به نام خداوند مهربان

آموزش + تست کتاب فضایی

دوازدهم

ریاضیات تجربی

+ مباحث مرتبط با پایه دهم و یازدهم

کهکشانی‌ترین کتاب آموزش دنیا

عباس اشرفی › محمود داورزنی

همکاران تألیف: احسان لعل، فرنود فارسی‌جانی

مهروماه

مقدمه

سلام بچه‌ها!

به کلاس درس شیرین ریاضیات خوش آمدید! در کلاسی به وسعت ایران عزیز، هم قدم شما هستیم و تا پایان سال تحصیلی دشواری‌ها را با هم سپری می‌کنیم.

می‌دانم که ریاضی، یکی از سخت‌ترین درس‌های کنکور برای بچه‌های تجربی است، علاوه بر این شما اولین کسانی هستید که در کنکور نظام جدید شرکت می‌کنید.

آقا اجازه! من پارسال به زور ریاضی رو پاس کردم! جای من هم تو این کلاس هست!

بله، قطعاً. در این بیست سال تدریس به این نتیجه رسیده‌ام که اغلب افرادی که در ریاضی ضعف دارند، کم‌هوش نیستند بلکه بازیگوش هستند. بارها با چشمان خود دانش‌آموزانی را دیده‌ام که از نمرهٔ ۸ و ۹ ریاضی دهم به درصدهای ۶۰ و ۷۰ کنکور در درس ریاضی رسیده‌اند.

من قول میدم امسال بترکونم.

من هم امیدوارم.

شما به جزء ریاضی دوازدهم مطالب دهم و یازدهم رو هم تدریس می‌کنید؟

بله، در ۳ فصل تابع، مثلثات و احتمال آموزش مطالب را از سال دهم شروع می‌کنیم.

فقط برای این‌که بیشتر شما را بشناسم، نمرهٔ ریاضی یازدهم شما چند شد؟

یادم نیست ولی حدود ۱۵ شدم.

ساختار و ویژگی‌های کتاب

بچه‌های عزیز با تغییر نظام آموزشی، درس ریاضی دچار تغییرات زیادی شده است. بخش‌های زیادی از هندسه، مشتق، مثلثات و انتگرال حذف شده و مطالبی مانند اتحادها، معادلات درجه دوم، ریشه‌ها، مجموعه‌ها به سرفصل‌های کنکور اضافه شده است.

در این کلاس سعی می‌کنیم دقیقاً مطابق با سرفصل‌های کتاب‌های جدید پیش برویم و هرجا که نیاز به گفتن مطالب بیشتری باشد آن‌ها را تحت عنوان **یک گام فراتر** بیاوریم.

استاد توی این کلاس نکات تستی رو هم می‌گید یا فقط در حد امتحان نهایی تدریس می‌کنید؟

آقا، شاگرد اول کلاسمونه‌ها! تحویلش بگیرید!

بله از سؤالش مشخص است. خیالتان راحت باشد من در این کلاس همهٔ **نکته**‌ها را برایتان آورده‌ام. سطح کلاس آموزشی ما کاملاً مطابق با کنکور است. هرجا لازم باشد با گفتن روش دوم **فرمول ممنوع** بدون استفاده از فرمول، تست را حل می‌کنیم.

در جاهایی که ممکن است در حل سؤال‌ها به خطا بیافتید با گفتن **حواست باشه** به شما هشدار می‌دهم! به **تذکر**ها هم خیلی دقت کنید، معمولاً این مطالب پتانسیل طرح تست را دارند.

سبک کارمان هم این است، ابتدا همهٔ مطالب یک جلسه را در یک تخته می‌نویسم که مثل یک GPS به شما نشان می‌دهیم که در هر جلسه به بررسی چه مطالبی می‌پردازیم. سپس مطالب هر بخش را تدریس می‌کنم در هر بخش معمولاً یک مثال و چند تست حل می‌کنیم.

در انتهـا هـم «لب کلام» را برایتان مـی‌آورم که در یک نگاه کلـی می‌توانید تمامی مطالـب را دوره کنید، در پایان هر جلسـه هم تست‌های آن جلسه را داریم که کل مطالب و نکته‌های آن مبحث را به‌طور کامل پوشش می‌دهند.
توجه داشته باشید که این کتاب شامل قسمت‌های زیر است:

- **درسنامه‌های جامع و مفهومی داره!** هم تمام مطالب کتاب درسی رو موبه‌مو براتون آوردیم هم مطالب عمیق‌تر رو.
- **طبقه‌بندی موضوعی شده،** یعنی درسنامه‌های هر فصل به چند جلسه کلاس درسی تقسیم شده تا مجبور نشی کل فصل رو یه جا بخونی. باور کن برای دعوت هرکدوم از موضوع‌ها به کتابمون، کلی جلسـه با مشـاوران به‌نام و کار بلد عرصهٔ کنکور، سـرکار خانم حجازیان و آقایان رامین احمدیان، محمد اسـداللهی، علیرضا بحری، سیدمحسـن جلال‌زاده، علی حق‌شناس، امین خانی، امیـر سمیعیان، مسـعود عظیمی، بهنام قدردوسـت، حسـن محمدی، احمد میربلنـد و احمد میری گذاشـتیم و دربارش بحث کردیم که همین‌جا از همشون تشکر می‌کنم؛ خیلی سخت بود ولی می‌ارزید.
- **هیچ مطلبی رو بدون مثال و تست باقی نذاشتیم!** برای درک بهتر مطالب، یک یا چند مثال براتون آوردیم.
- **پُر از تست‌های خوب و مفیده!** تست‌ها رو هم از ساده به سخت چیدیم که اولش با دیدن تست‌های سخت سکته نکنی ☺
- **همهٔ تسـت‌های کنکـور جدیـد حتـی کنکور امسـال** تـو کتابمـون هسـت، البتـه فقـط تسـت‌هایی رو آوردیـم که مربـوط به کتاب‌های جدیده.
- **تعداد تست‌هاش خیلی زیاده،** البته متناسب با اهمیت هر مبحثه، اینقدر که اگر همشون رو کارکنی، به اون مبحث در حد تیم ملی مسلط می‌شی.
- **مثل کتاب درسی،** تست‌هامون رویکرد مسائل واقعی گرفتن و از حالت انتزاعی خارج شدن.
- **پاسخنامه‌ش پر از راهبردهای عالیه!** به کمک اون‌ها، توی حل سؤالا گیر نمی‌کنی و می‌دونی که چه مسیری رو باید دنبال کنی. پاسخنامهٔ این کتاب به جزء راهبرد به‌کلی نکته‌های تستی و تکنیک‌های محاسباتی و ... مسلح شده!

پل هاموس می‌گه: تمرین، قلبِ ریاضیات است اگه این‌طوریه کتاب ما متخصصه ♡

تشکر و قدردانی

این کتاب مرهون تلاش، حمایت، راهنمایی و آموزش این دوستان است.

- جناب آقای احمد اختیاری مدیر انتشارات که در کشاکش تولید کتاب‌های جامع امکان تولید این اثر را به‌وجود آوردند.
- جناب استاد محمدحسین انوشه مدیر شورای تألیف که از ابتدا ما را تشویق به تألیف کتاب نمودند.
- جناب اسـتاد شـهریار قبادی مؤلف برجسـته که تجربهٔ گران‌قدر خود در زمینهٔ تألیف کتاب کلاس انتشارات رمزینه را در اختیار ما قرار دادند.
- جناب استاد بهمن اصلاح‌پذیر که همواره از راهنمایی‌های علمی ایشان بهره برده‌ایم.
- جناب آقای گودرزی مدیر فروش انتشارات که تشویق‌هایشان مایهٔ دلگرمی ماست.
- خانم‌ها سنور حریری مدیر ویراستاری، دنیا سلیمی مسئول کتاب و ندا دهقانی و آقای حامد شفیعی ویراستاران دلسوز کتاب که اگر تلاش این عزیزان نبود هرگز این کتاب چاپ نمی‌شد.
- از جناب آقای امیر انوشه مدیر سایت سپاس گذاریم.
- سـرکار خانم سـمیه جبـاری مدیر تولید، خانم الهـام پیلوایه صفحه‌آرا و مدیـر فنی، آقای حامد فرزیـن و خانم مهری فروتن، تایپیست‌های گرامی و مرتضی ضیایی رسام محترم نیز تلاش فراوانی برای تولید این اثر داشتند.
- از جناب آقای محسن فرهادی مدیر گروه هنری و سرکار خانم سمیرا مختاری تصویرگر محترم تشکر فراوان داریم.
- سرکار خانم قنبری مدیر روابط عمومی که از این پس زحمات این کتاب بر دوش ایشان خواهد بود صمیمانه قدردانیم.

در آخر

کتـاب حاضـر را تقدیـم به تمامی دانش‌آموزان رشـتهٔ تجربی و دبیران محترم می‌کنیم و از همگی دوسـتان انتظـار داریم، هر نوع اشکال چاپی یا محتوایی را به ما گوشزد کنند تا در ویرایش‌های بعدی اصلاح گردد.

عباس اشرفی
تابستان ۹۷

فهرست

فصل دوم

مثلثات

این فصل نیز مانند تابع قدمت زیادی در کنکور دارد با این تفاوت که اغلب بچه‌ها علاقه‌ای به این فصل ندارند.

رویکرد مؤلفان کتاب درسی: خوشبختانه با حذف روابط نسبت‌های مثلثاتی مجموع و تفاضل دو کمان و معادلات تانژانت و کتانژانت بسیاری از فرمول‌های این فصل حذف شده است. شاید با این تغییرات مثلثات بتواند دل‌های بیشتری را به‌دست آورد.

مهم‌ترین مباحث: رسم نمودارهای مثلثاتی، نسبت‌های مثلثاتی کمان‌های دو برابر و معادلات مثلثاتی

برآورد ما: در چند سال آخر کنکور نظام قدیم، ۳ تست از این فصل طرح شده است و پیش‌بینی ما این است که ۳ تا ۴ تست در کنکورهای جدید از این بحث طرح شود.

برای مشاهدهٔ فیلم پاسخ به برخی از تست‌های مهم فصل رمزینه را اسکن کنید.

جلسهٔ پنجم

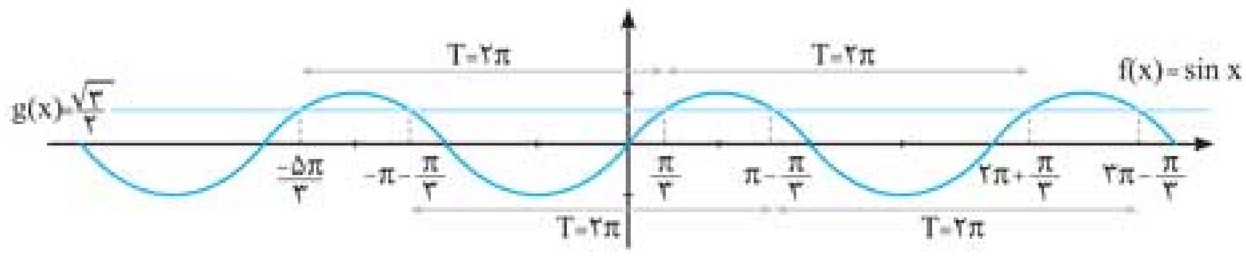
معادلات مثلثاتی

- **محاسبهٔ ریشه‌های معادلات شامل توابع مثلثاتی از روی نمودار**
- **توابع سینوسی**
  - فرم کلی به‌دست آوردن ریشه‌های معادلات توابع سینوسی
  - فرم کلی ریشه‌های معادلات خاص توابع سینوسی
- **توابع کسینوسی**
  - فرم کلی به‌دست آوردن ریشه‌های معادلات توابع کسینوسی
  - فرم کلی ریشه‌های معادلات خاص توابع کسینوسی
- **فرم کلی به‌دست آوردن ریشه‌های معادلات توابع تانژانتی**

محاسبهٔ ریشه‌های معادلات مثلثاتی از روی نمودار

به آخرین بحث از درس شیرین مثلثات رسیدیم؛ بحث معادله‌های مثلثاتی.

فرض کنید می‌خواهیم ریشه‌های معادلهٔ $۲\sin x - \sqrt{۳} = ۰$ را بیابیم. معادله را به‌صورت $\sin x = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$ می‌نویسیم. اگر نمودارهای منحنی $f(x) = \sin x$ و خط $g(x) = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$ را رسم کنیم، ریشه‌های معادله (یعنی همان محل‌های برخورد دو نمودار) پیدا می‌شوند.

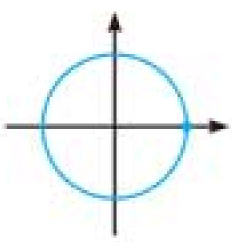


با دقت بیشتر می‌توان حدس زد که طول‌های نقاط برخورد $x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۳}$ و $x = (۲k+۱)\pi - \frac{\pi}{۳}$ است.

آقا ببخشید! این اعدادی رو که روی محور نوشتین از کجا آوردید؟

بهتر بود اول توضیح می‌دادم که چرا محل برخورد منحنی با خط $y = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$ این نقاط است. بگذارید یک توضیح ریشه‌ای بدهم.

به‌دست آوردن ریشه‌های معادلات سینوسی



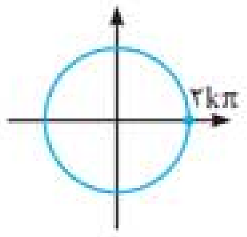
به دایرهٔ مثلثاتی مقابل توجه کنید.
نقطه مشخص شده چند رادیان است؟

آقا صفره دیگه! مارو سرکار گذاشتید!!

مرد جوان! چقدر عجول هستی! آیا ۲π نیست؟ ۴π چطور؟ -۲π چطور؟ و...

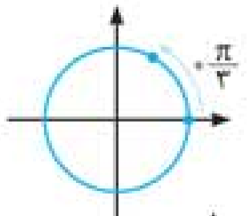
یک نقطه روی دایرهٔ مثلثاتی، نشان‌دهنده بی‌شمار زاویه است.

در این مثال می‌توان گفت این نقطه روی دایرهٔ مثلثاتی نشان‌دهنده زاویه‌هایی با اندازهٔ مضارب زوج π است.
اعداد زوج را با $۲k$ $(k \in \mathbb{Z})$ نمایش می‌دهیم، بنابراین مضارب زوج π را می‌توان به‌صورت $۲k\pi$ نمایش داد.
یعنی نقطهٔ مشخص شده روی دایره مثلثاتی نشانگر همهٔ زاویه‌هایی با اندازه $۲k\pi$ رادیان است.



آقا می‌شه بگیم اسم این نقطه روی دایره مثلثاتی $۲k\pi$ هست؟
چه پیشنهاد خوبی دادی! از این به بعد می‌گوییم «اسم این نقطه $۲k\pi$ است.»
یعنی بر روی دایره مثلثاتی می‌توان گفت:
بگذارید با یک سؤال ببینم آیا مطلب را فهمیدید یا خیر؟
اسم نقطهٔ داده شده روی دایره مثلثاتی را تعیین کنید.

استاد می‌شه گفت زاویه‌هایی با اندازه $\frac{\pi}{۳}$، $۲\pi+\frac{\pi}{۳}$، $۴\pi+\frac{\pi}{۳}$ و ...، $-۲\pi+\frac{\pi}{۳}$، $-۴\pi+\frac{\pi}{۳}$ و ... رو نشون میده!
درواقع $\frac{\pi}{۳}$ به مضارب زوج π اضافه شده، پس می‌شه گفت اسم این نقطه $۲k\pi+\frac{\pi}{۳}$ $(k \in \mathbb{Z})$ است



درست است. بگذارید طور دیگری به این موضوع نگاه کنیم می‌توان گفت نقطهٔ مثال جدید به اندازه $\frac{\pi}{۳}$ بیشتر از نقطه مثال قبلی است (در شکل بهتر می‌توان این موضوع را مشخص نمود) پس اسم این نقطه $۲k\pi+\frac{\pi}{۳}$ است.
حالا تعدادی نقطه روی دایره مثلثاتی نمایش می‌دهم و شما اسم آن‌ها را بگویید.

الف | ب | پ | ت

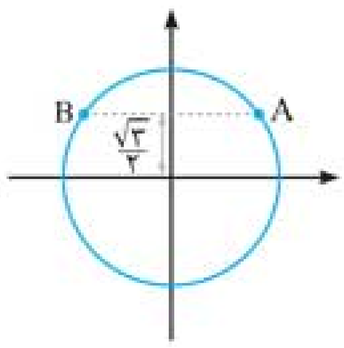
به‌ترتیب از همین‌جا شروع کنید به جواب دادن:

قسمت الف می‌شه $۲k\pi-\frac{\pi}{۴}$.

قسمت ب می‌شه $۲k\pi+\frac{\pi}{۲}$.

در قسمت پ، نقطه نشون‌دهنده زاویه‌های به اندازه $۲k\pi+\pi$ است.
در قسمت ت نقطه به اندازه $\frac{۲\pi}{۳}$ از $۲k\pi$ بیشتره، پس برابر $۲k\pi+\frac{۲\pi}{۳}$ می‌شه.
یک سؤال از شما دارم. جور دیگری هم می‌توانی زاویه‌ها را مشخص کنی؟
بله، فکر کنم $\frac{۲\pi}{۳}$ رو بشه به‌صورت $\pi-\frac{\pi}{۳}$ نوشت و زاویه رو به‌صورت $۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۳}$ نمایش داد. اگر از π در دو جملهٔ اول فاکتور بگیریم، می‌شه $(۲k+۱)\pi-\frac{\pi}{۳}$.

حالا بعد از این توضیح، می‌خواهم برگردم به سؤال آقای . (تو معادله $\sin x=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$، ریشه‌ها رو از کجا آوردید و روی نمودار نوشتید؟)
می‌خواهیم ببینیم بر روی دایره مثلثاتی چه زاویه‌هایی، سینوسی برابر $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ دارند.
بر روی محور سینوس‌ها به اندازهٔ $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ جدا می‌کنیم.



دو نقطه مانند A و B بر روی دایره مثلثاتی قرار دارند که سینوس آن‌ها برابر $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ است.
می‌دانیم یکی از زاویه‌هایی که برابر A هستند، $\frac{\pi}{۳}$ و یکی از زاویه‌هایی که برابر B هستند، مکمل $\frac{\pi}{۳}$ یعنی $\pi-\frac{\pi}{۳}=\frac{۲\pi}{۳}$ است.
با توجه به توضیحی که دادم معادلهٔ کلی نقطهٔ $A=۲k\pi+\frac{\pi}{۳}$ و $B=(۲k+۱)\pi-\frac{\pi}{۳}$ است.

استاد می‌شه گفت به‌طورکلی ریشه‌های معادله $\sin x=\sin\alpha$ برابر $x=۲k\pi+\alpha$ و $x=(۲k+۱)\pi-\alpha$ است؟
درحالت‌کلی کاملاً درست گفتی. مثلاً ریشه‌های معادله $\sin x=\sin\frac{\pi}{۴}$ به‌صورت $x=۲k\pi+\frac{\pi}{۴}$ و $x=(۲k+۱)\pi-\frac{\pi}{۴}$ است.

به مثال‌های بعدی توجه کنید.

مثال معادلهٔ $2\sin x+1=0$ را حل کنید.

ابتدا سینوس را تنها می‌کنیم: $2\sin x=-1 \Rightarrow \sin x=-\frac{1}{2}$

باید ببینیم چه زاویه‌ای سینوسی برابر $-\frac{1}{2}$ دارد؟ $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$، پس $\sin(-\frac{\pi}{6})=-\frac{1}{2}$ است.

بنابراین: $\sin x=\sin(-\frac{\pi}{6})$

حالا به کمک روابط گفته شده، می‌نویسیم:

$$\begin{cases} x=2k\pi+(-\frac{\pi}{6}) \Rightarrow x=2k\pi-\frac{\pi}{6} \\ x=(2k+1)\pi-(-\frac{\pi}{6}) \Rightarrow x=(2k+1)\pi+\frac{\pi}{6} \end{cases}$$

آقای  به این سوال پاسخ دهید.

مثال معادله $\sin x=\frac{1}{2}$ را حل کنید و ریشه‌های آن را در بازهٔ $[-2\pi, 2\pi]$ بیابید.

ای خدا! بازم نوبت من شد، آقا سؤال فضایی داد! اون بازه چی میگه دیگه؟

شما معادله را حل کنید، من بازه را توضیح می‌دهم.

آقا می‌دونیم $\sin\frac{\pi}{6}$ برابر $\frac{1}{2}$ است؛ پس: $\sin x=\frac{1}{2} \Rightarrow \sin x=\sin\frac{\pi}{6}$

درنتیجه ریشه‌های معادلهٔ $x=2k\pi+\frac{\pi}{6}$ و $x=(2k+1)\pi-\frac{\pi}{6}$ می‌شه.

تا اینجای راه‌حل را درست حل کردی. الان می‌خواهیم بدانیم چند تا از این ریشه‌ها در بازهٔ $[-2\pi, 2\pi]$ قرار دارند. به k عدد می‌دهیم و x هایی را که در این بازه قرار می‌گیرند، پیدا می‌کنیم.

مثلاً در معادله $x=2k\pi+\frac{\pi}{6}$ به‌جای k، اعداد صحیح $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ را قرار می‌دهیم:

k	$\cdots$	-2	-1	0	1	2	$\cdots$
x	$\cdots$	$-4\pi+\frac{\pi}{6}$	$-2\pi+\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$	$2\pi+\frac{\pi}{6}$	$4\pi+\frac{\pi}{6}$	$\cdots$

می‌بینید که از بین بی‌شمار x به‌دست آمده، فقط $x=\frac{\pi}{6}$ و $x=-2\pi+\frac{\pi}{6}$ در بازهٔ $[-2\pi, 2\pi]$ قرار دارند.

در معادله $x=(2k+1)\pi-\frac{\pi}{6}$ نیز به همین روش عمل می‌کنیم:

k	$\cdots$	-2	-1	0	1	2	$\cdots$
x	$\cdots$	$-3\pi-\frac{\pi}{6}$	$-\pi-\frac{\pi}{6}$	$\pi-\frac{\pi}{6}$	$3\pi-\frac{\pi}{6}$	$5\pi-\frac{\pi}{6}$	$\cdots$

در این جدول نیز فقط دو ریشهٔ $\{-\pi-\frac{\pi}{6}, \pi-\frac{\pi}{6}\}$ در بازهٔ $[-2\pi, 2\pi]$ قرار دارند.

روی هم‌رفته معادله در بازهٔ $[-2\pi, 2\pi]$ چهار ریشه دارد.

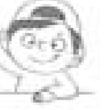
دقت کنید k یک عدد دلخواه صحیح است. کافی است به‌ازای آن، x در بازهٔ $[-2\pi, 2\pi]$ قرار بگیرد.

مثال جواب کلی معادله $2\sin(3x-\frac{\pi}{6})-\sqrt{2}=0$ را بیابید.

ابتدا مقدار سینوس را پیدا می‌کنیم: $2\sin(3x-\frac{\pi}{6})=\sqrt{2} \Rightarrow \sin(3x-\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin(3x-\frac{\pi}{6})=\sin\frac{\pi}{4}$

در معادلات $x=2k\pi+\alpha$ و $x=(2k+1)\pi-\alpha$ به‌جای α مقدار $\frac{\pi}{4}$ و به‌جای x عبارت $3x-\frac{\pi}{6}$ را قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} 3x-\frac{\pi}{6}=2k\pi+\frac{\pi}{4} \Rightarrow 3x=2k\pi+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6} \Rightarrow 3x=2k\pi+\frac{5\pi}{12} \Rightarrow x=\frac{2k\pi}{3}+\frac{5\pi}{36} \\ 3x-\frac{\pi}{6}=(2k+1)\pi-\frac{\pi}{4} \Rightarrow 3x=(2k+1)\pi-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6} \Rightarrow 3x=(2k+1)\pi-\frac{\pi}{12} \Rightarrow x=\frac{(2k+1)\pi}{3}-\frac{\pi}{36} \end{cases}$$



پس لازم نیست حتماً داخل سینوس x باشه. می‌تونه هر چیزی مثل $2x-\frac{\pi}{6}$ باشه؟

بله، اگر کمان سینوس، چیزی جز x باشد، در معادلات $x=2k\pi+\alpha$ و $x=(2k+1)\pi-\alpha$ آن را به‌جای x قرار می‌دهیم و معادله را تا حد امکان ساده می‌کنیم.

تست آموزشی: جواب کلی معادلهٔ $\sin 4x - \sin 2x = 0$ کدام است؟

۱) $\begin{cases} x = 2k\pi \\ x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \end{cases}$ ۲) $x = k\pi$ ۳) $\begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{(2k+1)\pi}{6} \end{cases}$ ۴) $x = \frac{(2k+1)\pi}{6}$

ابتدا $\sin 2x$ را به سمت راست معادله انتقال می‌دهیم: $\sin 4x = \sin 2x$

می‌دانیم ریشه‌های معادله $\sin x = \sin\alpha$ برابر $x = 2k\pi + \alpha$ و $x = (2k+1)\pi - \alpha$ است.

در سمت راست این معادله $2x$ را مانند α فرض می‌کنیم و با آن رفتاری مشابه α می‌کنیم: $\sin 4x = \sin \underbrace{2x}_{\alpha}$

مطابق فرمول ریشه‌های سینوس داریم:

$$\begin{cases} 4x = 2k\pi + 2x \Rightarrow 4x - 2x = 2k\pi \Rightarrow 2x = 2k\pi \Rightarrow x = k\pi \\ 4x = (2k+1)\pi - 2x \Rightarrow 4x + 2x = (2k+1)\pi \Rightarrow 6x = (2k+1)\pi \Rightarrow x = \frac{(2k+1)\pi}{6} \end{cases}$$

تست آموزشی: جواب کلی معادله $2\sin^2 x - 1 = 0$ کدام است؟

۱) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ ۲) $k\pi + \frac{\pi}{4}$ ۳) $k\pi - \frac{\pi}{4}$ ۴) $2k\pi + \frac{\pi}{4}$

برای حل این معادلهٔ مثلثاتی باید از پَس حل یک معادله درجه دوم بربیاییم:

$$2\sin^2 x - 1 = 0 \Rightarrow 2\sin^2 x = 1 \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} \Rightarrow \sin x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

با گویا کردن مخرج کسر $\frac{1}{\sqrt{2}}$ به‌صورت $\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ معادله به شکل روبه‌رو درمی‌آید: $\sin x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

درواقع باید ۲ معادلهٔ $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ را حل کنیم.

بقیه تست را شما حل کنید.

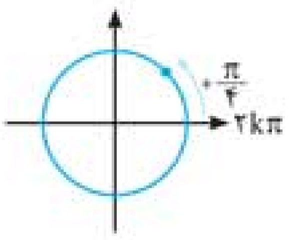
چشم آقا، معادلهٔ $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ رو به‌صورت $\sin x = \sin\frac{\pi}{4}$ می‌نویسیم و x رو پیدا می‌کنیم: $\begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{4} \end{cases}$

برای حل معادلهٔ $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ اول اون‌رو به‌صورت $\sin x = -\sin\frac{\pi}{4}$ می‌نویسیم، بعد منفی رو به کمان سینوس منتقل می‌کنیم:

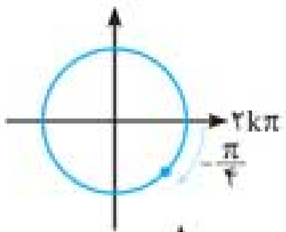
$$\sin x = \sin(-\frac{\pi}{4}) \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + (-\frac{\pi}{4}) \\ x = (2k+1)\pi - (-\frac{\pi}{4}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{4} \\ x = (2k+1)\pi + \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

چرا هیچ‌کدوم از این‌ها تو گزینه‌ها نیست؟

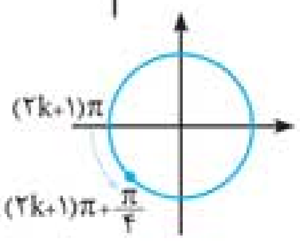
بیایید $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ و $x = (2k+1)\pi \pm \frac{\pi}{4}$ را روی دایره مثلثاتی نشان دهیم.



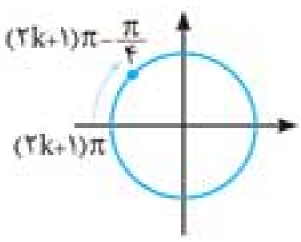
$2k\pi + \frac{\pi}{4}$ به اندازه $\frac{\pi}{4}$ از $2k\pi$ بیشتر است.



$2k\pi - \frac{\pi}{4}$ به اندازه $\frac{\pi}{4}$ از $2k\pi$ کمتر است.

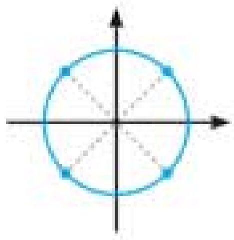


$(2k+1)\pi + \frac{\pi}{4}$ به اندازه $\frac{\pi}{4}$ از $(2k+1)\pi$ بیشتر است.

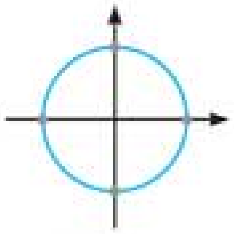


$(2k+1)\pi - \frac{\pi}{4}$ به اندازه $\frac{\pi}{4}$ از $(2k+1)\pi$ کمتر است.

اگر این چهار نقطه را با هم روی یک دایره بیاوریم به شکل زیر درمی‌آید:



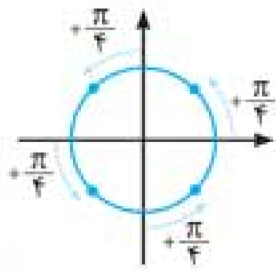
حال می‌خواهم مجموعه نقاط $x=\frac{k\pi}{2}$ را روی دایره نمایش دهم.



اگر به k اعداد صحیح دلخواه بدهیم، x به‌صورت $\{\dots,-2\pi,-\frac{3\pi}{2},-\pi,-\frac{\pi}{2},0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2},2\pi,\dots\}$ درمی‌آید.

این نقاط را بر روی دایره مثلثاتی منتقل می‌کنیم.

حال اگر این نقاط را به اندازه $+\frac{\pi}{4}$ حرکت دهیم، به این‌صورت درمی‌آید:



این نقاط با چهار نقطهٔ به‌دست آمده از حل معادله $2\sin^2 x-1=0$ برابرند، پس می‌توان گفت اجتماع ریشه‌های $x=2k\pi\pm\frac{\pi}{4}$ و $x=(2k+1)\pi\pm\frac{\pi}{4}$ برابر $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$ است.

آقا مُردیم! چقدر سخت بود!

این یک‌بار را با شما موافقم. متأسفانه در تست‌های کنکور گاهی چنین گزینه‌هایی مطرح می‌شوند که باعث سردرگم شدن داوطلبان می‌شود.

برویم سروقت یک سؤال خاص.

حالا خودت مثال بعدی را حل کن.

معادلات خاص سینوسی

مثال **معادله $\sin x=1$ را حل کنید.**

آقا بعد اون همه سؤال‌های سخت این چیه؟ اصلاً به من برخورد!

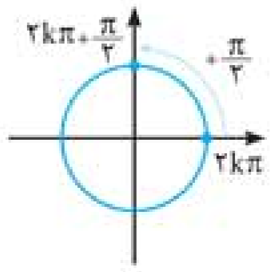
به کجا چنین شتابان ای مرد جوان! این مثال نکته‌ای دارد که تا به حال ندیده‌اید.

باشه پس بسم ا...

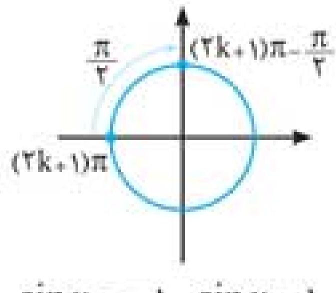
$$\sin x=1\Rightarrow \sin x=\sin\frac{\pi}{2}\Rightarrow\begin{cases}x=2k\pi+\frac{\pi}{2}\\ x=(2k+1)\pi-\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

تمام!

حالا این نقاط را روی دایره مثلثاتی نشان بده!



$x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$ به اندازه $\frac{\pi}{2}$ بیشتر از $2k\pi$ است.



$x=(2k+1)\pi-\frac{\pi}{2}$ به اندازه $\frac{\pi}{2}$ کمتر از $(2k+1)\pi$ است.

اوه! اوه! آقا این دو تا نقطه که افتادن روی هم!

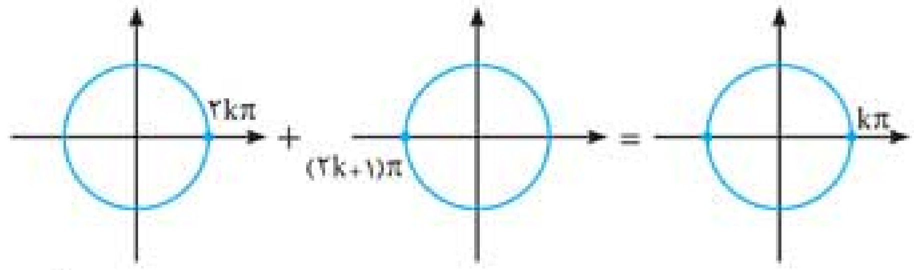
بله، دقیقاً! برخی از معادلات مثلثاتی به این صورت هستند. به این گونه معادلات، معادله‌های خاص مثلثاتی می‌گوییم که به‌ترتیب $\sin x=1$، $\sin x=-1$ و $\sin x=0$ هستند.

راجع‌به معادلهٔ $\sin x=0$ با شکل توضیح می‌دهم.

اگر این معادله را به‌صورت کلی و به کمک $x=2k\pi+\alpha$ و $x=(2k+1)\pi-\alpha$ حل کنیم، داریم:

$$\sin x=\sin 0\Rightarrow\begin{cases}x=2k\pi+0=2k\pi\\ x=(2k+1)\pi-0=(2k+1)\pi\end{cases}$$

اگر $x = 2k\pi$ (مضارب زوج π) و $x = (2k+1)\pi$ (مضارب فرد π) را روی دایره مثلثاتی نمایش دهیم به شکل زیر می‌رسیم:



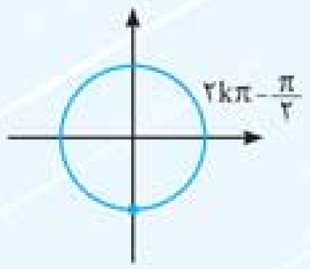
حواست باشه اگر مضارب زوج و فرد π را کنار هم قرار دهیم تبدیل به همه مضارب π یعنی $k\pi$ می‌شود.

پس شکل رسم‌شده نشان‌دهنده $x = k\pi$ است و می‌توان پاسخ معادله $\sin x = 0$ را $x = k\pi$ دانست.

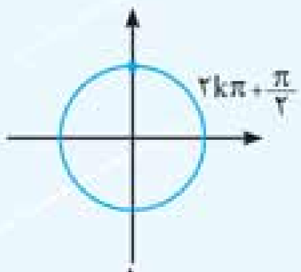
به‌طورکلی ریشه‌های معادله‌های خاص سینوس به صورت زیر است:

مهم

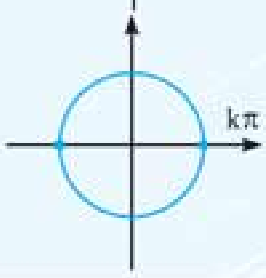
$\sin x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$



$\sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$



$\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi$



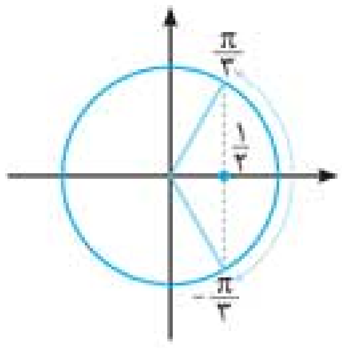
آقا نمی‌شه این‌ها رو حفظ نکنیم و همه رو به روش $x = 2k\pi + \alpha$ و $x = (2k+1)\pi - \alpha$ پیدا کنیم؟

نه! در معادلات مثلثاتی معمولاً معادلات خاص بیشتر از معادلات دیگر ظاهر می‌شوند، پس باید این موارد را حفظ کنید. البته توصیه می‌کنم شکل آن‌ها را روی دایره مثلثاتی به‌خاطر بسپارید.

فکر می‌کنم به اندازه کافی راجع به ریشه‌های معادله $\sin x = \sin\alpha$ صحبت کردیم. حالا بهتر است راجع‌به ریشه‌های معادله $\cos x = \cos\alpha$ بحث کنیم.

فرم کلی به‌دست آوردن ریشه‌های معادلات شامل توابع کسینوسی

فرض کنید می‌خواهیم ریشه‌های معادله $\cos x = \frac{1}{2}$ را بیابیم. در دایره مثلثاتی روی محور کسینوس‌ها به اندازه $\frac{1}{2}$ جدا می‌کنیم و زاویه‌هایی را که کسینوس آن‌ها $\frac{1}{2}$ است، می‌یابیم:



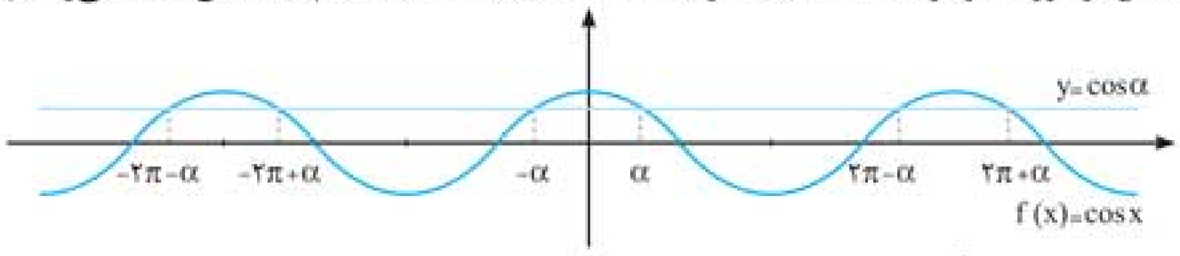
کسینوس زاویه‌های $\frac{\pi}{3}$ و $-\frac{\pi}{3}$ برابر $\frac{1}{2}$ است.

همهٔ زاویه‌های هم‌انتها با $\frac{\pi}{3}$ و $-\frac{\pi}{3}$ برابر $2k\pi + \frac{\pi}{3}$ و $2k\pi - \frac{\pi}{3}$ هستند.

می‌توان جواب معادلهٔ $\cos x = \cos\frac{\pi}{3}$ را به‌صورت $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ نوشت.

بنابراین ریشه‌های معادلهٔ $\cos x = \cos\alpha$ به‌صورت $x = 2k\pi \pm \alpha$ است.

اگر به‌صورت نموداری هم محل برخورد نمودار $f(x) = \cos x$ را با خط ثابت $y = \cos\alpha$ بیابیم به همین نقاط می‌رسیم:



همان‌طورکه می‌بینید نقاط برخورد $x = 2k\pi \pm \alpha$ است.

مثال **جواب معادلهٔ $2\cos x + 1 = 0$ را بیابید.**

برید کنار قاتل سؤال‌های ریاضی اومد. کدوم سؤال آقا! این! این که خیلی آسونه!

کسینوس رو تنها می‌کنیم:

$$2\cos x + 1 = 0 \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2}$$

خوب کسینوس $\frac{\pi}{6}$ برابر $\frac{1}{2}$ است، پس حتماً کسینوس $-\frac{\pi}{6}$ برابر $-\frac{1}{2}$ می‌شه!

استاد داره اشتباه میگه! کسینوس $-\frac{\pi}{6}$ برابر $\frac{1}{2}$ می‌شه، چون کسینوس تنها تابع مثلثاتی منفی خواره! یعنی $\cos\frac{\pi}{6}$ با $\cos-\frac{\pi}{6}$ فرقی نداره.

درست میگی، کسینوس چه زاویه‌ای برابر $\frac{1}{2}$ است؟

فکر می‌کنم کسینوس مکمل $\frac{\pi}{3}$ برابر $-\frac{1}{2}$ بشه، یعنی $\cos(\pi-\frac{\pi}{3})=-\frac{1}{2}$ است.

بله، ریشه‌های معادلهٔ $\cos x=-\frac{1}{2}$ برابر $x=2k\pi\pm(\pi-\frac{\pi}{3})$ یا همان $x=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}$ است.

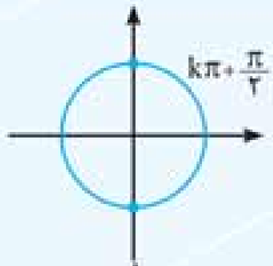
معادلات خاص کسینوسی

معادله‌های $\cos x=1$، $\cos x=-1$ و $\cos x=0$ را معادلات خاص کسینوسی می‌نامند.

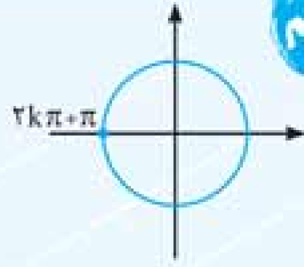
به جواب‌های این معادله‌ها توجه کنید.

مهم

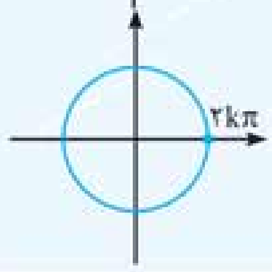
$\cos x=0 \Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{2}$



$\cos x=-1 \Rightarrow x=2k\pi+\pi$



$\cos x=1 \Rightarrow x=2k\pi$



تست آموزشی: جواب کلی معادلهٔ $\cos 2x-5\cos x+3=0$ کدام است؟

۱) $2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$ ۲) $2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}$ ۳) $k\pi\pm\frac{\pi}{3}$ ۴) $k\pi\pm\frac{\pi}{6}$

باید $\cos 2x$ را به $\cos x$ تبدیل کنیم، یعنی کمانش را نصف کنیم. تخصص فرمول طلایی، نصف کردن کمان است.

آقا فرمول طلایی کدوم بود یادم رفت.

به فرمول‌های $\cos 2x=2\cos^2 x-1$ و $\cos 2x=1-2\sin^2 x$ فرمول‌های طلایی می‌گوییم.

آقا اصلاً چرا به این فرمول‌ها، طلایی میگن؟

چون در این فرمول‌ها، عبارت‌های $2\cos^2 x-1$ یا $1-2\sin^2 x$ که از درجه۲ هستند به $\cos 2x$ که درجه۱ است، تبدیل می‌شوند. در ریاضیات شکستن توان۲ و تبدیل آن به توان۱ کار بسیار مهمی است، از این‌رو این فرمول‌ها به طلایی شهرت یافته است.

برویم سراغ حل سؤال، به‌جای $\cos 2x$ در معادله، مقدار $2\cos^2 x-1$ را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\cos 2x-5\cos x+3=0 \Rightarrow (2\cos^2 x-1)-5\cos x+3=0 \Rightarrow 2\cos^2 x-5\cos x+2=0$$

به یک معادلهٔ درجه دوم کسینوسی رسیدیم. با استفاده از روش Δ ریشه‌های معادله را پیدا می‌کنیم:

$$a=2,\ b=-5,\ c=2 \Rightarrow \Delta=b^2-4ac=25-16=9 \Rightarrow \cos x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{9}}{2(2)}=\frac{5\pm3}{4}=2,\ \frac{1}{2}$$

کسینوس نمی‌تواند برابر ۲ شود، پس $\cos x=\frac{1}{2}$ و جواب این معادله $x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$ است.

تست آموزشی: جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $2\cos 2x=\cot x(4\sin x+\tan x)$ کدام است؟

۱) $k\pi-\frac{\pi}{3}$ ۲) $k\pi\pm\frac{\pi}{3}$ ۳) $2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}$ ۴) $2k\pi\pm\frac{\pi}{6}$

ابتدا کتانژانت را به‌صورت $\frac{\cos x}{\sin x}$ و تانژانت را به‌صورت $\frac{\sin x}{\cos x}$ می‌نویسیم:

$$2\cos 2x=\frac{\cos x}{\sin x}(4\sin x+\frac{\sin x}{\cos x})$$

اگر $\frac{\cos x}{\sin x}$ را در عبارت‌های داخل پرانتز ضرب کنیم، معادله به‌صورت روبه‌رو درمی‌آید:

$$2\cos 2x=4\cos x+1$$

حالا به‌جای $\cos 2x$، فرمول طلایی $2\cos^2 x-1$ را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$2(2\cos^2 x-1)=4\cos x+1 \Rightarrow 4\cos^2 x-2=4\cos x+1$$

همهٔ جمله‌ها را به سمت چپ می‌بریم: $4\cos^2 x - 4\cos x - 3 = 0$

از روش دلتا، ریشه‌های معادله را پیدا می‌کنیم: $\cos x = \frac{-(-4)\pm\sqrt{64}}{2(4)} = \frac{4\pm 8}{8} = -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$

$\frac{3}{2}$ نمی‌تواند حاصل کسینوس باشد، پس: $\cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$

تست آموزشی: معادلهٔ $\sin 2x = 2\sin x$ در فاصلهٔ $(0, 2\pi)$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۵ ۳) ۳ ۴) ۲

آقا اول۲ رو با۲ می‌زنیم: $\sin 2x = 2\sin x$

نه! نه! خدایا صبر جزیل عطا بفرما! عدد۲ در سمت چپ جزئی از کمان سینوس است و نمی‌توان آن را با۲ سمت راست ساده نمود.

ای بابا! من فکر می‌کردم عدد، عدده دیگه! چه فرقی دارن خُب، ساده‌شون می‌کنیم. چه جالب! این هم به دریای علم بی‌کرانم اضافه شد.

پس مجبوریم به‌جای $\sin 2x$ بنویسیم $2\sin x\cos x$ و $2\sin x$ در سمت راست رو هم بیاریم سمت چپ؛ یعنی:

$$\sin 2x - 2\sin x = 0 \Rightarrow 2\sin x\cos x - 2\sin x = 0$$

حالا از $2\sin x$ فاکتور می‌گیریم:

$$2\sin x(\cos x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \\ \cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi \end{cases}$$

برای پیدا کردن xهای بین صفر و 2π، شروع می‌کنیم به‌جای k اعداد صحیح قرار می‌دهیم:

k	-1	0	1	2
$k\pi$	$-\pi$	0	π	2π

از این مجموعه نقاط فقط $x = \pi$ در بازهٔ $(0, 2\pi)$ قرار دارد.

k	-1	0	1	2
$2k\pi$	-2π	0	2π	4π

از این مجموعه نقاط، هیچ مقداری در بازه $(0, 2\pi)$ قرار ندارد، پس در کل این معادله در بازه $(0, 2\pi)$ فقط یک ریشه دارد.

تست آموزشی: جواب کلی معادله $2\cos^2 x + 2\sin x\cos x = 1$ کدام است؟

۱) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$ ۲) $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$ ۳) $k\pi + \frac{\pi}{8}$ ۴) $k\pi - \frac{\pi}{4}$

ابتدا به‌جای $2\sin x\cos x$ عبارت $\sin 2x$ را جای‌گذاری می‌کنیم و بعد عدد۱ را به سمت چپ مساوی، کنار $2\cos^2 x$ انتقال می‌دهیم:

$$2\cos^2 x - 1 + \sin 2x = 0$$

$2\cos^2 x - 1$ فرمول طلایی است، پس به‌جای آن $\cos 2x$ را قرار می‌دهیم: $\cos 2x + \sin 2x = 0 \Rightarrow \cos 2x = -\sin 2x \Rightarrow \cos 2x = \sin(-2x)$

در این گونه معادله‌ها بهتر است با کمک فرمول $\sin\alpha = \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)$ هر دو طرف تساوی را به کسینوس تبدیل کنیم:

$$\cos 2x = \sin(-2x) \Rightarrow \cos 2x = \cos(\frac{\pi}{2} - (-2x)) \Rightarrow \cos 2x = \cos(\frac{\pi}{2} + 2x)$$

حال فرض می‌کنیم $2x + \frac{\pi}{2}$ برابر α است و آن را در فرمول $x = 2k\pi \pm \alpha$ جای‌گذاری می‌کنیم:

$$2x = 2k\pi \pm (\frac{\pi}{2} + 2x) \Rightarrow \begin{cases} \cancel{2x} = 2k\pi + \frac{\pi}{2} + \cancel{2x} \Rightarrow 0 = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \quad \text{غیرقابل قبول} \\ 2x = 2k\pi - (\frac{\pi}{2} + 2x) \Rightarrow 4x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8} \end{cases}$$

تست آموزشی: اگر جواب معادلهٔ مثلثاتی $2\cos^3 x = \cos x$ به‌صورت $x = k\pi + \frac{i\pi}{4}$ باشد، مجموعه مقادیر i کدام است؟

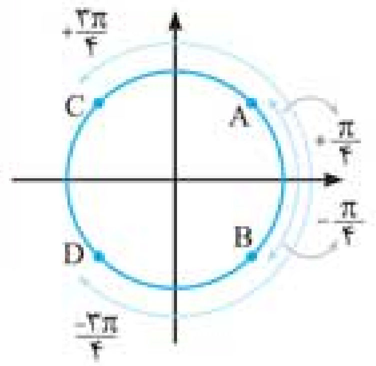
۱) $\{0, 1, 2\}$ ۲) $\{1, 2\}$ ۳) $\{1, 2, 3\}$ ۴) $\{0, 1\}$

کسینوس رو به سمت چپ می‌بریم و ازش فاکتور می‌گیریم: $2\cos^3 x - \cos x = 0 \Rightarrow \cos x(2\cos^2 x - 1) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} = k\pi + \frac{2\pi}{4} \\ \cos^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4} \\ \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{3\pi}{4} \end{cases} \end{cases}$$

آقا چرا این‌ها $۲k\pi$ هستن؟ درحالی‌که قراره $k\pi+\frac{i\pi}{۴}$ باشن؟

نقاط معادل ریشه‌های $x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۴}$ و $x=۲k\pi\pm\frac{۳\pi}{۴}$ را روی دایرهٔ مثلثاتی رسم کنید.



حالا دقت کن که می‌توان نقطه‌های A و D را $k\pi+\frac{\pi}{۴}$ و نقطه‌های C و B را $k\pi+\frac{۳\pi}{۴}$ درنظرگرفت، پس در مجموع ریشه‌های این معادله $x=k\pi+\frac{\pi}{۴}$، $x=k\pi+\frac{۲\pi}{۴}$ و $x=k\pi+\frac{۳\pi}{۴}$ هستند، پس i می‌تواند مجموعه اعداد $\{۱,۲,۳\}$ باشد.

فرمول ممنوع

اگه به i صفر بدیم $x=k\pi+\frac{۰\pi}{۴}$ می‌شه. به‌جای x تو معادله $k\pi$ میذاریم:

$$۲\cos^۳ k\pi=\cos k\pi$$

کسینوس به‌ازای $k\pi$، ۱ یا ۱− می‌شه که معلومه درست نیست:

$$\begin{cases}۲(۱)^۳=۱\\ ۲(-۱)^۳=-۱\end{cases}$$

پس i نمی‌تونه صفر شه و گزینه‌های «۱» و «۴» غلط هستند. فرق گزینه «۲» و «۳» فقط توی $i=۳$ است، پس به‌جای i، ۳ میذاریم:

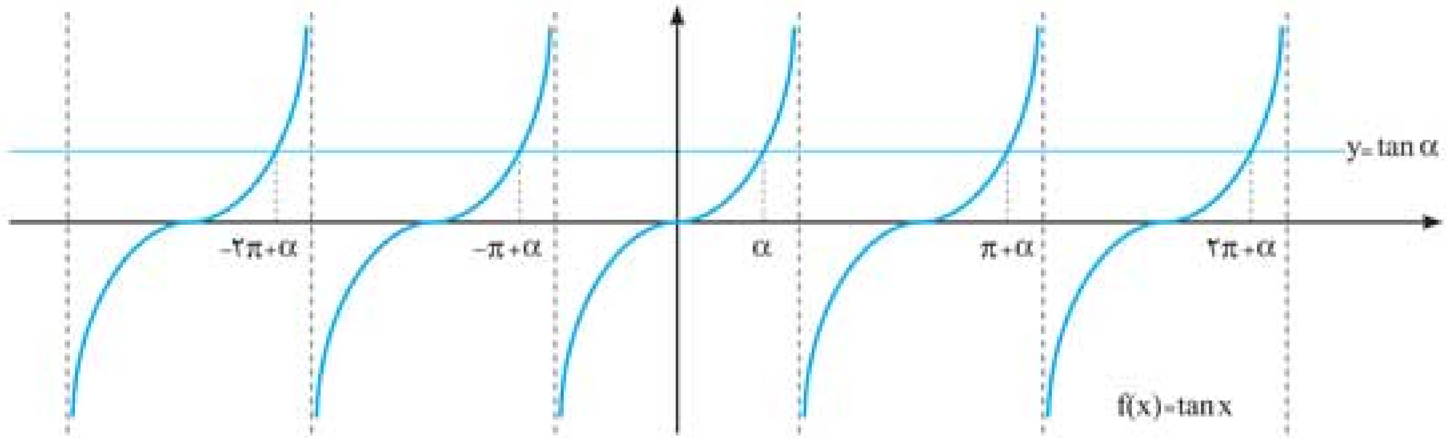
$$x=k\pi+\frac{۳\pi}{۴}\Rightarrow \cos x=-\frac{\sqrt{۲}}{۲} \text{ یا } \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

اگه این اعداد رو تو معادلهٔ $۲\cos^۳ x=\cos x$ جای‌گذاری کنیم، می‌شه $\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ یا $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ که درست هستش، پس گزینه «۳» درسته!

فرم کلی به‌دست آوردن ریشه‌های معادلات توابع تانژانتی (کتانژانتی)

می‌خواهم اشاره کوتاهی به جواب کلی معادله $\tan x=\tan\alpha$ کنم.

محل برخورد نمودار تابع $f(x)=\tan x$ و خط $y=\tan\alpha$ را می‌یابیم.



نقاط محل برخورد برابر $x=k\pi+\alpha$ است و می‌توان گفت جواب کلی معادله $\tan x=\tan\alpha$ برابر $x=k\pi+\alpha$ است. برای نمونه ریشه‌های معادله $\tan x=۱$ یا $\tan x=\tan\frac{\pi}{۴}$ برابر $x=k\pi+\frac{\pi}{۴}$ است.

مثال جواب کلی معادله $\tan x=-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ را بیابید.

زاویه‌ای که تانژانت آن برابر $-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ باشد، $-\frac{\pi}{۶}$ است، پس ریشه‌های معادله $\tan x=-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ یا $\tan x=\tan(-\frac{\pi}{۶})$ برابر $x=k\pi+(-\frac{\pi}{۶})$ است.

تست آموزشی: جواب‌های کلی معادلهٔ مثلثاتی $\frac{۱-\cos ۲x}{\sin ۲x}=\sqrt{۳}$ به کدام صورت است؟

۱) $۲k\pi+\frac{۵\pi}{۶}$ ۲) $۲k\pi+\frac{\pi}{۳}$ ۳) $k\pi+\frac{۵\pi}{۶}$ ۴) $k\pi+\frac{\pi}{۳}$

به‌جای $\cos ۲x$ مقدار $۱-۲\sin^۲ x$ و به‌جای $\sin ۲x$ مقدار $۲\sin x\cos x$ رو جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\frac{۱-\cos ۲x}{\sin ۲x}=\frac{۱-(۱-۲\sin^۲ x)}{۲\sin x\cos x}=\frac{۲\sin^۲ x}{۲\sin x\cos x}=\frac{\sin x}{\cos x}=\tan x=\sqrt{۳}$$

ازطرفی می‌دونیم تانژانت $\frac{\pi}{۳}$ برابر $\sqrt{۳}$ است، پس:

$$\tan x=\tan\frac{\pi}{۳}\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۳}$$

تست آموزشی: نقاط پایانی کمان، جواب‌های معادلهٔ $\frac{\sin x \cos x}{۱-\cos x}=۱+\cos x$ بر روی دایرهٔ مثلثاتی رأس‌های کدام چندضلعی است؟

۱) مربع　　۲) مستطیل　　۳) مثلث قائم‌الزاویه　　۴) مثلث متساوی‌الساقین

کسر را طرفین وسطین می‌کنیم:

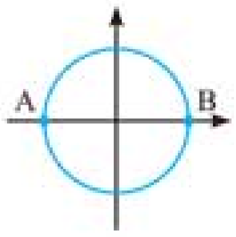
$$\sin x\cdot\cos x=۱-\cos^۲ x$$

می‌دانیم $۱-\cos^۲ x=\sin^۲ x$ است، پس:

$$\sin x\cdot\cos x=\sin^۲ x\Rightarrow \sin x\cdot\cos x-\sin^۲ x=۰\Rightarrow \sin x(\cos x-\sin x)=۰$$

یا $\sin x=۰$ یا $\sin x=\cos x$ است.

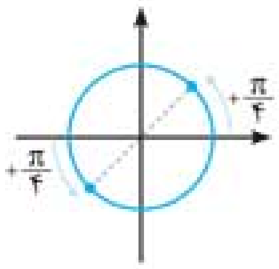
$$\sin x=۰\Rightarrow x=k\pi\Rightarrow$$



در نقطهٔ B مقدار کسینوس برابر ۱ است و به‌ازای آن مخرج کسر $\frac{\sin x\cos x}{۱-\cos x}$ صفر و کسر تعریف نشده می‌شود، بنابراین نقطه B از مجموعه جواب حذف می‌شود.

یکی از راه‌ها برای حل معادلهٔ $\sin x=\cos x$ تقسیم طرفین بر $\cos x$ است.

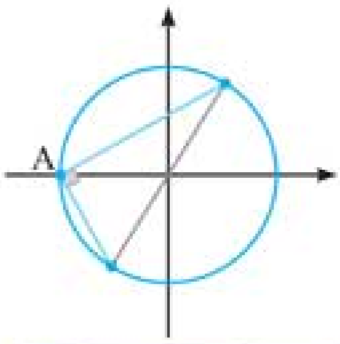
$$\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\cos x}{\cos x}\Rightarrow \tan x=۱\Rightarrow \tan x=\tan\frac{\pi}{۴}\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۴}$$



برای رسم این نقاط باید نقاط $k\pi$ را به اندازه $+\frac{\pi}{۴}$ دوران دهیم.

اگر نقطهٔ A را با مجموعه نقاط اخیر با هم بر روی یک دایره رسم کنیم، مثلثی قائم‌الزاویه خواهیم داشت.

دلیل قائم‌الزاویه بودن این است که نقطهٔ A رو به قطر دایره است.



لُب کلام

۱) $\sin x=\sin\alpha\Rightarrow x=۲k\pi+\alpha, x=(۲k+۱)\pi-\alpha$

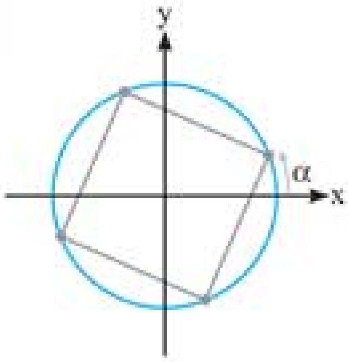
۲) $\begin{cases}\sin x=۱\Rightarrow x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}\\ \sin x=-۱\Rightarrow x=۲k\pi-\frac{\pi}{۲}\\ \sin x=۰\Rightarrow x=k\pi\end{cases}$

۳) $\cos x=\cos\alpha\Rightarrow x=۲k\pi\pm\alpha$

۴) $\begin{cases}\cos x=۱\Rightarrow x=۲k\pi\\ \cos x=-۱\Rightarrow x=۲k\pi+\pi\\ \cos x=۰\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۲}\end{cases}$

۵) $\tan x=\tan\alpha\Rightarrow x=k\pi+\alpha$

سؤالات تستی

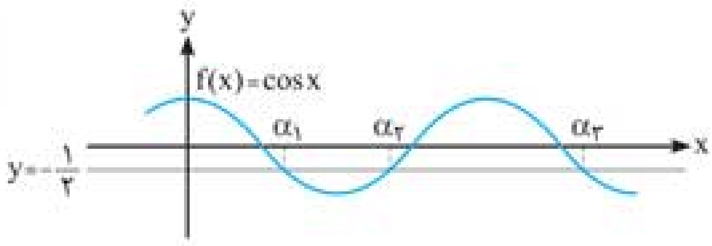


۱۲۹. نقاط تعیین شده روی دایرهٔ مثلثاتی را به شرطی که این نقاط رئوس یک مربع باشند، چگونه می‌توان نشان داد؟

۱) $k\pi+\alpha$ ۲) $\frac{k\pi}{۲}+\alpha$

۳) $k\pi-\alpha$ ۴) $\frac{k\pi}{۲}-\alpha$

۱۳۰. در شکل مقابل $\alpha_۱$، $\alpha_۲$ و... را چگونه می‌توانیم نشان دهیم؟ (مشابه تمرین کتاب درسی)



۱) $k\pi+\frac{\pi}{۳}$

۲) $k\pi-\frac{\pi}{۳}$

۳) $۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳}$

۴) $۲k\pi\pm\frac{۲\pi}{۳}$

۱۳۱. جواب کلی معادلهٔ $\cos x-\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۰$ کدام است؟ (مشابه تمرین کتاب درسی)

۱) $۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳}$ ۲) $۲k\pi\pm\frac{\pi}{۶}$ ۳) $k\pi\pm\frac{\pi}{۳}$ ۴) $k\pi\pm\frac{\pi}{۶}$

۱۳۲. جواب کلی معادلهٔ $۲\cos x+\sqrt{۳}=۰$ کدام است؟ (مشابه تمرین کتاب درسی)

۱) $۲k\pi\pm\frac{\pi}{۶}$ ۲) $۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳}$ ۳) $۲k\pi\pm\frac{۲\pi}{۳}$ ۴) $۲k\pi\pm\frac{۵\pi}{۶}$

۱۳۳. جواب کلی معادلهٔ $\sin ۵x+\sin ۲x=۰$ کدام است؟

۱) $\begin{cases}x=\frac{۲k\pi}{۵}\\x=\frac{۲k\pi}{۷}\end{cases}$ ۲) $\begin{cases}x=\frac{(۲k+۱)\pi}{۵}\\x=\frac{۲k\pi}{۷}\end{cases}$ ۳) $\begin{cases}x=\frac{(۲k+۱)\pi}{۳}\\x=\frac{۲k\pi}{۷}\end{cases}$ ۴) $\begin{cases}x=\frac{۲k\pi}{۳}\\x=\frac{۲k\pi}{۷}\end{cases}$

۱۳۴. جواب کلی معادلهٔ $\cos ۵x+\cos ۲x=۰$ کدام است؟

۱) $\begin{cases}x=\frac{۲k\pi}{۷}\\x=\frac{۲k\pi}{۳}\end{cases}$ ۲) $\begin{cases}x=\frac{۲k\pi}{۷}-\frac{\pi}{۳}\\x=\frac{۲k\pi}{۷}+\frac{\pi}{۷}\end{cases}$ ۳) $\begin{cases}x=\frac{۲k\pi}{۷}-\frac{\pi}{۷}\\x=\frac{۲k\pi}{۳}+\frac{\pi}{۳}\end{cases}$ ۴) $\begin{cases}x=\frac{۲k\pi}{۷}+\frac{\pi}{۷}\\x=\frac{۲k\pi}{۳}-\frac{\pi}{۳}\end{cases}$

۱۳۵. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $۲\cos^۲ x-\cos x-۳=۰$ کدام است؟ (مشابه تمرین کتاب درسی)

۱) $k\pi$ ۲) $۲k\pi+\pi$ ۳) $۲k\pi-\frac{\pi}{۲}$ ۴) $k\pi+\frac{\pi}{۲}$

۱۳۶. تمام جواب‌های معادلهٔ $\cos t(۲\cos t-۹)=۵$ کدام است؟

۱) $k\pi\pm\frac{\pi}{۳}$ ۲) $۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳}$ ۳) $۲k\pi\pm\frac{\pi}{۶}$ ۴) $۲k\pi\pm\frac{۲\pi}{۳}$

۱۳۷. جواب معادلهٔ $\cos^۲ x-۳\sin x+۳=۰$ کدام است؟

۱) $۲k\pi-\frac{\pi}{۲}$ ۲) $k\pi-\frac{\pi}{۲}$ ۳) $۲k\pi+\frac{\pi}{۲}$ ۴) $k\pi+\frac{\pi}{۲}$

۱۳۸. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $۲\sin^۲ x=۳\cos x$ به کدام صورت است؟

۱) $k\pi\pm\frac{\pi}{۶}$ ۲) $k\pi\pm\frac{\pi}{۳}$ ۳) $۲k\pi\pm\frac{\pi}{۶}$ ۴) $۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳}$

۱۳۹. جواب کلی معادلهٔ $\sin x(۱+\sin x)=\cos^۲ x$ کدام است؟

۱) $k\pi+\frac{\pi}{۶}$ ۲) $۲k\pi-\frac{\pi}{۲}$ ۳) $۲k\pi+\frac{\pi}{۲}$ ۴) $\frac{۲k\pi}{۳}+\frac{\pi}{۶}$

۱۴۰. جواب کلی معادلهٔ $\sin(\frac{5\pi}{2}+x)\cos(x-2\pi)=\sin^4\frac{5\pi}{4}$ کدام است؟

۱) $2k\pi\pm\frac{\pi}{6}$ ۲) $k\pi\pm\frac{\pi}{3}$ ۳) $k\pi+\frac{\pi}{12}$ ۴) $k\pi\pm\frac{\pi}{6}$

۱۴۱. جواب کلی معادلهٔ $2\sin^3x-\sin x=0$ کدام است؟

۱) $\begin{cases}x=k\pi+\frac{\pi}{4}\\x=k\pi\end{cases}$ ۲) $\begin{cases}x=2k\pi+\frac{\pi}{4}\\x=k\pi\end{cases}$ ۳) $\begin{cases}x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\\x=k\pi\end{cases}$ ۴) $\begin{cases}x=k\pi-\frac{\pi}{4}\\x=k\pi\end{cases}$

۱۴۲. مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\cos^3x=\cos x$ در بازهٔ $[0,2\pi]$ کدام است؟

۱) 2π ۲) 3π ۳) 5π ۴) 4π

۱۴۳. معادلهٔ $\cos^2x-\sin^2x=\cos\frac{x}{3}$ در بازهٔ $[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$ چند جواب متمایز دارد؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۴۴. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\sin^4x-\cos^4x=\sin\frac{11\pi}{2}$ کدام است؟

۱) $k\pi$ ۲) $2k\pi$ ۳) $(2k+1)\pi$ ۴) $\frac{(2k+1)\pi}{2}$

۱۴۵. جواب کلی معادلهٔ $\cos(x+\frac{\pi}{4}).\cos(x-\frac{\pi}{4})=\frac{1}{4}$ کدام است؟

۱) $k\pi\pm\frac{\pi}{6}$ ۲) $k\pi\pm\frac{\pi}{3}$ ۳) $2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$ ۴) $2k\pi\pm\frac{\pi}{6}$

۱۴۶. مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin x+\cos x+\sin x\cos x=-1$ در بازهٔ $[-\pi,\pi]$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) π ۳) $-\pi$ ۴) $-\frac{\pi}{2}$

۱۴۷. یکی از جواب‌های کلی معادلهٔ $1+\sin x+\cos x+\sin 2x+\cos 2x=0$ کدام است؟

۱) $2k\pi-\frac{\pi}{2}$ ۲) $2k\pi+\frac{\pi}{2}$ ۳) $2k\pi-\frac{2\pi}{3}$ ۴) $k\pi+\frac{\pi}{4}$

۱۴۸. نقاط انتهای کمان جواب‌های معادلهٔ $\frac{\tan x}{1-\cos x}=2+2\cos x$ بر روی دایرهٔ مثلثاتی، رأس‌های کدام چند ضلعی است؟

۱) مربع ۲) مستطیل ۳) مثلث قائم‌الزاویه ۴) مثلث متساوی‌الاضلاع

۱۴۹. مجموع ریشه‌های معادلهٔ $(3\sin x-2)(4\cos x+3)=0$ در بازهٔ $[0,2\pi]$ کدام است؟

۱) $\frac{5\pi}{2}$ ۲) 3π ۳) $\frac{7\pi}{12}$ ۴) 4π

۱۵۰. از به هم وصل کردن جواب‌های معادلهٔ $\sin kx-\sin^2x=\frac{1}{2}\cos 2x$ روی دایرهٔ مثلثاتی، یک چهارضلعی به‌وجود می‌آید. مقدار k کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۵۱. مجموع جواب‌های معادلهٔ $\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})+\sin 2x=1$ در بازهٔ $[0,2\pi]$ کدام است؟

۱) $\frac{5\pi}{2}$ ۲) 3π ۳) $\frac{3\pi}{2}$ ۴) 4π

۱۵۲. جواب کلی معادلهٔ $\tan^2x=3$ کدام است؟

۱) $2k\pi+\frac{\pi}{3}$ ۲) $2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$ ۳) $k\pi+\frac{\pi}{3}$ ۴) $k\pi\pm\frac{\pi}{3}$

۱۵۳. جواب‌های معادلهٔ $\sqrt{\sin x}=\sqrt{\cos x}$ کدام است؟

۱) $x=2k\pi+\frac{\pi}{4}$ ۲) $x=k\pi+\frac{\pi}{4}$ ۳) $x=2k\pi$ ۴) $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$

۱۵۴. اگر $\frac{\pi}{8}$ و $\frac{5\pi}{8}$ تنها جواب‌های معادلهٔ $a\cot x=2+\tan x$ در بازهٔ $(0,2\pi)$ باشند، مقدار a کدام است؟

۱) ۱ ۲) -1 ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{1}{2}$

۱۵۵. جواب کلی معادله مثلثاتی $\sin(\pi+x)\cos(\frac{\pi}{2}+x)-2\sin(\pi-x)+1=0$، کدام است؟ (تجربی ۹۰)

۱) $2k\pi-\frac{\pi}{2}$ ۲) $2k\pi+\frac{\pi}{6}$ ۳) $2k\pi+\frac{\pi}{2}$ ۴) $2k\pi\pm\frac{\pi}{2}$

۱۵۶. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $(\sin x-\tan x)\tan(\frac{3\pi}{2}-x)=\cos\frac{4\pi}{3}$، کدام است؟ (تجربی خارج ۹۰)

۱) $k\pi-\frac{\pi}{6}$ ۲) $k\pi+\frac{\pi}{3}$ ۳) $2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$ ۴) $2k\pi\pm\frac{\pi}{6}$

۱۵۷. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\sin^2 x-\cos^2 x=\sin(\frac{3\pi}{2}+x)$ به کدام صورت است؟ (تجربی ۹۱)

۱) $\frac{k\pi}{3}$ ۲) $\frac{2k\pi}{3}$ ۳) $2k\pi+\frac{\pi}{3}$ ۴) $2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}$

۱۵۸. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}=\sqrt{3}$ به کدام صورت است؟

۱) $\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{6}$ ۲) $\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{6}$ ۳) $k\pi+\frac{\pi}{6}$ ۴) $k\pi-\frac{\pi}{6}$

۱۵۹. نمودار تابع $y=3\sin(\frac{\pi}{4}-2x)$، روی بازهٔ $[-\pi,\frac{3\pi}{2}]$ در چند نقطه محور xها را قطع می‌کند؟ (تجربی خارج ۹۱)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۶۰. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\sin^4 x-\cos^4 x=\sin^2\frac{5\pi}{4}$، به کدام صورت است؟ (تجربی ۹۲)

۱) $2k\pi\pm\frac{\pi}{6}$ ۲) $2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$ ۳) $k\pi\pm\frac{\pi}{6}$ ۴) $k\pi\pm\frac{\pi}{3}$

۱۶۱. مجموع تمام جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin 5x+\sin 4x=1+\cos\pi$ در بازهٔ $[0,2\pi]$ کدام است؟ (تجربی خارج ۹۲)

۱) 8π ۲) 9π ۳) 10π ۴) 11π

۱۶۲. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\frac{\sin 3x}{\cos(\frac{3\pi}{2}+x)}=1$، به کدام صورت است؟ (تجربی خارج ۹۳)

۱) $k\pi+\frac{\pi}{4}$ ۲) $2k\pi\pm\frac{\pi}{4}$ ۳) $2k\pi\pm\frac{3\pi}{4}$ ۴) $\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$

۱۶۳. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $2\cos^2 x+2\sin x\cos x=1$، به کدام صورت است؟ (تجربی ۹۴)

۱) $\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{8}$ ۲) $\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8}$ ۳) $k\pi-\frac{\pi}{8}$ ۴) $k\pi+\frac{\pi}{8}$

۱۶۴. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\cos 3x+\cos x=0$ با شرط $\cos x\neq 0$ کدام است؟ (تجربی خارج ۹۳)

۱) $\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$ ۲) $\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8}$ ۳) $k\pi-\frac{\pi}{4}$ ۴) $k\pi+\frac{\pi}{4}$

۱۶۵. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $2\sin^2 x+3\cos x=0$ کدام است؟ (تجربی ۹۵)

۱) $2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}$ ۲) $2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$ ۳) $2k\pi\pm\frac{5\pi}{6}$ ۴) $k\pi-\frac{\pi}{3}$

۱۶۶. اگر $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1}{2}$ باشد، مقدار $\tan(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2})$ کدام است؟ (تجربی خارج ۹۵)

۱) -2 ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۲

۱۶۷. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\cos 2x+2\cos^2 x=0$ کدام است؟ (تجربی ۹۶)

۱) $2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$ ۲) $2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}$ ۳) $k\pi\pm\frac{\pi}{3}$ ۴) $k\pi\pm\frac{\pi}{6}$

۱۶۸. مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin 2x+\cos(\frac{\pi}{2}-x)=0$، در بازهٔ $[0,2\pi]$ کدام است؟ (تجربی خارج ۹۶)

۱) $\frac{14\pi}{3}$ ۲) 4π ۳) $\frac{9\pi}{2}$ ۴) 5π

۱۶۹. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $2\cos 2x=\cot x(4\sin x+\tan x)$ کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۲)

۱) $k\pi-\frac{\pi}{3}$ ۲) $k\pi\pm\frac{\pi}{3}$ ۳) $2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}$ ۴) $2k\pi\pm\frac{\pi}{6}$

۱۷۰. مجموع تمام جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin 4x=\sin^4 x-\cos^4 x$، در بازهٔ $[0,\pi]$، برابر کدام است؟ (ریاضی ۹۵)

۱) $\frac{7\pi}{4}$ ۲) $\frac{9\pi}{4}$ ۳) $\frac{5\pi}{2}$ ۴) $\frac{11\pi}{3}$

۱۷۱. مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin(x+\frac{\pi}{8})+\cos(x-\frac{3\pi}{8})=1$، در بازهٔ $[0,2\pi]$ برابر کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۵)

۱) $\frac{3\pi}{4}$ ۲) $\frac{5\pi}{4}$ ۳) $\frac{3\pi}{2}$ ۴) $\frac{7\pi}{4}$

۱۷۲. جواب کلّی معادلهٔ مثلثاتی $\tan x\tan 3x=1$، کدام است؟ (تجربی ۹۷)

۱) $\frac{k\pi}{4}$ ۲) $\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8}$ ۳) $\frac{k\pi}{2}+\frac{3\pi}{8}$ ۴) $\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{8}$

پاسخ‌نامه کلیدی

۱.	۳	۳۶.	۱	۷۱.	۲	۱۰۶.	۴	۱۴۱.	۳
۲.	۳	۳۷.	۳	۷۲.	۳	۱۰۷.	۱	۱۴۲.	۳
۳.	۲	۳۸.	۱	۷۳.	۳	۱۰۸.	۳	۱۴۳.	۲
۴.	۱	۳۹.	۲	۷۴.	۳	۱۰۹.	۴	۱۴۴.	۱
۵.	۴	۴۰.	۳	۷۵.	۱	۱۱۰.	۲	۱۴۵.	۱
۶.	۴	۴۱.	۲	۷۶.	۳	۱۱۱.	۱	۱۴۶.	۴
۷.	۳	۴۲.	۳	۷۷.	۲	۱۱۲.	۴	۱۴۷.	۳
۸.	۲	۴۳.	۱	۷۸.	۳	۱۱۳.	۴	۱۴۸.	۳
۹.	۲	۴۴.	۱	۷۹.	۲	۱۱۴.	۴	۱۴۹.	۲
۱۰.	۳	۴۵.	۳	۸۰.	۲	۱۱۵.	۱	۱۵۰.	۲
۱۱.	۳	۴۶.	۳	۸۱.	۱	۱۱۶.	۳	۱۵۱.	۲
۱۲.	۳	۴۷.	۱	۸۲.	۲	۱۱۷.	۱	۱۵۲.	۴
۱۳.	۴	۴۸.	۲	۸۳.	۴	۱۱۸.	۳	۱۵۳.	۱
۱۴.	۴	۴۹.	۲	۸۴.	۱	۱۱۹.	۳	۱۵۴.	۲
۱۵.	۳	۵۰.	۲	۸۵.	۲	۱۲۰.	۱	۱۵۵.	۳
۱۶.	۱	۵۱.	۳	۸۶.	۱	۱۲۱.	۲	۱۵۶.	۳
۱۷.	۳	۵۲.	۲	۸۷.	۲	۱۲۲.	۴	۱۵۷.	۲
۱۸.	۱	۵۳.	۲	۸۸.	۳	۱۲۳.	۱	۱۵۸.	۲
۱۹.	۴	۵۴.	۲	۸۹.	۱	۱۲۴.	۳	۱۵۹.	۴
۲۰.	۳	۵۵.	۳	۹۰.	۲	۱۲۵.	۱	۱۶۰.	۴
۲۱.	۲	۵۶.	۱	۹۱.	۲	۱۲۶.	۱	۱۶۱.	۴
۲۲.	۱	۵۷.	۲	۹۲.	۲	۱۲۷.	۲	۱۶۲.	۴
۲۳.	۲	۵۸.	۴	۹۳.	۲	۱۲۸.	۴	۱۶۳.	۱
۲۴.	۴	۵۹.	۲	۹۴.	۳	۱۲۹.	۲	۱۶۴.	۱
۲۵.	۳	۶۰.	۱	۹۵.	۴	۱۳۰.	۴	۱۶۵.	۱
۲۶.	۴	۶۱.	۴	۹۶.	۳	۱۳۱.	۲	۱۶۶.	۱
۲۷.	۴	۶۲.	۳	۹۷.	۳	۱۳۲.	۴	۱۶۷.	۳
۲۸.	۴	۶۳.	۴	۹۸.	۳	۱۳۳.	۳	۱۶۸.	۴
۲۹.	۴	۶۴.	۳	۹۹.	۴	۱۳۴.	۴	۱۶۹.	۳
۳۰.	۲	۶۵.	۳	۱۰۰.	۴	۱۳۵.	۲	۱۷۰.	۳
۳۱.	۲	۶۶.	۱	۱۰۱.	۱	۱۳۶.	۴	۱۷۱.	۱
۳۲.	۲	۶۷.	۴	۱۰۲.	۲	۱۳۷.	۳	۱۷۲.	۲
۳۳.	۱	۶۸.	۴	۱۰۳.	۴	۱۳۸.	۴		
۳۴.	۳	۶۹.	۴	۱۰۴.	۴	۱۳۹.	۴		
۳۵.	۱	۷۰.	۲	۱۰۵.	۴	۱۴۰.	۲		

در سمت راست تساوی به‌جای $\cos^2 x$، عبارت $(1-\sin^2 x)$ را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\sin x = 1-\sin^2 x-\sin^2 x \Rightarrow 2\sin^2 x+\sin x-1=0$$

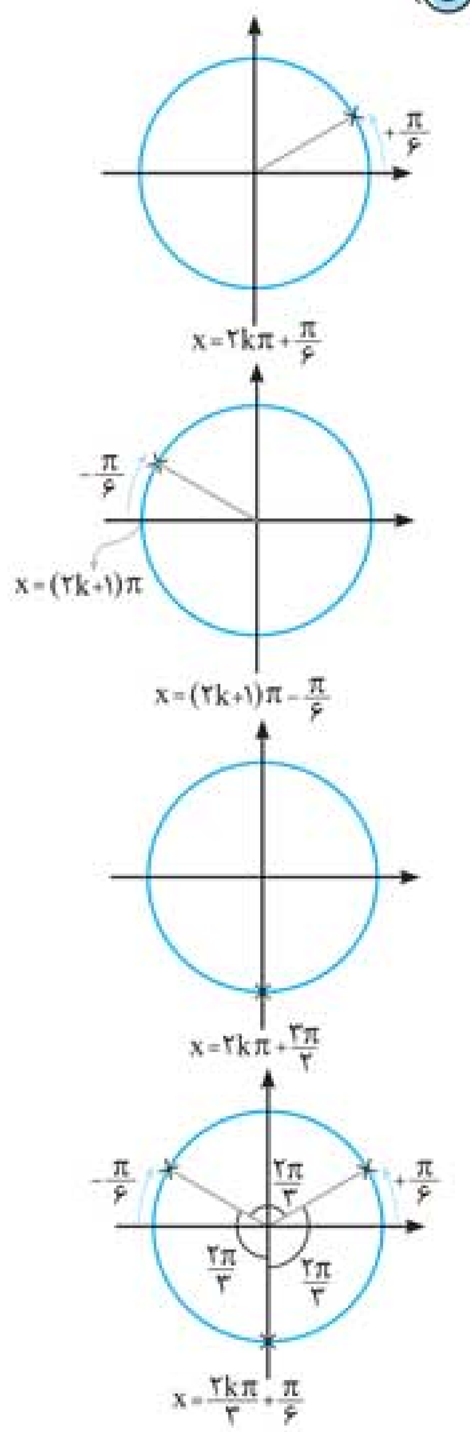
$\sin x$ را برابر t در نظر می‌گیریم، پس: $-1\le t\le 1$

$$2t^2+t-1=0 \Rightarrow \Delta = 1^2-4(2)(-1)=9$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_1=\frac{-1+\sqrt{9}}{4} \Rightarrow t_1=\frac{1}{2} \Rightarrow \sin x=\frac{1}{2} \Rightarrow \sin x=\sin\frac{\pi}{6} \quad (1) \\ t_2=\frac{-1-\sqrt{9}}{4} \Rightarrow t_2=-1 \Rightarrow \sin x=-1 \Rightarrow x=2k\pi+\frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(1)} \begin{cases} x=2k\pi+\frac{\pi}{6} \\ x=(2k+1)\pi-\frac{\pi}{6} \end{cases}$$

با توجه به دایره مثلثاتی بین جواب‌ها اجتماع می‌گیریم (جواب‌ها رو، روی هم می‌ریزیم)



در دایره آخر مشخص است که نقاط به اندازهٔ $\frac{2\pi}{3}$ با هم فاصله دارند، پس پاسخ فقط در گزینهٔ «۴» یعنی $x=\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{6}$ آمده است.

فرمول ممنوع برای تعیین جواب نهایی معادله می‌توان از رد گزینه‌ها نیز استفاده کرد؛ گزینهٔ «۱» جواب $x=\frac{3\pi}{2}$ را تولید نمی‌کند و گزینه‌های «۲» و «۳» جواب $x=\frac{\pi}{6}$ را ایجاد نمی‌کنند.

۱۳۹.

در کمان سینوس، زاویه $\frac{5\pi}{2}$ داریم پس نسبت مثلثاتی به کسینوس تغییر می‌کند، انتهای کمان $(\frac{5\pi}{2}+x)$ در ربع دوم دایره مثلثاتی است، پس سینوس مثبت است. انتهای کمان $(x-2\pi)$ هم در ربع اول دایرهٔ مثلثاتی قرار دارد، پس کسینوس مثبت است.

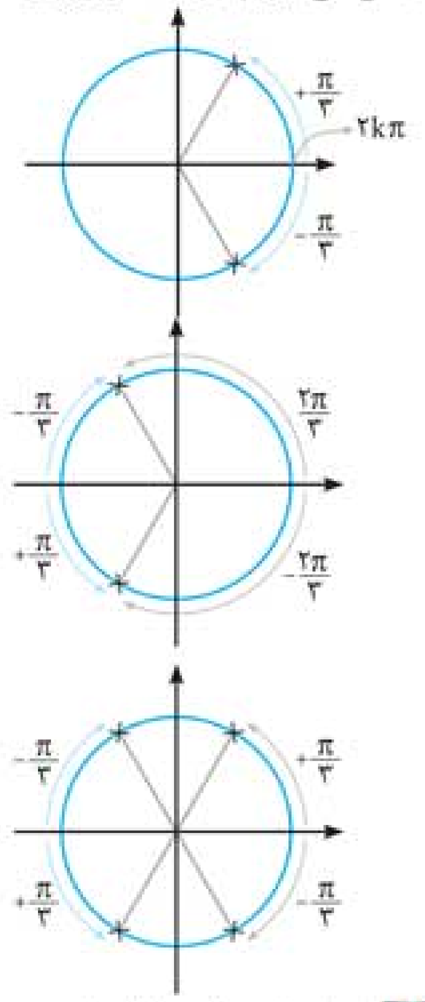
$$\sin(\frac{5\pi}{2}+x)\cos(x-2\pi)=\sin^4\frac{5\pi}{4}$$

$$\xrightarrow{\text{معادله را ساده می‌کنیم}} \cos x\times\cos x=\sin^4\frac{5\pi}{4}=(\sin\frac{5\pi}{4})^4$$

$$\Rightarrow \cos^2 x=(\sin(\pi+\frac{\pi}{4}))^4 \Rightarrow \cos^2 x=(-\frac{\sqrt{2}}{2})^4 \Rightarrow \cos^2 x=\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x=\frac{1}{2} \Rightarrow \cos x=\cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3} \\ \cos x=-\frac{1}{2} \Rightarrow \cos x=\cos\frac{2\pi}{3} \Rightarrow x=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

بین جواب‌های بالا اجتماع می‌گیریم (جواب‌ها رو، روی هم می‌ریزیم):



روش تکنیکی جواب‌های نهایی معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$x=\underbrace{2k\pi}_{\text{مضرب زوج }\pi}+\frac{\pi}{3} \quad (1)$$

$$x=2k\pi\pm(\pi-\frac{\pi}{3})=\underbrace{(2k+1)\pi}_{\text{مضارب فرد }\pi}\mp\frac{\pi}{3} \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} x=\underbrace{k\pi}_{\text{کل مضارب }\pi}\pm\frac{\pi}{3}$$

۱۴۰.

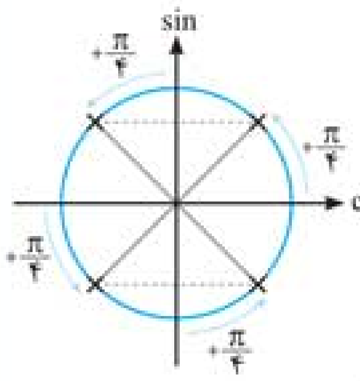
در سمت چپ تساوی از $\sin x$ فاکتور می‌گیریم:

$$2\sin^3 x-\sin x=0 \Rightarrow \sin x(2\sin^2 x-1)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \\ 2\sin^2 x - 1 = 0 \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2} \quad (1) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(1)} \begin{cases} \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sin x = \sin\frac{\pi}{4} \to x_1 = 2k\pi + \frac{\pi}{4},\ x_2 = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{4} \\ \sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sin x = \sin(-\frac{\pi}{4}) \to x_3 = 2k\pi - \frac{\pi}{4},\ x_4 = (2k+1)\pi + \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

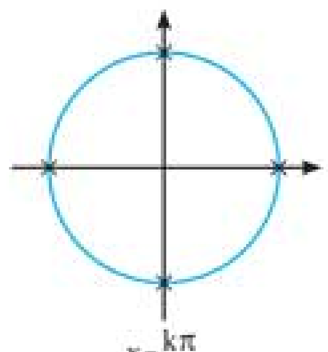
جواب‌ها را روی دایره مثلثاتی مشخص می‌کنیم:



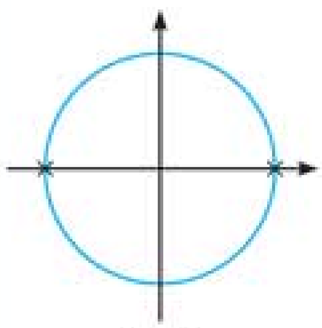
$$\Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

پس جواب کلی به‌صورت $\begin{cases} x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \\ x = k\pi \end{cases}$ است.

دقت کنید نقاط $x = \frac{k\pi}{2}$ و $x = k\pi$ به‌صورت زیر هستند:



$x = \frac{k\pi}{2}$



$x = k\pi$

۱۴۱.

ابتدا $\cos x$ را به سمت چپ تساوی منتقل کرده و از آن فاکتور می‌گیریم:

$$\cos^3 x - \cos x = 0 \Rightarrow \cos x(\cos^2 x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \cos^2 x - 1 = 0 \Rightarrow \cos^2 x = 1 \quad (1) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(1)} \begin{cases} \cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi \\ \cos x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi + \pi \end{cases}$$

جواب‌هایی که در بازهٔ $[0, 2\pi]$ قرار دارند، به‌صورت زیر است:

$$x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$$

پس مجموع جواب‌ها برابر است با: $\frac{\pi}{2} + \pi + \frac{3\pi}{2} + 2\pi = 5\pi$

۱۴۲.

در سمت چپ تساوی از اتحاد $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ استفاده می‌کنیم:

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos\frac{x}{3} \Rightarrow \cos 2x = \cos\frac{x}{3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{x}{3} \Rightarrow \frac{5x}{3} = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{6k\pi}{5} \\ 2x = 2k\pi - \frac{x}{3} \Rightarrow \frac{7x}{3} = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{6k\pi}{7} \end{cases}$$

به k اعداد صحیح می‌دهیم و تعداد جواب‌ها را در بازهٔ $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ به‌دست می‌آوریم.

k	−۱	۰	۱	۲
$x = \frac{6k\pi}{5}$	$-\frac{6\pi}{5}$ ✗	0 ✓	$\frac{6\pi}{5}$ ✓	$\frac{12\pi}{5}$ ✗
$x = \frac{6k\pi}{7}$	$-\frac{6\pi}{7}$ ✗	0 ✓	$\frac{6\pi}{7}$ ✓	$\frac{12\pi}{7}$ ✗

جواب $x = 0$ مشترک است، پس معادله در بازهٔ $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$، ۳ جواب متمایز دارد.

۱۴۳.

سمت چپ تساوی را به کمک اتحاد مزدوج تجزیه می‌کنیم:

$$\sin^4 x - \cos^4 x = \sin\frac{11\pi}{2}$$

$$\Rightarrow (\sin^2 x - \cos^2 x)\underbrace{\cancel{(\sin^2 x + \cos^2 x)}}_{1} = \sin\frac{11\pi}{2}$$

در سمت چپ تساوی از اتحاد $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ استفاده می‌کنیم. در سمت راست تساوی در کمان سینوس به‌جای $\frac{11\pi}{2}$، عبارت $(\frac{12\pi}{2} - \frac{\pi}{2})$ یعنی $(6\pi - \frac{\pi}{2})$ را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$(\sin^2 x - \cos^2 x) = \sin\frac{11\pi}{2} \Rightarrow -\cos 2x = \sin(6\pi - \frac{\pi}{2})$$

6π از کمان سینوس حذف می‌شود:

$$-\cos 2x = \sin(-\frac{\pi}{2}) \Rightarrow -\cos 2x = -1$$

$$\Rightarrow \cos 2x = 1 \Rightarrow 2x = 2k\pi \Rightarrow x = k\pi$$

فلش‌بک مضارب زوج π، از کمان سینوس و کسینوس حذف می‌شوند.

۱۴۴.

در سمت چپ تساوی و در کمان $\cos(x + \frac{\pi}{4})$، به‌جای $\frac{\pi}{4}$، $(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4})$ قرار می‌دهیم:

$$\cos(x + (\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4})).\cos(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \cos(\frac{\pi}{2} + (x - \frac{\pi}{4})).\cos(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{4}$$

اگر در کسینوس اول، $(x - \frac{\pi}{4})$ را α در نظر بگیریم عبارت به صورت $\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha)$ در می‌آید، در کمان کسینوس $\frac{\pi}{2}$ وجود دارد، پس نسبت مثلثاتی به سینوس تغییر می‌کند و انتهای کمان $(\frac{\pi}{2} + \alpha)$ در ربع دوم دایره مثلثاتی قرار گرفته، پس کسینوس منفی است:

$$\cos(\frac{\pi}{2} + (x - \frac{\pi}{4})).\cos(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow -\sin(x - \frac{\pi}{4}).\cos(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{4}$$

از اتحاد $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ استفاده می‌کنیم، با این تفاوت که در این‌جا طرفین اتحاد به ۲ تقسیم شده‌اند و $\alpha = x-\frac{\pi}{4}$ است:

$$-\frac{1}{2}\sin(2(x-\frac{\pi}{4}))=\frac{1}{4} \Rightarrow -\frac{1}{2}\sin(2x-\frac{\pi}{2})=\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \sin(2x-\frac{\pi}{2})=-\frac{1}{2}$$

در کمان سینوس $(-\frac{\pi}{2})$ داریم، پس نسبت مثلثاتی به کسینوس تغییر می‌کند و انتهای کمان $(-\frac{\pi}{2}+2x)$ در ربع چهارم دایره مثلثاتی قرار دارد، پس سینوس منفی است:

$$-\cos 2x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos 2x=\frac{1}{2} \Rightarrow \cos 2x = \cos\frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \xrightarrow{\div 2} x = k\pi\pm\frac{\pi}{6}$$

۱۴۵.

$$\sin x+\cos x+\sin x\cos x+1=0$$
$$\Rightarrow 1+\sin x+\cos x(1+\sin x)=0$$

از $(1+\sin x)$ فاکتور می‌گیریم: $(1+\sin x)(1+\cos x)=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1+\sin x=0\Rightarrow \sin x=-1\Rightarrow x=2k\pi-\frac{\pi}{2} \\ 1+\cos x=0\Rightarrow \cos x=-1\Rightarrow x=(2k+1)\pi \end{cases}$$

به k اعداد صحیح می‌دهیم و جواب‌های موجود در بازهٔ $[-\pi,\pi]$ را با هم جمع می‌کنیم:

k	−۱	۰	۱
$x=2k\pi-\frac{\pi}{2}$	$-2\pi-\frac{\pi}{2}$ ✗	$-\frac{\pi}{2}$ ✓	$2\pi-\frac{\pi}{2}$ ✗
$x=(2k+1)\pi$	$-\pi$ ✓	π ✓	3π ✗

$$\Rightarrow \text{مجموع جواب‌ها} = -\pi+\pi-\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{2}$$

۱۴۶.

ابتدا از اتحادهای $\cos 2x=2\cos^2 x-1$ و $\sin 2x=2\sin x\cos x$، استفاده می‌کنیم:

$$1+\sin x+\cos x+\sin 2x+\cos 2x=0$$
$$\Rightarrow 1+\sin x+\cos x+2\sin x\cos x+2\cos^2 x-1=0$$
$$\Rightarrow \sin x+2\sin x\cos x+\cos x+2\cos^2 x=0$$

بین دو جملهٔ $\cos x$ و $2\cos^2 x$، از $\cos x$ و بین دو جملهٔ $2\sin x\cos x$ و $\sin x$، از $\sin x$ فاکتور می‌گیریم:

$$\sin x(1+2\cos x)+\cos x(1+2\cos x)=0$$

از $(1+2\cos x)$ فاکتور می‌گیریم:

$$(1+2\cos x)(\sin x+\cos x)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1+2\cos x=0\Rightarrow \cos x=-\frac{1}{2}\Rightarrow \cos x=\cos\frac{2\pi}{3} \quad ① \\ \sin x+\cos x=0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{①} x=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}$$

برای حل معادلهٔ $\sin x+\cos x=0$ با فرض $\cos x\neq 0$، طرفین را بر $\cos x$ تقسیم می‌کنیم:

$$\sin x+\cos x=0\xrightarrow{\div\cos x}\tan x+1=0\Rightarrow \tan x=-1$$

$$\Rightarrow \tan x=\tan(-\frac{\pi}{4})\Rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{4}$$

۱۴۷.

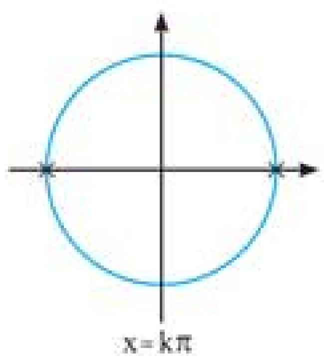
ابتدا یک مخرج ۱ به عبارت $2+2\cos x$ می‌دهیم و معادله را طرفین وسطین می‌کنیم:

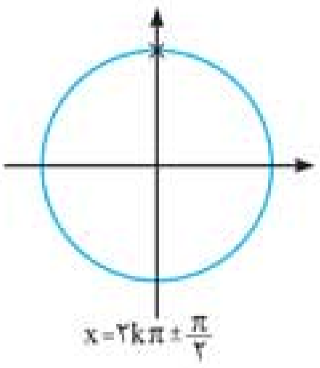
$$\frac{\tan x}{1-\cos x}=\frac{2+2\cos x}{1}\Rightarrow \tan x=(2+2\cos x)(1-\cos x)$$
$$\Rightarrow \tan x=2(1+\cos x)(1-\cos x)$$
$$\xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}}\tan x=2\overbrace{(1-\cos^2 x)}^{\sin^2 x}\Rightarrow \tan x=2\sin^2 x$$

در سمت چپ تساوی به‌جای $\tan x$، عبارت $\frac{\sin x}{\cos x}$ را جای‌گذاری می‌کنیم:

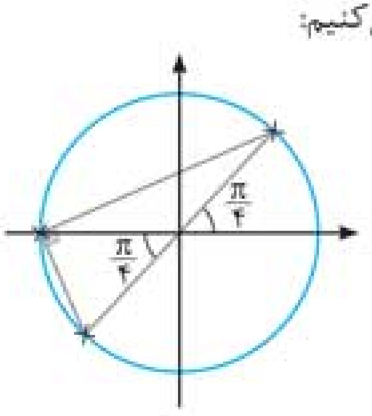
$$\frac{\sin x}{\cos x}=2\sin^2 x\Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x}-2\sin^2 x=0$$
$$\Rightarrow \sin x(\frac{1}{\cos x}-2\sin x)=0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x=0\Rightarrow x=k\pi \\ \frac{1}{\cos x}-2\sin x=0\Rightarrow \frac{1}{\cos x}=\frac{2\sin x}{1} \quad ① \end{cases}$$
$$\xrightarrow{①}\overbrace{2\sin x\cos x}^{\sin 2x}=1\Rightarrow \sin 2x=1\Rightarrow 2x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$$
$$\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{4}$$

توجه کنید تابع سینوس در نقاط $x=k\pi$ برابر با صفر و در نقاط $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$ برابر ۱ است.





درنهایت به k اعداد صحیح می‌دهیم و جواب‌هایی که در بازهٔ $[0,2\pi]$ هستند را روی دایره مثلثاتی مشخص می‌کنیم:



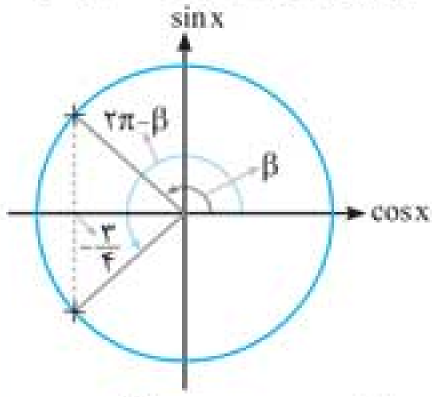
شکل ایجاد شده مثلث قائم‌الزاویه است. $\Leftarrow$

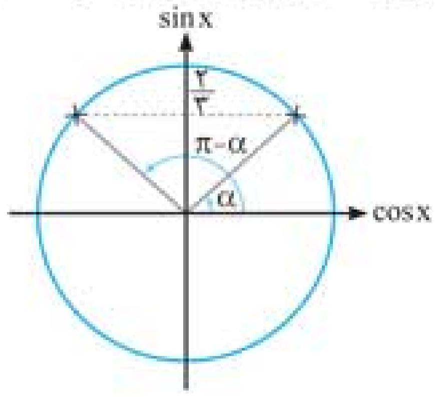
تذکر نقاط $x=2k\pi$ مخرج عبارت صورت سؤال را صفر می‌کنند، پس از جواب نهایی حذف می‌شوند.

۱۴۸.

$$(3\sin x-2)(4\cos x+3)=0\Rightarrow\begin{cases}3\sin x-2=0\Rightarrow \sin x=\frac{2}{3}\\ 4\cos x+3=0\Rightarrow \cos x=-\frac{3}{4}\end{cases}$$

با توجه به دایره مثلثاتی زیر برای $\sin x=\frac{2}{3}$ در بازهٔ $[0,2\pi]$ دو جواب وجود دارد که این جواب‌ها مکمل هم هستند. برای $\cos x=-\frac{3}{4}$ هم در بازهٔ $[0,2\pi]$ دو جواب وجود دارد که مجموع این دو جواب برابر 2π می‌شود.





$\sin x=\frac{2}{3}$, $\cos x=-\frac{3}{4}$

مجموع کل جواب‌ها $=\cancel{\alpha}+(\pi-\cancel{\alpha})+\cancel{\beta}+(2\pi-\cancel{\beta})=3\pi$

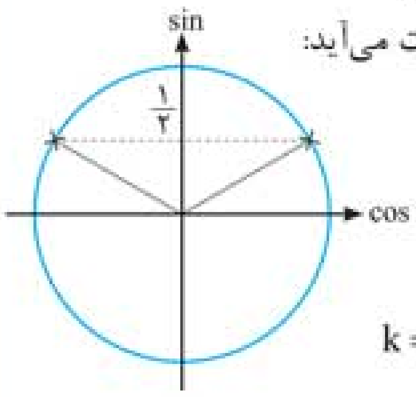
۱۴۹.

در سمت راست تساوی از اتحاد $\cos 2x=1-2\sin^2 x$ استفاده می‌کنیم:

$$\sin kx-\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-2\sin^2 x)$$

$$\Rightarrow \sin kx-\sin^2 x=\frac{1}{2}-\sin^2 x\Rightarrow \sin kx=\frac{1}{2}$$

در ساده‌ترین حالت اگر $k=1$ باشد، $\sin x=\frac{1}{2}$ است که برای x در یک دور دایره مثلثاتی ۲ جواب به‌دست می‌آید:



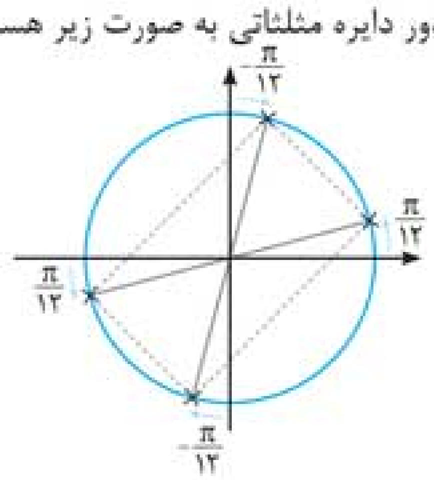
اما برای آن که نقاط تشکیل چهارضلعی می‌دهند به ۴ نقطه نیاز داریم. اگر k را برابر ۲ در نظر بگیریم این اتفاق می‌افتد:

$$k=2\Rightarrow \sin 2x=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sin 2x=\sin\frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2x=2k\pi+\frac{\pi}{6}\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{12}\\ 2x=(2k+1)\pi-\frac{\pi}{6}\Rightarrow x=\frac{(2k+1)\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\end{cases}$$

که نقاط، در یک دور دایره مثلثاتی به صورت زیر هستند:



این نقاط تشکیل یک چهارضلعی می‌دهند.

۱۵۰.

به‌جای $\sin 2x$، $\cos(\frac{\pi}{2}-2x)$ را قرار می‌دهیم:

$$\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})+\cos(\frac{\pi}{2}-2x)=1$$

$$\Rightarrow \sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})+\cos(2(\frac{\pi}{4}-x))=1$$

$(\frac{\pi}{4}-x)$ را α در نظر می‌گیریم و از اتحاد $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$ استفاده می‌کنیم:

$$\sqrt{2}\sin(-\alpha)+\cos(2\alpha)=1\Rightarrow \sqrt{2}\sin(-\alpha)+1-2\sin^2\alpha=1$$

$$\xrightarrow{\sin(-\alpha)=-\sin\alpha} 2\sin^2\alpha+\sqrt{2}\sin\alpha=0$$

$$\Rightarrow \sin\alpha(2\sin\alpha+\sqrt{2})=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\sin\alpha=0\\ 2\sin\alpha+\sqrt{2}=0\Rightarrow \sin\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\alpha=\frac{\pi}{4}-x}\begin{cases}\sin(\frac{\pi}{4}-x)=0\Rightarrow \frac{\pi}{4}-x=k\pi\\ \qquad\Rightarrow x=-k\pi+\frac{\pi}{4}\\ \sin(\frac{\pi}{4}-x)=-\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow \sin(\frac{\pi}{4}-x)=\sin(-\frac{\pi}{4})\ (1)\end{cases}$$

$$\xrightarrow{(1)}\begin{cases}\frac{\pi}{4}-x=2k\pi-\frac{\pi}{4}\Rightarrow x=-2k\pi+\frac{\pi}{2}\\ \frac{\pi}{4}-x=(2k+1)\pi-(-\frac{\pi}{4})\Rightarrow x=-(2k+1)\pi\end{cases}$$

به k اعداد صحیح می‌دهیم و جواب‌هایی که در بازهٔ $[0,2\pi]$ هستند را جمع می‌کنیم:

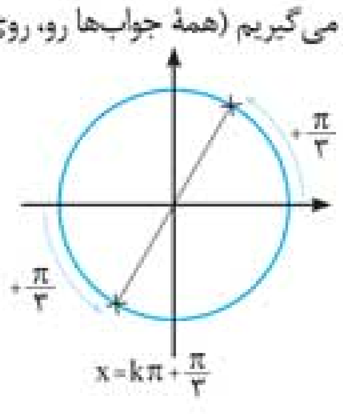
k	−۲	−۱	۰
$x=-k\pi+\frac{\pi}{4}$	$2\pi+\frac{\pi}{4}$ ✗	$\pi+\frac{\pi}{4}$ ✓	$\frac{\pi}{4}$ ✓
$x=-2k\pi+\frac{\pi}{2}$	$4\pi+\frac{\pi}{2}$ ✗	$2\pi+\frac{\pi}{2}$ ✗	$\frac{\pi}{2}$ ✓
$x=-(2k+1)\pi$	3π ✗	π ✓	$-\pi$ ✗

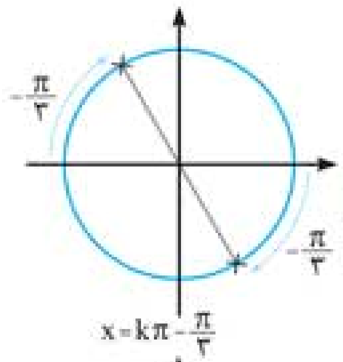
$\Rightarrow$ مجموع جواب‌ها $=\pi+\frac{\pi}{4}+\pi+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}=3\pi$

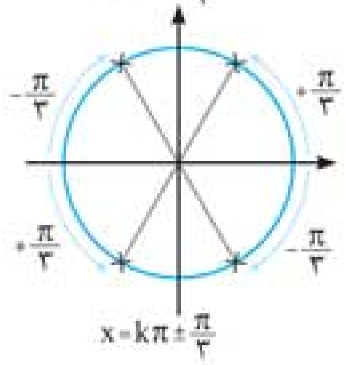
۱۵۱.

$$\tan^2 x=3\Rightarrow\begin{cases}\tan x=\sqrt{3}\Rightarrow \tan x=\tan\frac{\pi}{3}\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{3}\\ \tan x=-\sqrt{3}\Rightarrow \tan x=\tan(-\frac{\pi}{3})\Rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{3}\end{cases}$$

بین دو جواب بالا اجتماع می‌گیریم (همهٔ جواب‌ها رو، روی هم می‌ریزیم 🙂).







پس جواب کلی به‌صورت $x=k\pi\pm\frac{\pi}{3}$ است.

۱۵۲.

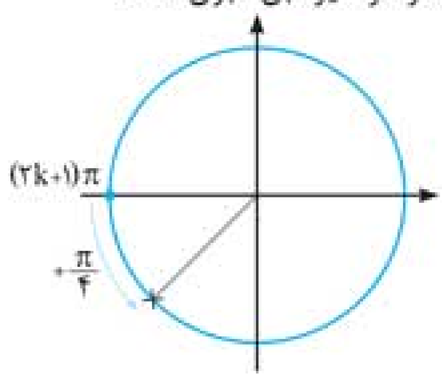
ابتدا طرفین معادله را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\sqrt{\sin x}=\sqrt{\cos x}\xrightarrow{\text{توان ۲}}\sin x=\cos x$$

با فرض $\cos x\neq 0$ طرفین را بر $\cos x$ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\cos x}{\cos x}\Rightarrow \tan x=1\Rightarrow \tan x=\tan\frac{\pi}{4}\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{4}$$

تذکر اگر k، اعداد فرد باشد، انتهای کمان در ربع سوم دایره مثلثاتی است و مقدار سینوس و کسینوس منفی است پس زیر رادیکال منفی می‌شود و غیرقابل قبول است:



پس ضریب π فقط باید زوج باشد: $x=2k\pi+\frac{\pi}{4}$

فلش‌بک در حل معادلات گنگ، پس از حل، باید جواب‌ها را در معادله جای‌گذاری کنیم و آن‌هایی که زیر رادیکال را منفی نمی‌کنند و در معادله صدق می‌کنند را قبول کنیم چون ممکن است معادله جواب اضافی داده باشد.

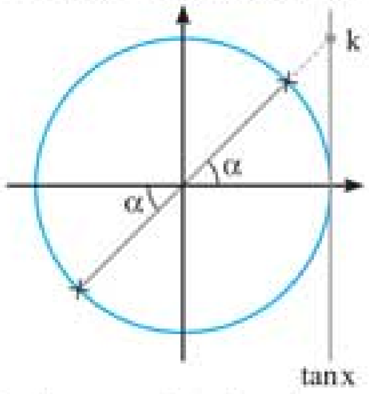
۱۵۳.

در سمت چپ تساوی به‌جای $\cot x$، عبارت $\frac{1}{\tan x}$ را جای‌گذاری می‌کنیم و سپس با فرض $\tan x\neq 0$ طرفین تساوی را در $\tan x$ ضرب می‌کنیم:

$$a\cot x=2+\tan x\Rightarrow\frac{a}{\tan x}=2+\tan x$$

$$\xrightarrow{\times\tan x}a=2\tan x+\tan^2 x\Rightarrow\tan^2 x+2\tan x-a=0$$

معادله به‌صورت یک معادلهٔ درجه ۲ برحسب تانژانت درآمده است اگر دلتای معادله درجه ۲ منفی باشد که هیچ مقداری برای تانژانت و درنتیجه برای x به‌دست نمی‌آید، اگر دلتای معادله درجه ۲ مثبت باشد برای تانژانت دو جواب متمایز به دست می‌آید. در دایرهٔ مثلثاتی زیر مشخص است که به ازای هر مقدار برای تانژانت دو مقدار متفاوت برای کمان آن یعنی در مجموع ۴ جواب برای x داریم:



پس تنها در حالتی دو جواب برای x وجود دارد که برای تانژانت یک مقدار داشته باشیم یعنی دلتای معادله درجه ۲ صفر شود:

$$\Delta=2^2-4(1)(-a)=0\Rightarrow 4a=-4\Rightarrow a=-1$$

۱۵۴.

فلش‌بک اگر در کمان نسبت مثلثاتی مضارب فرد $\frac{\pi}{2}$ (مانند $\frac{\pi}{2}$ و $\frac{3\pi}{2}$) وجود داشته باشد، نسبت مثلثاتی تغییر می‌کند (یعنی سینوس به کسینوس و کسینوس به سینوس تبدیل می‌شود)، اما اگر مضارب π وجود داشته باشد، نسبت مثلثاتی تغییر نمی‌کند.

انتهای کمان $\pi-x$ در ربع دوم قرار دارد و سینوس در ربع دوم مثبت است.
انتهای کمان $\pi+x$ در ربع سوم قرار دارد و سینوس در ربع سوم منفی است.
انتهای کمان $\frac{\pi}{2}+x$ در ربع دوم قرار دارد و کسینوس در این ربع منفی است.

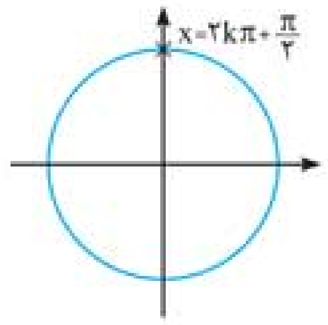
$$\sin(\pi+x)\cos(\frac{\pi}{2}+x)-2\sin(\pi-x)+1=0$$

$$\Rightarrow(-\sin x)\times(-\sin x)-2\sin x+1=0$$

$$\Rightarrow\sin^2 x-2\sin x+1=0\xrightarrow{\text{اتحاد مربع}}(\sin x-1)^2=0$$

$$\Rightarrow\sin x=1\Rightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$$

توجه کنید سینوس در نقاط $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$، برابر با ۱ می‌شود. (شکل زیر)



۱۵۵.

در سمت چپ تساوی و در پرانتز اول به‌جای $\tan x$، عبارت $\frac{\sin x}{\cos x}$ را جای‌گذاری می‌کنیم، در کمان تانژانت، زاویهٔ $\frac{3\pi}{2}$ ظاهر شده است، بنابراین نسبت مثلثاتی به کتانژانت تغییر می‌کند ازطرفی انتهای کمان $(\frac{3\pi}{2}-x)$، در ربع سوم دایرهٔ مثلثاتی قرار دارد و علامت تانژانت در آن ربع مثبت است:

$$(\sin x-\tan x)\tan(\frac{3\pi}{2}-x)=\cos\frac{4\pi}{3}$$

$$\Rightarrow(\sin x-\frac{\sin x}{\cos x})\cot x=\cos\frac{4\pi}{3}$$

به‌جای $\cot x$، عبارت $\frac{\cos x}{\sin x}$ را قرار می‌دهیم و آن را در پرانتز ضرب می‌کنیم. در سمت راست تساوی و در کمان کسینوس به جای $\frac{4\pi}{3}$، زاویهٔ $(\pi+\frac{\pi}{3})$ را جای‌گذاری می‌کنیم به این ترتیب مشخص می‌شود انتهای کمان در ربع سوم قرار گرفته و مقدار کسینوس منفی است.

$$(\sin x-\frac{\sin x}{\cos x})\frac{\cos x}{\sin x}=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$$

$$\cos x-1=-\frac{1}{2}\Rightarrow \cos x=\frac{1}{2}\Rightarrow \cos x=\cos\frac{\pi}{3}\Rightarrow x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$$

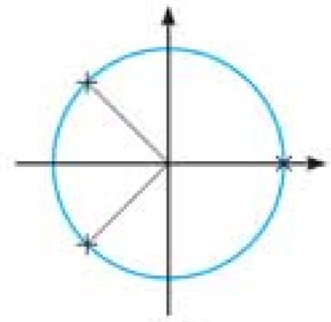
۱۵۶.

در سمت چپ تساوی از اتحاد $\cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x$ استفاده می‌کنیم و در سمت راست تساوی با توجه به این که در کمان سینوس $\frac{3\pi}{2}$ داریم، نسبت مثلثاتی را به کسینوس تغییر می‌دهیم. انتهای کمان $(\frac{3\pi}{2}+x)$ در ربع چهارم دایرهٔ مثلثاتی قرار گرفته، بنابراین مقدار سینوس منفی است:

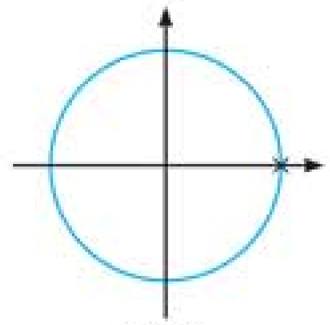
$$\sin^2 x-\cos^2 x=\sin(\frac{3\pi}{2}+x)\Rightarrow -\cos 2x=-\cos x$$

$$\Rightarrow \cos 2x=\cos x\Rightarrow\begin{cases}2x=2k\pi+x\Rightarrow x=2k\pi\\ 2x=2k\pi-x\Rightarrow x=\frac{2k\pi}{3}\end{cases}$$

بین جواب‌های به دست آمده اجتماع می‌گیریم. (جواب‌ها را، روی هم می‌ریزیم.) توجه داریم که همهٔ نقاط $x=2k\pi$ در جواب $x=\frac{2k\pi}{3}$ قرار دارند، بنابراین اجتماع دو مقدار فوق همان $x=\frac{2k\pi}{3}$ می‌شود:



$x=\frac{2k\pi}{3}$



$x=2k\pi$

۱۵۷.

تذکر عبارت $\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$، با اثبات زیر برابر با $\tan 2x$ می‌شود:

$$\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}=\frac{\frac{2\sin x}{\cos x}}{1-(\frac{\sin x}{\cos x})^2}=\frac{\frac{2\sin x}{\cos x}}{1-\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}=\frac{\frac{2\sin x}{\cos x}}{\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x}}$$

$$=\frac{2\sin x\cos^2 x}{\cos x(\cos^2 x-\sin^2 x)}=\frac{2\sin x\cos x\times\cos x}{\cos x(\cos^2 x-\sin^2 x)}$$

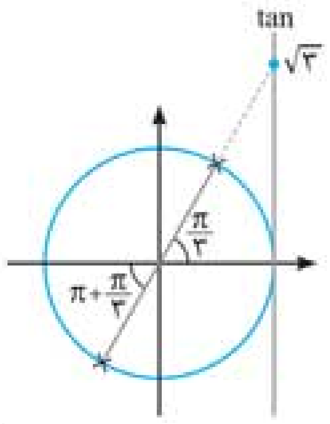
$$=\frac{2\sin x\cos x}{\cos^2 x-\sin^2 x}=\frac{\sin 2x}{\cos 2x}=\tan 2x$$

فلش‌بک اتحادهای مثلثاتی $2\sin x\cos x=\sin 2x$ و $\cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x$ برقرار است، بنابراین داریم:

$$\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}=\sqrt{3}\Rightarrow \tan 2x=\sqrt{3}\Rightarrow \tan 2x=\tan\frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow 2x=k\pi+\frac{\pi}{3}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{6}$$

تذکر با توجه به دایرهٔ مثلثاتی، اگر تانژانت زاویه‌ای برابر با عدد مثبتی مانند $\sqrt{3}$ باشد، در هر دور دایرهٔ مثلثاتی، دو زاویه این ویژگی را دارند:



زاویه دوم $=\pi+\frac{\pi}{3}$ و زاویه اول $=\frac{\pi}{3}$

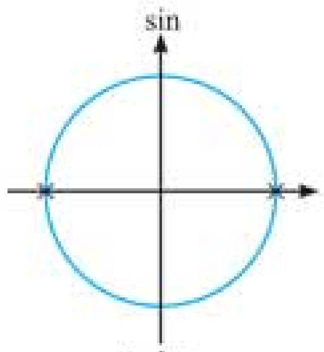
پس در تمام دورهای دایره مثلثاتی این زوایا را با $(k\pi+\frac{\pi}{3})$ نشان می‌دهیم.

۱۵۸.

تذکر در نقاطی که نمودار یک تابع محور xها را قطع می‌کند، عرض تابع (y تابع) صفر است.

تعداد نقاط برخورد با محور xها را می‌خواهیم، کافی است y را مساوی صفر قرار دهیم: $y=3\sin(\frac{\pi}{4}-2x)=0\Rightarrow\sin(\frac{\pi}{4}-2x)=0$

سینوس در نقاطی که کمان آن $k\pi$ است، صفر می‌شود:



$x=k\pi$

$$\Rightarrow\sin(\frac{\pi}{4}-2x)=0\Rightarrow\frac{\pi}{4}-2x=k\pi\Rightarrow 2x=-k\pi+\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow x=-\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8}$$

به k عدد می‌دهیم و جواب‌هایی را که در بازهٔ $[-\pi,\frac{3\pi}{2}]$ هستند، قبول می‌کنیم:

k	۰	−۱	−۲	−۳
x	$\frac{\pi}{8}$ ✓	$\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{8}$ ✓	$\pi+\frac{\pi}{8}$ ✓	$\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{8}$ ×

k	۱	۲	۳
x	$-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{8}$ ✓	$-\pi+\frac{\pi}{8}$ ✓	$-\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{8}$ ×

پس نمودار تابع در بازهٔ $[-\pi,\frac{3\pi}{2}-]$ در پنج نقطه محور x ها را قطع می‌کند.

.۱۵۹

سمت چپ تساوی را با استفاده از اتحاد مزدوج تجزیه می‌کنیم:

$$\sin^4 x-\cos^4 x=\sin^2\frac{5\pi}{4}$$

$$\Rightarrow(\sin^2 x-\cos^2 x)\overbrace{(\sin^2 x+\cos^2 x)}^{1}=\sin^2\frac{5\pi}{4}$$

$$\Rightarrow\overbrace{\sin^2 x-\cos^2 x}^{-\cos 2x}=\sin^2\frac{5\pi}{4}\Rightarrow-\cos 2x=\sin^2\frac{5\pi}{4}$$

در سمت راست تساوی زاویهٔ $\frac{5\pi}{4}$ را به‌صورت $(\frac{4\pi}{4}+\frac{\pi}{4})$ یعنی $(\pi+\frac{\pi}{4})$ می‌نویسیم، انتهای کمان $(\pi+\frac{\pi}{4})$ در ربع سوم دایرهٔ مثلثاتی قرار گرفته، پس مقدار سینوس منفی است:

$$-\cos 2x=\sin^2(\pi+\frac{\pi}{4})\Rightarrow-\cos 2x=(-\sin\frac{\pi}{4})^2$$

$$\xrightarrow{\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}}-\cos 2x=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow\cos 2x=-\frac{1}{2}\Rightarrow 2x=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}\Rightarrow x=k\pi\pm\frac{\pi}{3}$$

دو زاویهٔ مکمل، کسینوس‌های قرینه دارند، یعنی:

$$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\Rightarrow\cos(\overbrace{\pi-\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}})=-\frac{1}{2}$$

.۱۶۰

$\cos\pi=-1$ است، پس:

$$\sin 5x+\sin 4x=1+\cos\pi\Rightarrow\sin 5x+\sin 4x=0$$

$$\Rightarrow\sin 5x=-\sin 4x$$

تذکر اگر کمان نسبت مثلثاتی سینوس قرینه شود، کل نسبت در یک منفی ضرب می‌شود به عبارت دیگر $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$ است.

بنابراین می‌توان منفی را از پشت $\sin 4x$ به داخل کمان آن انتقال داد:

$$\sin 5x=-\sin 4x\Rightarrow\sin 5x=\sin(-4x)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}5x=2k\pi-4x\Rightarrow 9x=2k\pi\Rightarrow x=\frac{2k\pi}{9}\\5x=(2k+1)\pi-(-4x)\Rightarrow x=(2k+1)\pi\end{cases}$$

درنهایت باید با عدد دادن به k، جواب‌هایی را که در بازهٔ $[0,2\pi]$ هستند، به‌دست آوریم و با هم جمع کنیم:

k	-1	0	1	2	3	$\dots$	9
$x=\frac{2k\pi}{9}$	$-\frac{2\pi}{9}$	0	$\frac{2\pi}{9}$	$\frac{4\pi}{9}$	$\frac{6\pi}{9}$	$\dots$	2π
$x=2k\pi+\pi$	$-\pi$ ×	π ✓	3π ×	5π ×	7π ×		

$$\text{جواب}=\frac{2\pi}{9}+\frac{4\pi}{9}+\frac{6\pi}{9}+\dots+\frac{18\pi}{9}+\pi=11\pi$$

.۱۶۱

در مخرج کسر و در کمان کسینوس زاویهٔ $\frac{3\pi}{2}$ داریم، پس نسبت مثلثاتی کسینوس به سینوس تغییر می‌کند. از طرفی انتهای کمان $(\frac{3\pi}{2}+x)$ در ربع چهارم دایرهٔ مثلثاتی قرار دارد و کسینوس در این ربع مثبت است:

$$\frac{\sin 3x}{\cos(\frac{3\pi}{2}+x)}=1\Rightarrow\frac{\sin 3x}{\sin x}=1$$

$$\xrightarrow[(\text{مخرج کسر}\neq 0)]{\text{با شرط } \sin x\neq 0}\sin 3x=\sin x$$

$$\Rightarrow\begin{cases}3x=2k\pi+x\Rightarrow 2x=2k\pi\Rightarrow x=k\pi\ \times\\3x=(2k+1)\pi-x\Rightarrow 4x=2k\pi+\pi\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\ \checkmark\end{cases}$$

تذکر اگر مقدار سینوس در مخرج کسر صفر شود، عبارت تعریف نشده است، بنابراین جواب $x=k\pi$ قابل قبول نیست.

.۱۶۲

ابتدا معادله را ساده می‌کنیم:

$$2\cos^2 x+2\sin x\cos x=1\Rightarrow\overbrace{2\cos^2 x-1}^{\cos 2x}+\underbrace{2\sin x\cos x}_{\sin 2x}=0$$

$$\Rightarrow\cos 2x+\sin 2x=0$$

روش اول: با فرض $\cos 2x\neq 0$، طرفین تساوی را بر $\cos 2x$ تقسیم می‌کنیم: $\frac{\cos 2x}{\cos 2x}+\frac{\sin 2x}{\cos 2x}=0\Rightarrow 1+\tan 2x=0\Rightarrow\tan 2x=-1$

$$\Rightarrow 2x=k\pi-\frac{\pi}{4}\xrightarrow{\div 2}x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{8}$$

روش دوم:

فلش‌بک $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$ و $\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cos\alpha$

با توجه به یادآوری فوق در معادلهٔ $\cos 2x+\sin 2x=0$ داریم:

$$\cos 2x+\sin 2x=0\Rightarrow\cos 2x=-\sin 2x$$

$$\Rightarrow\sin(\frac{\pi}{2}-2x)=\sin(-2x)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-2x=2k\pi+(\frac{\pi}{2}-2x)\Rightarrow 0=2k\pi+\frac{\pi}{2}\ \times\ \text{غیرقابل‌قبول}\\-2x=(2k+1)\pi-(\frac{\pi}{2}-2x)\Rightarrow-2x=(2k+1)\pi-\frac{\pi}{2}+2x\end{cases}$$

$$\Rightarrow-4x=2k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=-\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{8}$$

تذکر در دایرهٔ مثلثاتی نقاط نشان‌دهندهٔ $\frac{k\pi}{2}+\alpha$ با $-\frac{k\pi}{2}+\alpha$ یکی هستند. به این دلیل که k عددی صحیح است و اگر پشت آن منفی هم قرار بگیرد باز عدد صحیح است.

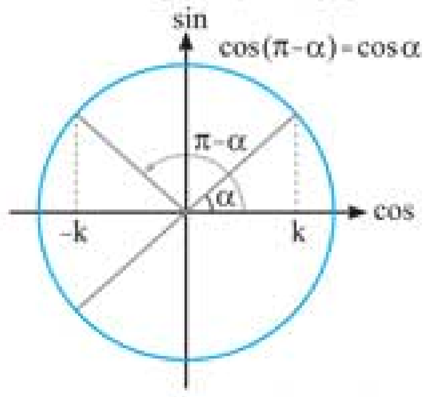
بنابراین، داریم: $x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{8}$

۱۶۳.

$\cos ۳x+\cos x=۰\Rightarrow \cos ۳x=-\cos x$

باید منفی پشت کسینوس را از بین ببریم.

تذکر با توجه به دایرهٔ مثلثاتی زیر اگر بخواهیم نسبت مثلثاتی کسینوس را قرینه کنیم، کافی است در کمان آن به‌جای زاویهٔ x، زاویهٔ $(\pi-x)$ را جای‌گزین کنیم، یعنی: $\cos(\pi-x)=-\cos x$



بنابراین داریم: $\cos ۳x=-\cos x\Rightarrow \cos ۳x=\cos(\pi-x)$

$$\Rightarrow\begin{cases}۳x=۲k\pi+(\pi-x)\Rightarrow ۴x=۲k\pi+\pi\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴} & \checkmark\\ ۳x=۲k\pi-(\pi-x)\Rightarrow ۲x=۲k\pi-\pi\Rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{۲} & \times\end{cases}$$

تذکر جواب $x=k\pi-\frac{\pi}{۲}$ غیرقابل قبول است، چون $\cos x$ را صفر می‌کند درحالی که در صورت سؤال گفته شده $\cos x\neq ۰$.

۱۶۴.

راهبرد در حل معادلات مثلثاتی که در آن‌ها کسینوس توان ۱ و سینوس توان ۲ دارد، با اتحاد $\sin^۲ x=۱-\cos^۲ x$ سینوس را به کسینوس تبدیل می‌کنیم، درنتیجه معادله به‌صورت یک معادلهٔ درجه ۲ در می‌آید که باید آن را حل کنیم اگر در معادله، سینوس توان ۱ و کسینوس توان ۲ داشت، کسینوس را به سینوس تبدیل و معادله را حل می‌کنیم

$۲\sin^۲ x+۳\cos x=۰\Rightarrow ۲(۱-\cos^۲ x)+۳\cos x=۰$

$\Rightarrow ۲-۲\cos^۲ x+۳\cos x=۰\Rightarrow ۲\cos^۲ x-۳\cos x-۲=۰$

با فرض این‌که $-۱\le t\le ۱$ باشد، کسینوس را مساوی t در نظر می‌گیریم:

$۲t^۲-۳t-۲=۰\Rightarrow \Delta=۹-۴(۲)(-۲)=۲۵$

$$\Rightarrow\begin{cases}t_۱=\frac{۳+\sqrt{۲۵}}{۴}=۲ & \times \text{ غیرقابل قبول}\\ t_۲=\frac{۳-\sqrt{۲۵}}{۴}=-\frac{۱}{۲}\end{cases}$$

$t=۲$ غیرقابل قبول است، چون در بازهٔ $[-۱,۱]$ قرار ندارد. کسینوس $\frac{\pi}{۳}$ برابر $\frac{۱}{۲}$ است، بنابراین کسینوس $(\pi-\frac{\pi}{۳})$ برابر $-\frac{۱}{۲}$ می‌شود:

$t=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow \cos x=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow \cos x=\cos(\pi-\frac{\pi}{۳})\Rightarrow x=۲k\pi\pm\frac{۲\pi}{۳}$

۱۶۵.

از اتحادهای $\sin ۲\alpha=۲\sin\alpha\cos\alpha$ و $\cos ۲\alpha=۲\cos^۲\alpha-۱$ استفاده می‌کنیم، با این تفاوت که در این‌جا کمان‌ها نصف مقادیر بالا است، یعنی داریم:

$$\frac{\sin\alpha}{۱+\cos\alpha}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\frac{۲\sin\frac{\alpha}{۲}\cos\frac{\alpha}{۲}}{۱+۲\cos^۲\frac{\alpha}{۲}-۱}=\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow\frac{۲\sin\frac{\alpha}{۲}\cos\frac{\alpha}{۲}}{۲\cos\frac{\alpha}{۲}\times\cos\frac{\alpha}{۲}}=\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow\frac{\sin\frac{\alpha}{۲}}{\cos\frac{\alpha}{۲}}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow \tan\frac{\alpha}{۲}=\frac{۱}{۲}\quad ①$$

مقدار $\tan(\frac{\pi}{۲}+\frac{\alpha}{۲})$ خواسته شده است، در کمان تانژانت زاویه $\frac{\pi}{۲}$ وجود دارد، پس نسبت مثلثاتی تانژانت به کتانژانت تغییر می‌کند، از طرفی انتهای کمان $(\frac{\pi}{۲}+\frac{\alpha}{۲})$ در ربع دوم دایره مثلثاتی قرار دارد، پس علامت تانژانت منفی است:

$$\tan(\frac{\pi}{۲}+\frac{\alpha}{۲})=-\cot\frac{\alpha}{۲}=-\frac{۱}{\tan\frac{\alpha}{۲}}\overset{①}{=}-\frac{۱}{\frac{۱}{۲}}=-۲$$

فلش‌بک نسبت‌های مثلثاتی تانژانت و کتانژانت عکس هم هستند، یعنی: $\tan\alpha=\frac{۱}{\cot\alpha}$

۱۶۶.

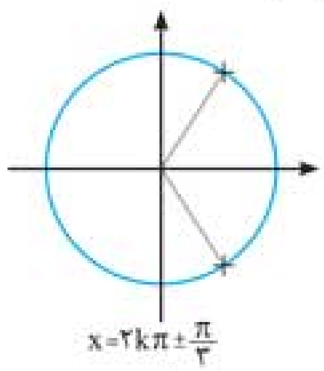
برای ساده کردن معادله، از اتحاد $\cos ۲x=۲\cos^۲ x-۱$ استفاده می‌کنیم:

$\cos ۲x+۲\cos^۲ x=۰\Rightarrow ۲\cos^۲ x-۱+۲\cos^۲ x=۰$

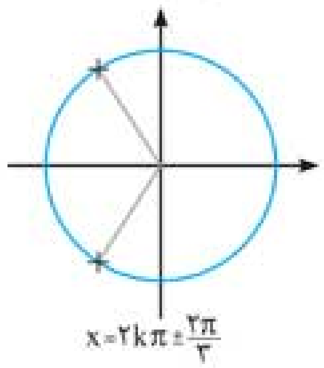
$\Rightarrow ۴\cos^۲ x=۱\Rightarrow \cos^۲ x=\frac{۱}{۴}$

$$\Rightarrow\begin{cases}\cos x=\frac{۱}{۲}\Rightarrow x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳}\\ \cos x=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow x=۲k\pi\pm\frac{۲\pi}{۳}\end{cases}$$

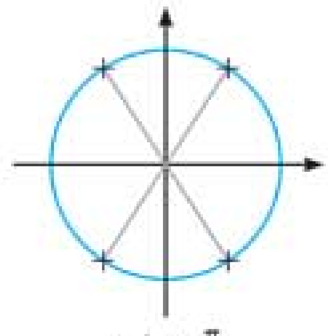
تذکر کسینوس زاویه $(\frac{\pi}{۳})$ برابر $\frac{۱}{۲}$ و کسینوس زاویهٔ $(\frac{۲\pi}{۳})$ برابر $(-\frac{۱}{۲})$ است. بین جواب‌های به‌دست آمده، اجتماع می‌گیریم. (همهٔ جواب‌ها را روی هم می‌ریزیم.)



$x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳}$



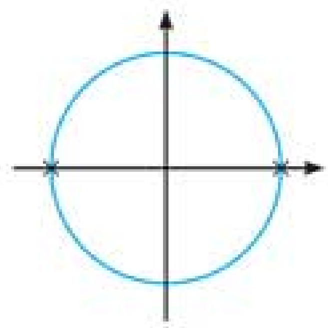
$x=۲k\pi\pm\frac{۲\pi}{۳}$



$x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

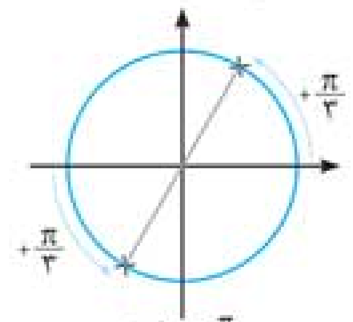
پس جواب کلی معادله به‌صورت $x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ می‌شود.

برای توضیح بیشتر نقاط معادلهٔ $x = k\pi$ بر روی دایرهٔ مثلثاتی به‌صورت زیر است:



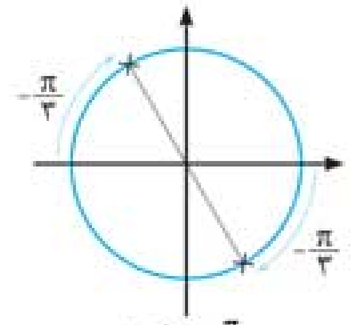
$x = k\pi$

اگر این دو نقطه را در جهت مثبت به اندازهٔ $+\frac{\pi}{3}$ حرکت دهیم، به معادلهٔ $x = k\pi + \frac{\pi}{3}$ و شکل زیر می‌رسیم:



$x = k\pi + \frac{\pi}{3}$

اگر این دو نقطه را در جهت منفی به اندازهٔ $(\frac{\pi}{3})$ حرکت دهیم، به معادلهٔ $x = k\pi - \frac{\pi}{3}$ و شکل زیر می‌رسیم:



$x = k\pi - \frac{\pi}{3}$

بنابراین در این حالت نیز جواب کلی معادله برابر $x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ است.

۱۶۷.

در سمت چپ تساوی و در کمان کسینوس، زاویهٔ $\frac{\pi}{2}$ وجود دارد، پس نسبت مثلثاتی به سینوس تغییر می‌کند، ازطرفی انتهای کمان $(\frac{\pi}{2} - x)$ در ربع اول دایره مثلثاتی قرار دارد، درنتیجه علامت کسینوس مثبت است:

$$\sin 2x + \cos(\frac{\pi}{2} - x) = 0 \Rightarrow \sin 2x + \sin x = 0$$

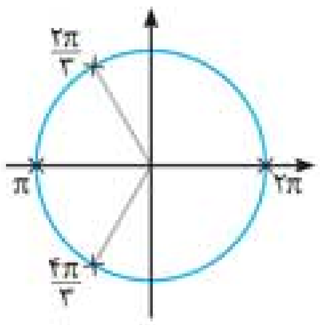
در ادامه از دو روش مسئله را حل می‌کنیم:

روش اول:

$$\sin 2x + \sin x = 0 \Rightarrow \sin 2x = -\sin x \Rightarrow \sin 2x = \sin(-x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi - x \Rightarrow 3x = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \\ 2x = (2k+1)\pi - (-x) \Rightarrow x = 2k\pi + \pi \end{cases}$$

به k اعداد صحیح می‌دهیم و جواب‌هایی را که در بازهٔ $[0, 2\pi]$ هستند، با هم جمع می‌کنیم:



$$\Rightarrow \text{مجموع جواب‌ها} = \frac{2\pi}{3} + \pi + \frac{4\pi}{3} + 2\pi = 5\pi$$

روش دوم: در این روش از اتحاد $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ استفاده می‌کنیم:

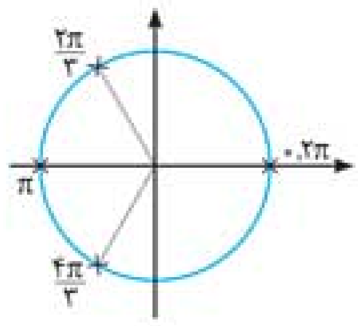
$$\sin 2x + \sin x = 0 \Rightarrow 2\sin x\cos x + \sin x = 0$$

$$\Rightarrow \sin x(2\cos x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \\ 2\cos x + 1 = 0 \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \cos\frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$$

به k، اعداد صحیح می‌دهیم و جواب‌هایی را که در بازهٔ $[0, 2\pi]$ هستند، با هم جمع می‌کنیم:



$$\Rightarrow \text{مجموع جواب‌ها} = \frac{2\pi}{3} + \pi + \frac{4\pi}{3} + 2\pi = 5\pi$$

۱۶۸.

در سمت راست تساوی به‌جای $\tan x$، عبارت $\frac{\sin x}{\cos x}$ و به‌جای $\cot x$، عبارت $\frac{\cos x}{\sin x}$ را قرار می‌دهیم:

$$2\cos 2x = \cot x(4\sin x + \tan x)$$

$$\Rightarrow 2\cos 2x = \frac{\cos x}{\sin x}(4\sin x + \frac{\sin x}{\cos x})$$

$$\Rightarrow 2\cos 2x = 4\cos x + 1$$

در سمت چپ تساوی از اتحاد $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ استفاده می‌کنیم:

$$2(2\cos^2 x - 1) = 4\cos x + 1 \Rightarrow 4\cos^2 x - 4\cos x - 3 = 0$$

با فرض $-1 \le t \le 1$، $\cos x$ را برابر t درنظرمی‌گیریم، درنتیجه معادله به‌صورت یک معادلهٔ درجه ۲ در می‌آید که با روش دلتا آن را حل می‌کنیم:

$$\cos x = t \Rightarrow 4t^2 - 4t - 3 = 0$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4(4)(-3) = 16 + 48 = 64$$

$$\begin{cases} t_1 = \frac{4 + \sqrt{64}}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} & \times \\ t_2 = \frac{4 - \sqrt{64}}{8} = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2} & \checkmark \end{cases}$$

t باید بین ۱ و ۱- باشد، اما $\frac{3}{2}$ از ۱ بزرگ‌تر است، پس غیرقابل قبول است.

$$t=-\frac{1}{2}\Rightarrow \cos x=-\frac{1}{2}\Rightarrow \cos x=\cos\frac{2\pi}{3}$$

$$\Rightarrow x=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}$$

۱۶۹.

سمت راست تساوی را به کمک اتحاد مزدوج تجزیه می‌کنیم:

$$\sin 4x=\sin^4 x-\cos^4 x$$

$$\Rightarrow \sin 4x=(\sin^2 x-\cos^2 x)\overbrace{(\sin^2 x+\cos^2 x)}^{1}$$

در سمت راست تساوی از اتحاد $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$ و در سمت چپ تساوی از اتحاد $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$ استفاده می‌کنیم، با این تفاوت که $4x$ برابر 2α و متناظر با آن $2x$ برابر α است:

$$\sin 4x=-(\cos^2 x-\sin^2 x)\Rightarrow 2\sin 2x\cos 2x=-\cos 2x$$

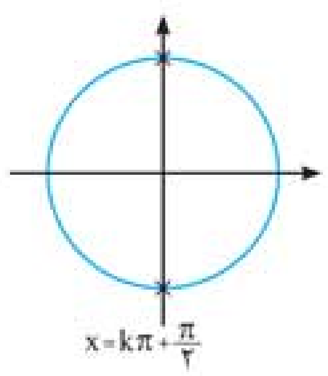
$$\Rightarrow 2\sin 2x\cos 2x+\cos 2x=0$$

$$\cos 2x(2\sin 2x+1)=0$$

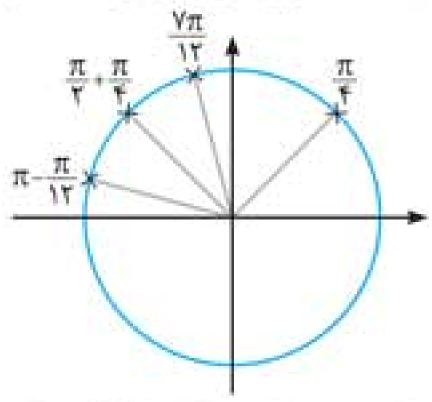
$$\Rightarrow\begin{cases}\cos 2x=0\Rightarrow 2x=k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\\ 2\sin 2x+1=0\Rightarrow \sin 2x=-\frac{1}{2}\Rightarrow \sin 2x=\sin(-\frac{\pi}{6})\quad (1)\end{cases}$$

$$\xrightarrow{(1)}\begin{cases}2x=2k\pi-\frac{\pi}{6}\Rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{12}\\ 2x=(2k+1)\pi-(-\frac{\pi}{6})\Rightarrow x=k\pi+\frac{7\pi}{12}\end{cases}$$

تذکر کسینوس در نقاط $k\pi+\frac{\pi}{2}$ که در دایره مشخص شده‌اند، صفر می‌شود:



با توجه به جواب‌های به دست آمده به k اعداد صحیح می‌دهیم و جواب‌های موجود را در بازهٔ $[0,\pi]$ (که به‌صورت زیر می‌شوند) با هم جمع می‌کنیم:



$$\text{مجموع جواب‌ها}=\frac{\pi}{4}+\frac{7\pi}{12}+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}+\pi-\frac{\pi}{12}=\frac{5\pi}{2}$$

۱۷۰.

در کمان کسینوس، به‌جای $\frac{3\pi}{8}$، زاویهٔ $(\frac{4\pi}{8}-\frac{\pi}{8})$ یعنی $(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8})$ را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\sin(x+\frac{\pi}{8})+\cos(x-\frac{3\pi}{8})=1$$

$$\Rightarrow \sin(x+\frac{\pi}{8})+\cos(x-(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}))=1$$

$$\Rightarrow \sin(x+\frac{\pi}{8})+\cos(-\frac{\pi}{2}+(x+\frac{\pi}{8}))=1$$

اگر عبارت $(x+\frac{\pi}{8})$ را α در نظر بگیریم، کمان کسینوس به صورت $(-\frac{\pi}{2}+\alpha)$ درمی‌آید. با ضرب کمان کسینوس در منفی تغییری ایجاد نمی‌شود، بنابراین کمان کسینوس به $(\frac{\pi}{2}-\alpha)$ تبدیل می‌شود که چون زاویهٔ $\frac{\pi}{2}$ دارد، نسبت مثلثاتی به سینوس تغییر می‌کند و چون انتهای کمان آن در ربع اول دایره مثلثاتی است، علامت کسینوس مثبت است:

$$\sin(x+\frac{\pi}{8})+\cos(\frac{\pi}{2}-(x+\frac{\pi}{8}))=1$$

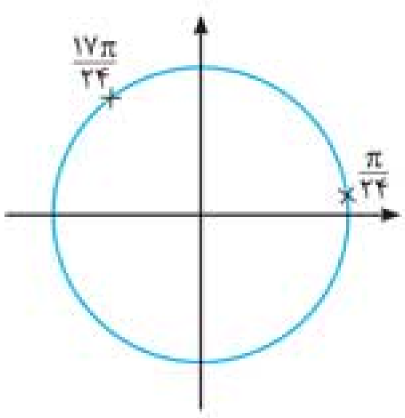
$$\Rightarrow \sin(x+\frac{\pi}{8})+\sin(x+\frac{\pi}{8})=1$$

$$\Rightarrow 2\sin(x+\frac{\pi}{8})=1\Rightarrow \sin(x+\frac{\pi}{8})=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sin(x+\frac{\pi}{8})=\sin\frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x+\frac{\pi}{8}=2k\pi+\frac{\pi}{6}\Rightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{24}\\ x+\frac{\pi}{8}=(2k+1)\pi-\frac{\pi}{6}\Rightarrow x=(2k+1)\pi-\frac{7\pi}{24}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\xrightarrow{x\in[0,2\pi]} x=\frac{\pi}{24}\\ \xrightarrow{x\in[0,2\pi]} x=\frac{17\pi}{24}\end{cases}$$



همان‌طورکه در دایرهٔ مثلثاتی بالا مشخص است، در بازهٔ $[0,2\pi]$ دو جواب به‌دست می‌آید:

$$\text{مجموع جواب‌ها}=\frac{\pi}{24}+\frac{17\pi}{24}=\frac{3\pi}{4}$$