شود (تا حاصل مجموع صفر بشه). با توجه به رابطه اندیس ها و جملات دنباله حسابی باید:

$$a_1 + a_n = 2a_{11}$$

جمع اندیس ها در طرف راست ۲۲ است، پس باید در طرف چپ هم  $1 + n = 22 \Rightarrow n = 21$  شود.

۵۷- گزینه ۲ **راه اول** مجموع چهار جمله اول برابر ۱۵ است:  $S_4 = 15 \quad (*)$

مجموع پنج جمله بعدی آن ۳۰ است، در نتیجه مجموع نه جمله اول را داریم. نگاه کنید:

مجموع پنج جمله بعدی + مجموع چهار جمله اول

$$\Rightarrow S_9 = 15 + 30 = 45 \quad (**)$$

حالا با استفاده از رابطه  $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$  در تساوی های  $(*)$  و  $(**)$  خواهیم داشت:

$$\left\{ \begin{aligned} S_4 = \frac{4}{2}[2a_1 + 3d] = 15 &\Rightarrow 2a_1 + 3d = \frac{15}{2} \\ S_9 = \frac{9}{2}[2a_1 + 8d] = 45 &\Rightarrow 2a_1 + 8d = 10 \end{aligned} \right.$$

$$\xrightarrow{\text{تفاضل}} \delta d = \frac{5}{2} \Rightarrow d = \frac{1}{2} \xrightarrow{2a_1 + 8d = 10} a_1 = 3$$

پس جمله یازدهم دنباله برابر است با:

$$a_{11} = a_1 + 10d = 3 + 10\left(\frac{1}{2}\right) = 8$$

**راه دوم** از فرمول جمله عمومی دنباله حسابی استفاده می کنیم. مجموع ۴ جمله اول ۱۵ است:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 15 \Rightarrow a_1 + 3a_2 = 15$$

$$\Rightarrow a_1 + 3(a_1 + 2d) = 15 \Rightarrow 4a_1 + 6d = 15 \quad (1)$$

مجموع پنج جمله بعدی ۳۰ است:

$$a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 = 30 \Rightarrow 5a_6 = 30 \Rightarrow a_6 = 6$$

$$\Rightarrow a_1 + 6d = 6 \quad (2)$$

۵۲- گزینه ۲ قدرنسبت دنباله اول ۷ و قدرنسبت دنباله دوم ۵ است، پس قدرنسبت دنباله جملات مشترک، برابر ک.م.م. ۵ و ۷ است که برابر ۳۵ است. حالا باید اولین جمله مشترک را پیدا کنیم:

$$\begin{cases} 2, 9, 16, 23, 30, 37, \dots \\ 12, 17, 22, 27, 32, 37, \dots \end{cases} \Rightarrow a_1 = 37$$

بنابراین جمله عمومی دنباله جملات مشترک برابر است با:

$$a_n = a_1 + (n-1)d = 37 + (n-1)5 = 5n + 32$$

برای این که تعداد جملات سرشماری کوچکتر از ۳۰۰ این دنباله را محاسبه کنیم، باید نامعادلات  $100 \leq a_n < 300$  را حل کنیم:

$$100 \leq 5n + 32 < 300 \Rightarrow 98 \leq 5n < 298$$

$$3 \leq n \leq 8 \Rightarrow \text{تعداد جملات مشترک} = 8 - 3 + 1 = 6$$

یه روش دیگه هم هست که جملات رو بنویسین! این جا هون قدرنسبت عدد بزرگیه این روش هوا به!

$$37, 72, 107, 142, 177, 212, 247, 282, \dots$$

جمله ۶

۵۳- گزینه ۳ دنباله داده شده یک دنباله حسابی با جمله اول  $a_1 = -2$  و قدرنسبت  $d = 5$  است. پس با استفاده از رابطه

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$$

$$S_8 = \frac{8}{2}[2(-2) + 7(5)] = 4[31] = 124 \quad \text{است با:}$$

۵۴- گزینه ۳ هر جمله دنباله از جمله قبل از خودش  $\frac{1}{2}$  کم تر

است، پس قدرنسبت برابر  $d = -\frac{1}{2}$  است (برای مثال  $a_3 = a_2 - \frac{1}{2}$ ،

پس  $a_4 - a_3 = -\frac{1}{2}$  و در نتیجه  $d = -\frac{1}{2}$ ). از طرفی جمله پنجم برابر ۳ است، بنابراین:

$$a_5 = 3 \Rightarrow a_1 + 4d = 3 \xrightarrow{d = -\frac{1}{2}} a_1 + 4\left(-\frac{1}{2}\right) = 3$$

$$\Rightarrow a_1 - 2 = 3 \Rightarrow a_1 = 5$$

در نتیجه مجموع ۱۰ جمله اول با استفاده از رابطه:

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$$

برابر است با:

$$S_{10} = \frac{10}{2}[2(5) + 9\left(-\frac{1}{2}\right)] = 5[10 - 4.5] = 5(5.5) = 27.5$$

۵۵- گزینه ۳ جمله اول دنباله ۱ و جمله چهارم آن  $\frac{5}{2}$  است؛ پس قدرنسبت دنباله برابر است با:

$$a_4 - a_1 = 3d \Rightarrow \frac{5}{2} - 1 = 3d \Rightarrow \frac{3}{2} = 3d \Rightarrow d = \frac{1}{2}$$

پس مجموع پانزده جمله اول دنباله برابر است با:

$$S_{15} = \frac{15}{2}[2a_1 + 14d] = \frac{15}{2}[2(1) + 14\left(\frac{1}{2}\right)]$$

$$\Rightarrow S_{15} = \frac{15}{2}[2 + 7] = \frac{15 \times 9}{2} = 67.5$$

از حل دستگاه معادلات (۱) و (۲) داریم:

$$\begin{aligned} (1)-(2) \rightarrow 3a_1 = 9 &\Rightarrow a_1 = 3 \quad (2) \rightarrow d = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

جمله یازدهم مثل راه حل اول محاسبه می شود.

۵۸- گزینه ۴ اگر قدرنسبت دنباله اولیه را با  $d$  نمایش دهیم، مجموع ۲۰ جمله اول برابر است با:

$$S_{20} = \frac{20}{2} [2a_1 + 19d] = 20a_1 + 190d$$

حالا اگر یک واحد به قدرنسبت اضافه شود، قدرنسبت دنباله جدید  $d+1$  می شود؛ پس مجموع ۲۰ جمله اول این دنباله برابر می شود با:

$$\begin{aligned} S'_{20} &= \frac{20}{2} [2a_1 + 19(d+1)] = 20a_1 + 190(d+1) \\ \Rightarrow S'_{20} &= 20a_1 + 190d + 190 \Rightarrow S'_{20} = S_{20} + 190 \end{aligned}$$

بنابراین مجموع ۲۰ جمله اول، ۱۹۰ واحد افزایش می یابد.

۵۹- گزینه ۲ اول با کمک دو جمله اول، قدرنسبت را محاسبه می کنیم:

$$d = a_2 - a_1 = (P-1) - (1+2P) = -P-2$$

مجموع هشت جمله اول دنباله ۶۰ است، پس با توجه به این که  $d = -P-2$  و  $a_1 = 1+2P$

$$\text{داریم: } S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d]$$

$$S_8 = 60 \Rightarrow \frac{8}{2} [2(1+2P) + 7(-P-2)] = 60$$

$$\Rightarrow 4[2+4P-7P-14] = 60 \Rightarrow -3P-12=15$$

$$\Rightarrow -3P=27 \Rightarrow P=-9$$

در نتیجه قدرنسبت دنباله برابر است با:

$$d = -P-2 = -(-9)-2 = 7$$

۶۰- گزینه ۱ با توجه به جملات دنباله داریم:

$$\begin{cases} a_1 = -27 \\ a_3 = -21 \end{cases} \Rightarrow a_3 - a_1 = 2d \Rightarrow -21 - (-27) = 2d$$

$$\Rightarrow 2d = 6 \Rightarrow d = 3$$

حالا باید تعداد جملات منفی دنباله را محاسبه کنیم. برای این کار باید نامعادله  $a_n < 0$  را حل کنیم:

$$\Rightarrow a_1 + (n-1)d < 0 \Rightarrow -27 + (n-1)(3) < 0$$

$$(n-1)(3) < 27 \Rightarrow n-1 < 9 \Rightarrow n < 10$$

بنابراین دنباله ۹ تا جمله منفی دارد که مجموع آن ها برابر است با:

$$S_9 = \frac{9}{2} [2a_1 + 8d] = \frac{9}{2} [2(-27) + 8(3)] = \frac{9}{2} (-30) = -135$$

۶۱- گزینه ۲ از رابطه  $S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d]$  استفاده می کنیم:

$$\left\{ \begin{aligned} S_6 = 12 &\Rightarrow \frac{6}{2} [2a_1 + 5d] = 12 \Rightarrow 2a_1 + 5d = 4 \\ S_{10} = 30 &\Rightarrow \frac{10}{2} [2a_1 + 9d] = 30 \Rightarrow 2a_1 + 9d = 6 \end{aligned} \right.$$

$$\xrightarrow{\text{تفاضل}} 4d = 2 \Rightarrow d = \frac{1}{2}$$

$$2a_1 + 5d = 4 \rightarrow 2a_1 + 5\left(\frac{1}{2}\right) = 4 \Rightarrow 2a_1 = 4 - \frac{5}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{3}{4}$$

بنابراین  $S_{16}$  برابر است با:

$$S_{16} = \frac{16}{2} [2a_1 + 15d] = 8 \left[ 2\left(\frac{3}{4}\right) + 15\left(\frac{1}{2}\right) \right]$$

$$\Rightarrow S_{16} = 8 \left[ \frac{3}{2} + \frac{15}{2} \right] = 8(9) = 72$$

۶۲- گزینه ۲ مجموع بیست جمله اول، سه برابر مجموع دوازده جمله اول است:

$$S_{20} = 3S_{12} \Rightarrow \frac{20}{2} [2a_1 + 19d] = 3 \left( \frac{12}{2} [2a_1 + 11d] \right)$$

$$\Rightarrow 10 [2a_1 + 19d] = 18 [2a_1 + 11d]$$

$$\Rightarrow 10a_1 + 95d = 18a_1 + 99d \Rightarrow 8a_1 = -4d$$

$$\Rightarrow d = -2a_1 \quad (*)$$

جمله سوم دنباله برابر ۶ است، پس:

$$a_3 = 6 \Rightarrow a_1 + 2d = 6 \xrightarrow{(*)} a_1 + 2(-2a_1) = 6$$

$$\Rightarrow -3a_1 = 6 \Rightarrow a_1 = -2 \xrightarrow{(*)} d = 4$$

پس جمله دهم دنباله برابر است با:

$$a_{10} = a_1 + 9d = -2 + 9(4) = 34$$

۶۳- گزینه ۱ راه اول مجموع جملات ردیف فرد ۱۳۵ است:

$$S' = a_1 + a_3 + \dots + a_{19} = 135$$

مجموع جملات ردیف زوج ۱۵۰ است:

$$S'' = a_2 + a_4 + \dots + a_{20} = 150$$

دو طرف تساوی را از هم کم می کنیم:

$$S'' - S' = (a_2 - a_1) + (a_4 - a_3) + \dots + (a_{20} - a_{19}) = 15$$

می دانیم تفاضل هر دو جمله متوالی در دنباله حسابی برابر  $d$  است.

پس حاصل هر یک از پرانتزهای بالا برابر  $d$  است:

$$\underbrace{d + d + \dots + d}_{10} = 15 \Rightarrow 10d = 15 \Rightarrow d = \frac{3}{2}$$

از طرفی مجموع  $S'$  و  $S''$  همان مجموع بیست جمله اول دنباله

حسابی است:  $S' + S'' = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{19} + a_{20}$

$$\Rightarrow 135 + 150 = S_{20} \Rightarrow S_{20} = 285$$

با استفاده از رابطه  $S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d]$  داریم:

$$\frac{20}{2} [2a_1 + 19\left(\frac{3}{2}\right)] = 285 \Rightarrow 10 [2a_1 + 28.5] = 285$$

$$\Rightarrow 2a_1 + 28.5 = 28.5 \Rightarrow 2a_1 = 0 \Rightarrow a_1 = 0$$

راه دوم در بیست جمله اول، ده تا جمله زوج و ده تا جمله فرد

داریم؛ پس مجموع جملات ردیف فرد  $(a_1 + a_3 + \dots + a_{19})$ ،

مجموع ۱۰ جمله یک دنباله حسابی با جمله اول  $a_1$  و قدرنسبت

$$2d \text{ است: } (a_3 - a_1) = 2d$$

$$\text{مجموع جملات ردیف فرد ۱۳۵ است: } \frac{10}{2} [2a_1 + 9(2d)] = 135$$

$$\Rightarrow 10a_1 + 90d = 135 \quad (*)$$

با توجه به این که جمله عمومی دنباله  $a_n = \frac{3}{2}n - 5$  است، پس با

کمک رابطه  $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$  مجموع را می یابیم:

$$\begin{cases} a_1 = \frac{3}{2} - 5 = -\frac{7}{2} \\ d = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow S_{15} = \frac{15}{2} \left[ 2 \left( -\frac{7}{2} \right) + 14 \left( \frac{3}{2} \right) \right]$$

$$\Rightarrow S_{15} = \frac{15}{2} [-7 + 21] = \frac{15}{2} (14) = 105$$

**۶۶- گزینه ۴** جمله اول و آخر را که داریم، تمام گرفتاریمون اینه که

تعداد هملات رو نداریم! به صورت زیر و با استفاده از فرمول زیر، تعداد جملات را می یابیم. فقط دقت کنید که قدرنسبت دنباله برابر ۳ است:

$$n = \frac{\text{اولی} - \text{آخری}}{d} + 1 = \frac{52 - (-2)}{3} + 1 = 19$$

پس مجموع جملات برابر است با:

$$S_{19} = \frac{19}{2} [-2 + 52] = \frac{19}{2} (50) = 19(25) = 475$$

(از رابطه [جمله آخر + جمله اول]  $S_n = \frac{n}{2}$  استفاده کردیم.)

**۶۷- گزینه ۲** از اتحاد مربع دو جمله ای استفاده می کنیم و جمله

عمومی را ساده تر می کنیم:

$$a_n = n^2 - (n+1)^2 = n^2 - (n^2 + 2n + 1) = -2n - 1$$

$$\Rightarrow a_n = -2n - 1$$

گفتیم  $a_n = An + B$  جمله عمومی یک دنباله حسابی است؛ پس

مجموع ۱۹ جمله اول دنباله برابر است با:

$$S_{19} = \frac{19}{2} [a_1 + a_{19}] = \frac{19}{2} [2a_{10}] = 19a_{10}$$

از آن جا که  $a_n = -2n - 1$ ، پس  $a_{10} = -21$  و در نتیجه:

$$S_{19} = 19(-21) = -399$$

**۶۸- گزینه ۳** جمله یازدهم برابر ۱۲ است:

مجموع جملات شروع از پنجم و ختم به جمله هفدهم برابر است با:

$$S = a_5 + a_6 + \dots + a_{17}$$

تعداد جملات برابر  $(17 - 5 + 1) = 13$  تا است؛ پس:

$$S = \frac{13}{2} [\text{جمله آخر} + \text{جمله اول}] = \frac{13}{2} [a_5 + a_{17}]$$

می دانیم  $a_5 + a_{17} = 2a_{11}$ ، پس:

$$S = \frac{13}{2} [2a_{11}] = 13a_{11} = 13(12) = 156$$

**۶۹- گزینه ۲** تعداد جملات دنباله ۱۰ تا است؛ پس با توجه به

این که مجموع جملات ۲۴۵ است، داریم:

$$S_{10} = \frac{10}{2} [a_1 + a_{10}] \Rightarrow 245 = \frac{10}{2} [a_1 + a_{10}]$$

$$\Rightarrow a_1 + a_{10} = 49 \quad (*)$$

از طرفی تفاضل جملات اول و آخر برابر ۴۵ است: (دقت کنید که

دنباله افزایشی است.)  $a_{10} - a_1 = 45 \quad (**)$

مجموع جملات ردیف زوج  $(a_2 + a_4 + \dots + a_{20})$ ، مجموع

۱۰ جمله اول یک دنباله حسابی با جمله اول  $a_2$  و قدرنسبت

$2d$  است:  $(a_4 - a_2) = 2d$

مجموع جملات ردیف زوج ۱۵۰ است:  $\frac{10}{2} [2a_2 + 9(2d)] = 150$

$$\Rightarrow 10a_2 + 90d = 150 \quad (**)$$

در نتیجه:  $(**)-(*) \rightarrow 10a_2 - 10a_1 = 15$

$$\Rightarrow 10(a_2 + d) - 10a_1 = 15 \Rightarrow 10d = 15 \Rightarrow d = 1/5$$

$$(*) \rightarrow 10a_1 + 90(1/5) = 135 \Rightarrow 10a_1 + 135 = 135$$

$$\Rightarrow 10a_1 = 0 \Rightarrow a_1 = 0$$

**۶۴- گزینه ۲** سمت چپ تساوی مجموع  $n$  جمله اول

یک دنباله حسابی با جمله اول ۱ و قدرنسبت ۴ است؛ پس با توجه

به این که مجموع جملات ۲۳۱ شده، داریم:

$$S_n = 231 \Rightarrow \frac{n}{2} [2(1) + (n-1)4] = 231$$

$$\Rightarrow \frac{n}{2} [2 + 4n - 4] = 231 \Rightarrow \frac{n}{2} [4n - 2] = 231$$

$$\Rightarrow 2n^2 - n = 231 \Rightarrow 2n^2 - n - 231 = 0$$

$$\Rightarrow n = \frac{1 + \sqrt{1 - 4(2)(-231)}}{2(2)} \Rightarrow n = \frac{1 + 43}{4} = 11$$

پس عدد  $x$  جمله یازدهم دنباله حسابی با جمله اول ۱ و قدرنسبت ۴ است:

$$x = a_{11} = a_1 + 10d = 1 + 10(4) = 41$$

**راه دوم** تعداد جملات برابر است با:

$$n = \frac{\text{اولی} - \text{آخری}}{d} + 1 = \frac{x-1}{4} + 1 = \frac{x+3}{4}$$

$$\Rightarrow \text{مجموع} = \frac{n}{2} (\text{جمله آخر} + \text{جمله اول})$$

$$\Rightarrow \frac{x+3}{2} = \frac{4}{2} (1+x) \Rightarrow 231 = \frac{x+3}{1} (x+1)$$

$$\xrightarrow{\text{امتحان گزینه ها}} x = 41$$

**۶۵- گزینه ۲**

**راه اول** از رابطه  $S_n = \frac{n}{2} [a_1 + a_n]$  استفاده می کنیم:

$$S_{15} = \frac{15}{2} [a_1 + a_{15}] \quad (*)$$

جمله عمومی دنباله  $a_n = \frac{3}{2}n - 5$  است، پس:

$$\begin{cases} a_1 = \frac{3}{2} - 5 \\ a_{15} = \frac{3}{2}(15) - 5 \end{cases} \xrightarrow{(*)} S_{15} = \frac{15}{2} \left[ \left( \frac{3}{2} - 5 \right) + \left( \frac{45}{2} - 5 \right) \right]$$

$$\Rightarrow S_{15} = \frac{15}{2} \left[ \frac{48}{2} - 10 \right] = \frac{15}{2} (14) = 105$$

**راه دوم** جمله عمومی یک دنباله حسابی به صورت

$a_n = An + B$  است که در آن  $d = A$ .



۷۲- **گزینه ۱** نقطه اول به ۱۱ نقطه دیگر وصل می‌شود و ۱۱ و وتر ایجاد می‌کند.

نقطه دوم به ۱۰ نقطه باقی‌مانده وصل می‌شود و ۱۰ و وتر ایجاد می‌کند. با ادامه این روند، داریم:

$$11 + 10 + 9 + \dots + 1 = \frac{11(12)}{2} = 66$$

۷۳- **گزینه ۲**

مجموع مربع جملات با شماره زوج  $S = 2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 50^2$   
 مجموع مربع جملات با شماره فرد  $S' = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + 49^2$   
 برای این که ببینیم مجموع مربع جملات با شماره زوج (S) چه قدر بیشتر از مجموع مربع جملات با شماره فرد (S') است، کافیست  $S - S'$  را محاسبه کنیم:

$$\begin{aligned} S - S' &= (2^2 - 1^2) + (4^2 - 3^2) + (6^2 - 5^2) + \dots + (50^2 - 49^2) \\ &\Rightarrow S - S' = \underbrace{(2-1)(2+1)} + \underbrace{(4-3)(4+3)} \\ &\quad + \underbrace{(6-5)(6+5)} + \dots + \underbrace{(50-49)(50+49)} \\ &\Rightarrow S - S' = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \dots + 49 + 50 \\ &\Rightarrow S - S' = \frac{50(51)}{2} = 25(51) = 1275 \end{aligned}$$

۷۴- **گزینه ۲**

$S' - S = (3^2 - 1^2) + (5^2 - 3^2) + \dots + (39^2 - 37^2)$   
 $\Rightarrow S' - S = \underbrace{(3-1)(3+1)} + \underbrace{(5-3)(5+3)} + \dots + \underbrace{(39-37)(39+37)}$   
 چون همه جملات ضریب ۲ دارند، از ۲ فاکتور می‌گیریم:

$S' - S = 2(1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 37 + 39)$  (\*)  
 داخل پرانتز مجموع اعداد فرد طبیعی است. گفتیم n عدد فرد طبیعی شروع از ۱ برابر  $n^2$  است. این جا هم باید ببینیم چندتا جمله داریم. جمله عمومی اعداد فرد طبیعی برابر  $2n - 1$  است؛ پس از آن جا که عدد آخر ۳۹ است، داریم:

$$2n - 1 = 39 \Rightarrow 2n = 40 \Rightarrow n = 20$$

$$\xrightarrow{(*)} S' - S = 2(20)^2 = 800$$

۷۵- **گزینه ۱** فرض کنیم k تا واسطه قرار دهیم. در این صورت با توجه به این که اعداد ۱۵ و ۳۵ را هم داریم، تعداد کل اعداد  $(k + 2)$  تا خواهد شد.

پس مجموع جملات با استفاده از رابطه  $S_n = \frac{n}{2}[a_1 + a_n]$  برابر

$$S_{k+2} = \frac{k+2}{2}[15 + 35]$$

مجموع همه اعداد ۲۲۵ است، پس  $S_{k+2} = 225$  و در نتیجه:

$$225 = \frac{k+2}{2}(50) \Rightarrow k+2=9 \Rightarrow k=7$$

با حل دستگاه معادلات (\*) و (\*\*): داریم:

$$\begin{cases} a_1 + a_{10} = 49 \\ a_{10} - a_1 = 45 \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع}} 2a_{10} = 94 \Rightarrow a_{10} = 47$$

$$\xrightarrow{(*)} a_1 = 2$$

برای محاسبه قدرنسبت هم به صورت زیر عمل می‌کنیم:  
 $a_{10} = a_1 + 9d \Rightarrow 47 = 2 + 9d \Rightarrow 45 = 9d \Rightarrow d = 5$

۷۰- **گزینه ۲** به طرف چپ تساوی توجه کنید. دنباله اعداد ثابت به صورت روبه‌رو است:

$-2, 2, 6, \dots, 74$   
 این جملات تشکیل یک دنباله حسابی با جمله اول  $a_1 = -2$  و قدرنسبت  $d = 4$  می‌دهند. تعداد جملات هم برابر است با:

$$n = \frac{\text{اولی} - \text{آخری}}{d} + 1 = \frac{74 - (-2)}{4} + 1 = 19 + 1 = 20$$

پس کلاً ۲۰ تا جمله و در نتیجه در طرف چپ تساوی داده شده ۲۰ تا پرانتز داریم؛ پس تساوی را به صورت زیر مرتب می‌کنیم:

$$\underbrace{(x^2 + x^2 + \dots + x^2)}_{20 \text{ تا}} + \underbrace{(-2 + 2 + 6 + \dots + 74)}_{S_p} = 725$$

با کمک رابطه [جمله آخر + جمله اول]  $S_n = \frac{n}{2}$  داریم:

$$\begin{aligned} \Rightarrow 20x^2 + \frac{20}{2}[-2 + 74] &= 725 \Rightarrow 20x^2 + 720 = 725 \\ \Rightarrow 20x^2 = 5 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x &= \pm \frac{1}{2} \end{aligned}$$

۷۱- **گزینه ۱** **راه اول** مجموع داده شده، مجموع جمله اول یک دنباله حسابی با جمله اول ۱ و جمله آخر  $(2n - 1)$  است (جمله اول دنباله  $1 = 1 - 1 = 2(1) - 1$ ، جمله دوم  $3 = 2(2) - 1$  و در نتیجه جمله nام،  $2(n) - 1$  است، پس n تا جمله داریم). با توجه به فرمول

$$S_n = \frac{n}{2}[a_1 + a_n]$$

$$S_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = \frac{n}{2}[1 + 2n - 1]$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{n}{2}(2n) = n^2$$

پس مجموع داده شده حتماً مربع کامل خواهد بود. با توجه به گزینه‌ها تنها عدد ۲۵۶ مربع کامل است:  $256 = 16^2$

**راه دوم** مطابق الگوی زیر عمل می‌کنیم و مجموع را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{array}{ccccccc} \square & \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} & \dots & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} & \dots & \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \\ 1=1^2 & 1+3=2^2 & 1+3+5=3^2 & & 1+3+5+\dots+(2n-1) & & \\ & & =2^2 & & =n^2 & & \end{array}$$

مجموع اعداد طبیعی:  $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$   
 مجموع اعداد زوج طبیعی:

$$2 + 4 + 6 + \dots + 2n = 2(1 + 2 + \dots + n) = 2\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)$$

$$= n(n+1)$$

مجموع اعداد فرد طبیعی:  $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$

$$S_n = 112 \Rightarrow \frac{n}{2}[a_1 + a_n] = 112$$

$$\xrightarrow{(***)} \frac{n}{2}(28) = 112 \Rightarrow 14n = 112 \Rightarrow n = 8$$

حالا برای محاسبه قدرنسبت از تساوی‌های (\*) و (\*\*\*) استفاده می‌کنیم. در تساوی (\*) داریم:

$$a_1 + a_7 + a_7 = 27 \Rightarrow a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d = 27$$

$$\Rightarrow 3a_1 + 3d = 27 \Rightarrow a_1 + d = 9$$

با قراردادن  $n = 8$  در تساوی (\*\*\*) داریم:

$$a_8 + a_7 + a_6 = 57 \Rightarrow a_1 + 7d + a_1 + 6d + a_1 + 5d = 57$$

$$\Rightarrow 3a_1 + 18d = 57 \xrightarrow{+3} a_1 + 6d = 19$$

$$\begin{cases} a_1 + d = 9 \\ a_1 + 6d = 19 \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} \begin{cases} a_1 + d = 9 \\ \Delta d = 10 \end{cases} \Rightarrow d = 2$$

۷۹- گزینه ۳ اعداد طبیعی فرد بخش پذیر بر ۳ به صورت زیر هستند:

$$3, 9, 15, \dots \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 3 \\ d = 6 \end{cases}$$

پس جمله عمومی این دنباله برابر است با:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_n = 3 + (n-1)6$$

$$\Rightarrow a_n = 6n - 3$$

چون مجموع اعداد کوچکتر از ۱۰۱ را می‌خواهیم، ابتدا با حل نامعادله  $a_n < 101$ ، تعداد جملات را می‌یابیم:

$$6n - 3 < 101 \Rightarrow 6n < 104 \Rightarrow n < \frac{104}{6}$$

$$\Rightarrow n < \frac{52}{3} = 17 \dots \Rightarrow n = \{1, 2, \dots, 17\}$$

پس باید مجموع ۱۷ جمله اول یک دنباله حسابی با جمله اول ۳ و قدرنسبت ۶ را محاسبه کنیم:

$$S_{17} = \frac{17}{2}[2(3) + 16(6)] = \frac{17}{2}[102] = 17(51) = 867$$

۸۰- گزینه ۲ اولین عددی که باقی‌مانده تقسیم آن بر ۷ برابر ۲ است، خود ۲ است. چون داریم بر ۷ تقسیم می‌کنیم، جمله بعدی  $9 (= 2 + 7)$  است و ... پس جملات دنباله به صورت زیر هستند:

$$2, 9, 16, \dots \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 2 \\ d = 7 \end{cases}$$

در نتیجه جمله عمومی دنباله برابر است با:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_n = 2 + (n-1)7$$

$$\Rightarrow a_n = 7n - 5$$

تعداد اعداد طبیعی دورقمی این دنباله را می‌یابیم:

$$10 \leq 7n - 5 \leq 99 \Rightarrow 15 \leq 7n < 104$$

$$\Rightarrow \frac{15}{7} \leq n < \frac{104}{7} \Rightarrow 3 \leq n \leq 14$$

$$\Rightarrow \text{تعداد اعداد} = 14 - 3 + 1 = 12$$

در نتیجه مجموع این دوازده جمله برابر است با:

$$S_{12} = \frac{12}{2}[a_3 + a_{14}] = 6[(7(3) - 5) + (7(14) - 5)]$$

$$= 6[16 + 93] = 6[109] = 654$$

می‌دانیم اگر بین دو عدد  $a$  و  $b$  واسطه حسابی قرار دهیم، قدرنسبت از رابطه  $d = \frac{b-a}{k+1}$  محاسبه می‌شود. در نتیجه قدرنسبت برابر است

$$d = \frac{35-15}{7+1} = \frac{20}{8} = 2/5$$

با:

۷۶- گزینه ۲ اگر  $d$  قدرنسبت دنباله حاصل باشد، جمله اول و آخر واسطه‌ها را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت:

$$\overset{+d}{\curvearrowright} 13, 13+d, \dots, 45-d, 45 \overset{-d}{\curvearrowleft}$$

واسطه آخر یعنی  $45-d$ ، ۲۸ واحد بیشتر از واسطه اول یعنی  $13+d$  است، در نتیجه:

$$\Rightarrow 45-d = 13+d \Rightarrow 2d = 4 \Rightarrow d = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{جمله اول واسطه‌ها} = 13+2=15 \\ \text{جمله آخر واسطه‌ها} = 45-2=43 \end{cases}$$

برای محاسبه مجموع واسطه‌ها باید تعداد آن‌ها را محاسبه کنیم. اگر تعداد آن‌ها را  $k$  در نظر بگیریم، با استفاده از رابطه  $d = \frac{b-a}{k+1}$  را می‌یابیم:

$$2 = \frac{45-13}{k+1} \Rightarrow k+1 = \frac{32}{2} = 16 \Rightarrow k = 15$$

$$\Rightarrow \text{واسطه آخر} + \text{واسطه اول} = \frac{15}{2} = \text{مجموع واسطه‌ها}$$

$$\Rightarrow \text{مجموع واسطه‌ها} = \frac{15}{2}(15+43) = 15 \times 29 = 435$$

۷۷- گزینه ۲

$a_1 + a_7 + a_7 = 35$ : مجموع سه جمله اول ۳۵ است.

$a_n + a_{n-1} + a_{n-2} = 175$ : مجموع سه جمله آخر ۱۷۵ است.

دو طرف تساوی‌ها را با هم جمع می‌کنیم:

$$(a_1 + a_n) + (a_7 + a_{n-1}) + (a_7 + a_{n-2}) = 210$$

مجموع اندیس‌ها در هر پرانتز برابر  $n+1$  است، پس حاصل پرانتزها با هم برابر است و در نتیجه هر سه‌تای آن‌ها را برابر  $(a_1 + a_n)$  در نظر می‌گیریم:  $3(a_1 + a_n) = 210 \Rightarrow a_1 + a_n = 70$  (\*)

از طرفی مجموع همه جملات برابر ۳۵۰ است، پس با استفاده از رابطه  $S_n = \frac{n}{2}[a_1 + a_n]$  داریم:

$$\xrightarrow{(*)} 350 = \frac{n}{2}[70] \Rightarrow n = 10$$

۷۸- گزینه ۲ ابتدا تعداد جملات دنباله را محاسبه می‌کنیم:

$a_1 + a_7 + a_7 = 27$  (\*) : مجموع سه جمله اول ۲۷ است.

$a_n + a_{n-1} + a_{n-2} = 57$  (\*\*): مجموع سه جمله آخر ۵۷ است.

دو طرف تساوی‌ها را با هم جمع می‌کنیم:

$$(a_1 + a_n) + (a_7 + a_{n-1}) + (a_7 + a_{n-2}) = 84$$

چون جمع اندیس‌ها در پرانتزها با هم برابر است، حاصل پرانتزها با هم برابر است، پس هر سه را به صورت  $(a_1 + a_n)$  در نظر می‌گیریم:

$$3(a_1 + a_n) = 84 \Rightarrow a_1 + a_n = 28$$
 (\*\*\*)

مجموع همه جملات برابر ۱۱۲ است؛ در نتیجه:

۸۳- **گزینه ۲** جملات دنباله را به صورت دسته‌بندی شده داریم. اول فاصله بین دسته‌ها را برداریم! (یعنی پراترها را حذف کنیم).  
 $1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots$

په فوب شد! این طوری به صورت اعداد فرد طبیعی دیده می‌شوند. جمله عمومی اعداد فرد طبیعی برابر  $a_n = 2n - 1$  است. برای محاسبه جمله آخر دسته بیستم باید بررسی کنیم، این جمله، جمله چندم اعداد فرد طبیعی است، پس به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \text{دسته بیستم} & & & \\ & & & \left( \quad \right) & & & \\ & & & \downarrow & & & \\ & & & \dots, & & & \\ & & & (7, 9, 11), & & & \\ & & & \downarrow & & & \\ & & & (3, 5), & & & \\ & & & \downarrow & & & \\ & & & (1), & & & \\ & & & \downarrow & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & \downarrow & & & \\ & & & 2 & & & \\ & & & \downarrow & & & \\ & & & 3 & & & \\ & & & \downarrow & & & \\ & & & \dots & & & \\ & & & \downarrow & & & \\ & & & 20 & & & \\ & & & \downarrow & & & \\ & & & 1 + 2 + 3 + \dots + 20 & & & \\ \Rightarrow & & & \text{تعداد اعداد} & & & \\ \Rightarrow & & & \text{تعداد کل اعداد تا جمله آخر دسته بیستم} & & & \\ \Rightarrow & & & S_{21} = \frac{21(21)}{2} = 210 & & & \end{array}$$

پس جمله آخر دسته بیستم، جمله ۲۱۰ام دنباله اعداد فرد طبیعی است. از آنجا که جمله عمومی اعداد فرد طبیعی  $a_n = 2n - 1$  است، جمله ۲۱۰ام برابر است با:

$$a_{210} = 2(210) - 1 = 420 - 1 = 419$$

۸۴- **گزینه ۳** با توجه به نکات درس‌نامه داریم:

$$S_n = n^2 - 3n = \begin{cases} d = 2(n^2) = 2(1) = 2 \\ a_1 = S_1 = 1^2 - 3(1) = -2 \end{cases}$$

برای این که ببینیم کدام جمله برابر ۲۴ است، باید  $n$  را طوری بیابیم که  $a_n = 24$ . با توجه به فرمول جمله عمومی دنباله حسابی داریم:

$$\begin{aligned} a_n = 24 &\Rightarrow a_1 + (n-1)d = 24 \\ \frac{d=2}{a_1=-2} &\rightarrow -2 + (n-1)2 = 24 \Rightarrow 2(n-1) = 26 \\ \Rightarrow n-1 = 13 &\Rightarrow n = 14 \end{aligned}$$

پس جمله چهاردهم دنباله برابر ۲۴ است.

۸۵- **گزینه ۲** **راه اول** مجموع جملات، شروع از جمله هفتم و ختم به جمله هجدهم برابر است با:  $S = a_7 + a_8 + \dots + a_{18}$

از فرمول [جمله آخر + جمله اول] استفاده می‌کنیم. (دقت کنید که تعداد جملات برابر  $12 = 18 - 7 + 1$  است.)

$$\begin{aligned} \Rightarrow S &= \frac{12}{2} [a_7 + a_{18}] = \frac{12}{2} [a_1 + 6d + a_1 + 17d] \\ \Rightarrow S &= 6[2a_1 + 23d] \quad (*) \end{aligned}$$

$a_1$  و  $d$  را از رابطه مجموع داده شده می‌یابیم:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n(n-1)d}{2} = \frac{n^2 - 15n}{2} \\ \Rightarrow \begin{cases} a_1 = S_1 = -\frac{14}{2} = -7 \\ d = 2(n^2) = 2\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \end{cases} \\ \xrightarrow{(*)} S &= 6\left[2\left(-\frac{7}{2}\right) + 23\left(\frac{1}{2}\right)\right] = 6\left[\frac{9}{2}\right] = 18 \end{aligned}$$

۸۱- **گزینه ۳** جمله آخر هر دسته، مربع کامل است؛ یعنی جمله آخر دسته اول  $(1)^2$ ، جمله آخر دسته دوم  $(2)^2$  و ...، جمله آخر دسته نهم  $(9)^2 = 81$  و جمله آخر دسته دهم  $(10)^2 = 100$  است. پس دسته دهم به صورت زیر است (دقت کنید که چون جمله آخر دسته نهم ۸۱ است در نتیجه جمله اول دسته دهم برابر ۸۲ است):

دسته دهم:  $(82, 83, \dots, 100)$   
 این دسته،  $19 = (100 - 82 + 1)$  جمله دارد. جملات هم تشکیل یک دنباله حسابی می‌دهند؛ بنابراین:

$$\begin{aligned} \text{مجموع جملات} &: S_{19} = \frac{19}{2} [\text{جمله اول} + \text{جمله آخر}] \\ \Rightarrow S_{19} &= \frac{19}{2} [82 + 100] = \frac{19}{2} (182) = 19(91) = 1729 \end{aligned}$$

۸۲- **گزینه ۱** **راه اول** بدون پراترها با دنباله اعداد طبیعی سروکار داریم  $(a_n = n)$  که یک دنباله حسابی با قدرنسبت یک هستند. در دسته بیستم هم که بیست تا جمله داریم. فقط تنها مشکلمان برای محاسبه مجموع جملات دسته بیستم، جمله اول این دسته است. برای محاسبه جمله اول این دسته، به سراغ جمله آخر دسته نوزدهم می‌رویم و اول آن را محاسبه می‌کنیم. برای این کار باید ببینیم تا جمله آخر دسته نوزدهم چندتا عدد می‌بینیم:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \left( \quad \right) & & & \\ & & & \downarrow & & & \\ & & & \dots, & & & \\ & & & (4, 5, 6), & & & \\ & & & \downarrow & & & \\ & & & (2, 3), & & & \\ & & & \downarrow & & & \\ & & & (1), & & & \\ & & & \downarrow & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & \downarrow & & & \\ & & & 2 & & & \\ & & & \downarrow & & & \\ & & & 3 & & & \\ & & & \downarrow & & & \\ & & & \dots & & & \\ & & & \downarrow & & & \\ & & & 19 & & & \\ & & & \downarrow & & & \\ & & & 1 + 2 + 3 + \dots + 19 & & & \\ & & & \downarrow & & & \\ & & & \text{تعداد اعداد} & & & \\ & & & \text{تعداد کل اعداد تا جمله آخر دسته نوزدهم} & & & \\ & & & S_{19} = \frac{19(19+1)}{2} = 190 & & & \end{array}$$

پس جمله آخر دسته نوزدهم جمله ۱۹۰ام دنباله بدون پراترها است، چون جمله عمومی این دنباله  $a_n = n$  است، پس جمله آخر دسته نوزدهم برابر  $a_{190} = 190$  است. در نتیجه جمله اول دسته بیستم برابر ۱۹۱ است، پس مجموع جملات دسته بیستم برابر است با:

$$\Rightarrow S_{20} = \frac{20}{2} [2(191) + 19(1)] = 10[401] = 4010$$

می‌توانیم از فرمول  $S_n = \frac{n}{2} [a_1 + a_n]$  هم استفاده کنیم. این طوری! جمله آخر دسته نوزدهم برابر ۱۹۰ است، پس جمله اول دسته بیستم ۱۹۱ و جمله آخر آن ۲۱۰ است. در نتیجه:

$$S_{20} = \frac{20}{2} [191 + 210] = 10[401] = 4010$$

**راه دوم** به جملات آخر دسته‌ها نگاه کنید. یاد چی می‌فتین؟! هیچی؟! می‌فوی اصلاً این روش رو بیخیال شیم؟! جملات آخر دسته‌ها به صورت زیر قابل بیان هستند:

$$1 = \binom{2}{2}, \quad 3 = \binom{3}{2}$$

$$6 = \binom{4}{2}, \quad 10 = \binom{5}{2}$$

پس جمله آخر دسته نوزدهم  $\binom{20}{2}$  یا برابر  $\frac{20 \times 19}{2} = 190$  است.

$$S_{20} = \frac{20}{2} [191 + 210] = 4010$$

در نتیجه:

**راه دوم** اگر مجموع هجده جمله اول را از مجموع شش جمله اول کم کنیم، مجموع مورد نظر محاسبه می شود، نگاه کنید:

$$\begin{cases} S_{18} = a_1 + a_2 + \dots + a_6 + a_7 + a_8 + \dots + a_{18} \\ S_6 = a_1 + a_2 + \dots + a_6 \end{cases}$$

تفاضل  $\rightarrow S_{18} - S_6 = a_7 + a_8 + \dots + a_{18}$  (\*\*)

با استفاده از تساوی  $S_n = \frac{n(n-1)d}{6}$  داریم:

$$\begin{cases} S_{18} = \frac{18(3)}{6} = 9 \\ S_6 = \frac{6(-9)}{6} = -9 \end{cases}$$

(\*\*)  $\rightarrow a_7 + a_8 + \dots + a_{18} = 9 - (-9) = 18$

۸۶- **گزینه ۱**  $S_{n+2} = a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1} + a_{n+2}$

$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$

$\Rightarrow S_{n+2} - S_n = a_{n+1} + a_{n+2}$

با توجه به این که  $S_{n+2} - S_n = 4n + 3$ ، پس:

$a_{n+1} + a_{n+2} = 4n + 3$

با استفاده از فرمول جمله عمومی دنباله حسابی داریم:

$(a_1 + (n+1-1)d) + (a_1 + (n+2-1)d) = 4n + 3$

$\Rightarrow a_1 + nd + a_1 + (n+1)d = 4n + 3$

$\Rightarrow a_1 + nd + a_1 + nd + d = 4n + 3$

$\Rightarrow \underline{2nd} + \underline{2a_1} + \underline{d} = \underline{4n} + \underline{3}$

$\Rightarrow \begin{cases} 2d = 4 \Rightarrow d = 2 \\ 2a_1 + d = 3 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 2a_1 + d = 3 \xrightarrow{d=2} 2a_1 + 2 = 3 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{2} \end{cases}$

بنابراین مجموع هشت جمله اول دنباله برابر است با:

$S_8 = \frac{8}{2}[2a_1 + 7d] = 4[2(\frac{1}{2}) + 7(2)] = 60$

۸۷- **گزینه ۳** جمله اول دنباله  $S_n$  که  $S_1$  است برابر  $\frac{1}{2}$  است. از

آن جا که  $a_1 = S_1$ ، بنابراین:  $a_1 = \frac{1}{2}$

از طرفی:  $S_2 - S_1 = a_2 \Rightarrow \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = a_2 \Rightarrow a_2 = 1$

با توجه به فرمول جمله عمومی دنباله حسابی داریم:

$a_2 = 1 \Rightarrow a_1 + d = 1 \xrightarrow{a_1 = \frac{1}{2}} \frac{1}{2} + d = 1 \Rightarrow d = \frac{1}{2}$

پس جمله دهم دنباله حسابی برابر است با:

$a_{10} = a_1 + 9d = \frac{1}{2} + 9(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} + \frac{9}{2} = 5$

