

# پایا یازدهم هندسه

(رشته ریاضی)

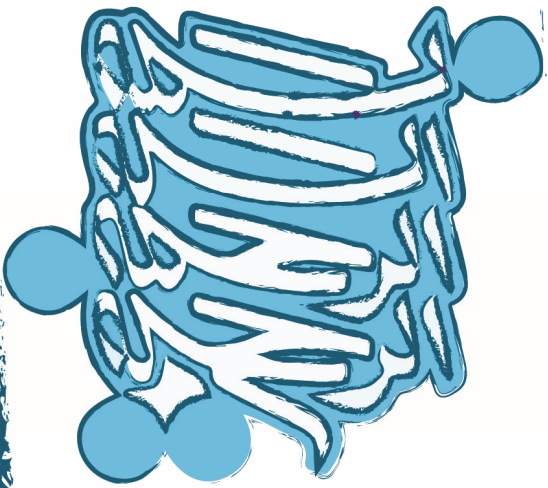
از مجموعه مرشد

مرتضی خمایی ابدی • کیان کریمی خراسانی

درسنامه

- پرسش‌های چهارگزینه‌ای (تألیفی و کنکور)
- پاسخ‌نامه تشریحی با نکته‌های کلیدی
- برای داوطلبان رشته‌های برتر دانشگاه‌های مشهور





## دانش‌آموزان گرامی

بسیار خرسندیم که کتاب‌های ریاضی «پایا» را در اختیار شما قرار می‌دهیم. این کتاب‌ها که از مجموعه کتاب‌های «مرشد» به حساب می‌آیند، موفقیت تحصیلی شما را تضمین می‌کنند. این مجموعه، برای دانش‌آموزانی به رشته‌ی تحریر درآمده است که مایلند در بهترین رشته‌های مهندسی یا علوم پایه‌ی دانشگاه‌های به‌نام کشور یا خارج از ایران تحصیل کنند. کتاب «هندسه یازدهم پایا» شما را برای شرکت در مسابقات، امتحانات و آزمون‌های ورودی دانشگاه‌ها در درس هندسه آماده می‌کند.

مؤلفان هندسه پایا پس از ارائه‌ی درسنامه‌ی مختصر، بانک سؤال کاملی را در اختیار شما قرار می‌دهند که شامل پرسش‌های چهارگزینه‌ای کنکور گروه‌های آزمایشی ریاضی و تجربی، مسائل مسابقات معتبر ریاضی (با توجه به استفاده‌ی طراحان کنکور از آن‌ها در سال‌های اخیر) و پرسش‌های تألیفی است. این پرسش‌ها براساس فصل‌ها و بخش‌های کتاب درسی طبقه‌بندی شده‌اند.

مطالعه‌ی پاسخنامه‌ی تشریحی همراه با نکته‌های کلیدی و آموزنده، موفقیت شما را تسهیل خواهد کرد.

در پایان، وظیفه‌ی خود می‌دانیم از مؤلفان محترم این کتاب، آقایان: مرتضی خمایی ابدی و کیان کریمی خراسانی و دبیر محترم مجموعه، آقای مهندس هادی عزیززاده، که کتاب زیر نظر ایشان تألیف شده است، تشکر کنیم.

همچنین از آقایان حمیدرضا بیات و سعید بیاتی که در تألیف این کتاب همکاری داشته‌اند و از خانم ملیحه محمدی آندرس که زحمت حروفچینی و صفحه‌آرایی، خانم نرگس سربندی که زحمت ترسیم شکل‌ها، و خانم بهاره خدای که زحمت طراحی کتاب را برعهده داشته‌اند، بسیار ممنونیم و برای همه‌ی عزیزان آرزوی موفقیت می‌کنیم.

## فهرست

### فصل اول: دایره

درس اول: مفاهیم اولیه و زاویه‌ها در دایره.....	۸
درس دوم: رابطه‌های طولی در دایره.....	۱۶
درس سوم: چندضلعی‌های محاطی و محیطی.....	۳۶
پاسخ‌نامه تشریحی.....	۴۶

### فصل دوم: تبدیل‌های هندسی و کاربردها

درس اول: تبدیل‌های هندسی.....	۶۸
درس دوم: کاربرد تبدیل‌ها.....	۸۳
پاسخ‌نامه تشریحی.....	۹۰

### فصل سوم: روابط طولی در مثلث

درس اول: قضیه سینوس‌ها.....	۱۰۴
درس دوم: قضیه کسینوس‌ها.....	۱۰۹
درس سوم: قضیه نیمسازهای زوایای داخلی و محاسبه طول نیمسازها.....	۱۱۶
درس چهارم: قضیه هرون (محاسبه ارتفاع‌ها و مساحت مثلث).....	۱۲۲
پاسخ‌نامه تشریحی.....	۱۳۶

### آزمون‌ها

آزمون سراسری سال ۹۶.....	۱۵۶
پاسخ‌نامه تشریحی آزمون سراسری سال ۹۶.....	۱۵۷
آزمون سراسری سال ۹۷.....	۱۵۹
پاسخ‌نامه تشریحی آزمون سراسری سال ۹۷.....	۱۶۰



# فصل اول: دایره

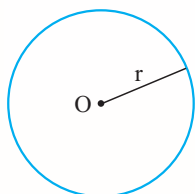
# درس اول: مفاهیم اولیه و زاویه‌ها در دایره

## مفاهیم اولیه و زاویه‌ها در دایره

**تعریف** نقاطی از صفحه که از یک نقطه به یک فاصله‌اند، تشکیل یک دایره می‌دهند.

این نقطه مرکز دایره و این فاصله شعاع دایره نام دارند.

معمولاً دایره‌ای به مرکز  $O$  و شعاع  $r$  را به صورت  $C(O, r)$  نشان می‌دهیم.



### وضعیت نقطه و دایره

حالت اول: نقطه داخل دایره است. در این صورت فاصله نقطه تا مرکز دایره کم‌تر از شعاع دایره است.

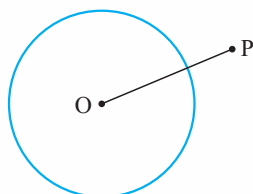
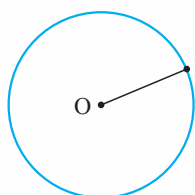
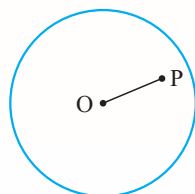
$$OP < r$$

حالت دوم: نقطه روی دایره است. در این صورت فاصله نقطه تا مرکز دایره برابر با شعاع دایره است.

$$OP = r$$

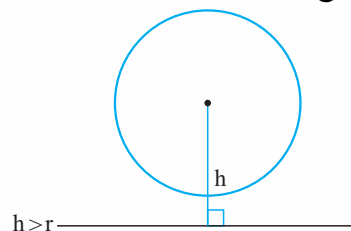
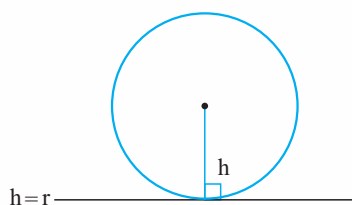
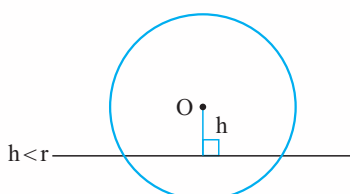
حالت سوم: نقطه بیرون دایره است. در این صورت فاصله نقطه تا مرکز دایره بیش‌تر از شعاع دایره است.

$$OP > r$$



### وضعیت خط و دایره

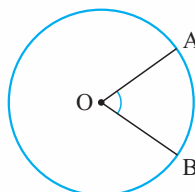
اگر شعاع دایره  $r$  باشد و فاصله یک خط تا مرکز دایره  $h$  باشد، سه حالت ممکن است رخ دهد:



اگر فاصله خط تا دایره کم‌تر از شعاع باشد، خط و دایره در دو نقطه برخورد دارند. اگر فاصله خط و دایره برابر با شعاع باشد، خط و دایره مماس هستند و اگر فاصله خط و دایره بیش‌تر از شعاع باشد، خط با دایره هیچ نقطه برخوردی ندارد.

وقتی از مرکز دایره به نقطه تماس دایره و خط وصل کنیم، بر خط عمود می‌شود.

زاویه مرکزی: زاویه‌ای است که رأس آن بر مرکز دایره واقع باشد. اندازه زاویه مرکزی با اندازه کمان روبه‌روی آن برابر است.

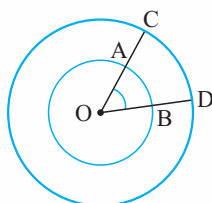


$$\widehat{O} = \widehat{AB}$$

ممکن است کمان‌های با اندازه‌های مساوی، طول‌های متفاوت داشته باشند.

$$\widehat{AB} = \widehat{CD}$$

طول کمان  $AB < CD$





طول کمان: برای به دست آوردن طول کمان، از نسبت زیر استفاده می‌کنیم:

$$\frac{\text{طول کمان}}{\text{محیط دایره}} = \frac{\text{اندازه کمان}}{360^\circ}$$

زاویه‌های مرکزی روبه‌رو به کمان‌های برابر، با هم برابرند و برعکس.

$$\widehat{AOB} = \widehat{COD} \Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{CD}$$

$$\widehat{AB} = \widehat{CD} \Rightarrow \widehat{AOB} = \widehat{COD}$$

اگر در یک دایره دو وتر برابر باشند، کمان‌های نظیرشان برابرند و برعکس.

$$AB = CD \Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{CD}$$

$$\widehat{AB} = \widehat{CD} \Rightarrow AB = CD$$

قطر عمود بر یک وتر، آن وتر و کمان نظیر به آن را نصف می‌کند.

$$OH \perp AB \Rightarrow \begin{cases} AH = HB \\ \widehat{AC} = \widehat{CB} \end{cases}$$

در هر دایره، خطی که از مرکز به وسط وتر وصل می‌شود بر آن وتر عمود است و کمان نظیر به آن را نصف می‌کند.

$$AH = HB \Rightarrow \begin{cases} OH \perp AB \\ \widehat{AC} = \widehat{CB} \end{cases}$$

در هر دایره خطی که از مرکز دایره به وسط کمان وصل می‌شود بر آن وتر عمود است و آن وتر را نصف می‌کند.

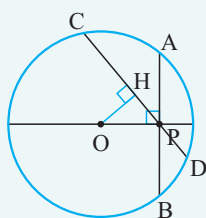
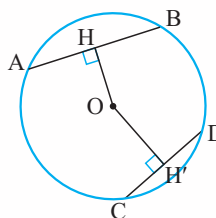
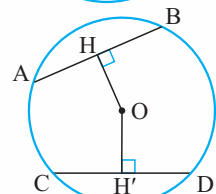
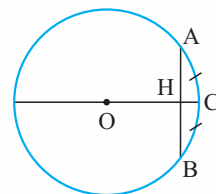
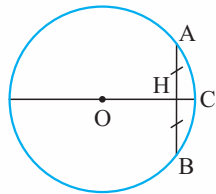
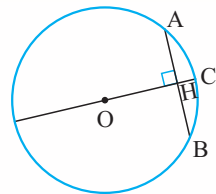
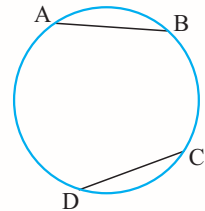
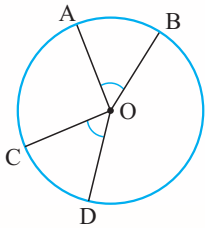
$$AC = CB \Rightarrow \begin{cases} OH \perp AB \\ AH = HB \end{cases}$$

در هر دایره، وترهای مساوی از مرکز دایره به یک فاصله‌اند و بالعکس.

$$AB = CD \Leftrightarrow OH = OH'$$

در هر دایره، وتر نزدیک‌تر به مرکز بزرگ‌تر است و بالعکس.

$$OH < OH' \Leftrightarrow AB > CD$$



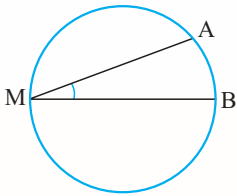
**مثال** نقطه P درون دایره است. بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین وتر گذرنده از P چه هستند؟

**پاسخ** بدیهی است که بزرگ‌ترین وتر گذرنده از P، قطر دایره است. کوچک‌ترین وتر گذرنده از P، وتری عمود بر قطر دایره، در نقطه P است.

$$OH < OP \Rightarrow CD > AB$$

زاویهٔ محاطی: زاویه‌ای که رأس آن روی دایره و ضلع‌های آن، وترهای دایره باشند. اندازهٔ زاویهٔ محاطی برابر با نصف اندازهٔ کمان روبه‌رو به آن است.

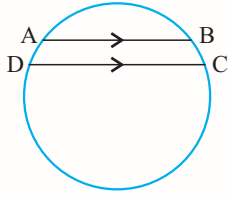
$$\widehat{M} = \frac{\widehat{AB}}{2}$$



اگر دو وتر موازی رسم کنیم، کمان‌های بین آن‌ها برابر خواهند بود و بالعکس.

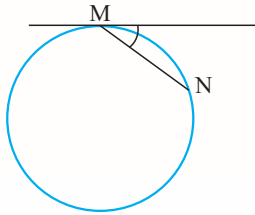
$$AB \parallel DC \Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{BC}$$

$$\widehat{AD} = \widehat{BC} \Rightarrow AB \parallel DC$$



زاویهٔ ظلی: زاویه‌ای که رأس آن روی دایره، یکی از اضلاع آن، وتر دایره و ضلع دیگر، مماس بر دایره باشد.

$$\widehat{M} = \frac{\widehat{MN}}{2}$$

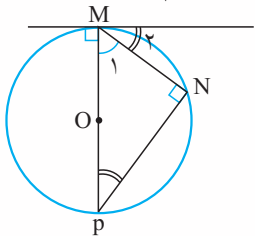


**اثبات** از M به مرکز دایره وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا دایره را در نقطهٔ P قطع کند، از P به N وصل می‌کنیم.

زاویهٔ N روبه‌رو به قطر است، پس  $90^\circ$  است و OM در نقطه M بر خط مماس عمود است.

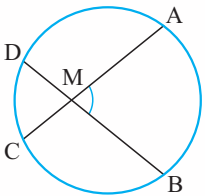
$$\left. \begin{aligned} \widehat{M}_2 + \widehat{M}_1 &= 90^\circ \\ \widehat{P} + \widehat{M}_1 &= 90^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \widehat{P} = \widehat{M}_2$$

$$\left. \begin{aligned} \widehat{P} &= \widehat{M}_2 \\ \widehat{P} &= \frac{\widehat{MN}}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \widehat{M}_2 = \frac{\widehat{MN}}{2}$$

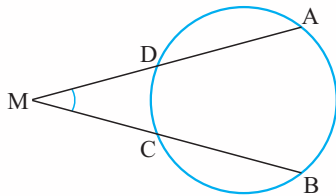


### زاویه‌های بین دو وتر دایره

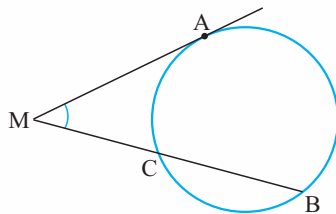
$$\widehat{M} = \frac{\widehat{AB} + \widehat{CD}}{2}$$



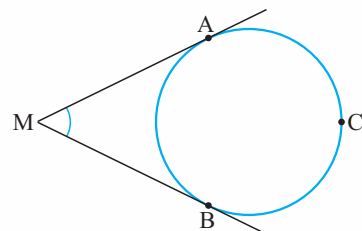
$$\widehat{M} = \frac{\widehat{AB} - \widehat{CD}}{2}$$



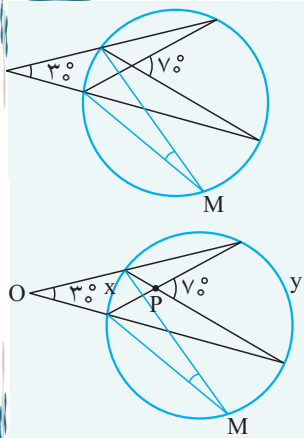
$$\widehat{M} = \frac{\widehat{AB} - \widehat{AC}}{2}$$



$$\widehat{M} = \frac{\widehat{ACB} - \widehat{AB}}{2}$$



**مثال** زاویه  $\widehat{M}$  را به دست آورید.

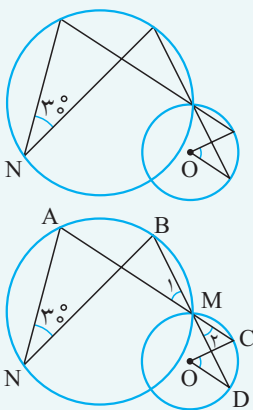


**پاسخ**

$$\left. \begin{aligned} \widehat{P} = \frac{x+y}{2} = 7^\circ &\Rightarrow y+x = 14^\circ \\ \widehat{O} = \frac{y-x}{2} = 3^\circ &\Rightarrow y-x = 6^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow x = 4^\circ$$

$$\widehat{M} = \frac{x}{2} = 2^\circ$$

**مثال** زاویه  $\widehat{O}$  را به دست آورید.

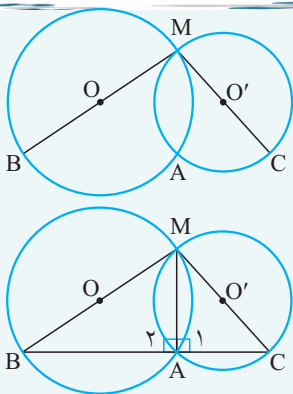


**پاسخ**

$$\widehat{N} = 3^\circ \Rightarrow \widehat{AB} = 6^\circ \Rightarrow \widehat{M}_1 = 3^\circ$$

$$\widehat{M}_2 = \widehat{M}_1 = 3^\circ \Rightarrow \widehat{CD} = 6^\circ \Rightarrow \widehat{O} = 6^\circ$$

**مثال** نشان دهید نقاط A، B و C روی خط راست هستند.



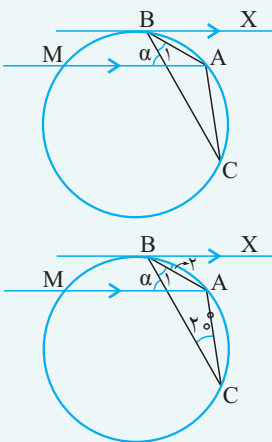
**پاسخ**

زاویه‌های  $\widehat{A}_1$  و  $\widehat{A}_2$  روبرو به قطر هستند. در نتیجه:

$$\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 = 90^\circ \Rightarrow \widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 = 180^\circ$$

A، B و C روی خط راست هستند.

**مثال** زاویه  $\alpha$  را به دست آورید.  $\widehat{B}_1 = 3^\circ$ ،  $\widehat{C} = 2^\circ$  و  $BX \parallel MA$ .

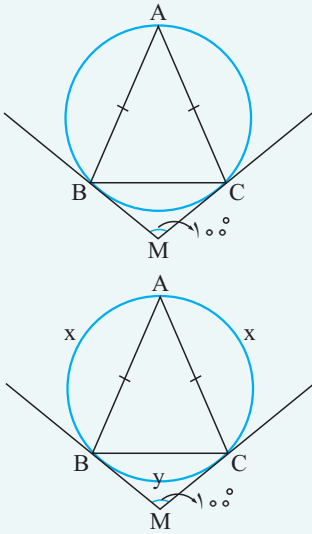


**پاسخ**

$$\left. \begin{aligned} \widehat{B}_2 = \frac{\widehat{AB}}{2} \\ \widehat{C} = \frac{\widehat{AB}}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \widehat{B}_2 = \widehat{C} = 2^\circ$$

$$\left. \begin{aligned} MA \parallel BX \Rightarrow \alpha = \widehat{B}_1 + \widehat{B}_2 \\ \widehat{B}_1 = 3^\circ, \widehat{B}_2 = 2^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \alpha = 5^\circ$$

**مثال** MB و MC مماس بر دایره هستند و  $AB = AC$ . زاویه  $\widehat{A}$  را به دست آورید.

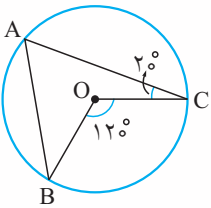


**پاسخ**

$$\begin{aligned}
 AB = AC &\Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{AC} \\
 \widehat{AB} = \widehat{AC} = x, \widehat{BC} = y \\
 \widehat{M} = \frac{2x - y}{2} = 100^\circ &\Rightarrow \left. \begin{aligned} 2x - y &= 200^\circ \\ 2x + y &= 360^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow y = 80^\circ \\
 \widehat{A} = \frac{y}{2} &= 40^\circ
 \end{aligned}$$

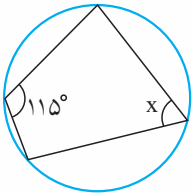
**پرسش‌های چهارگزینه‌ای**

۱. در شکل روبه‌رو اندازه زاویه B چند درجه است؟



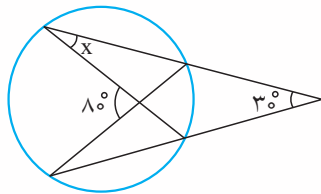
- ۲۰° (۱)
- ۳۰° (۲)
- ۴۰° (۳)
- ۵۰° (۴)

۲. در شکل روبه‌رو x چند درجه است؟



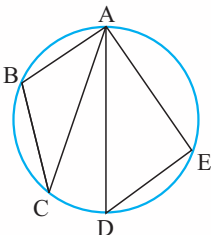
- ۴۵° (۱)
- ۵۵° (۲)
- ۶۵° (۳)
- ۷۵° (۴)

۳. **مسئله** در شکل روبه‌رو، اندازه x چند درجه است؟



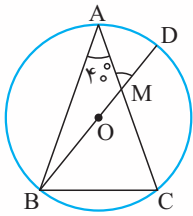
- ۲۰° (۱)
- ۲۵° (۲)
- ۳۰° (۳)
- ۳۵° (۴)

۴. در شکل روبه‌رو، اگر  $\widehat{B} = 110^\circ$  و  $\widehat{E} = 95^\circ$ ، آن‌گاه زاویه  $\widehat{CAD}$  چند درجه است؟



- ۲۰° (۱)
- ۲۵° (۲)
- ۴۰° (۳)
- ۵۰° (۴)

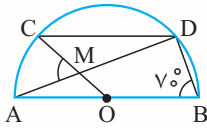
۵. مثلث متساوی الساقین  $ABC$  ( $AB=AC$ ) در دایره‌ای به مرکز  $O$  محاط شده است. اگر  $\widehat{A}=40^\circ$ ، آنگاه اندازه زاویه  $M$  چند



درجه است؟

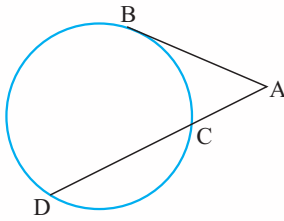
- (۱)  $40^\circ$
- (۲)  $50^\circ$
- (۳)  $60^\circ$
- (۴)  $70^\circ$

۶. **مسئله** در شکل روبه‌رو، اگر  $\widehat{B}=70^\circ$  و  $CD \parallel AB$ ، آنگاه اندازه زاویه  $M$  چند درجه است؟



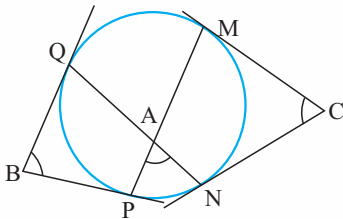
- (۱)  $40^\circ$
- (۲)  $50^\circ$
- (۳)  $60^\circ$
- (۴)  $70^\circ$

۷. در شکل روبه‌رو،  $AB$  بر دایره مماس است. اگر  $\widehat{BC}=3\alpha$ ،  $\widehat{BD}=5\alpha$  و  $\widehat{CD}=4\alpha$ ، اندازه زاویه  $A$  چند درجه است؟



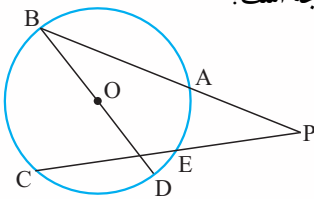
- (۱)  $30^\circ$
- (۲)  $45^\circ$
- (۳)  $60^\circ$
- (۴)  $75^\circ$

۸. **مسئله** در شکل روبه‌رو، اضلاع زاویه‌های  $B$  و  $C$  بر دایره مماس‌اند. کدام رابطه بین زوایای  $A$ ،  $B$  و  $C$  برقرار است؟ (کتاب درسی)



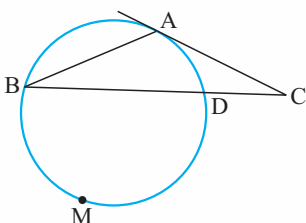
- (۱)  $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$
- (۲)  $\widehat{A} = \frac{\widehat{B} + \widehat{C}}{2}$
- (۳)  $2\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 360^\circ$
- (۴)  $\widehat{B} + \widehat{C} - \widehat{A} = 90^\circ$

۹. در شکل روبه‌رو،  $O$  مرکز دایره است،  $\widehat{AB}=120^\circ$ ،  $\widehat{ED}=20^\circ$ ،  $\widehat{CD}=80^\circ$ . اندازه زاویه  $P$  چند درجه است؟



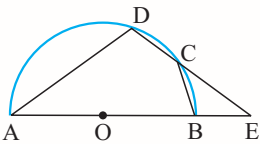
- (۱)  $20^\circ$
- (۲)  $30^\circ$
- (۳)  $60^\circ$
- (۴)  $90^\circ$

۱۰. در شکل مقابل، مماس  $AC$  بر دایره با وتر  $AB$  از دایره برابری. اگر کمان  $\widehat{DMB}$  برابر  $222^\circ$  درجه باشد. زاویه  $C$  چند درجه



- است؟
- (۱)  $21^\circ$
  - (۲)  $22^\circ$
  - (۳)  $23^\circ$
  - (۴)  $24^\circ$

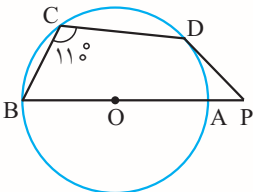
۱۱. در شکل روبه‌رو، نیم‌دایره‌ای به قطر  $AB$  رسم شده است. اگر  $BC = CD$  و  $AD = DE$ . اندازه زاویه  $A$  چند درجه



است؟

- (۱)  $24^\circ$
- (۲)  $30^\circ$
- (۳)  $36^\circ$
- (۴)  $42^\circ$

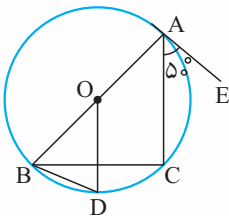
۱۲. در شکل روبه‌رو،  $AB$  قطر دایره است،  $PD$  بر دایره مماس است و  $\widehat{C} = 11^\circ$ . اندازه زاویه  $P$  چند درجه است؟



است؟

- (۱)  $50^\circ$
- (۲)  $60^\circ$
- (۳)  $45^\circ$
- (۴)  $55^\circ$

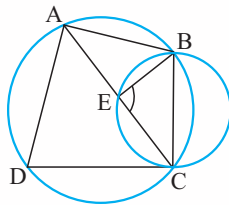
۱۳. در شکل روبه‌رو،  $AE$  بر دایره مماس است و  $OD$  با  $AC$  موازی است. اندازه زاویه  $CBD$  چند درجه است؟



است؟

- (۱)  $15^\circ$
- (۲)  $20^\circ$
- (۳)  $25^\circ$
- (۴)  $30^\circ$

۱۴. در شکل روبه‌رو،  $CD$  بر دایره کوچک مماس است. اگر  $\widehat{BAD} = 100^\circ$ ، آنگاه اندازه زاویه  $BEC$  چند درجه است؟

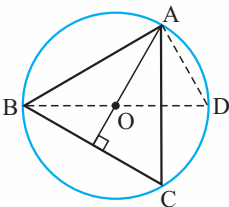


است؟

- (۱)  $80^\circ$
- (۲)  $100^\circ$
- (۳)  $40^\circ$
- (۴)  $50^\circ$

۱۵. در شکل روبه‌رو،  $O$  محل تلاقی ارتفاع‌های مثلث  $ABC$  است. زاویه  $\widehat{AOD}$  برابر کدام است؟

(سراسری ریاضی - ۹۲)



است؟

- (۱)  $\widehat{OBC}$
- (۲)  $\widehat{CAD}$
- (۳)  $\widehat{OAC}$
- (۴)  $\widehat{ADO}$

۱۶. در مثلث  $ABC$  داریم  $\widehat{B} = 50^\circ$  و  $\widehat{C} = 60^\circ$  نیمساز داخلی زاویه  $A$  و عمود منصف ضلع  $BC$  در نقطه  $M$  متقاطع‌اند.

زاویه  $\widehat{MBC}$  چند درجه است؟

- (۱)  $25^\circ$
- (۲)  $30^\circ$
- (۳)  $35^\circ$
- (۴)  $40^\circ$

۱۷. در مثلث متساوی‌الساقین  $(AB = AC)ABC$  نقطه  $O$  در امتداد  $AC$ ، مرکز دایره‌ای است که در نقطه  $B$  بر ضلع  $AB$

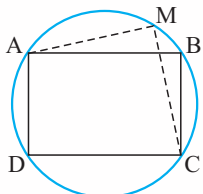
(سراسری ریاضی - ۹۴)

مماس است. امتداد  $BC$  این دایره را در  $D$  قطع کرده است. مثلث  $OCD$  چگونه است؟

- (۱) متساوی‌الساقین
- (۲) قائم‌الزاویه
- (۳) قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین
- (۴) غیر مشخص

۱۸. در شکل روبه‌رو،  $ABCD$  یک مستطیل به اضلاع ۲ و ۳ است و نقطه دلخواه  $M$  روی محیط دایره قرار دارد. مقدار  $MA^2 + MC^2$

کدام است؟



- (۱) ۹
- (۲) ۱۱
- (۳) ۱۳
- (۴) ۱۵

۱۹. **مسئله** در مربعی به ضلع ۲ واحد، دایره‌ای به مرکز یک رأس آن و شعاع  $\frac{2}{5}$  واحد، دو ضلع مربع را قطع می‌کند. فاصله نزدیک‌ترین رأس مربع تا نقطه تقاطع، کدام است؟

(سراسری ریاضی - ۹۵)

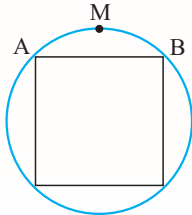
- (۱)  $\frac{1}{4}$  (۲)  $\frac{1}{2}$  (۳)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  (۴)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۲۰. **رئوس** مربع ABCD به ضلع ۴ واحد، مفروض است. شعاع دایره‌ی گذرا بر دو رأس A و B و مماس بر ضلع CD کدام است؟

(سراسری خارج از کشور ریاضی - ۹۵)

- (۱)  $\frac{2}{25}$  (۲)  $\frac{2}{5}$  (۳)  $2\sqrt{2}$  (۴) ۳

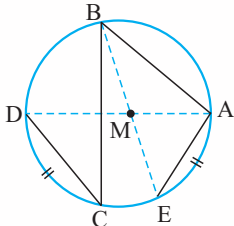
۲۱. **رئوس** در شکل مقابل، ضلع مربع برابر ۲ واحد است، فاصله‌ی وسط کمان AB از نزدیک‌ترین رأس مربع چقدر است؟



- (۱)  $\sqrt{2}-\sqrt{2}$  (۲)  $\sqrt{4}-2\sqrt{2}$  (۳)  $\sqrt{2}$  (۴)  $\sqrt{1+\sqrt{2}}$

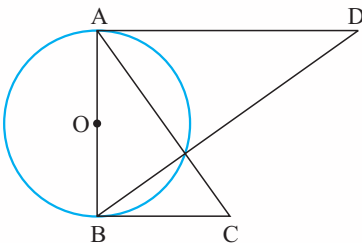
(سراسری خارج از کشور ریاضی - ۹۳)

۲۲. در شکل مقابل، اگر  $AB=6$ ،  $BC=8$ ،  $CD=3$  و  $\widehat{AE}=\widehat{CD}$ ، آن‌گاه اندازه‌ی AM کدام است؟



- (۱) ۲ (۲)  $\frac{2}{25}$  (۳)  $\frac{2}{5}$  (۴)  $\frac{2}{75}$

۲۳. در شکل روبه‌رو، AD و BC بر دایره‌ای به قطر AB مماس هستند. اگر  $AD=x$  و  $BC=y$ ، طول قطر دایره با کدام برابر است؟



- (۱)  $\frac{x+y}{2}$  (۲)  $\sqrt{xy}$  (۳)  $\frac{xy}{x+y}$  (۴)  $\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$

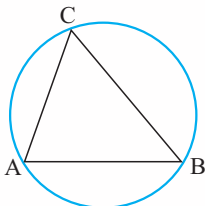
۲۴. **رئوس** در یک دایره به مرکز O، شعاع OA را به اندازه‌ی خود تا نقطه‌ی B امتداد می‌دهیم. از نقطه‌ی B بر مماس دلخواه دایره، عمود BD را فرود می‌آوریم. اگر  $\widehat{ADB}=34^\circ$  باشد، زاویه‌ی OAD چند درجه است؟

(سراسری ریاضی - ۹۴)

- (۱) ۶۸ (۲) ۷۳ (۳) ۱۰۲ (۴) ۱۴۶

۲۵. **مسئله** در شکل روبه‌رو،  $\widehat{A}=70^\circ$  و  $\widehat{B}=50^\circ$ . از نقطه‌ی O مرکز دایره، بر اضلاع AB، AC و BC به ترتیب عمودهای OP، OQ و OR رسم می‌شود. کدام درست است؟

(کتاب درسی)



- (۱)  $OP > OR > OQ$  (۲)  $OP > OQ > OR$  (۳)  $OQ > OR > OP$  (۴)  $OQ > OP > OR$

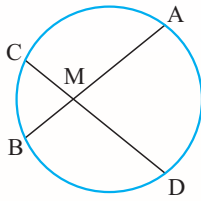
(کتاب درسی)

۲۶. **مسئله** در دایره‌ی  $C(O, 2)$  وتر  $AB=2\sqrt{3}$  رسم شده است. کمان  $\widehat{AB}$  چند درجه است؟

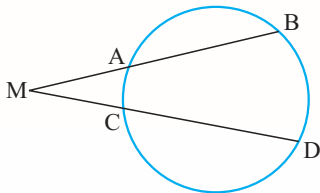
- (۱)  $60^\circ$  (۲)  $90^\circ$  (۳)  $120^\circ$  (۴)  $150^\circ$

رابطه های طولی در دایره

اگر دو وتر AB و CD در نقطه ای مانند M (درون یا بیرون دایره) یکدیگر را قطع کنند، آن گاه:

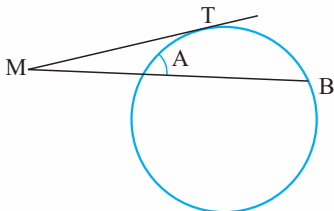


$$MA \cdot MB = MC \cdot MD$$



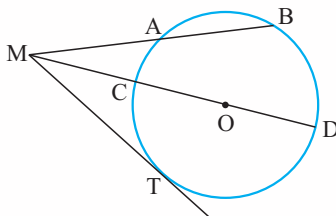
$$MA \cdot MB = MC \cdot MD$$

از نقطه M خارج دایره، مماس MT بر دایره رسم شده است.



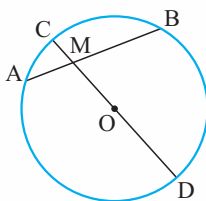
$$MT^2 = MA \cdot MB$$

فاصله نقطه M تا مرکز دایره را d و شعاع دایره را r در نظر می گیریم.



$$\left. \begin{array}{l} MC = d - R \\ MD = d + R \end{array} \right\} \Rightarrow MC \cdot MD = d^2 - r^2$$

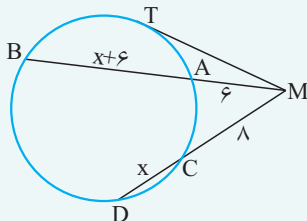
$$MT^2 = MA \cdot MB = MC \cdot MD = d^2 - r^2$$



$$\left. \begin{array}{l} MC = R - d \\ MD = R + d \end{array} \right\} \Rightarrow MC \cdot MD = r^2 - d^2$$

$$MA \cdot MB = MC \cdot MD = r^2 - d^2$$

مثال در شکل مقابل، طول مماس MT چند است؟



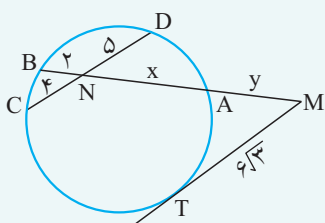
پاسخ

$$\left. \begin{array}{l} MT^2 = MA \cdot MB = MC \cdot MD \\ MA \cdot MB = 6 \times (12 + x) \\ MC \cdot MD = 8 \times (8 + x) \end{array} \right\} \Rightarrow 6 \times (12 + x) = 8 \times (8 + x) \Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow x = 4$$

$$MT^2 = MA \cdot MB \Rightarrow MT^2 = 6 \times (12 + 4) \Rightarrow MT^2 = 16 \times 6 \Rightarrow MT = 4\sqrt{6}$$



**مثال** در شکل مقابل، مقدار  $y$  را به دست آورید.



**پاسخ**

$$NA \cdot NB = NC \cdot ND \Rightarrow 2x = 20 \Rightarrow x = 10$$

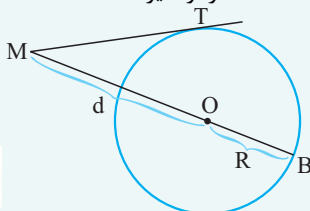
$$MT^2 = MA \cdot MB \Rightarrow (6\sqrt{3})^2 = y \times (y + 12) \Rightarrow y^2 + 12y = 108 \Rightarrow y^2 + 12y - 108 = 0$$

$$\Rightarrow (y + 18)(y - 6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = -18 \text{ غیرقابل قبول} \\ y = 6 \end{cases}$$

**مثال** کم‌ترین و بیش‌ترین فاصله نقطه  $M$  از محیط دایره  $(C)$  برابر  $5$  و  $9$  است. طول مماس که از نقطه  $M$  بر دایره رسم شده، چند است؟

**پاسخ**

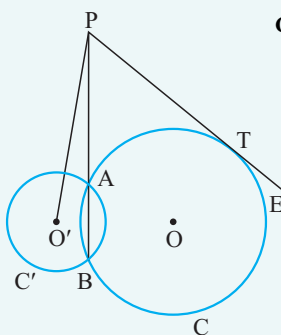
بیش‌ترین فاصله یک نقطه تا محیط دایره برابر با  $d + R$  است که در آن  $R$  شعاع دایره و  $d$  فاصله نقطه تا مرکز دایره است. کم‌ترین فاصله یک نقطه (خارج دایره) تا محیط دایره برابر با  $d - R$  است.



$$MT^2 = d^2 - R^2 \Rightarrow MT^2 = (d - R)(d + R) \Rightarrow MT^2 = 5 \times 9 \Rightarrow MT^2 = 45 \Rightarrow MT = \sqrt{45}$$

**مثال** در شکل روبه‌رو، دایره‌های  $C(O, R)$  و  $C'(O', 3)$  در  $A$  و  $B$  متقاطع‌اند و  $PT$  بر دایره  $C$

مماس است. اگر  $PT = 4$ ، اندازه  $O'P$  چقدر است؟



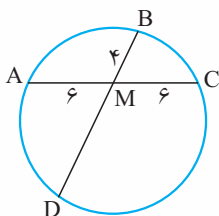
**پاسخ**

شعاع دایره  $C'$  برابر با  $3$  است و طول  $PO'$  را  $d$  در نظر می‌گیریم.

$$\left. \begin{aligned} C'(O', 3): PA \cdot PB = d^2 - 3^2 \\ C(O, R): PA \cdot PB = PT^2 = 16 \end{aligned} \right\} \Rightarrow d^2 - 3^2 = 16 \Rightarrow d^2 = 25 \Rightarrow d = 5$$

### پرسش‌های چهارگزینگی

۲۷. در شکل روبه‌رو، طول پاره‌خط  $MD$  کدام است؟



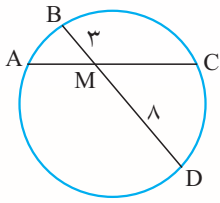
۸ (۱)

۹ (۲)

۱۲ (۳)

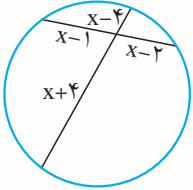
۱۶ (۴)

۲۸. رسم در شکل روبه‌رو،  $AC = 10$ ، طول پاره‌خط  $MC$  کدام است؟ ( $MA < MC$ )



- ۵ (۱)
- ۶ (۲)
- ۸ (۳)
- ۹ (۴)

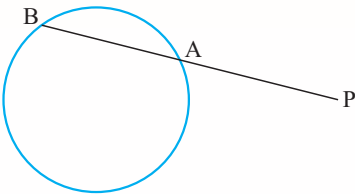
۲۹. در شکل روبه‌رو، مقدار  $x$  کدام است؟



- ۴ (۱)
- ۵ (۲)
- ۶ (۳)
- ۷ (۴)

۳۰. رسم نزدیک‌ترین نقطه از دایره‌ای به شعاع ۵ واحد تا نقطه مفروض  $P$  برابر ۸ واحد است. قاطع  $PAB$  نسبت به دایره طوری

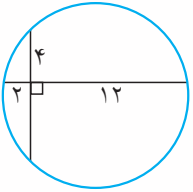
(سراسری ریاضی - ۹۰)



رسم شده است که  $PA - AB = 2$ ، اندازه  $AB$  چه قدر است؟

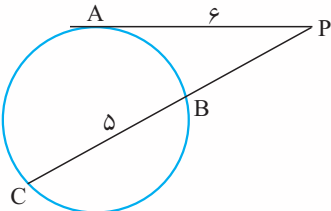
- ۹ (۱)
- ۶ (۲)
- ۷ (۳)
- ۵ (۴)

۳۱. رسم در شکل روبه‌رو، شعاع دایره کدام است؟



- $3\sqrt{6}$  (۱)
- $5\sqrt{2}$  (۲)
- $2\sqrt{7}$  (۳)
- $2\sqrt{5}$  (۴)

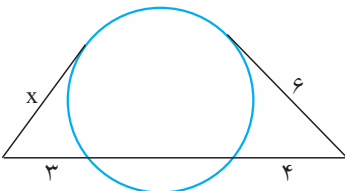
۳۲. در شکل روبه‌رو،  $PA = 6$  و  $BC = 5$ . طول پاره‌خط  $PB$  کدام است؟



- ۳ (۱)
- ۴ (۲)
- ۵ (۳)
- ۶ (۴)

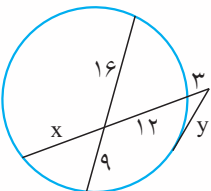
(سراسری ریاضی - ۹۱)

۳۳. رسم در شکل مقابل، اندازه  $x$  چند واحد است؟



- $3\sqrt{2}$  (۱)
- $2\sqrt{5}$  (۲)
- $2\sqrt{6}$  (۳)
- ۵ (۴)

۳۴. در شکل مقابل، مقدار  $(x-y)$  کدام است؟



- ۱ (۱)
- ۲ (۲)
- ۳ (۳)
- ۴ (۴)

۳۵. در دایره‌ای به قطر ۱۲ واحد فاصله مرکز دایره از وتر  $AB$  برابر ۲ واحد است. نقطه  $C$  در امتداد  $AB$  به فاصله  $CB = 2\sqrt{2}$

(سراسری قاج از کشور ریاضی - ۹۲)

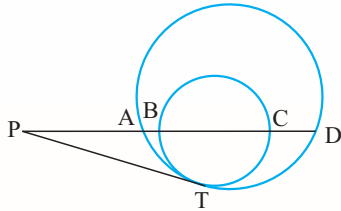
انتخاب شده است. طول قطعه مماسی که از  $C$  بر دایره رسم شود، کدام است؟

- $5\sqrt{2}$  (۴)
- ۷ (۳)
- $3\sqrt{5}$  (۲)
- $2\sqrt{10}$  (۱)

۳۶. **مسئله** دو دایره  $C(O,R)$  و  $C'(O',R')$  در نقاط  $P$  و  $Q$  متقاطع‌اند. از نقطه دلخواه  $M$  واقع بر امتداد  $PQ$ ، مماس‌های  $MT$  و  $MT'$  را به ترتیب بر دایره‌های  $C$  و  $C'$  رسم می‌کنیم. اگر  $R' = 2R$  باشد، حاصل  $\frac{MT'}{MT}$  کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳)  $\frac{1}{2}$  (۴) به محل نقطه  $M$  بستگی دارد.

۳۷. **مسئله** در شکل روبه‌رو،  $PT$  بر هر دو دایره مماس است. اگر  $PA = 4$ ،  $PC = 10$  و  $BD = 6$ ، آنگاه اندازه  $PB$  کدام است؟



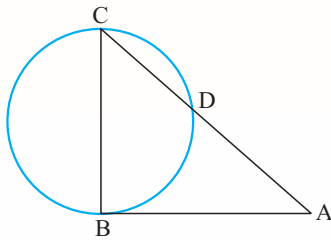
(۱) ۲

(۲) ۴

(۳) ۶

(۴) ۸

۳۸. **مسئله** خط  $AB$  بر دایره‌ای به قطر  $BC = 6$  مماس است. اگر  $CD = 4$ ، طول پاره‌خط  $AD$  کدام است؟



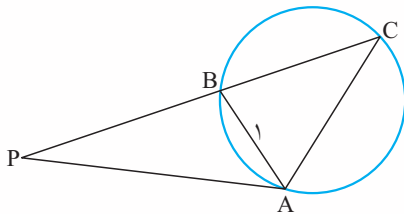
(۱) ۳

(۲) ۵

(۳) ۷

(۴) ۹

۳۹. **مسئله** در شکل زیر،  $PA$  مماس بر دایره است و  $B$  وسط  $PC$  است. می‌دانیم که  $AB = 1$ . طول  $AC$  چقدر است؟



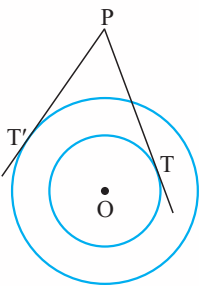
(۱)  $\frac{3}{2}$

(۲)  $\sqrt{3}$

(۳)  $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$

(۴) ۲

۴۰. **مسئله** در شکل روبه‌رو، دو دایره هم‌مرکز هستند که شعاع‌هایشان  $R = 3$  و  $R' = 5$ . مقدار  $PT'^2 - PT^2$  کدام است؟



(۱) ۸

(۲) ۱۲

(۳) ۱۶

(۴) ۲۰

۴۱. **مسئله** نقطه  $P$  درون دایره‌ای به شعاع  $10$  قرار دارد و فاصله‌اش تا مرکز دایره  $6$  است، وتر  $AB$  از نقطه  $P$  می‌گذرد به طوری

که  $AB = 20$ ، طول  $PA$  کدام می‌تواند باشد؟

(۱) ۱۸

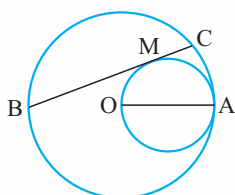
(۲) ۱۶

(۳) ۱۴

(۴) ۱۲

۴۲. **مسئله** در دایره‌ای به شعاع  $OA$  وتر  $BC$  مماس بر دایره‌ای به قطر  $OA$  رسم شده است. مقدار  $MB \cdot MC$  برابر کدام است؟

(سراسری فارغ از کشور ریاضی - ۹۴)



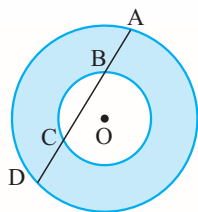
(۱)  $MO^2$

(۲)  $MA^2$

(۳)  $OA^2$

(۴)  $MA \cdot MO$

۴۳. **رِسوار** در شکل روبه‌رو، وتر  $AD$  از دایره بزرگ‌تر، دایره کوچک‌تر را در نقاط  $C$  و  $B$  قطع کرده است. اگر  $AB = 4$  و



$BC = 5$ ، آن‌گاه مساحت ناحیه رنگی کدام است؟

(۱)  $20\pi$

(۲)  $36\pi$

(۳)  $16\pi$

(۴)  $25\pi$

۴۴. **نکته‌رار** نقطه  $P$  به روی وتر  $AB$  به طول ۱۵ واحد از دایره‌ای چنان قرار دارد که آن وتر را به نسبت ۱ به ۴ تقسیم کرده است.

(سراسری ریاضی - ۸۲)

طول کوتاه‌ترین وتر از دایره گذرنده بر نقطه  $P$  کدام است؟

(۱) ۸

(۲) ۹

(۳) ۱۲

(۴) ۱۵

۴۵. **رِسوار** در شکل روبه‌رو،  $BC = 6$  قطر دایره و میانه‌های  $BM$  و  $CN$  در مثلث  $ABC$  امتداد یافته‌اند تا دایره را در نقاط  $Q$  و  $P$  قطع کنند.

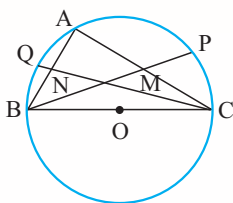
مقدار  $BM \cdot MP + CN \cdot NQ$  برابر با کدام است؟

(۱) ۴

(۲) ۹

(۳) ۱۶

(۴) ۳۶



۴۶. **رِسوار** چهار تا مستطیل  $2 \times 4$  مطابق شکل روبه‌رو در یک دایره قرار گرفته‌اند. طول قطر دایره کدام است؟

(۱)  $\sqrt{84}$

(۲)  $\sqrt{85}$

(۳)  $\sqrt{86}$

(۴)  $\sqrt{87}$

