

فصل ۱ عبارتهای جبری

قسمت اول: اتحادهای جبری

قبل از این که درس رو شروع کنیم دوس داریم به سلام و احوالپرسی کنیم باهاتون. سلام، فویین دانشبوهای آینده؟ آخایان و فانمهای رشته انسانی، همین شروع کتاب، دوس داریم براتون آرزو کنیم که هم تو مسائل درسی هم غیردرسی، به هر چی که فوبه برسید. شما در سالهای قبل با مفهوم عبارت جبری آشنا شدید حالا می‌فوییم به مفهوم جدید و فوق‌العاده مهم به نام اتحادهای جبری رو بپتون یاد بدیم. فقط



فواشاً فرمول اتحادها رو ففط کنید چون تا آفر کتاب باهاشون سروکار داریم. انقدر که اسم اتحادها توی ریاضی میار اسم فریود توی روانشناسی نمیار!

مفهوم اتحاد

در سال نهم فهمیدیم که هر عبارتی که شامل اعداد و متغیرها باشد، عبارت جبری نام دارد و اگر مقدار دو عبارت جبری A و B به ازای هر مقداری برای متغیرهایشان با هم برابر باشد، تساوی $A = B$ را یک اتحاد می‌گویند. (به زبان دیگر، یعنی آکه رابطه $A = B$ به ازای هر مقدار که به متغیرهاش بریم، برقرار باشه، به این رابطه به اتحاد می‌گیم). مثلاً رابطه $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$ یک اتحاد است، چون به x هر عددی بدهیم دوطرف، مساوی می‌شوند. مثلاً اگر x را صفر فرض کنیم به رابطه درست $1 = 1$ می‌رسیم. (شما به x هر چی دوست دارید برین، دو طرف مساوی میشن).

نکته ضرب جملات متشابه در دو طرف تساوی یک اتحاد، با هم برابر است. مثلاً اگر $kx^2 + mx + 5x^2 - 7x = 5x^2 - 7x + kx^2 + mx$ یک اتحاد باشد خیلی سریع می‌گوییم که $k = 5$ و $m = -7$ است.

تست: اگر تساوی $3x^2 - 4x - a^2 = (x - a)(3x + a)$ یک اتحاد باشد، مقدار a کدام است؟

۳ (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴)

پاسخ: باید ضرایب جملات متشابه در دو طرف تساوی، با هم برابر باشند:

$$(x - a)(3x + a) = 3x^2 - 4x - a^2 \Rightarrow 3x^2 + \underbrace{ax - 3ax}_{-2ax} - a^2 = 3x^2 - 4x - a^2$$

$$\Rightarrow \frac{3x^2}{x} - \frac{2ax}{x} - \frac{a^2}{x} = \frac{3x^2}{x} - \frac{4x}{x} - \frac{a^2}{x} \Rightarrow \begin{cases} 3 = 3 \checkmark \\ -2a = -4 \\ -a^2 = -a^2 \checkmark \end{cases} \Rightarrow a = \frac{-4}{-2} = 2$$

پس گزینه (۲) درست است.

انواع اتحادهای جبری مشهور

(۱) اتحادهای مربع دو جمله‌ای: در این اتحادها دو جمله‌ای های $a + b$ و $a - b$ به توان ۲ می‌رسند:

دومی به توان ۲ دو برابر اولی در دومی اولی به توان ۲

$$\text{اتحاد مربع مجموع دو جمله‌ای (اتحاد اول): } (a \oplus b)^2 = a^2 \oplus 2ab + b^2 \xrightarrow{\text{مثال}} (\Delta x + 3y)^2 = (\Delta x)^2 + 2(\Delta x)(3y) + (3y)^2 = 2\Delta x^2 + 30xy + 9y^2$$

$$\text{اتحاد مربع تفاضل دو جمله‌ای (اتحاد دوم): } (a \ominus b)^2 = a^2 \ominus 2ab + b^2 \xrightarrow{\text{مثال}} \left(\frac{m}{3} - 6z\right)^2 = \left(\frac{m}{3}\right)^2 - 2\left(\frac{m}{3}\right)(6z) + (6z)^2 = \frac{m^2}{9} - 4mz + 36z^2$$

تست: اگر $x + \frac{1}{x} = 4$ باشد، حاصل $x^2 + \frac{1}{x^2}$ کدام است؟

۱۶ (۴) ۱۴ (۳) ۱۲ (۲) ۱۰ (۱)

پاسخ:

$$x + \frac{1}{x} = 4 \xrightarrow{\text{دو طرف را به توان ۲ می‌رسانیم.}} \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 4^2 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} + 2\left(x\right)\left(\frac{1}{x}\right) = 16$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = 16 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = 16 - 2 = 14 \Rightarrow \text{گزینه (۳) صحیح است.}$$

تست: حاصل $(1 + \sqrt{2})^2 + (1 - \sqrt{2})^2$ کدام است؟

۴√۲ (۱) ۲ (۲) ۶ (۳) ۲ (۴)

پاسخ: به کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای داریم:

$$(1 + \sqrt{2})^2 + (1 - \sqrt{2})^2 = [1^2 + 2(1)(\sqrt{2}) + (\sqrt{2})^2] + [1^2 - 2(1)(\sqrt{2}) + (\sqrt{2})^2]$$

گزینه (۳) صحیح است. $\Rightarrow 1 + 2\sqrt{2} + 2 + 1 - 2\sqrt{2} + 2 = 6$

نکته تستی: به کمک اتحادهای مربع دو جمله‌ای می‌توان ثابت کرد که:

$$(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2a^2 + 2b^2$$

$$(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$$

از این نکته وقتی استفاده می‌شود که مجموع و تفاضل دو عدد را داشته باشیم و حاصل ضرب یا مجموع مربعات آن‌ها خواسته شوند. (حفظ این دو فرمول الزامی نیست.)

تست: حاصل $(ax + by)^2 - (ax - by)^2$ کدام است؟

۲abxy (۱) ۲a^۲x^۲ + ۲b^۲y^۲ (۲) ۲a^۲x^۲ - ۲b^۲y^۲ (۳) ۴abxy (۴)

پاسخ: بنابه نکته تستی گفته شده داریم:

$$\left(\frac{ax}{A} + \frac{by}{B}\right)^2 - \left(\frac{ax}{A} - \frac{by}{B}\right)^2 = 4AB = 4(ax)(by) = 4abxy$$

البته بدون استفاده از نکته بالا هم می‌توانید تک تک اتحادها را باز کرده و جواب را به دست آورید.

گزینه (۴) صحیح است. $\Rightarrow (ax + by)^2 - (ax - by)^2 = a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2 - a^2x^2 + 2abxy - b^2y^2 = 4abxy$

په‌ها فیلی از سوالاتی ریاضی هست که طراح، از نمادهای ریاضی استفاده نمی‌کند. مثل تست پایین که طراح به زبان فارسی، سؤال ریاضی رو مطرح می‌کنه. اکثر په‌ها با این موضوع مشکل دارن. فب طراهو که کاریش نمیشه کرد په‌ها، نمیشه باهاش درگیر شد که. پس برای این که هالشو بگیرین اولین کاری که باید کنید اینه که اطلاعات مسئله رو به زبان ریاضی تبدیل کنید بعرض معقول فواسته شده رو به‌درست بیارین.

تست: اگر مجموع دو عدد برابر ۵ و تفاضل آن‌ها برابر ۹ باشد، مجموع مربعات آن‌ها کدام است؟

۵۱ (۱) ۵۲ (۲) ۵۳ (۳) ۵۴ (۴)

پاسخ: روش اول: اگر آن دو عدد را a و b در نظر بگیریم، به کمک نکته تستی گفته شده خواهیم داشت:

$$(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2a^2 + 2b^2 = 2(a^2 + b^2) \Rightarrow 5^2 + 9^2 = 2(a^2 + b^2) \Rightarrow a^2 + b^2 = \frac{25 + 81}{2} = \frac{106}{2} = 53$$

روش دوم: بدون استفاده از نکته تستی هم می‌توانیم مسئله را به شکل مقابل حل کنیم:

$$\begin{cases} a + b = 5 \\ a - b = 9 \end{cases}$$

طبق فرض سؤال

$$2a = 14 \Rightarrow a = 7 \xrightarrow{\text{جایگذاری در یکی از معادلات}} 7 + b = 5 \Rightarrow b = -2 \Rightarrow a^2 + b^2 = 7^2 + (-2)^2 = 49 + 4 = 53$$

بنابراین گزینه (۳) صحیح است.

(۲) اتحاد مزدوج: در این اتحاد، دو پرانتز به شکل $(a + b)$ و $(a - b)$ در هم ضرب می‌شوند، در این حالت خیلی سریع می‌گوییم جواب برابر می‌شود با $a^2 - b^2$ به عبارت دیگر در این اتحاد جملاتی مانند a و b عیناً در دو پرانتز تکرار می‌شوند. فقط در یکی از پرانتزها علامت بین a و b مثبت و در پرانتز دیگر علامت بین a و b منفی است.

دومی به توان ۲

اولی به توان ۲

(a + b)(a - b) = a^۲ - b^۲

مثال $\rightarrow (\sqrt{5} - \sqrt{2})(\sqrt{5} + \sqrt{2}) = \sqrt{5}^2 - \sqrt{2}^2 = 5 - 2 = 3$

مثال $\rightarrow \left(\frac{x}{2} - \frac{y}{5}\right)\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{5}\right) = \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{y}{5}\right)^2 = \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{25}$

تست: حاصل عبارت $A = (\sqrt{x} - 1)(x + 1)(\sqrt{x} + 1)$ به ازای $x = \sqrt{2}$ چقدر است؟

√۲ + ۱ (۱) √۲ - ۱ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴)

پاسخ:

$$A = (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)(x + 1) = ((\sqrt{x})^2 - 1^2)(x + 1) = (x - 1)(x + 1) = x^2 - 1$$

اتحاد مزدوج اتحاد مزدوج

گزینه (۴) صحیح است. $\Rightarrow x = \sqrt{2} \rightarrow \text{حاصل} = (\sqrt{2})^2 - 1 = 2 - 1 = 1$

تست: حاصل $(a+b-1)(a-b-1)$ کدام است؟

(۱) $a^2 - b^2 - 2a + 1$ (۲) $a^2 + b^2 - 2ab + 1$ (۳) $a^2 - b^2 - 1$ (۴) $a^2 - b^2 + 1$

پاسخ:

گزینه (۱) صحیح است. $\Rightarrow (a-1+b)(a-1-b) = (a-1)^2 - b^2 = a^2 - 2a + 1 - b^2 = a^2 - b^2 - 2a + 1$

تذکر: اگر نفواستین یا نتونستین از اتحاد استفاده کنین باید دو پرانتز رو به صورت معمولی در هم ضرب کنین.

تست: اگر مجموع دو عدد برابر $\frac{\sqrt{2}}{2}$ و تفاضل مربعات آن‌ها $\frac{3}{4}$ باشد، اختلاف این دو عدد کدام است؟

(۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{3}{\sqrt{2}}$ (۳) $\frac{3}{2\sqrt{2}}$ (۴) $\frac{3}{4}$

پاسخ: باز هم سؤال، به زبان فارسی داده شده، پس باید آن را به نماد ریاضی تبدیل کنید. اگر آن دو عدد را a و b در نظر بگیریم، می‌توان

گفت $a + b = \frac{\sqrt{2}}{2}$ و $a^2 - b^2 = \frac{3}{4}$ ، بنابه اتحاد مزدوج داریم:

گزینه (۲) صحیح است. $\Rightarrow a - b = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{3}{2\sqrt{2}}$

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2 \xrightarrow{a+b = \frac{\sqrt{2}}{2}} (a-b) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{3}{4} \Rightarrow a-b = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{3}{2\sqrt{2}}$$

۳ اتحاد یک جمله مشترک: در این اتحاد باز هم دو پرانتز در هم ضرب می‌شوند ولی این بار، یک جمله مشترک در دو پرانتز وجود دارد.

ضرب غیرمشترک‌ها جمع غیرمشترک‌ها

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab \xrightarrow{\text{مثال}} (6x-1)(6x+8) = (6x)^2 + (-1+8)(6x) + (-1)(+8) = 36x^2 + 42x - 8$$

مشترک غیرمشترک‌ها مشترک غیرمشترک‌ها

تست: حاصل $(x+a)(x-b) - (x-a)(x+b)$ کدام است؟

(۱) $(a-b)x$ (۲) $2(b-a)x$ (۳) $2(a-b)x$ (۴) $(b-a)x$

پاسخ:

مشترک غیرمشترک‌ها مشترک غیرمشترک‌ها

$$(x+a)(x-b) - (x-a)(x+b) = (x^2 + (a-b)x + a(-b)) - (x^2 + (-a+b)x + b(-a))$$

$$= x^2 + (a-b)x - ab - x^2 + (a-b)x + ab = 2(a-b)x \Rightarrow$$

گزینه (۳) صحیح است.

۴ اتحادهای مکعب دو جمله‌ای: در این اتحاد، یک دو جمله‌ای مانند $a+b$ یا $a-b$ به توان ۳ می‌رسد و خواهیم داشت:

۳ برابر اولی در دومی به توان ۲
دومی به توان ۳
۳ برابر اولی به توان ۲ در دومی
اولی به توان ۳

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \xrightarrow{\text{مثال}} (x+2y)^3 = (x)^3 + 3(x)^2(2y) + 3(x)(2y)^2 + (2y)^3 = x^3 + 6x^2y + 12xy^2 + 8y^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \xrightarrow{\text{مثال}} (\sqrt{2}-1)^3 = (\sqrt{2})^3 - 3(\sqrt{2})^2(1) + 3(\sqrt{2})(1)^2 - (1)^3 = \sqrt{8} - 3(2)(1) + 3\sqrt{2}(1) - 1$$

$$= \sqrt{4 \times 2} - 6 + 3\sqrt{2} - 1 = 2\sqrt{2} - 6 + 3\sqrt{2} - 1 = 5\sqrt{2} - 7$$

تست: اگر تفاضل دو عدد برابر (-1) و حاصل ضرب آن‌ها 6 باشد، تفاضل مکعبات آن‌ها کدام است؟

- ۱۷ (۱) ۱۹ (۲) -19 (۳) -17 (۴)

پاسخ: تفاضل و حاصل ضرب دو عدد داده شده است، پس باز هم از نکته گفته شده بهره می‌گیریم:

گزینه (۳) صحیح است. $\Rightarrow a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab(a - b) = (-1)^3 + 3(6)(-1) = -1 - 18 = -19$

۵) اتحادهای چاق و لاغر: از ضرب یک دوجمله‌ای (لاغر) در یک سه‌جمله‌ای (چاق) به شکل زیر به دست می‌آیند:

مثال $\rightarrow (x+3)(x^2-3x+9) = x^3 + 3^3 = x^3 + 27$ مجموع مکعبات ۲ جمله: $(a \oplus b)(a^2 \ominus ab + b^2) = a^3 \oplus b^3$

مثال $\rightarrow (2x-1)(4x^2+2x+1) = (2x)^3 - 1^3 = 8x^3 - 1$ تفاضل مکعبات ۲ جمله: $(a \ominus b)(a^2 \oplus ab + b^2) = a^3 \ominus b^3$

تست: اگر $x^3 + B^3 = (x+2)(x^2 + Ax + 4)$ باشد، حاصل $A+B$ کدام است؟

- ۱) صفر ۲ (۲) -2 (۳) ۴ (۴)

پاسخ: روش اول: بنابه اتحاد چاق و لاغر داریم:

$(x+2)(x^2 + Ax + 4) = x^3 + B^3 \Rightarrow \begin{cases} A = -2 \\ B^3 = 2^3 \Rightarrow B = 2 \end{cases} \Rightarrow A+B = -2+2 = 0$

روش دوم: فرض کنید یادتان رفته که از چه اتحادی باید استفاده کنید. در این صورت پیرانتزها را به صورت معمولی در هم ضرب می‌کنید و دو طرف تساوی را با هم مقایسه می‌کنیم:

ضرب پیرانتزها $\rightarrow x^3 + Ax^2 + 4x + 2x^2 + 2Ax + 8 = x^3 + B^3 \Rightarrow x^3 + (A+2)x^2 + (2+A)2x + 8 = x^3 + B^3$

فاکتور از $2x$ فاکتور از x^2

این جمله هم همین‌طور این جمله باید کلاً نابود شود. باید مساوی باشند.

$\Rightarrow A+2=0 \Rightarrow A=-2$ $\Rightarrow A+B = -2+2=0 \Rightarrow$ گزینه (۱) صحیح است. $\Rightarrow B^3 = 8 \Rightarrow B = 2$

تست: مقدار عبارت $(4x^2 + 2xy + y^2) - (2x - y)(4x^3 - (2x - y)(4x^2 + 2xy + y^2))$ به ازای $x = 3\sqrt{2}$ و $y = -\frac{1}{4}$ کدام است؟

- ۱) $\frac{1}{8}$ ۲) $-\frac{1}{8}$ ۳) $-\frac{1}{4}$ ۴) صفر

پاسخ: می‌توانیم همان اول، به جای x و y اعداد داده شده را قرار دهیم ولی راه حل کمی طولانی خواهد شد. بهتر است ابتدا عبارت داده شده را تا حد ممکن ساده کرده، سپس به جای x و y عدد قرار دهیم:

اتحاد چاق و لاغر $\rightarrow 4x^3 - (2x - y)(4x^2 + 2xy + y^2) = 4x^3 - ((2x)^3 - y^3) = 4x^3 - 8x^3 + y^3 = y^3 \xrightarrow{y=-\frac{1}{4}} \left(-\frac{1}{4}\right)^3 = -\frac{1}{64}$ گزینه (۲) صحیح است.

فصل ۱ عبارتهای جبری

قسمت دوم: تجزیه عبارتهای جبری



بازم سلام، قُب بپه‌ها زور تند سریع بگیر ببینم اتا‌ها رو فوب یاد گرفتین؟ آگه هرود نصفِ تست‌های اتا‌ها رو تونستید حل کنید الان بهت تهریه رو شروع کنید به فونرن وگرنه فواشاً به بار دیگه با دقت پیش‌تر برگردین و درسامه قبلی رو با مثال‌ها و تست‌هاش بفونید. پون تو تهریه، در واقع برعکس کارهایی رو انجام می‌دیم که توی اتا‌ها انجام داریم و قبلی به هم وابسته هستن. لطفاً کسی هم ز رنگ بازی در نیاره. پون به کم که بریم جلوتر، آگه اتا‌ها رو یادتون نباشه گیر می‌کنین. اونوقته که استادتون که من باشم ازتون نارامت می‌شما، گفته باشم.

مفهوم تجزیه

اگر یک عبارت جبری را بتوان به صورت حاصل ضرب دو یا چند عبارت دیگر (با درجه کم‌تر) نوشت، می‌گوییم آن عبارت را تجزیه کرده‌ایم. این عمل را تا جایی ادامه می‌دهیم که دیگر نتوان عبارت‌ها را تجزیه کرد. به هر کدام از عبارت‌های جبری به دست آمده از تجزیه، یک عامل یا فاکتور می‌گویند. هر عبارت جبری به عامل‌هایش بخش‌پذیر است. مثلاً وقتی عبارت $x^2 - 5x - 6$ را به صورت $(x-6)(x+1)$ تجزیه می‌کنیم، $(x+1)$ و $(x-6)$ هر دو، عوامل عبارت اولیه هستند و ضمناً عبارت اولیه یعنی $x^2 - 5x - 6$ هم بر $x+1$ و هم بر $x-6$ بخش‌پذیر است.

روش‌های تجزیه یک عبارت جبری

۱) فاکتورگیری: در این روش عبارت‌هایی که عامل مشترک دارند، یعنی یک عامل که در هر دوی آن‌ها وجود دارد را در نظر می‌گیریم و آن عامل مشترک را پشت پرانتز قرار داده و سپس تک تک جملات را بر آن عامل مشترک تقسیم می‌کنیم و جواب‌ها را در داخل پرانتز با هم جمع جبری می‌کنیم.

تست: کدام عبارت، نادرست تجزیه شده است؟

$$(a+b)^2 - 2(a+b) = (a+b)(a+b-2) \quad (1)$$

$$2xy^3 - 6x^2y^2z^2 = 2xy(y - 3xz^2) \quad (2)$$

$$15y(x-y)^3 - 18x^2(x-y)^2 = 3(x-y)^2(5yx - 5y^2 - 6x^2) \quad (3)$$

$$12x^4(x^2-5)^2 + 3x^3(x^2-5)^3 = 3x^3(x^2-5)^2(4x + (x^2-5)) \quad (4)$$

پاسخ:

فاکتور از $(a+b)$

$$(a+b)^2 - 2(a+b) = \overbrace{(a+b)(a+b) - 2(a+b)}^{(a+b)} = (a+b)(a+b-2) \quad (1)$$

$$2xy^3 - 6x^2y^2z^2 = 2xy^2(y - 3xz^2) \quad (2)$$

$$15y(x-y)^3 - 18x^2(x-y)^2 = 3(x-y)^2[5y(x-y) - 6x^2] = 3(x-y)^2[5yx - 5y^2 - 6x^2] \quad (3)$$

$$12x^4(x^2-5)^2 + 3x^3(x^2-5)^3 = 3x^3(x^2-5)^2[4x + (x^2-5)] \quad (4)$$

پس گزینه (۲) درست است.

تست: عبارت جبری $10x^2z^2 - 15xy^3$ بر کدام عبارت بخش‌پذیر است؟

$$5x \quad (1) \quad 15x \quad (2) \quad 5x^2 \quad (3) \quad 2z^2 - 3y^3 \quad (4)$$

$$10x^2z^2 - 15xy^3 \stackrel{\text{فاکتور از } 5x}{=} 5x(2xz^2 - 3y^3) \Rightarrow \text{گزینه (۱) صحیح است.}$$

پاسخ:

تست: در تجزیه $20x^5(x^2+3)^3 - 10x^3(x^2+3)^4$ کدام عامل وجود ندارد؟

$$10x^3 \quad (1) \quad x^2+3 \quad (2) \quad x^2+3 \quad (3) \quad x^2-3 \quad (4)$$

$$20x^5(x^2+3)^3 - 10x^3(x^2+3)^4 = 10x^3(x^2+3)^3[2x^2 - (x^2+3)] = 10x^3(x^2+3)^3(x^2-3)$$

پاسخ:

ملاحظه می‌کنید که عبارت تجزیه‌شده بالا شامل (x^2+3) نیست، پس جواب گزینه (۲) است.

۲) استفاده از اتحادها: در این روش از اتحادها برای تجزیه کردن کمک می‌گیریم.

آ) تجزیه از طریق اتحاد مربع دو جمله‌ای: اگر یک عبارت سه تا جمله داشت و ۲ تا از آن‌ها مربع کامل بود (توان زوج داشت) و جمله سوم ۲ برابر ضرب جذرهای دو جمله دیگر بود، متوجه می‌شویم که برای تجزیه از این اتحاد باید استفاده کنیم:

$$\Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

$$\Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

به عبارت دیگر در مبحث اتحادها در متن سؤال، عبارت $(a + b)^2$ یا $(a - b)^2$ داده می‌شود و ما می‌گفتیم جواب‌هایشان می‌شود $a^2 + 2ab + b^2$ یا $a^2 - 2ab + b^2$ ولی در مبحث تجزیه، بر عکس است یعنی عبارت‌های $a^2 + 2ab + b^2$ یا $a^2 - 2ab + b^2$ به ما داده می‌شوند و ما باید آن‌ها را به شکل اولیه آن‌ها یعنی $(a + b)^2$ یا $(a - b)^2$ تبدیل کنیم. البته کمی جلوتر خواهید دید که برای تجزیه از بقیه اتحادها نیز به صورت بر عکس استفاده می‌کنیم.

تست: تجزیه شده چند تا از عبارت‌های زیر، نادرست است؟

(آ) $4x^2 + 4x + 1 = (2x + 1)^2$ (ب) $x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} = (x - \frac{1}{3})^2$ (پ) $2x^5(x-1)^3 - 8x^2(x-1)^4 = 2x^2(x-1)^2(x-2)^2$

۱ (۲) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۳ (۴) ۳ (۴)

پاسخ:

(آ) اتحاد مربع دو جمله‌ای $(2x + 1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$

(ب) اتحاد مربع دو جمله‌ای $(x - \frac{1}{3})^2 = x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}$

(پ) فاکتورگیری $2x^5(x-1)^3 - 8x^2(x-1)^4 = 2x^2(x-1)^2[x^3 - 4(x-1)] = 2x^2(x-1)^2[x^2 - 4x + 4] = 2x^2(x-1)^2(x-2)^2$

پس گزینه (۳) درست است.

تست: اگر $a - 2b = 1$ باشد، حاصل $2a^3b - 8a^2b^2 + 8ab^3$ کدام است؟

(۱) $-ab$ (۲) ab (۳) $2ab$ (۴) $-2ab$

پاسخ:

گزینه (۳) صحیح است. $\Rightarrow 2ab(a - 2b)^2 = 2ab(1)^2 = 2ab$

اتحاد مربع دو جمله‌ای $2ab(a^2 - 4ab + 4b^2)$

فاکتورگیری $2a^3b - 8a^2b^2 + 8ab^3$

$(a)^2 \quad 2(a)(2b) \quad (2b)^2$

تست پایین، به کم سفته یعنی واقعا سفته. توی کنکور، از این سؤال، زیاد نمی‌بینید پس توی کتاب ما هم، این سؤال رو قبلی زیارت نخواهید کرد.

تست: کدام عدد به حاصل ضرب x و $x + 6$ اضافه گردد تا مربع دو جمله‌ای به دست آید؟

۱ (۲) ۹ (۳) ۶ (۴) ۳۶

پاسخ: روش اول:

$$x(x + 6) + k^2 = x^2 + 6x + k^2 \Rightarrow 2xk = 6x \Rightarrow 2k = 6 \Rightarrow k = 3$$

$(x)^2 \quad 2xk \quad (k)^2$

پس باید $k^2 = 9$ به حاصل ضرب اضافه گردد.

روش دوم (روش تستی): در این‌گونه سؤالات می‌توانید عدد مورد نظر را مثلاً m بنامید سپس آن را به عبارت داده شده اضافه کنید و دلتای عبارت حاصل را مساوی صفر قرار دهید تا m به دست آید:

گزینه (۲) درست است. $\Rightarrow m = 9 \Rightarrow 4m = 36 \Rightarrow 36 - 4m = 0 \Rightarrow 36 - 4(1)(m) = 0 \Rightarrow 36 - 4ac = 0 \Rightarrow b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow \Delta = 0$

نکته تستی: عبارت‌هایی به فرم $(a + b + 2\sqrt{ab})$ یا $(a + b - 2\sqrt{ab})$ را به کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای می‌توان به صورت $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$

یا $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$ تجزیه کرد. (البته می‌روئید که a و b نباید منفی باشند وگرنه \sqrt{a} و \sqrt{b} بی‌معنی میشن).

تست: عبارت $5 + 2\sqrt{6}$ بر کدام عامل بخش پذیر است؟

(۱) $2 + \sqrt{3}$ (۲) $3 + \sqrt{2}$ (۳) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ (۴) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$

پاسخ: روش اول (استفاده از نکته تستی بالا): می‌دانیم $\sqrt{6} = \sqrt{2} \times \sqrt{3}$ و $5 = 2 + 3$ ، بنابراین:

عبارت $(5 + 2\sqrt{6})$ بر $(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ بخش پذیر است. $\Rightarrow (5 + 2\sqrt{6}) = 3 + 2 + 2\sqrt{2}\sqrt{3} = (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2$

روش دوم: به جای استفاده از نکته تستی، می‌توانیم عبارت‌های داده شده در گزینه‌ها را به توان ۲ برسانیم، جواب باید $(5 + 2\sqrt{6})$ شود که این اتفاق

فقط برای $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ رخ می‌دهد زیرا:

$$(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = \sqrt{2}^2 + 2\sqrt{2}\sqrt{3} + \sqrt{3}^2 = 5 + 2\sqrt{6}$$

بنابراین گزینه (۳) صحیح است.

نکته گاهی اوقات یک سه‌جمله‌ای به ما داده می‌شود که در آن ضرب x^2 عددی مربع کامل (به جزا) است. در این حالت، برای تجزیه این سه‌جمله‌ای، کافی است از جمله شامل x^2 جذر گرفته تا جمله مشترک معلوم شود سپس این جمله مشترک را از درون جمله دیگر که شامل x است بیرون می‌کشیم. مثلاً می‌خواهیم عبارت $(9x^2 + 18x + 8)$ را تجزیه کنیم ۹ مربع کامل است، و جذر $9x^2$ می‌شود $3x$ ، پس $3x$ جمله مشترک است و باید $18x$ را طوری بنویسیم که شامل $3x$ شود می‌توانیم $18x$ را به صورت $6(3x)$ بنویسیم لذا خواهیم داشت:

$$9x^2 + 18x + 8 = (3x)^2 + 6(3x) + 8 = (3x + 4)(3x + 2)$$

ضرب ۲ و ۴ می‌شود +۸ و جمعشان می‌شود +۶ جمله مشترک

تست: در یکی از عوامل اول $25x^2 + 30x - 7$ عدد ثابت کدام است؟

۱ (۱) ۶ (۳) -۱ (۲) -۶ (۴)

پاسخ:

$$25x^2 + 30x - 7 = (\Delta x)^2 + 6(\Delta x) - 7 = (\Delta x + 7)(\Delta x - 1)$$

ضرب $(+7)$ و (-1) می‌شود -7 و جمعشان می‌شود $+6$ جمله مشترک

در عامل $(\Delta x - 1)$ عدد ثابت (-1) است، پس گزینه (۲) درست است.

نکته فرض کنید می‌خواهیم عبارت $3x^2 - x - 2$ را تجزیه کنیم. الان ضرب x^2 یعنی عدد ۳ مربع کامل نیست. در چنین عبارت‌هایی، بهترین روش این است که ابتدا ضرب x^2 را در عدد ثابت ضرب کنیم، بنابراین در این‌جا ۳ را در -2 ضرب کرده و به عبارت $x^2 - x - 6$ می‌رسیم. حال عبارت به‌دست‌آمده را به کمک اتحاد جمله مشترک تجزیه می‌کنیم:

$$x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$$

در مرحله آخر، باید عدد ثابت یکی از پرانتزها را بر ضرب x^2 اولیه یعنی ۳ تقسیم کرده و x پرانتز دیگر را در ۳ ضرب کنیم. البته مهم نیست از کدام پرانتز شروع کنیم اما در این عبارت بهتر است پرانتزی را که ۳ دارد انتخاب کرده و ۳ را بر ۳ تقسیم کنیم و در پرانتز دیگر یعنی $(x + 2)$ عدد ۳ را در x آن ضرب کنیم، در نتیجه عبارت مطلوب برابر است با:

$$(x - \frac{2}{3})(3x + 2) = (x - 1)(3x + 2)$$

تست: عبارت $2x^3 + 5x^2 + 2x$ بر کدام عبارت زیر بخش پذیر نیست؟

۱ (۱) $x - 2$ (۳) $2x + 1$ (۲) $x + 2$ (۴)

پاسخ:

$$2x^3 + 5x^2 + 2x = x(2x^2 + 5x + 2) = x(x + 2)(2x + 1)$$

فاکتور از x این عبارت را به روش گفته‌شده تجزیه می‌کنیم.

عامل $(x - 2)$ در تجزیه‌شده عبارت بالا دیده نمی‌شود. پس گزینه (۳) صحیح است.

ت تجزیه به کمک اتحادهای جاق و لاغر: اگر عبارتی شامل مجموع یا تفاضل دو جمله مکعب کامل (توان ۳) باشد، از این اتحاد برای تجزیه‌اش کمک می‌گیریم:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) \Rightarrow \text{مثال: } 8x^3 + 1 = (2x)^3 + 1^3 = (2x + 1)(4x^2 - 2x + 1)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) \Rightarrow \text{مثال: } x^6 - 1 = (x^2)^3 - 1^3 = (x^2 - 1)(x^4 + x^2 + 1) = (x - 1)(x + 1)(x^4 + x^2 + 1)$$

تست: در تجزیه $8x^4 - 27xy^3$ کدام عامل وجود دارد؟

xy (۱) $2x + 3y$ (۲) $(2x - 3y)^2$ (۳) $2x - 3y$ (۴)

پاسخ:

$$8x^4 - 27xy^3 \xrightarrow{\text{فاکتورگیری}} x(8x^3 - 27y^3) \xrightarrow{\text{جاقی و لاغر}} x(2x - 3y)(4x^2 + 6xy + 9y^2) \Rightarrow \text{گزینه (۴) صحیح است.}$$

(۲x)³ (۳y)³

ث) تجزیه به کمک اتحاد مکعب دوجمله‌ای: اگر عبارتی شامل ۴ جمله باشد که ۲ تای آن‌ها مکعب کامل (توان ۳) باشند ($b^3 \cdot a^3$) و ۲ تای دیگر ضرب ۳ باشند ($3ab^2, 3a^2b$)، در این صورت از اتحاد مکعب دوجمله‌ای برای تجزیه آن عبارت، استفاده می‌کنیم:

$a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2 = (a + b)^3 \Rightarrow$ مثال: $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x + 1)^3$

$a^3 - b^3 - 3a^2b + 3ab^2 = (a - b)^3 \Rightarrow$ مثال: $x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 8y^3 = (x - 2y)^3$

تست: حاصل $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$ به ازای $x = 2 + \sqrt{2}$ کدام است؟

$4\sqrt{2}$ (۴) ۴ (۳) ۲ (۲) $2\sqrt{2}$ (۱)

پاسخ: Ⓛ

گزینه (۱) صحیح است. $\Rightarrow x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = (x - 2)^3 \xrightarrow{x=2+\sqrt{2}} (2+\sqrt{2}-2)^3 = \sqrt{2}^3 = \sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = 2\sqrt{2}$

از رادیکال خارج می‌شود.

۳) تجزیه به کمک دسته‌بندی

وقتی تعداد جملات یک عبارت زیاد باشد (پیش‌تر از ۳ تا)، برای تجزیه به دسته‌بندی احتیاج پیدا می‌کنیم (البته به شرطی که اثار مکعب دوجمله‌ای نداشته باشیم). فقط باید دقت کنیم که کدام جمله‌ها را با هم در نظر بگیریم. در واقع جملات را طوری دسته‌بندی می‌کنیم که یا با هم تشکیل اتحاد بدهند، یا این‌که دارای قسمت مشترک باشند و بعد از فاکتورگیری، دوباره آن‌ها را تجزیه کنیم.

مثال: عبارتهای زیر را تجزیه کنید.

(ب) $x^2 + y^2 - 1 - 2xy$

(آ) $ax - by - ay + bx$

پاسخ: Ⓛ

(آ) $ax - by - ay + bx = x(a + b) - y(a + b) = (a + b)(x - y)$

فاکتور از x فاکتور از $(a + b)$

(ب) $x^2 + y^2 - 2xy - 1 = (x - y)^2 - 1^2 \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} (x - y - 1)(x - y + 1)$

اتحاد مربع دوجمله‌ای

تست: کدام عامل در تجزیه $2x^3 + x^2 - 8x - 4$ وجود ندارد؟

$2x + 1$ (۴) $2x - 1$ (۳) $x + 2$ (۲) $x - 2$ (۱)

پاسخ: Ⓛ

گزینه (۳) صحیح است. $\Rightarrow 2x^3 + x^2 - 8x - 4 = x^2(2x + 1) - 4(2x + 1) \xrightarrow{\text{فاکتور از } (2x + 1)} (2x + 1)(x^2 - 4) = (2x + 1)(x - 2)(x + 2)$

اتحاد مزدوج

تست: اگر $2a + b = 1$ باشد، حاصل $4a^2 + b^2 - 4a - 2b + 4ab$ کدام است؟

-1 (۴) ۱ (۳) ۳ (۲) صفر (۱)

پاسخ: Ⓛ

گزینه (۴) صحیح است. $\Rightarrow 4a^2 + b^2 + 4ab - 4a - 2b = (2a + b)^2 - 2(2a + b) = 1 - 2 = -1$

فاکتور از (-2) اتحاد مربع دوجمله‌ای

نکته تستی: اگر A و B دو عبارت جبری دلخواه باشند، تساوی $A^2 + B^2 = 0$ تنها زمانی برقرار است که هم $A = 0$ و هم $B = 0$ باشد.

تست: اگر $2x^2 + y^2 + 2x + 2xy + 1 = 0$ باشد، کدام گزینه صحیح است؟

$y = x = -1$ (۴) $y = -x = -1$ (۳) $y = x = 1$ (۲) $y = -x = 1$ (۱)

پاسخ: Ⓛ

$2x^2 + y^2 + 2x + 2xy + 1 = 0 \Rightarrow (x^2 + y^2 + 2xy) + (x^2 + 2x + 1) = 0$

مربع دوجمله‌ای $\rightarrow \left(\frac{x+y}{A}\right)^2 + \left(\frac{x+1}{B}\right)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} A=0 \Rightarrow x+y=0 \Rightarrow y=-x \\ B=0 \Rightarrow x+1=0 \Rightarrow x=-1 \end{cases} \Rightarrow y = -x = 1 \Rightarrow$ گزینه (۱) صحیح است.

عبارتهای جبری

فصل ۱

قسمت اول: اتحادهای جبری

مفهوم اتحاد

۱. ☆ تساوی $ax^2 + 2x(x-3) = 3x^2 + bx + c$ به ازای هر x ای برقرار است. حاصل abc کدام است؟

- (۱) صفر (۲) -۶ (۳) ۶ (۴) ۱

۲. اگر تساوی $ax^2 - 3x + 4 = (x-4)(\frac{x}{p} + b)$ یک اتحاد باشد، حاصل $(2ax + b)^2$ برابر با کدام گزینه است؟

- (۱) $(2x-1)^2$ (۲) $(x+1)^2$ (۳) $(1-x)^2$ (۴) $(2x+1)^2$

اتحاد مربع دو جمله‌ای، مزدوج و یک جمله مشترک

۳. حاصل $|1 - \sqrt{2}| - 2 - \sqrt{2}$ کدام است؟

- (۱) $1 - 4\sqrt{2}$ (۲) ۵ (۳) $1 + 4\sqrt{2}$ (۴) ۴

۴. ☆ عبارت A در تساوی $\frac{x^2}{9} + A + 16 = (\frac{x}{3} - 4)^2$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}x$ (۲) $\frac{4}{3}x$ (۳) $-\frac{4}{3}x$ (۴) $-\frac{1}{3}x$

۵. حاصل $(\frac{1}{x} - y)^2 + \frac{4y}{x}$ کدام است؟

- (۱) $(\frac{1}{x} + y)^2$ (۲) $(\frac{2}{x} + y)^2$ (۳) $(x - \frac{1}{y})^2$ (۴) $(x + \frac{1}{y})^2$

۶. ☆ حاصل $(2 + \sqrt{2})^4$ کدام است؟

- (۱) $68 + 24\sqrt{2}$ (۲) $52 + 24\sqrt{2}$ (۳) $52 + 48\sqrt{2}$ (۴) $68 + 48\sqrt{2}$

۷. حاصل عبارت $(\sqrt{50} - 3\sqrt{5})^2 + (\sqrt{45} + \sqrt{45})^2$ کدام است؟

- (۱) ۱۰ (۲) $60\sqrt{10}$ (۳) ۱۹۰ (۴) $30\sqrt{10}$

۸. ☆ اگر $x - \frac{1}{x} = 3$ باشد، مقدار $x^2 + \frac{1}{x^2}$ کدام است؟

- (۱) ۱۱ (۲) ۱۲ (۳) ۱۳ (۴) ۱۴

۹. اگر تفاضل دو عدد برابر $\frac{1}{p}$ و مجموع آن‌ها برابر $\frac{3}{p}$ باشد، حاصل ضرب این دو عدد کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{p}$ (۲) ۱ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{3}{4}$

۱۰. ☆ اگر $(a-b)^2 = 9$ و $a^2 + b^2 = 5$ باشد، بزرگ‌ترین مقدار $a+b$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) ۱ (۳) ۳ (۴) -۳

۱۱. ☆ اگر $a+b = -1$ و $a^2 + b^2 = 13$ باشد، با شرط $a > b$ حاصل $a-b$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۵ (۳) ۷ (۴) ۳

۱۲. ☆ اگر مجموع دو عدد a و b برابر ۶ و حاصل ضرب آن‌ها ۵ باشد، تفاضل مربع آن‌ها کدام است؟ ($a > b$)

- (۱) ۶۴ (۲) ۹۶ (۳) ۲۴ (۴) ۳۶

(مشابه سراسری - ۹۵)

۱۳★ اگر قطر یک مستطیل برابر ۶ و مساحت آن ۱۴ باشد، محیط آن چقدر است؟

- (۱) $5\sqrt{2}$ (۲) $10\sqrt{2}$ (۳) ۵۰ (۴) ۱۶

(سراسری - ۹۵)

۱۴★ اگر $4 = (\frac{3}{2x} - 5x)$ باشد، حاصل $(\frac{9}{4x^2} + 25x^2)$ کدام است؟

- (۱) ۲۴ (۲) ۲۹ (۳) ۳۱ (۴) ۳۲

۱۵ در تساوی $\frac{1-x^{16}}{A} = (1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)$ عبارت A کدام است؟

- (۱) $1-x$ (۲) $1-x^2$ (۳) $1-x^4$ (۴) $1-x^8$

۱۶ حاصل $(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$ برابر است با

- (۱) x^4+y^4 (۲) $x^4-x^2y^2+y^4$ (۳) $(x^2-y^2)^2$ (۴) $x^4+x^2y^2+y^4$

(سراسری خارج از کشور - ۹۵)

۱۷★ اگر $5 = (\frac{1}{2x} + 3x)$ باشد، حاصل $(\frac{1}{4x^2} + 9x^2)$ کدام است؟

- (۱) ۱۸ (۲) ۲۰ (۳) ۲۱ (۴) ۲۲

۱۸ حاصل $(x+a)(x+b) - (x-a)(x-b)$ کدام است؟

- (۱) $(a+b)x$ (۲) صفر (۳) $a+b$ (۴) $2(a+b)x$

اتحاد مکعب دوجمله‌ای و اتحاد چاق و لاغر

۱۹★ در چندجمله‌ای حاصل از $(\frac{x^2}{3} - \frac{y}{3})^3$ ضریب جمله شامل x^2y^2 کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{6}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{1}{6}$

۲۰ حاصل $(\sqrt{x}+1)(x^2+x+1)(\sqrt{x}-1)$ به ازای $x = \frac{1}{4}$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{7}{8}$ (۲) $\frac{9}{8}$ (۳) $\frac{7}{8}$ (۴) $-\frac{9}{8}$

۲۱★ حاصل $(x^2-2xy+4y^2)(x+2y) - 8y^3$ به ازای $x = \frac{2}{y}$ و $y = \sqrt{2}$ کدام است؟

- (۱) ۲/۶۲۵ (۲) ۲/۸۷۵ (۳) ۳/۱۲۵ (۴) ۳/۳۷۵

قسمت دوم: تجزیه عبارتهای جبری

فاکتورگیری

۲۲★ در تجزیه $x^4+x^3+x^2+x$ کدام عامل وجود ندارد؟

- (۱) $x-1$ (۲) $x+1$ (۳) x (۴) x^2+1

۲۳ در تجزیه عبارت $8x^4+4x^3+8x^2+4x$ کدام عامل وجود ندارد؟

- (۱) $2x+1$ (۲) $x+1$ (۳) $4x$ (۴) x^2+1

۲۴★ اگر $2x^2+3xy=10$ و $14x+21y=5$ باشد، مقدار x کدام است؟

- (۱) $3/5$ (۲) ۷ (۳) $7/5$ (۴) ۱۴

استفاده از اتحاد مربع دوجمله‌ای و اتحاد مزدوج

۲۵★ عبارت $16x^3y+40x^2y^2+25xy^3$ بر کدام عامل بخش پذیر است؟

- (۱) $4x-5y$ (۲) $(4x+5y)^2$ (۳) x^2y^2 (۴) $(5x+4y)^2$

۲۶★ اگر عبارت $x^2y^2+16x^2y^2-16x^2y^2$ مربع کامل باشد، مقدار \square کدام است؟

- (۱) $4xy$ (۲) $8x^5y$ (۳) $8xy$ (۴) $4x^5y$

۲۷ به عبارت $4x^2-10x+9$ کدام جمله افزوده شود تا حاصل عبارت به صورت مربع دوجمله‌ای گردد؟

- (۱) $2x$ (۲) $-2x$ (۳) $4x$ (۴) $-4x$

- ☆ ۲۸. با افزودن کدام عدد به عبارت $4x^2 - 6x + \frac{1}{4}$ ، مربع یک دوجمله‌ای حاصل می‌گردد؟
 (۱) ۲ (۲) $\frac{15}{4}$ (۳) ۶ (۴) ۱۲ (سراسری - ۸۹)
- ☆ ۲۹. اگر $4x - 5y = 3$ ، حاصل $4xy - 5y^2 + \frac{8}{5}x^2$ کدام است؟
 (۱) $\frac{9}{10}$ (۲) $\frac{3}{10}$ (۳) $\frac{6}{10}$ (۴) ۱ (سراسری - ۹۳)
- ☆ ۳۰. اگر $x^2 - xy + y^2 = 0$ باشد، حاصل $(\frac{x+y}{x-y})^2$ کدام است؟
 (۱) ۱ (۲) ۳ (۳) -۳ (۴) -۱ (سراسری - ۸۸)
- ☆ ۳۱. جذر $3 + 2\sqrt{2}$ کدام است؟
 (۱) $\sqrt{2} - 1$ (۲) $1 + \sqrt{2}$ (۳) $\sqrt{3} + 1$ (۴) $1 + 2\sqrt{2}$ (سراسری - ۸۳)
- ☆ ۳۲. کدام عبارت در تجزیه شده عبارت $(x^4 - 2x^2 + 1)$ وجود دارد؟
 (۱) $(x-1)^3$ (۲) $(x+1)^3$ (۳) $(x-1)^2$ (۴) $(x-2)^2$ (سراسری - ۹۳)
- ☆ ۳۳. اگر عبارت $5x^2 + mx + 10$ به صورت توان دوم مجموع دو جمله باشد، مقدار m کدام است؟
 (۱) $2\sqrt{10}$ (۲) $2\sqrt{5}$ (۳) $10\sqrt{2}$ (۴) $5\sqrt{2}$ (سراسری - ۸۳)
- ☆ ۳۴. در تجزیه $x^6y^2 - x^2y^6$ کدام عامل وجود ندارد؟
 (۱) $x^2 + y^2$ (۲) $x + y$ (۳) $x - y$ (۴) $(x + y)^2$ (سراسری - ۸۳)
- ☆ ۳۵. حاصل $(ax + by)^2 - (ay + bx)^2$ کدام است؟
 (۱) $(a^2 - b^2)(x^2 - y^2)$ (۲) $(a^2 - x^2)(b^2 - y^2)$ (۳) $(a^2 + b^2)(x^2 - y^2)$ (۴) $(a^2 + x^2)(b^2 - y^2)$ (سراسری - ۸۳)
- ☆ ۳۶. اگر $c - d = -7$ و $d^2 - c^2 = 77$ باشد مقدار $c^2 + d^2 + 2cd$ کدام است؟
 (۱) ۶۴ (۲) ۸۱ (۳) ۱۲۱ (۴) ۱۴۴ (سراسری - ۸۳)
- ☆ ۳۷. حاصل $\frac{205^2 - 195^2}{(\sqrt{125} + 5)(\sqrt{500} - 10)}$ کدام است؟
 (۱) ۴۰ (۲) ۲۰۰ (۳) ۴۰۰ (۴) ۲۰ (سراسری - ۸۳)
- ☆ ۳۸. اگر $2x - y = 6$ و $4x^2 - y^2 = 12$ باشد، $x + y$ کدام است؟
 (۱) صفر (۲) ۴ (۳) -۴ (۴) ۲ (سراسری - ۸۳)
- ☆ ۳۹. اگر $a - 2b = 5$ و $a^2 = 4b^2 + 15$ باشد، حاصل $a^3 - 2b$ کدام است؟
 (۱) ۶۳ (۲) ۶۵ (۳) ۳۳ (۴) ۳۱ (سراسری - ۸۳)
- ☆ ۴۰. اگر $4xy = x^2 + 4y^2$ باشد، مقدار $x^2 - 4y^2$ کدام است؟
 (۱) ۵ (۲) ۲ (۳) -۳ (۴) صفر (سراسری - ۸۳)

استفاده از اتحاد یک جمله مشترک

- ☆ ۴۱. عبارت $2x^3 + 2x^2 - 4x$ بر کدام دوجمله‌ای بخش پذیر نیست؟
 (۱) $x + 1$ (۲) $x - 1$ (۳) $x + 2$ (۴) $x^2 - x$ (سراسری - ۸۳)
- ☆ ۴۲. عبارت $4x^3 - 6x^2 + 2x$ بر کدام عبارت بخش پذیر است؟
 (۱) $2x + 1$ (۲) $2x - 1$ (۳) $x + 1$ (۴) $x + 2$ (سراسری - ۹۳)
- ☆ ۴۳. عبارت $x^4 - 3x^2 - 4$ بر کدام عبارت بخش پذیر نیست؟
 (۱) $x^2 + 1$ (۲) $x + 2$ (۳) $x - 2$ (۴) $x + 1$ (سراسری - ۹۳)
- ☆ ۴۴. در تجزیه $16x^4 + 24x^2 - 7$ کدام عامل وجود ندارد؟
 (۱) $2x - 1$ (۲) $4x^2 + 7$ (۳) $2x^2 + 7$ (۴) $2x + 1$ (سراسری - ۸۸)
- ☆ ۴۵. در تجزیه $a(a-2)(a-3) - 4a + 8$ کدام عامل وجود ندارد؟
 (۱) $a - 1$ (۲) $a - 2$ (۳) $a + 1$ (۴) $a - 4$ (سراسری - ۸۸)

(سراسری - ۹۰)

$a + 2 \quad (4)$

$a - 2 \quad (3)$

$a - 3 \quad (2)$

$a - 6 \quad (1)$

۴۶. در تجزیه $a(a-3)(a-4) - 12a + 36$ کدام عامل وجود ندارد؟

$x + 2 \quad (4)$

$x - 2 \quad (3)$

$x + 1 \quad (2)$

$x^2 + x - 1 \quad (1)$

۴۷. عبارت $(x^2 + x) - (x^2 + x) - 2$ بر کدام عامل بخش پذیر است؟

$x + 1 \quad (4)$

$x - 3 \quad (3)$

$x - 2 \quad (2)$

$x - 1 \quad (1)$

۴۸. عبارت $(x^2 - 4x + 2)^2 + 3(x^2 - 4x + 2) + 2$ بر کدام عامل بخش پذیر نیست؟

(سراسری فارع از کشور - ۹۰)

$x + 4 \quad (4)$

$x + 2 \quad (3)$

$x - 4 \quad (2)$

$x - 8 \quad (1)$

۴۹. در تجزیه $(x^2 - 6x - 4)^2 - 144$ کدام عامل وجود ندارد؟

استفاده از اتحاد چاق و لاغر و اتحاد مکعب دو جمله‌ای

۵۰. عبارت $8x^3 - \frac{1}{8}y^3$ بر کدام دو جمله‌ای بخش پذیر است؟

$4x^2 + \frac{y^2}{4} - 2xy \quad (4)$

$4x^2 + \frac{y^2}{4} - xy \quad (3)$

$2x + \frac{y}{2} \quad (2)$

$2x - \frac{y}{2} \quad (1)$

۵۱. در تجزیه $2x^3 - 0.016$ کدام عامل وجود دارد؟

$x + 0.02 \quad (4)$

$x - 0.2 \quad (3)$

$x + 0.2 \quad (2)$

$x - 0.02 \quad (1)$

۵۲. در تجزیه $1 - x^6$ کدام عامل وجود ندارد؟

$1 + x^2 + x^4 \quad (4)$

$1 - x \quad (3)$

$1 - x^2 + x^4 \quad (2)$

$1 + x \quad (1)$

۵۳. در تجزیه $54a^5b^3 - 2a^2$ کدام عامل وجود ندارد؟

$9a^2b^2 + 3ab + 1 \quad (4)$

$3ab - 1 \quad (3)$

$9a^2b^2 - 3ab + 1 \quad (2)$

$2a^2 \quad (1)$

۵۴. یکی از عوامل تجزیه $x^{12} + 1$ کدام است؟

$x^8 - x^4 + 1 \quad (4)$

$x^6 + 1 \quad (3)$

$x^2 - 1 \quad (2)$

$x^2 + 1 \quad (1)$

۵۵. در تجزیه $a^6 - \frac{1}{64}$ کدام عامل وجود ندارد؟

$a + \frac{1}{4} \quad (4)$

$a^2 - \frac{1}{4} \quad (3)$

$a - \frac{1}{4} \quad (2)$

$a - \frac{1}{2} \quad (1)$

۵۶. در محاسبه حاصل $101^3 - 98^3$ کدام اتحاد کاربرد ندارد؟

(۴ مزدوج)

(۳ یک جمله مشترک)

(۱ مربع مجموع دو جمله) (۲ مربع تفاضل دو جمله)

۵۷. در محاسبه $102^3 + 99^3$ به کمک اتحادها، کدام اتحاد کاربرد ندارد؟

(۴ مزدوج)

(۳ چاق و لاغر)

(۱ جمله مشترک) (۲ مربع دو جمله‌ای)

۵۸. اگر $a + b = 1$ و $a^2 + b^2 = 5$ باشد، $a^3 + b^3$ کدام است؟

$8 \quad (4)$

$7 \quad (3)$

$4 \quad (2)$

$3 \quad (1)$

۵۹. اگر $a^3 - b^3 = a - b$ و $a \neq b$ باشد، $(a + b)^2$ کدام است؟

$-ab \quad (4)$

$ab \quad (3)$

$2ab \quad (2)$

$1 \quad (1)$

۶۰. اگر $x^2 + \frac{1}{x^2} = 7$ باشد، حاصل $x^3 + \frac{1}{x^3}$ کدام است؟ ($x > 0$)

$70 \quad (4)$

$9 \quad (3)$

$24 \quad (2)$

$18 \quad (1)$

۶۱. اگر $x + \frac{1}{x} = 4$ باشد، حاصل $x^3 + \frac{1}{x^3}$ کدام است؟

$48 \quad (4)$

$52 \quad (3)$

$60 \quad (2)$

$64 \quad (1)$

۶۲. اگر $x - y = 4$ و $xy = 9$ باشد، حاصل $x^3 - y^3$ کدام است؟

$172 \quad (4)$

$91 \quad (3)$

$44 \quad (2)$

$64 \quad (1)$

(مشابه سراسری - ۸۶)

۶۳. اگر مجموع دو عدد $2\sqrt{7}$ و حاصل ضرب آن‌ها برابر ۳ باشد، مجموع مکعب آن‌ها کدام است؟

$46\sqrt{7} \quad (4)$

$38\sqrt{7} \quad (3)$

$50\sqrt{7} \quad (2)$

$44\sqrt{7} \quad (1)$

☆ ۶۴. اگر $x + y = 3$ و $x^2 + y^2 = 7$ باشد، حاصل $x^3 + y^3$ کدام است؟

- ۱۵ (۱) ۱۲ (۲) ۱۸ (۳) ۲۴ (۴)

☆ ۶۵. اگر $x + y = 3$ و $xy = -1$ باشد، حاصل $x^3 - y^3$ کدام است؟ ($x > y$)

- ۲۷۳ (۱) ۱۳۳ (۲) ۱۷۳ (۳) ۲۳۳ (۴)

☆ ۶۶. اگر $ab^2 + a^2b + \triangle a^2b + \square ab^2$ حاصل $(3a - 2b)^3 = 27a^3 - 8b^3 + \triangle a^2b + \square ab^2$ باشد، حاصل $\triangle - \square$ کدام است؟

- ۹۰ (۱) ۱۸ (۲) -۱۸ (۳) -۹۰ (۴)

☆ ۶۷. حاصل $8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$ به ازای $x = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$ کدام است؟

- ۲ (۱) $4\sqrt{2}$ (۲) ۴ (۳) $2\sqrt{2}$ (۴)

☆ ۶۸. حاصل $(x-1)^3 - (\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)$ کدام است؟

- ۱ (۱) $x(x-1)(x-2)$ (۲) $x(x+1)(x+2)$ (۳) $x(x-1)(x+2)$ (۴) $x(x+1)(x-2)$

☆ ۶۹. عبارت $(\sqrt{2}x + 2\sqrt{2})(\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}) + (x+2)^3$ بر کدام عامل بخش پذیر نیست؟

- ۱ (۱) $x+2$ (۲) $x-2$ (۳) $x+6$ (۴)

☆ ۷۰. اگر $x - y = 2$ باشد، حاصل $x^3 - y^3 - 6xy$ کدام است؟

- ۲ (۱) ۸ (۲) ۴ (۳) ۱۶ (۴)

دسته بندی

☆ ۷۱. در تجزیه عبارت $2x^3 - x^2 - 8x + 4$ کدام دو جمله ای وجود ندارد؟

- ۱ (۱) $x-2$ (۲) $2x-1$ (۳) $x+2$ (۴) $2x+1$

(سراسری - ۸۸)

☆ ۷۲. در تجزیه عبارت $4a^2 - 4a - b^2 - 4b - 3$ کدام عامل وجود دارد؟

- ۱ (۱) $2a+b+3$ (۲) $2a-b+1$ (۳) $2a+b-3$ (۴) $2a+b+1$

(سراسری فارع از کشور - ۸۹)

☆ ۷۳. اگر $a + 2b = 3$ ، حاصل $a(a+2) + 4b(b+1) + 4ab$ کدام است؟

- ۱۵ (۱) ۱۶ (۲) ۱۷ (۳) ۱۸ (۴)

☆ ۷۴. عبارت $x^2 - (x-1)(x^2 - x + 3) - x$ بر کدام عامل بخش پذیر نیست؟

- ۱ (۱) $x-3$ (۲) $x+3$ (۳) $x-1$ (۴) $x+1$

(سراسری - ۹۰)

☆ ۷۵. در تجزیه $x^6 - 3x^3 + 8x - 24$ کدام عامل وجود دارد؟

- ۱ (۱) $x-4$ (۲) $x-2$ (۳) $x+2$ (۴) $x+3$

☆ ۷۶. عبارت $x^4 - xy^3 + x^3y - y^4$ بر کدام چند جمله ای بخش پذیر است؟

- ۱ (۱) $x^2 + y^2$ (۲) $x^2 + xy + y^2$ (۳) $x^3 + y^3$ (۴) $x^2 - xy + y^2$

قسمت سوم: مثلث خیام، ب.م.م و ک.م.م

مثلث خیام

☆ ۷۷. اگر شکل روبه رو مربوط به دو سطر متوالی از مثلث خیام باشد، حاصل $a - b + c$ کدام است؟

- ۴۰ (۱) ۷۰ (۲) ۱ ۶ ۱۵ a b ۶ ۱
۱ ۷ ۲۱ c ۳۵ ۲۱ ۷ ۱
۵۰ (۳) ۶۰ (۴)

☆ ۷۸. اگر عدد دوم از سطر n ام مثلث خیام برابر ۱۸ باشد، مجموع اعداد واقع در این سطر کدام است؟

- ۲۱۸ (۱) ۲۱۹ (۲) ۲۱۷ (۳) ۲۲۰ (۴)

☆ ۷۹. ضرایب چند جمله ای $(a+b)^{15}$ برابر با سطر چندم از مثلث خیام است؟

- ۱ (۱) چهاردهم (۲) پانزدهم (۳) شانزدهم (۴) هفدهم

☆ ۸۰. در چند جمله ای حاصل از $(\frac{2}{\sqrt{x}} - x)^6$ ، ضریب جمله شامل x^3 کدام است؟ ($x > 0$)

- ۱۲ (۱) ۳۰ (۲) ۶۰ (۳) ۲۴۰ (۴)

پاسخ
فصل ۱

عبارتهای جبری



۵ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{x} - y\right)^2 + \frac{4y}{x} &= \left(\frac{1}{x}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{x}\right)(y) + y^2 + \frac{4y}{x} \\ &= \frac{1}{x^2} - \frac{2y}{x} + y^2 + \frac{4y}{x} = \left(\frac{1}{x}\right)^2 + \frac{2y}{x} + y^2 = \left(\frac{1}{x} + y\right)^2 \end{aligned}$$

اتحاد مربع دوجمله‌ای

۶ ۱ ۲ ۳ ۴

اتحاد مربع دوجمله‌ای

$$\begin{aligned} ((2 + \sqrt{2})^2)^2 &= (2^2 + \sqrt{2}^2 + 2 \times 2\sqrt{2})^2 = (4 + 2 + 4\sqrt{2})^2 \\ &= (6 + 4\sqrt{2})^2 \quad \text{مربع دوجمله‌ای} \\ &= 6^2 + (4\sqrt{2})^2 + 2 \times 6 \times 4\sqrt{2} \\ &= 36 + 32 + 48\sqrt{2} = 68 + 48\sqrt{2} \end{aligned}$$

۷ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\begin{aligned} (\sqrt{50} - 3\sqrt{5})^2 + (\sqrt{45} + \sqrt{45})^2 &= (\sqrt{25 \times 2} - 3\sqrt{5})^2 + (\sqrt{9 \times 5} + \sqrt{9 \times 5})^2 \\ &= \left(\frac{5\sqrt{2}}{a} - \frac{3\sqrt{5}}{b}\right)^2 + \left(\frac{5\sqrt{2}}{a} + \frac{3\sqrt{5}}{b}\right)^2 \end{aligned}$$

بنا به نکته گفته شده در درسنامه این مقدار برابر است با:

$$\begin{aligned} 2a^2 + 2b^2 &= 2(\sqrt{50})^2 + 2(3\sqrt{5})^2 = 2 \times 25 \times 2 + 2 \times 9 \times 5 \\ &= 100 + 90 = 190 \end{aligned}$$

۸ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\begin{aligned} x - \frac{1}{x} = 3 \quad \text{طرفین به توان ۲} &\rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} - 2x\left(\frac{1}{x}\right) = 9 \\ \text{اتحاد مربع دوجمله‌ای} & \\ \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 = 9 &\Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = 11 \end{aligned}$$

۹ ۱ ۲ ۳ ۴

روش اول: دو عدد را a و b در نظر می‌گیریم، با فرض $a > b$ داریم:

$$a - b = \frac{1}{2}, \quad a + b = \frac{3}{2}$$

طبق نکته گفته شده در درسنامه داریم:

$$(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 4ab$$

$$\Rightarrow \frac{9}{4} - \frac{1}{4} = 4ab \Rightarrow 4ab = \frac{8}{4} = 2 \Rightarrow ab = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

روش دوم (حل دستگاه):

$$\begin{cases} a - b = \frac{1}{2} \\ a + b = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$2a = 2 \Rightarrow a = 1 \quad \text{جایگذاری در یکی از معادلات} \rightarrow 1 + b = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow b = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2} \Rightarrow ab = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

۱ ۱ ۲ ۳ ۴

ابتدا طرفین تساوی را تا حد امکان ساده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} ax^2 + 2x(x - 3) &= 3x^2 + bx + c \\ \Rightarrow ax^2 + 2x^2 - 6x &= 3x^2 + bx + c \\ \Rightarrow (a + 2)x^2 - 6x + 0 &= 3x^2 + bx + c \end{aligned}$$

چون این تساوی به ازای هر x ای برقرار است، لذا اتحاد بوده و جملات متشابه در دو طرف تساوی دارای ضرایب برابرند. در نتیجه داریم:

$$\begin{cases} a + 2 = 3 \Rightarrow a = 1 \\ b = -6 \Rightarrow abc = (1)(-6)(0) = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

۲ ۱ ۲ ۳ ۴

ابتدا طرفین تساوی را تا حد امکان ساده می‌کنیم.

$$ax^2 - 3x + 4 = (x - 4)\left(\frac{x}{2} + b\right)$$

$$\Rightarrow ax^2 - 3x + 4 = \frac{1}{2}x^2 + bx - 2x - 4b$$

$$\Rightarrow \frac{ax^2 - 3x + 4}{x} = \frac{\frac{1}{2}x^2 + (b - 2)x - 4b}{x}$$

حال چون تساوی داده شده یک اتحاد است، باید جملات متشابه در طرفین تساوی دارای ضرایب برابر باشند. در نتیجه داریم:

$$\begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b - 2 = -2 \Rightarrow b = -1 \\ 4 = -4b \Rightarrow b = -1 \end{cases}$$

حال حاصل $(2ax + b)^2$ را می‌یابیم.

$$(2ax + b)^2 \stackrel{a=\frac{1}{2}}{=} \stackrel{b=-1}{=} (x - 1)^2 = (1 - x)^2$$

۳ ۱ ۲ ۳ ۴

اتحاد مربع دوجمله‌ای

$$\begin{aligned} (1 + \sqrt{2})^2 - 2|1 - \sqrt{2}| &= (1^2 + 2\sqrt{2} + \sqrt{2}^2) - 2(-1 + \sqrt{2}) \\ &= 1 + 2\sqrt{2} + 2 + 2 + 2 - 2\sqrt{2} = 5 \end{aligned}$$

۴ ۱ ۲ ۳ ۴

بنا به اتحاد مربع دوجمله‌ای داریم:

$$\begin{aligned} \left(\frac{x}{3} - 4\right)^2 &= \left(\frac{x}{3}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{3}\right)(4) + 4^2 = \frac{x^2}{9} - \frac{8}{3}x + 16 \\ \Rightarrow A &= -\frac{8}{3}x \end{aligned}$$

۱۵ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\begin{aligned} 1-x^6 &= \underbrace{(1-x^2)}_{\text{اتحاد مزدوج}} \underbrace{(1+x^2)}_{\text{اتحاد مزدوج}} \underbrace{(1+x^4)}_{\text{اتحاد مزدوج}} \\ &= (1-x^2)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8) \\ &= (1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8) \\ \xrightarrow{\text{جایگذاری در رابطه داده شده}} & \frac{(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)}{A} \\ &= \frac{1-x}{A} = 1 \Rightarrow A = 1-x \end{aligned}$$

۱۶ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\begin{aligned} (x^2+y^2+xy)(x^2+y^2-xy) &= \underbrace{(x^2+y^2)^2}_{\text{مربع دوجمله‌ای}} - (xy)^2 \\ &= x^4+y^4+2x^2y^2-x^2y^2-y^2x^2 = x^4+y^4+x^2y^2 \end{aligned}$$

۱۷ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\begin{aligned} \left(3x + \frac{1}{2x}\right)^2 &= 5 \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} \left(3x + \frac{1}{2x}\right)^2 = 5^2 \\ \Rightarrow (3x)^2 + 2(3x)\left(\frac{1}{2x}\right) + \left(\frac{1}{2x}\right)^2 &= 25 \\ \Rightarrow 9x^2 + 3 + \frac{1}{4x^2} = 25 \Rightarrow 9x^2 + \frac{1}{4x^2} &= 25 - 3 = 22 \end{aligned}$$

۱۸ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\begin{aligned} \underbrace{(x+a)(x+b)}_{\text{جمله مشترک}} - \underbrace{(x-a)(x-b)}_{\text{جمله مشترک}} \\ &= (x^2 + (a+b)x + ab) - (x^2 - (a+b)x + ab) \\ &= x^2 + (a+b)x + ab - x^2 + (a+b)x - ab = 2(a+b)x \end{aligned}$$

۱۹ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\begin{aligned} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{y}{3}\right)^2 &= \left(\frac{x^2}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{x^2}{2}\right)\left(\frac{y}{3}\right) + \left(\frac{y}{3}\right)^2 \\ &= \frac{x^4}{4} - \left(3 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3}\right)x^2y + \left(3 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{9}\right)x^2y^2 - \frac{y^2}{27} \\ \Rightarrow x^2y^2 \text{ ضریب} &= 3 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{9} = \frac{3}{18} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

۲۰ ۱ ۲ ۳ ۴

ابتدا عبارت داده شده را تا حد امکان ساده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} (\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)(x^2+x+1) &= \underbrace{(x-1)(x^2+x+1)}_{\text{اتحاد چاق و لاغر}} = x^3-1 \\ \xrightarrow{x=\frac{1}{2}} & \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 1 = \frac{1}{8} - 1 = -\frac{7}{8} \end{aligned}$$

اتحاد چاق و لاغر

$$\begin{aligned} (x+2y)(x^2-2xy+4y^2) - 8y^3 \\ &= x^3 + (2y)^3 - 8y^3 = x^3 + 8y^3 - 8y^3 = x^3 \\ \xrightarrow{x=\frac{2}{3}} & \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{27}{27} = 1 \end{aligned}$$

۲۱ ۱ ۲ ۳ ۴

۱۰ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\begin{aligned} (a-b)^2 &= 9 \xrightarrow{\text{مربع دوجمله‌ای}} a^2 + b^2 - 2ab = 9 \xrightarrow{a^2+b^2=5} 5 - 2ab = 9 \\ \Rightarrow -2ab &= 9 - 5 \Rightarrow -2ab = 4 \Rightarrow ab = \frac{4}{-2} = -2 \\ \Rightarrow (a+b)^2 &= a^2 + b^2 + 2ab \xrightarrow{\substack{a^2+b^2=5 \\ ab=-2}} 5 + 2(-2) = 5 - 4 = 1 \\ \Rightarrow (a+b)^2 &= 1 \xrightarrow{\text{جذر}} a+b = \pm 1 \end{aligned}$$

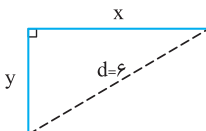
۱۱ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\begin{aligned} a+b &= -1 \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} (a+b)^2 = (-1)^2 \Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 = 1 \\ \xrightarrow{a^2+b^2=13} & 13 + 2ab = 1 \Rightarrow 2ab = 1 - 13 \Rightarrow 2ab = -12 \\ \Rightarrow ab &= \frac{-12}{2} = -6 \\ (a-b)^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \xrightarrow{\substack{a^2+b^2=13 \\ ab=-6}} 13 - 2(-6) = 13 + 12 = 25 \\ \Rightarrow (a-b)^2 &= 25 \xrightarrow{\substack{\text{جذر} \\ a>b}} a-b = \sqrt{25} = 5 \end{aligned}$$

۱۲ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\begin{aligned} a+b &= 6 \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} (a+b)^2 = 6^2 \Rightarrow a^2 + b^2 + 2ab = 36 \\ \xrightarrow{ab=5} & a^2 + b^2 + 2(5) = 36 \Rightarrow a^2 + b^2 = 36 - 10 \Rightarrow a^2 + b^2 = 26 \\ (a-b)^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \xrightarrow{\substack{a^2+b^2=26 \\ ab=5}} 26 - 2(5) = 16 \\ \Rightarrow (a-b)^2 &= 16 \xrightarrow{\substack{\text{جذر} \\ a>b \text{ فرض}}} a-b = \sqrt{16} = 4 \\ \Rightarrow a^2 - b^2 &= \underbrace{(a-b)(a+b)}_{\text{اتحاد مزدوج}} = 4 \times 6 = 24 \end{aligned}$$

۱۳ ۱ ۲ ۳ ۴



بنا به اتحاد مربع دوجمله‌ای داریم:

$$\begin{cases} d^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 6^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 36 \\ S = xy = 14 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (x+y)^2 &= x^2 + y^2 + 2xy \xrightarrow{\substack{x^2+y^2=36 \\ xy=14}} (x+y)^2 = 36 + 2(14) \\ \Rightarrow (x+y)^2 &= 36 + 28 = 64 \xrightarrow{\text{جذر}} (x+y) = \sqrt{64} = 8 \\ \Rightarrow \text{محیط} &= 2(x+y) = 2 \times 8 = 16 \end{aligned}$$

۱۴ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\begin{aligned} \left(\Delta x - \frac{3}{2x}\right)^2 &= 4 \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} \left(\Delta x - \frac{3}{2x}\right)^2 = 4^2 \\ \Rightarrow (\Delta x)^2 - 2(\Delta x)\left(\frac{3}{2x}\right) + \left(\frac{3}{2x}\right)^2 &= 16 \\ \Rightarrow 25\Delta x^2 - 15 + \frac{9}{4x^2} &= 16 \\ \xrightarrow{\text{راست می‌بریم}} & 25\Delta x^2 + \frac{9}{4x^2} = 15 + 16 \Rightarrow 25\Delta x^2 + \frac{9}{4x^2} = 31 \end{aligned}$$

در نتیجه داریم:

$$k + \frac{1}{4} = b^2 \xrightarrow{b = \frac{3}{2}} k + \frac{1}{4} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \Rightarrow k = \frac{9}{4} - \frac{1}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

۲۹ (۱) (۲) (۳) (۴)

$$\frac{\Delta}{\Delta} x^2 + \frac{\Delta}{\Delta} y^2 - 4xy \xrightarrow{\text{مخرج مشترک}} \frac{16x^2 + 25y^2 - 40xy}{10}$$

$$= \frac{(4x - 5y)^2}{10} \xrightarrow{4x - 5y = 3} \frac{3^2}{10} = 0,9$$

۳۰ (۱) (۲) (۳) (۴)

$$x^2 - xy + y^2 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = xy (*)$$

$$\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2 = \frac{(x+y)^2}{(x-y)^2} = \frac{x^2 + y^2 + 2xy}{x^2 + y^2 - 2xy}$$

$$\frac{(*)}{(*)} \frac{xy + 2xy}{xy - 2xy} = \frac{3xy}{-xy} = -3$$

۳۱ (۱) (۲) (۳) (۴)

$$3 + 2\sqrt{2} = 1 + 2 + 2\sqrt{1 \times 2} = (\sqrt{1} + \sqrt{2})^2 = (1 + \sqrt{2})^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = \sqrt{(1 + \sqrt{2})^2} = 1 + \sqrt{2}$$

روش دوم: می‌توانیم اعداد گزینه‌ها را به توان ۲ برسانیم. جواب

باید $3 + 2\sqrt{2}$ شود. فقط حاصل $(1 + \sqrt{2})^2$ برابر $3 + 2\sqrt{2}$ می‌شود:

$$(1 + \sqrt{2})^2 + 1^2 + 2(1)(\sqrt{2}) + (\sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{2}$$

۳۲ (۱) (۲) (۳) (۴)

$$x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2)^2 - 2x^2 + 1$$

رابطه بالا را می‌توان به شکل $(a^2 - 2ab + b^2)$ در نظر گرفت که درآن $a = x^2$ و $b = 1$ می‌باشد، لذا حاصل آن $(a - b)^2$ است. یعنی:

$$(x^2)^2 - 2x^2 + 1 = (x^2 - 1)^2 = [(x-1)(x+1)]^2 = (x-1)^2(x+1)^2$$

اتحاد مزدوج

۳۳ (۱) (۲) (۳) (۴)

باید عبارت داده‌شده را شبیه اتحاد مربع دوجمله‌ای کنیم:

$$\frac{\Delta x^2}{(\sqrt{\Delta x})^2} + mx + \frac{1}{(\sqrt{10})^2}$$

اگر فرض کنیم $a = \sqrt{\Delta x}$ و $b = \sqrt{10}$ ، آن‌گاه در رابطه بالا a^2 و b^2 راکه داریم، فقط می‌ماند $2ab$ که برابر mx است. یعنی:

$$2ab = mx \Rightarrow 2(\sqrt{\Delta x})(\sqrt{10}) = mx$$

$$\xrightarrow{\text{ها را خط می‌زنیم}} 2\sqrt{\Delta} \sqrt{10} = m \Rightarrow 2\sqrt{\Delta \cdot 10} = m$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{2 \cdot 5 \cdot 2} = m \Rightarrow m = 2 \times 5\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$$

۳۴ (۱) (۲) (۳) (۴)

$$x^6 y^2 - x^2 y^6 \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} x^2 y^2 (x^4 - y^4)$$

$$= x^2 y^2 (x^2 + y^2)(x^2 - y^2) = x^2 y^2 (x^2 + y^2)(x - y)(x + y)$$

بنابراین در تجزیه به‌دست‌آمده، عامل $(x + y)^2$ وجود ندارد.

۲۲ (۱) (۲) (۳) (۴)

$$x^4 + x^3 + x^2 + x \xrightarrow{\text{فکتور از } x} x(x^3 + x^2 + x + 1)$$

$$\xrightarrow{\text{فکتور از } (x+1)} x(x^2(x+1) + (x+1)) = x(x+1)(x^2+1)$$

بنابراین $(x-1)$ در عوامل تجزیه وجود ندارد.

۲۳ (۱) (۲) (۳) (۴)

$$8x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 4x \xrightarrow{\text{فکتور از } 4x} 4x(2x^3 + x^2 + 2x + 1)$$

$$= 4x(x^2(2x+1) + (2x+1)) = 4x(2x+1)(x^2+1)$$

بنابراین $(x+1)$ در عوامل تجزیه وجود ندارد.

۲۴ (۱) (۲) (۳) (۴)

$$\begin{cases} 2x^2 + 3xy = 10 \xrightarrow{\text{فکتور از } x} x(2x + 3y) = 10 \\ 14x + 21y = 5 \xrightarrow{\text{فکتور از } 7} 7(2x + 3y) = 5 \Rightarrow 2x + 3y = \frac{5}{7} \end{cases}$$

حال در عبارت اول به جای $2x + 3y$ مقدار $\frac{5}{7}$ را جایگزین می‌کنیم:

$$\Rightarrow x \times \frac{5}{7} = 10 \Rightarrow x = \frac{7 \times 10}{5} = 14$$

۲۵ (۱) (۲) (۳) (۴)

$$16x^3 y + 40x^2 y^2 + 25xy^3 \xrightarrow{\text{فکتور از } xy} xy(16x^2 + 40xy + 25y^2)$$

$$= xy(4x + 5y)^2$$

۲۶ (۱) (۲) (۳) (۴)

بنا به اتحاد مربع دوجمله‌ای $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$ داریم:

$$x^4 - \square + 16x^2 y^2 = (x^2 - 4xy)^2 \Rightarrow \square = 2(x^2)(4xy)$$

$$\Rightarrow \square = 8x^3 y$$

۲۷ (۱) (۲) (۳) (۴)

با توجه به گزینه‌ها فرض کنیم مقدار kx را اضافه می‌کنیم تا عبارت مربع

کامل باشد:

$$4x^2 - 10x + 9 + kx = 4x^2 + (k-10)x + 9 = (2x \pm 3)^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2(2x)(3) = (k-10)x \Rightarrow k-10 = 12 \Rightarrow k = 12+10 = 22 \\ -2(2x)(3) = (k-10)x \Rightarrow k-10 = -12 \Rightarrow k = -12+10 = -2 \end{cases}$$

بنابراین در بین گزینه‌ها، اگر عبارت $(-2x)$ را اضافه کنیم، عبارت مربع

کامل گردد.

۲۸ (۱) (۲) (۳) (۴)

فرض کنیم مقدار k را اضافه می‌کنیم تا عبارت مربع کامل گردد، بنابراین:

$$4x^2 - 6x + \frac{1}{4} + k = (2x - b)^2 \Rightarrow \begin{cases} 2(2x)b = 6x \Rightarrow b = \frac{6x}{4x} = \frac{3}{2} \\ b^2 = \frac{1}{4} + k \end{cases}$$

حال از دو رابطه به دست آمده، مقادیر a و b را می‌یابیم:

$$\begin{cases} a - 2b = 5 \\ a + 2b = 3 \end{cases}$$

$$2a = 8 \Rightarrow a = 4 \xrightarrow{a-2b=5} 4 - 2b = 5 \Rightarrow 2b = 4 - 5 \Rightarrow b = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow a^3 - 2b = 4^3 - 2\left(-\frac{1}{2}\right) = 64 + 1 = 65$$

۴۰ (۴ ۳ ۲ ۱)

$$x^2 + 4y^2 = 4xy \Rightarrow x^2 + 4y^2 - 4xy = 0$$

مربع دوجمله‌ای $\rightarrow (x - 2y)^2 = 0 \Rightarrow x - 2y = 0$

$$x^2 - 4y^2 \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} (x - 2y)(x + 2y) = 0$$

۴۱ (۴ ۳ ۲ ۱)

$$2x^3 + 2x^2 - 4x \xrightarrow{\text{فاکتور از } (2x)} 2x(x^2 + x - 2) = 2x(x+2)(x-1)$$

اتحاد جمله مشترک $x^2 - x$

بنابراین در بین گزینه‌ها تنها بر $(x+1)$ بخش پذیر نیست.

۴۲ (۴ ۳ ۲ ۱)

روش اول:

$$4x^3 - 6x^2 + 2x \xrightarrow{\text{فاکتور از } x} x(4x^2 - 6x + 2) = x(2x - 1)(2x - 2)$$

$$= 2x(2x - 1)(x - 1)$$

بنابراین بر $(2x - 1)$ بخش پذیر است.

روش دوم:

نکته تستی: اگر یک چندجمله‌ای مثل $P(x)$ بر عبارتی شبیه

$ax + b$ بخش پذیر باشد، آن‌گاه $P\left(\frac{-b}{a}\right) = 0$ است؛ یعنی می‌توانیم عبارتهای موجود در گزینه‌ها را مساوی صفر قرار دهیم و مقدار x را به دست آوریم. این مقدار x را در چندجمله‌ای متن سؤال قرار می‌دهیم، اگر حاصل صفر شود چندجمله‌ای ما بر آن عبارت بخش پذیر است.

(۱) گزینه ۱: $2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$

در چندجمله‌ای متن سؤال قرار می‌دهیم. $\rightarrow 4\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 6\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(-\frac{1}{2}\right) \neq 0$

(۲) گزینه ۲: $2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

در چندجمله‌ای متن سؤال قرار می‌دهیم. $\rightarrow 4\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 6\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

پس حاصل چندجمله‌ای داده شده به ازای $x = \frac{1}{2}$ برابر صفر شد. لذا گزینه

(۲) درست است.

۴۳ (۴ ۳ ۲ ۱)

$$x^4 - 3x^2 - 4 = (x^2)^2 - 3x^2 - 4 = (x^2 + 1)(x^2 - 4)$$

$$= (x^2 + 1)(x - 2)(x + 2)$$

بنابراین بر $(x + 1)$ بخش پذیر نیست.

۳۵ (۴ ۳ ۲ ۱)

روش اول:

$$(ax + by)^2 - (ay + bx)^2$$

اتحاد مزدوج $\rightarrow (ax + by + ay + bx)(ax + by - ay - bx)$

فاکتور از $(a+b)$ $\rightarrow ((a+b)x + (a+b)y)((a-b)x + (b-a)y)$

فاکتور از $(a-b)$ $\rightarrow (a-b)(x+y)(a-b)(x-y) = (a^2 - b^2)(x^2 - y^2)$

مزدوج $\rightarrow (a+b)(x+y)(a-b)(x-y)$

روش دوم:

$$(ax + by)^2 - (ay + bx)^2$$

مربع دوجمله‌ای $\rightarrow (a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2) - (a^2y^2 + 2abxy + b^2x^2)$

$$= a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2 - a^2y^2 - 2abxy - b^2x^2$$

$$= (a^2 - b^2)x^2 - (a^2 - b^2)y^2 \xrightarrow{\text{فاکتور از } (a^2 - b^2)} (a^2 - b^2)(x^2 - y^2)$$

۳۶ (۴ ۳ ۲ ۱)

$$d^2 - c^2 = 77 \Rightarrow (d - c)(d + c) = 77$$

اتحاد مزدوج $\rightarrow d + c = \frac{77}{d - c} = 11 \Rightarrow c^2 + d^2 + 2cd = (c + d)^2 = 11^2 = 121$

دقت دارید که چون $c - d = -7$ است لذا $d - c = 7$ خواهد بود.

۳۷ (۴ ۳ ۲ ۱)

$$\frac{205^2 - 195^2}{(\sqrt{125} + 5)(\sqrt{500} - 10)} \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} \frac{(205 + 195)(205 - 195)}{(5\sqrt{5} + 5)(10\sqrt{5} - 10)}$$

$$= \frac{400 \times 10}{5(\sqrt{5} + 1) \times 10(\sqrt{5} - 1)} = \frac{4 \times 10}{5(\sqrt{5} + 1)(\sqrt{5} - 1)}$$

اتحاد مزدوج $\rightarrow \frac{80}{5 - 1} = \frac{80}{4} = 20$

۳۸ (۴ ۳ ۲ ۱)

$$4x^2 - y^2 = 12 \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} (2x - y)(2x + y) = 12$$

$$\xrightarrow{2x - y = 6} 6(2x + y) = 12 \Rightarrow 2x + y = \frac{12}{6} = 2$$

$$\begin{cases} 2x - y = 6 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$$

$$4x = 8 \Rightarrow x = 2 \xrightarrow{2x - y = 6} 2(2) - y = 6 \Rightarrow y = 4 - 6 = -2$$

و بنابراین $x + y = 2 + (-2) = 0$ می‌باشد.

۳۹ (۴ ۳ ۲ ۱)

$$a^2 = 4b^2 + 15 \Rightarrow a^2 - 4b^2 = 15 \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} (a - 2b)(a + 2b) = 15$$

$$\xrightarrow{a - 2b = 5} 5(a + 2b) = 15 \Rightarrow a + 2b = \frac{15}{5} = 3$$

۴ ۳ ۲ ۱ ۵۰

$$\begin{aligned} 8x^3 - \frac{1}{8}y^3 &= (2x)^3 - \left(\frac{1}{2}y\right)^3 \\ \text{چاق و لاغر} & \\ \frac{(2x - \frac{1}{2}y)((2x)^2 + (\frac{1}{2}y)^2 + (2x)(\frac{1}{2}y))}{(2x - \frac{1}{2}y)(4x^2 + \frac{y^2}{4} + xy)} \end{aligned}$$

۴ ۳ ۲ ۱ ۵۱

$$\begin{aligned} 2x^3 - 0.016 & \xrightarrow{\text{فاکتور از } 0.016} 2(x^3 - 0.008) = 2(x^3 - (0.2)^3) \\ \text{چاق و لاغر} & \\ \frac{2(x - 0.2)(x^2 + 0.2x + 0.04)}{2(x - 0.2)(x^2 + 0.2x + 0.04)} \end{aligned}$$

۴ ۳ ۲ ۱ ۵۲

$$\begin{aligned} 1 - x^6 &= 1^3 - (x^2)^3 \xrightarrow{\text{چاق و لاغر}} \frac{(1 - x^2)(1 + x^2 + x^4)}{(1 - x^2)(1 + x^2 + x^4)} \\ \text{اتحاد مزدوج} & \\ &= (1 - x)(1 + x)(1 + x^2 + x^4) \end{aligned}$$

۴ ۳ ۲ ۱ ۵۳

$$\begin{aligned} 54a^5b^3 - 2a^2 & \xrightarrow{\text{فاکتور از } 2a^2} 2a^2(27a^3b^3 - 1) \\ \text{چاق و لاغر} & \\ 2a^2((3ab)^3 - 1^3) & \xrightarrow{\text{چاق و لاغر}} 2a^2(3ab - 1)(9a^2b^2 + 3ab + 1) \\ \text{بنابراین عامل } (9a^2b^2 - 3ab + 1) & \text{ وجود ندارد.} \end{aligned}$$

۴ ۳ ۲ ۱ ۵۴

$$x^{12} + 1 = (x^4)^3 + 1^3 \xrightarrow{\text{چاق و لاغر}} (x^4 + 1)(x^8 + x^4 + 1)$$

۴ ۳ ۲ ۱ ۵۵

$$\begin{aligned} a^6 - \frac{1}{64} &= (a^2)^3 - \left(\frac{1}{4}\right)^3 \\ \text{اتحاد مزدوج} & \\ \frac{(a^2 - \frac{1}{4})((a^2)^2 + \frac{1}{4}a^2 + (\frac{1}{4})^2)}{(a - \frac{1}{2})(a + \frac{1}{2})(a^2 + \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{16})} & \\ \text{در تجزیه عبارت فوق، عامل } (a - \frac{1}{4}) & \text{ وجود ندارد.} \end{aligned}$$

۴ ۳ ۲ ۱ ۵۶

$$\begin{aligned} 101^3 - 98^3 & \xrightarrow{\text{چاق و لاغر}} (101 - 98)(101^2 + 98^2 + 101 \times 98) \\ &= (101 - 98) \left(\frac{(100+1)^2}{(a+b)^2} + \frac{(100-2)^2}{(a-b)^2} + \frac{(100+1)(100-2)}{(a+b)(a+c)} \right) \\ \text{پس از اتحاد مزدوج برای تجزیه و محاسبه عبارت استفاده نمی‌گردد.} \end{aligned}$$

۴ ۳ ۲ ۱ ۵۷

$$\begin{aligned} 102^3 + 99^3 & \xrightarrow{\text{چاق و لاغر}} (102 + 99)(102^2 + 99^2 - 102 \times 99) \\ &= 201 \left(\frac{(100+2)^2}{\text{مربع دو جمله‌ای}} + \frac{(100-1)^2}{\text{مربع دو جمله‌ای}} - \frac{(100+2)(100-1)}{\text{جمله مشترک}} \right) \end{aligned}$$

۴ ۳ ۲ ۱ ۴۴

$$\begin{aligned} 16x^4 + 24x^2 - 7 &= (4x^2)^2 + 6(4x^2) - 7 = \underbrace{(4x^2 - 1)(4x^2 + 7)}_{\text{اتحاد مزدوج}} \\ &= (2x - 1)(2x + 1)(4x^2 + 7) \end{aligned}$$

۴ ۳ ۲ ۱ ۴۵

$$\begin{aligned} a(a-2)(a-3) - 4a + 7 &= a(a-2)(a-3) - 4(a-2) \\ \text{فاکتور از } -4 & \\ \frac{(a-2)(a(a-3)-4)}{(a-2)(a(a-3)-4)} &= (a-2)(a^2 - 3a - 4) \\ \text{جمله مشترک} & \\ &= (a-2)(a+1)(a-4) \\ \text{بنابراین در تجزیه عبارت، عامل } (a-1) & \text{ وجود ندارد.} \end{aligned}$$

۴ ۳ ۲ ۱ ۴۶

$$\begin{aligned} a(a-3)(a-4) - 12a + 36 &= a(a-3)(a-4) - 12(a-3) \\ \text{فاکتور از } -12 & \\ \frac{(a-3)(a(a-4)-12)}{(a-3)(a(a-4)-12)} &= (a-3)(a^2 - 4a - 12) \\ \text{اتحاد جمله مشترک} & \\ &= (a-3)(a+2)(a-6) \\ \text{بنابراین در تجزیه عبارت، عامل } (a-2) & \text{ وجود ندارد.} \end{aligned}$$

۴ ۳ ۲ ۱ ۴۷

عبارت $(x^2 + x)$ دو بار تکرار شده، پس جمله مشترک خواهد بود.
پس $x^2 + x$ را در هر دو پرانتز قرار می‌دهیم حال به دنبال دو عدد هستیم که ضربشان -2 و جمعشان -1 شود که عبارتند از -2 و $+1$:

$$\begin{aligned} (x^2 + x)^2 - 1(x^2 + x) - 2 &= ((x^2 + x) + 1)((x^2 + x) - 2) \\ &= (x^2 + x + 1)(x^2 + x - 2) = (x^2 + x + 1)(x + 2)(x - 1) \\ \text{بنابراین تنها بر } (x + 2) & \text{ بخش پذیر است.} \end{aligned}$$

۴ ۳ ۲ ۱ ۴۸

روش اول:

$$\begin{aligned} (x^2 - 4x + 2)^2 + 3(x^2 - 4x + 2) + 2 & \\ \text{اتحاد جمله مشترک} & \\ \frac{((x^2 - 4x + 2) + 1)((x^2 - 4x + 2) + 2)}{(x^2 - 4x + 3)(x^2 - 4x + 4)} &= (x - 1)(x - 3)(x - 2)^2 \\ \text{اتحاد مربع دو جمله‌ای اتحاد جمله مشترک} & \\ \text{بنابراین بر } (x + 1) & \text{ بخش پذیر نیست.} \end{aligned}$$

روش دوم: اگر طبق روش تستی گفته شده در سؤالات قبلی عمل کنیم، متوجه می‌شویم که مقدار عبارت متن سؤال به ازای $x = -1$ صفر نمی‌شود (-1 ریشه گزینۀ (۴) است) ولی مقدار آن به ازای $x = 1$ ، $x = 2$ ، $x = 3$ و $x = 4$ همگی برابر صفر است. پس عبارت داده شده فقط بر $(x + 1)$ بخش پذیر نیست.

۴ ۳ ۲ ۱ ۴۹

$$\begin{aligned} (x^2 - 6x - 4)^2 - 144 &= (x^2 - 6x - 4)^2 - 12^2 \\ \text{اتحاد مزدوج} & \\ \frac{(x^2 - 6x - 4 + 12)(x^2 - 6x - 4 - 12)}{(x^2 - 6x + 8)(x^2 - 6x - 16)} &= (x - 4)(x - 2)(x - 8)(x + 2) \\ \text{جمله مشترک} & \\ \text{بنابراین در تجزیه عبارت، عامل } (x + 4) & \text{ وجود ندارد.} \end{aligned}$$

۴ ۳ ۲ ۱ ۶۳

$$x + y = 2\sqrt{7}, \quad xy = 3$$

حال می‌خواهیم $x^3 + y^3$ را بیابیم. برای این کار اولاً داریم:

$$x + y = 2\sqrt{7} \xrightarrow{\text{توان } 2} (x + y)^2 = (2\sqrt{7})^2$$

$$\xrightarrow{\text{مربع دوجمله‌ای}} x^2 + 2xy + y^2 = 28$$

$$\xrightarrow{xy=3} x^2 + y^2 + 2(3) = 28 \Rightarrow x^2 + y^2 = 28 - 6 = 22 \quad (*)$$

در نتیجه بنا به اتحاد چاق و لاغر داریم:

$$x^3 + y^3 = \overbrace{(x+y)^3}^{2\sqrt{7}} - \underbrace{3xy(x+y)}_{21} \quad (*) = 2\sqrt{7}(22-3) = 38\sqrt{7}$$

۴ ۳ ۲ ۱ ۶۴

$$x + y = 3 \xrightarrow{\text{توان } 2} (x + y)^2 = 3^2 \xrightarrow{\text{مربع دوجمله‌ای}} x^2 + y^2 + 2xy = 9$$

$$\xrightarrow{x^2 + y^2 = 7} 7 + 2xy = 9 \Rightarrow 2xy = 2 \Rightarrow xy = 1 \quad (*)$$

و بنابراین طبق اتحاد چاق و لاغر داریم:

$$x^3 + y^3 = \overbrace{(x+y)^3}^3 - \underbrace{3xy(x+y)}_3 \quad (*) = 3(3-1) = 18$$

۴ ۳ ۲ ۱ ۶۵

بنابه اتحاد مربع دوجمله‌ای داریم:

$$(x + y) = 3 \xrightarrow{\text{توان } 2} (x + y)^2 = 3^2 \xrightarrow{\text{مربع دوجمله‌ای}} x^2 + 2xy + y^2 = 9$$

$$\xrightarrow{xy=-1} x^2 + y^2 + 2(-1) = 9 \Rightarrow x^2 + y^2 = 9 + 2 = 11 \quad (*)$$

$$(x - y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy = 11 - 2(-1) = 13 \Rightarrow x - y = \sqrt{13} \quad (**)$$

$$\Rightarrow x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2) \stackrel{(**) \cdot (*)}{=} \sqrt{13}(11 + 1) = 12\sqrt{13}$$

۴ ۳ ۲ ۱ ۶۶

بنابه اتحاد مکعب دوجمله‌ای داریم:

$$(3a - 2b)^3 = (3a)^3 - 3(3a)^2(2b) + 3(3a)(2b)^2 - (2b)^3$$

$$= 27a^3 - 18a^2b - 54a^2b + 36ab^2 \Rightarrow \begin{cases} \triangle = -54 \\ \square = 36 \end{cases}$$

$$\square - \triangle = 36 - (-54) = 36 + 54 = 90$$

۴ ۳ ۲ ۱ ۶۷

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ 18x^3 + 12x^2 + 6x + 1 = (2x + 1)^3 \\ (2x)^3 \quad 3(2x)^2(1) \quad 3(2x)(1)^2 \quad (1)^3$$

حال مقدار عبارت را به ازای $x = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$ می‌یابیم:

$$(2x + 1)^3 = \frac{\sqrt{2}-1}{2} \left(2 \times \frac{\sqrt{2}-1}{2} + 1 \right)^3$$

$$= (\sqrt{2} - 1 + 1)^3 = \sqrt{2}^3 = \sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = 2\sqrt{2}$$

۴ ۳ ۲ ۱ ۵۸

$$a + b = 1 \xrightarrow{\text{توان } 2} (a + b)^2 = 1 \xrightarrow{\text{مربع دوجمله‌ای}} a^2 + b^2 + 2ab = 1$$

$$\Rightarrow 2ab = 1 - 5 \Rightarrow ab = \frac{-4}{2} = -2 \quad (*)$$

$$a^3 + b^3 \xrightarrow{\text{چاق و لاغر}} \underbrace{(a+b)^3}_{1} - \underbrace{3ab(a+b)}_{-6} \stackrel{(*)}{=} 1 - (-6) = 7$$

۴ ۳ ۲ ۱ ۵۹

چاق و لاغر

$$a^3 - b^3 = a - b \Rightarrow (a - b)(a^2 + ab + b^2) = (a - b)$$

$$\xrightarrow{\text{حذف } (a-b) \text{ از دو طرف}} a^2 + ab + b^2 = 1 \xrightarrow{+ab} a^2 + 2ab + b^2 = ab$$

$$\Rightarrow (a + b)^2 = ab$$

۴ ۳ ۲ ۱ ۶۰

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2x\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\xrightarrow{x^2 + \frac{1}{x^2} = 7} \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 7 + 2 = 9$$

$$\xrightarrow{\text{جذر می‌گیریم}} x + \frac{1}{x} = \sqrt{9} = 3 \quad (*)$$

حال از اتحاد $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ استفاده می‌کنیم:

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^2 - x\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^2 + \frac{1}{x^2} - 1\right) \stackrel{(*)}{=} 3(7 - 1) = 18$$

۴ ۳ ۲ ۱ ۶۱

$$x + \frac{1}{x} = 4 \xrightarrow{\text{توان } 2} \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 4^2$$

$$\xrightarrow{\text{مربع دوجمله‌ای}} x^2 + 2x\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^2} = 16$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = 16 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = 16 - 2 = 14 \quad (*)$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} \xrightarrow{\text{چاق و لاغر}} \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^2 - x\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^2 + \frac{1}{x^2} - x\left(\frac{1}{x}\right)\right) \stackrel{(*)}{=} 4(14 - 1) = 4 \times 13 = 52$$

۴ ۳ ۲ ۱ ۶۲

$$x - y = 4 \xrightarrow{\text{توان } 2} (x - y)^2 = 4^2 \xrightarrow{\text{مربع دوجمله‌ای}} x^2 - 2xy + y^2 = 16$$

$$\xrightarrow{xy=9} x^2 + y^2 - 2(9) = 16 \Rightarrow x^2 + y^2 = 16 + 18 = 34 \quad (*)$$

بنابراین طبق اتحاد چاق و لاغر داریم:

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2) = (x - y)(x^2 + y^2 + xy)$$

$$\stackrel{(*)}{=} 4(34 + 9) = 172$$

۴ ۳ ۲ ۱ ۷۳

$$a(a+2) + 4b(b+1) + 4ab = a^2 + 2a + 4b^2 + 4b + 4ab$$

مربع دوجمله‌ای

$$= (a^2 + 4b^2 + 4ab) + 2(a+2b) = \underbrace{(a+2b)^2}_2 + \underbrace{2(a+2b)}_2$$

$$= 9 + 6 = 15$$

۴ ۳ ۲ ۱ ۷۴

فاکتور از $(x-1)$

$$\underbrace{x^2 - (x-1)(x^2 - x + 3)}_x = x(x-1) - (x-1)(x^2 - x + 3)$$

فاکتور از x

$$= -(x-1)(x^2 - x + 3 - x) = -(x-1)(x^2 - 2x + 3)$$

بر $(x+3)$ بخش پذیر نیست. $\Rightarrow -(x-1)(x+1)(x-3)$

۴ ۳ ۲ ۱ ۷۵

اتحاد چاق و لاغر

فاکتور از $(x-3)$

فاکتور از 8

فاکتور از x^3

$$x^4 - 3x^3 + 8x - 24 = x^3(x-3) + 8(x-3) = (x-3)(x^3 + 8)$$

$$= (x-3)(x+2)(x^2 - 2x + 4)$$

۴ ۳ ۲ ۱ ۷۶

فاکتور از x^3

فاکتور از $(x+y)$

فاکتور از $-y^3$

$$x^4 - xy^3 + x^2y - y^4 = x^2(x+y) - y^2(x+y)$$

$$= (x+y)(x^2 - y^2) = (x+y)(x-y)(x^2 + xy + y^2)$$

چاق و لاغر

بنابراین تنها بر عامل گزینه (۲) بخش پذیر است.

۴ ۳ ۲ ۱ ۷۷

با توجه به سطرهای داده شده از مثلث خیام، داریم:

$$\begin{cases} a + b = 35 \\ b + 6 = 21 \Rightarrow b = 21 - 6 = 15 \\ 15 + a = c \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + 15 = 35 \Rightarrow a = 20 \\ c = a + 15 \end{cases} \Rightarrow c = 35$$

$$\Rightarrow a - b + c = 20 - 15 + 35 = 40$$

۴ ۳ ۲ ۱ ۷۸

عدد دوم از سطر n ام مثلث خیام برابر با $(n-1)$ است، در نتیجه:

$$n-1 = 18 \Rightarrow n = 19$$

و مجموع اعداد در سطر n ام برابر با $2^{n-1} = 2^{18}$ می باشد.

۴ ۳ ۲ ۱ ۷۹

ضرایب چندجمله‌ای $(a+b)^n$ برابر با سطر $(n+1)$ از مثلث خیام است. بنابراین ضرایب چندجمله‌ای $(a+b)^{15}$ برابر با سطر ۱۶ ام از مثلث خیام است.

۴ ۳ ۲ ۱ ۶۸

روش اول:

اتحاد مکعب دوجمله‌ای

اتحاد مزدوج

$$(x-1)^3 - (\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - (x-1)$$

$$= x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - x + 1 = x^3 - 3x^2 + 2x$$

فاکتور از x

$$x(x^2 - 3x + 2) = x(x-1)(x-2)$$

یک جمله مشترک

روش دوم:

اتحاد مزدوج

$$(x-1)^3 - (\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1) = (x-1)^3 - (x-1)$$

فاکتور از $(x-1)$

$$(x-1)((x-1)^2 - 1)$$

$$= (x-1)(x^2 - 2x + 1 - 1) = (x-1)(x^2 - 2x) = (x-1)x(x-2)$$

فاکتور از x

۴ ۳ ۲ ۱ ۶۹

اتحاد مزدوج

$$(x+2)^3 + (\sqrt{2x}-2\sqrt{2})(\sqrt{2x}+2\sqrt{2})$$

$$= (x^3 + 6x^2 + 12x + 8) + (2x^2 - 8)$$

$$= x^3 + 6x^2 + 12x$$

فاکتور از x

$$x(x^2 + 6x + 12) = x(x+6)(x+2)$$

۴ ۳ ۲ ۱ ۷۰

توان 3

$$x - y = 2 \rightarrow (x-y)^3 = 2^3$$

مکعب دوجمله‌ای

$$x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 = 8$$

$$\Rightarrow x^3 - y^3 - 3xy(x-y) = 8 \Rightarrow x^3 - y^3 - 6xy = 8$$

۴ ۳ ۲ ۱ ۷۱

روش اول:

فاکتور از $(2x-1)$

فاکتور از (-4)

فاکتور از x^2

$$2x^3 - x^2 - 8x + 4 = x^2(2x-1) - 4(2x-1)$$

$$= (2x-1)(x^2 - 4) = (2x-1)(x-2)(x+2)$$

اتحاد مزدوج

بنابراین بر $(2x+1)$ بخش پذیر نیست.

روش دوم: اگر به روش تستی عمل کنیم متوجه می شویم که ریشه گزینه (۴) یعنی $x = \frac{-1}{2}$ عبارت داده شده در متن سؤال را به صفر تبدیل نمی کند، پس این عبارت بر $(2x+1)$ بخش پذیر نیست. ولی چندجمله‌ای متن سؤال به ازای $x = 2$ ، $x = \frac{1}{2}$ ، و $x = -2$ برابر صفر می شود؛ پس این عبارت بر تمام عبارت‌های $x-2$ ، $x-1$ ، $x+2$ بخش پذیر است.

۴ ۳ ۲ ۱ ۷۲

اتحاد مربع دوجمله‌ای

اتحاد مربع دوجمله‌ای

اتحاد مزدوج

$$4a^2 - 4a - b^2 - 4b - 3 = 4a^2 - 4a + 1 - (b^2 + 4b + 4)$$

$$= (2a-1)^2 - (b+2)^2 = \frac{\text{اتحاد مزدوج}}{\text{مزدوج}} ((2a-1) - (b+2))((2a-1) + (b+2))$$

$$= (2a-1-b-2)(2a-1+b+2) = (2a-b-3)(2a+b+1)$$

بنابراین در تجزیه عامل $(2a+b+1)$ وجود دارد.