کنکور+

ریاضیات جامع تجربی

دهم، یازدهم و دوازدهم

- درس‌نامه‌ای کامل و روان منطبق بر کتاب‌های درسی جدید
- بیش از ۲۰۰۰ تست طبقه بندی شده در ۳ سطح
- آزمون‌های جامع در انتهای هر فصل
- به انضمام تست‌های کنکور سراسری داخل و خارج از کشور ۹۷
- پاسخ‌نامه کاملاً تشریحی با روش‌های حل متنوع

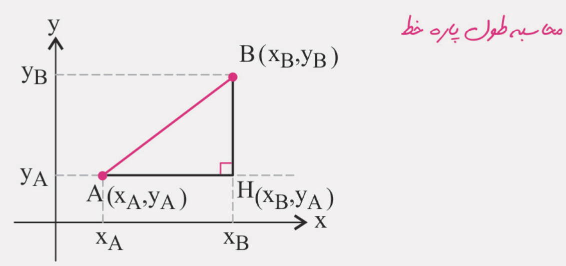
جلد اول

محمّد اسداللّهی
وهاب تقی‌زاده
علیرضا فضائلی

فهرست

۱۰ هندسه تحلیلی

در این فصل ابتدا به معرفی دستگاه مختصات دکارتی می‌پردازیم. سپس طریقهٔ محاسبه مختصات نقطهٔ وسط پاره‌خط و طول پاره‌خط را بیان می‌کنیم. بعد به روش‌های نوشتن معادلهٔ خط و محاسبه شیب می‌پردازیم. در انتهای فصل به فاصله یک نقطه از خط و فاصله دو خط موازی اشاراتی می‌کنیم تا پایان خوبی برای این فصل باشد.

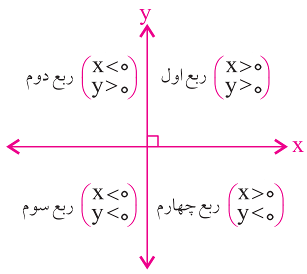


هندسه تحلیلی

- دستگاه مختصات دکارتی
- انتقال محور های مختصات
- شیب (ضریب زاویه)
- معادله خط های خاص
- فاصله یک نقطه از خط
- مختصات نقطه وسط پاره خط
- فاصله دو نقطه (طول پاره خط)
- معادله خط
- وضعیت نسبی دو خط
- فاصله دو خط موازی

دستگاه مختصات دکارتی

برای تعیین موقعیت یک نقطه در صفحه یک روش آن است که از دستگاه مختصات دکارتی استفاده کنیم. این دستگاه از دو محور عمود بر هم xها و yها که در مبدأ متقاطع‌اند تشکیل شده است. این محورها، صفحه را بجز نقاط روی خود محورها به چهار ناحیه تقسیم می‌کند که هر کدام از آن‌ها را یک ربع مختصاتی می‌نامیم.



هر نقطه دلخواه در صفحه مانند A متناظر یک زوج مرتب (x,y) است و برعکس. x (مولفه اول) را طول نقطه A و y (مولفه دوم) را عرض نقطه A می‌نامیم. علامت مولفه‌ها بر مبنای ناحیه‌ای که نقطه در آن قرار می‌گیرد به صورت روبروست. توجه داشته باشید اگر نقطه‌ای بر روی محور طول‌ها (xها) قرار گیرد عرض آن برابر صفر و اگر نقطه‌ای بر روی محور عرض‌ها (yها) قرار گیرد طول آن برابر صفر خواهد شد.

اگر نقطه $A(m^۲-m,m^۲+m)$ در ناحیه چهارم باشد، حدود m کدام است؟

۱) $m>۱$ ۲) $m<۰$ ۳) $۰<m<۱$ ۴) $-۱<m<۰$

می‌دانیم اگر نقطه‌ای در ناحیه چهارم باشد، x آن (طول نقطه) مثبت و y آن (عرض نقطه) منفی است، بنابراین:

$$\left.\begin{array}{l} x>۰ \Rightarrow m^۲-m>۰ \Rightarrow m(m-۱)>۰ \Rightarrow m<۰ \text{ یا } m>۱ \\ y<۰ \Rightarrow m^۲+m<۰ \Rightarrow m(m+۱)<۰ \Rightarrow -۱<m<۰ \end{array}\right\} \xrightarrow{\cap} -۱<m<۰$$

مختصات نقطه وسط پاره‌خط

فرض کنید نقاط $A(x_A,y_A)$ و $B(x_B,y_B)$ دو نقطه در صفحه باشند و نقطهٔ M وسط پاره‌خط AB باشد؛ در این صورت مختصات نقطهٔ M به صورت زیر به دست می‌آید:

$$M(x_M,y_M) \Rightarrow \begin{cases} x_M=\dfrac{x_A+x_B}{۲} \\ y_M=\dfrac{y_A+y_B}{۲} \end{cases}$$

در واقع باید میانگین مؤلفه‌های دو نقطهٔ داده شده را تعیین کنیم.

اگر نقطهٔ $M(۴,۲)$ وسط پاره‌خط AB با مختصات $A(۱,۲)$ و $B(m,n)$ باشد، حاصل $m+n$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

کافی است میانگین مؤلفه‌های نقاط A و B را برابر مولفه‌های نقطهٔ M قرار دهیم:

$$\begin{cases} x_M=\dfrac{x_A+x_B}{۲}=\dfrac{۱+m}{۲}=۴ \Rightarrow m=۷ \\ y_M=\dfrac{y_A+y_B}{۲}=\dfrac{۲+n}{۲}=۲ \Rightarrow n=۲ \end{cases} \Rightarrow m+n=۹$$

برای یافتن نقطهٔ N بر روی پاره‌خط AB به طوری که پاره‌خط را به نسبت k تقسیم کند. یعنی $\frac{AN}{NB}=k$، می‌توان مختصات نقطهٔ N را از رابطهٔ زیر تعیین کرد:

$$N(x_N,y_N)\Rightarrow\begin{cases}x_N=\frac{۱}{k+۱}x_A+\frac{k}{k+۱}x_B\\ y_N=\frac{۱}{k+۱}y_A+\frac{k}{k+۱}y_B\end{cases}$$

اگر نقاط $A(۱,-۱)$ و $B(۵,۳)$ مختصات دو سر پاره‌خط AB باشد. به ازای کدام مختصات برای نقطهٔ N تساوی $AN=۳NB$ برقرار است؟

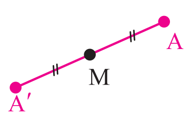
۱) $(۳,۱)$ ۲) $(۲,۴)$ ۳) $(۴,۲)$ ۴) $(۱,۳)$

روش اول: $N(x,y)$ را در نظر می‌گیریم. چون $AN=۳NB$ پس می‌توان گفت $NB=\frac{۱}{۴}AB$. اگر نقطهٔ M را وسط پاره‌خط AB اختیار کنیم، داریم $AM=MB$ پس $MB=\frac{۱}{۲}AB$. حال اگر N را وسط MB اختیار کنیم داریم $NB=\frac{۱}{۴}AB$.

$$M=\begin{cases}x_M=\frac{x_A+x_B}{۲}=\frac{۵+۱}{۲}=۳\\ y_M=\frac{y_A+y_B}{۲}=\frac{-۱+۳}{۲}=۱\end{cases}\Rightarrow M=(۳,۱)\quad,\quad N=\begin{cases}x_N=\frac{x_M+x_B}{۲}=\frac{۳+۵}{۲}=۴\\ y_N=\frac{y_M+y_B}{۲}=\frac{۱+۳}{۲}=۲\end{cases}\Rightarrow N=(۴,۲)$$

روش دوم: با توجه به این که $\frac{AN}{NB}=۳$، می‌توان مختصات نقطهٔ N را با استفاده از نکتهٔ قبل به صورت زیر تعیین کرد:

$$N=\frac{۱}{k+۱}A+\frac{k}{k+۱}B\xrightarrow{k=۳}N=\frac{۱}{۴}A+\frac{۳}{۴}B=\frac{۱}{۴}(۱,-۱)+\frac{۳}{۴}(۵,۳)=(۴,۲)$$



اگر A' قرینه نقطه A نسبت به نقطهٔ M باشد، آنگاه M وسط پاره‌خط AA' است و داریم:

$$M=\frac{A+A'}{۲}\Rightarrow A'=۲M-A$$

توجه داشته باشید که در حالت خاص قرینه نقطه (x,y) نسبت به مبدأ، نقطهٔ $(-x,-y)$ است.

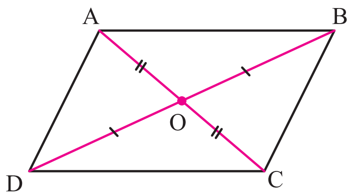
قرینهٔ نقطه $A(-۱,۲)$ نسبت به مبدأ مختصات به صورت $B(۲m+۳,۱-n)$ است، مقدار $۳m-n$ کدام است؟

۱) -۶ ۲) ۶ ۳) صفر ۴) ۳

چون $B(۲m+۳,۱-n)$ قرینهٔ نقطهٔ $A(-۱,۲)$ نسبت به مبدأ است، مبدأ وسط پاره‌خط AB قرار دارد. بنابراین میانگین مؤلفه‌های نقاط A و B را برابر صفر قرار می‌دهیم.

$$\begin{cases}\frac{x_A+x_B}{۲}=۰\Rightarrow -۱+۲m+۳=۰\Rightarrow m=-۱\\ \frac{y_A+y_B}{۲}=۰\Rightarrow ۲+۱-n=۰\Rightarrow n=۳\end{cases}\Rightarrow ۳m-n=-۶$$

در متوازی‌الاضلاع، دو قطر یکدیگر را نصف می‌کنند یعنی نقطه O وسط پاره‌خط AC و هم‌چنین وسط پاره‌خط BD است. بنابراین با توجه به شکل:



$$x_o=\frac{x_A+x_C}{۲}=\frac{x_B+x_D}{۲},\quad y_o=\frac{y_A+y_C}{۲}=\frac{y_B+y_D}{۲}\Rightarrow\begin{cases}x_A+x_C=x_B+x_D\\ y_A+y_C=y_B+y_D\end{cases}$$

به عبارت دیگر مجموع طول‌های دو سر یک قطر با مجموع طول‌های دو سر قطر دیگر برابر است و به طور مشابه مجموع عرض‌های دو سر یک قطر با مجموع عرض‌های دو سر قطر دیگر برابر است.

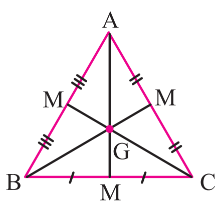
اگر AC قطر متوازی‌الاضلاع $ABCD$ و $A(-۱,۷)$ و $B(۲,-۳)$ و $C(۶,۰)$ باشند. مختصات D کدام است؟

۱) $(۲,۱۰)$ ۲) $(۳,۱۰)$ ۳) $(۲,۹)$ ۴) $(۳,۹)$

۲ در متوازی‌الاضلاع جمع طول‌ها و جمع عرض‌ها در دو سر قطر با قطر دیگر برابر است، بنابراین:

$$\begin{cases}x_A+x_C=x_B+x_D\\ y_A+y_C=y_B+y_D\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-۱+۶=۲+x_D\\ ۷+۰=-۳+y_D\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_D=۳\\ y_D=۱۰\end{cases}\Rightarrow D(۳,۱۰)$$

در هر مثلث، نقطه تلاقی سه میانه را مرکز ثقل مثلث می‌نامند. مختصات مرکز ثقل برابر میانگین مختصات ۳ رأس است.



$$G(x_G,y_G)\Rightarrow\begin{cases}x_G=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{۳}\\ y_G=\dfrac{y_A+y_B+y_C}{۳}\end{cases}$$

توجه داشته باشید که مرکز ثقل (G)، هر میانه را به نسبت ۲ به ۱ تقسیم می‌کند.

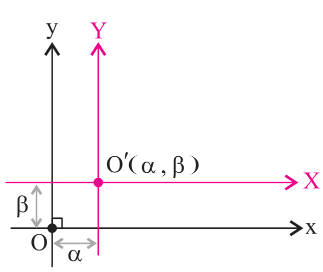
مختصات مرکز ثقل مثلث $A(۲,۱)$، $B(-۳,۲)$ و $C(۴,-۳)$ کدام است؟

۱) $(۰,۱)$ ۲) $(۱,۰)$ ۳) $(-۳,-۳)$ ۴) $(۳,۰)$

۲

$$G(x_G,y_G)\Rightarrow\begin{cases}x_G=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{۳}=\dfrac{۲-۳+۴}{۳}=۱\\ y_G=\dfrac{y_A+y_B+y_C}{۳}=\dfrac{۱+۲-۳}{۳}=۰\end{cases}\Rightarrow G(۱,۰)$$

انتقال محورهای مختصات



هرگاه محورهای مختصات را به موازات امتداد اولیه‌شان چنان انتقال دهیم که مبدأ مختصات به نقطه $O'(\alpha,\beta)$ انتقال یابد، مختصات نقاط در دستگاه مختصات جدید از رابطهٔ زیر بدست می‌آید.

$$\begin{cases}x=X+\alpha\\ y=Y+\beta\end{cases}$$

در این رابطه، X و Y مختصات نقاط در دستگاه مختصات جدید، x و y مختصات نقاط در دستگاه مختصات قدیم و $O'(\alpha,\beta)$ مختصات مبدأ دستگاه جدید، در دستگاه قدیم است.

نقطه $A(۲,-۴)$ در دستگاه xoy مفروض است. دستگاه مختصات را به کدام نقطه انتقال دهیم که در دستگاه جدید مختصات A به صورت $A'(-۲,۳)$ باشد؟

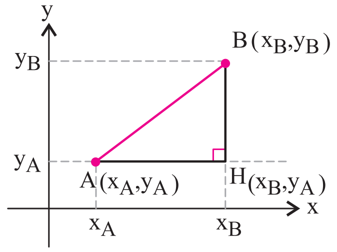
۱) $(-۷,۴)$ ۲) $(۷,-۴)$ ۳) $(-۴,۷)$ ۴) $(۴,-۷)$

می‌دانیم مختصات نقطه A در دستگاه جدید از رابطهٔ زیر به دست می‌آید.

$$\begin{cases} x = X + \alpha \\ y = Y + \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲ = -۲ + \alpha \\ -۴ = ۳ + \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = ۴ \\ \beta = -۷ \end{cases} \Rightarrow (۴,-۷)$$

فاصله دو نقطه (طول پاره‌خط)

فرض کنیم $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ دو نقطه دلخواه در صفحه مختصات باشند. به کمک شکل زیر و استفاده از قضیهٔ فیثاغورس طول پاره‌خط AB را به دست می‌آوریم.



H و A هم عرض هستند. بنابراین فاصله بین این دو نقطه برابر اختلاف طول آن‌ها است. $AH = |x_B - x_A|$

H و B هم طول هستند. بنابراین فاصله بین این دو نقطه برابر اختلاف عرض آن‌ها است. $BH = |y_B - y_A|$

در مثلث قائم‌الزاویه AHB، بنابر قضیهٔ فیثاغورس داریم:

$$AB^۲ = AH^۲ + HB^۲ = (x_B - x_A)^۲ + (y_B - y_A)^۲ \Rightarrow AB = \sqrt{(x_B - x_A)^۲ + (y_B - y_A)^۲}$$

فاصله دو نقطه دلخواه $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ از هم برابر است با:

$$AB = \sqrt{(\text{تفاضل طول‌ها})^۲ + (\text{تفاضل عرض‌ها})^۲} = \sqrt{(x_B - x_A)^۲ + (y_B - y_A)^۲}$$

همچنین در حالت خاص فاصله نقطه دلخواه A از مبدأ مختصات از رابطه $OA = \sqrt{x_A^۲ + y_A^۲}$ محاسبه می‌شود.

اگر $A(۴,۴)$ و $C(۱,۱)$ دو رأس مقابل یک مربع باشند، مساحت مربع کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۸

ابتدا طول قطر مربع یعنی پاره‌خط AC را محاسبه می‌کنیم:

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^۲ + (y_C - y_A)^۲} = \sqrt{(۴-۱)^۲ + (۴-۱)^۲} = \sqrt{۱۸} = ۳\sqrt{۲}$$

می‌دانیم اگر اندازه ضلع مربع برابر a باشد، طول قطر آن $a\sqrt{۲}$ است. بنابراین طول ضلع مربع برابر ۳ و مساحت آن برابر ۹ است.

اگر $A(۴,۵)$ و $B(۲,۱)$، طول میانه OM در مثلث OAB کدام است؟ (O مبدأ مختصات است).

۱) $۲\sqrt{۲}$ ۲) $۲\sqrt{۳}$ ۳) $۳\sqrt{۲}$ ۴) $۳\sqrt{۳}$

۳ میانه مثلث خطی است که از یک رأس به وسط ضلع مقابل آن وصل می‌شود. ابتدا M یعنی وسط ضلع AB را پیدا می‌کنیم.

$$M(\frac{x_A+x_B}{۲},\frac{y_A+y_B}{۲}) \Rightarrow M(۳,۳)$$

حال طول میانه OM را محاسبه می‌کنیم:

$$OM=\sqrt{x_M^۲+y_M^۲}=\sqrt{۹+۹}=\sqrt{۱۸}=۳\sqrt{۲}$$

شیب (ضریب زاویه)

شیب یک خط برابر است با نسبت جابه‌جایی عمودی به جابه‌جایی افقی. به بیان دقیق‌تر شیب یک خط برابر است با میزان تغییرات y، وقتی که به اندازهٔ ۱ واحد روی محور xها جابه‌جا شویم.

شیب خط L که از دو نقطهٔ $A(x_۱,y_۱)$ و $B(x_۲,y_۲)$ می‌گذرد $(x_۱ \neq x_۲)$، برابر است با:

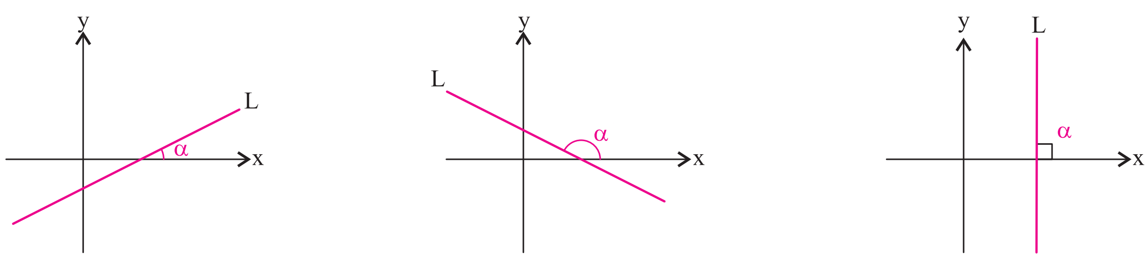
$$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}$$

اگر طول نقطه‌ای روی یک خط به شیب $m=-۳$ را ۲ واحد افزایش دهیم، مقدار تغییرات عرض نقطه کدام است؟

۱) ۶ واحد کم می‌شود　۲) ۶ واحد زیاد می‌شود　۳) ۲ واحد زیاد می‌شود　۴) ۲ واحد کم می‌شود

۱ منظور از شیب خط برابر (۳-) این است که اگر یک واحد طول نقطه را زیاد کنیم، ۳ واحد عرض آن کم می‌شود. حالا اگر ۲ واحد طول آن را زیاد کنیم، ۶=۳×۲ واحد عرض آن نقطه کم می‌شود.

اگر خط L با جهت مثبت محور xها زاویه‌ای به اندازه α بسازد، آنگاه $\tan\alpha$ در صورت وجود همان m یعنی شیب خط L است. اگر α حاده باشد، شیب خط مثبت، اگر α منفرجه باشد، شیب خط منفی و اگر $\alpha=۹۰^\circ$ باشد، شیب خط تعریف نمی‌شود (در این حالت خط بر محور xها عمود است)..



توجه داشته باشید که هر چه قدر مطلق شیب خط بیشتر باشد، اندازهٔ زاویه‌اش با جهت مثبت ox بیشتر و با oy کمتر می‌شود.

اندازهٔ زاویهٔ خطی که از نقاط $A(۱,۰)$ و $B(۰,۱)$ می‌گذرد با جهت مثبت محور xها برابر است با:

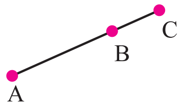
۱) ۴۵°　۲) ۱۳۵°　۳) ۳۰°　۴) ۹۰°

۲

$$\tan\alpha=m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{۱-۰}{۰-۱}=-۱ \Rightarrow \alpha=۱۳۵^\circ$$

اگر سه نقطه $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ و $C(x_c, y_c)$ بر روی یک خط راست (بر یک استقامت) باشند، آنگاه:

$$m_{AB} = m_{BC} \Rightarrow \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_A}$$



به ازای چه مقدار a سه نقطهٔ (۱,۱) و (۳,a) و (۲,۰) بر یک خط راست واقع‌اند؟

۱) ۲-　　۲) ۱　　۳) ۱-　　۴) ۲

اگر نقاط $A(۱,۱)$، $B(۳,a)$ و $C(۲,۰)$ بر یک خط راست واقع باشند، باید $m_{AB} = m_{BC}$، بنابراین:

$$m_{AB} = m_{BC} \Rightarrow \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} \Rightarrow \frac{a-۱}{۳-۱} = \frac{۰-a}{۲-۳} \Rightarrow \frac{a-۱}{۲} = a \Rightarrow a-۱ = ۲a \Rightarrow a = -۱$$

معادله خط

معادله یک خط در دستگاه مختصات دکارتی به صورت $ax + by + c = ۰$ است که در آن a و b هر دو با هم صفر نیستند. معادلهٔ خـط، رابطه‌ای بین x و y است که بین مختصات تمام نقاط خط برقرار است. بنابراین اگر نقطهٔ A روی خط باشـد، مختصـات آن در معادلـه خط صدق می‌کند.

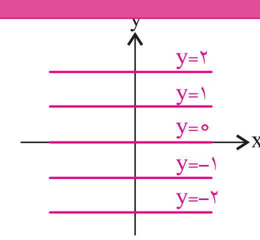
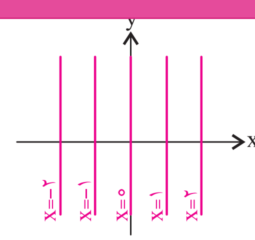
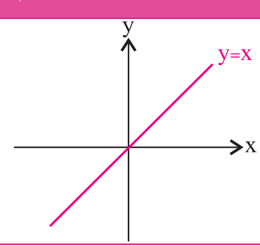
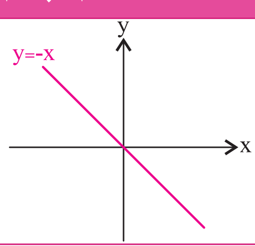
اگر $ax + by + c = ۰$ معادله یک خط راست باشد، آنگاه: $ax + by + c = ۰ \Rightarrow by = -ax - c \Rightarrow y = (-\frac{a}{b})x + (-\frac{c}{b})$

با فرض $-\frac{a}{b} = m$ *و* $-\frac{c}{b} = h$ *به شرطی که* $b \neq ۰$ *داریم:* $y = mx + h$

و اگر $b = ۰$، آنگاه معادله خط به صورت $x = k$ خواهد بود. چرا؟!

توجه داشته باشید معادلهٔ $ax + by + c = ۰$ با شرط $a^۲ + b^۲ \neq ۰$ (یعنی a و b همزمان صفر نیستند) را معادله ضمنی خط می‌نامند و معادله‌های $y = mx + h$ یا $x = k$ را معادله صریح خط می‌نامند.

معادله برخی خط‌های خاص

خط‌های افقی(موازی محور x ها)	خط‌های قائم (موازی محور y ها)	خط نیمساز ربع اول و سوم	خط نیمساز ربع دوم و چهارم
			
معادلـه خـط افقـی همیشـه بـه صـورت $y = k$ اسـت و تمـام نقاط روی این خط دارای عـرض ثابت k هسـتند. شـیب خـط در این حالت برابر صفر است.	معادله خـط عمـودی همیشـه بـه صورت $x = l$ است و تمام نقاط روی این خط دارای طول ثابـت l هستند. شیب خـط در ایـن حالت تعریف نمی‌شود.	معادله خط شامل نیمساز ربـع اول و سوم به صورت $y = x$ اسـت و تمـام نقـاط روی ایـن خـط دارای طول و عرض برابر هستند.	معادله خط شامل نیمساز ربع دوم و چهـارم بـه صـورت $y = -x$ است و تمام نقاط روی این خـط دارای طـول و عـرض قرینـه هستند.

اگر نمودار $y=\dfrac{x^{۳}+ax+b-۱}{x^{۲}+۱}$ منطبق بر نیمساز ربع‌های اول و سوم باشد، حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۲-

۳۱ ابتدا کسر را پس از دسته‌بندی تفکیک می‌کنیم:

$$y=\frac{x(x^{۲}+a)}{x^{۲}+۱}+\frac{b-۱}{x^{۲}+۱}$$

چون نمودار بر نیمساز ربع‌های اول و سوم یعنی $y=x$ منطبق شده، باید ضریب x، ۱ و جمله ثابت آن صفر باشد. در نتیجه:

$$\begin{cases}\dfrac{x^{۲}+a}{x^{۲}+۱}=۱\Rightarrow a=۱\\[2mm] \dfrac{b-۱}{x^{۲}+۱}=۰\Rightarrow b=۱\end{cases}\Rightarrow a+b=۲$$

اگر نمودار $(a-۱)x-(b+۳)y+c-۲=۰$ منطبق بر نیمساز ربع‌های دوم و چهارم باشد. حاصل $a+b+c$ کدام است؟

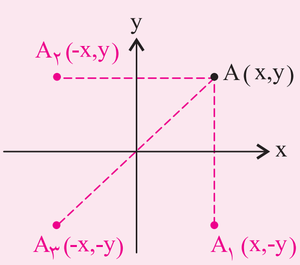
۱) ۲ ۲) ۰ ۳) ۲- ۴) ۴-

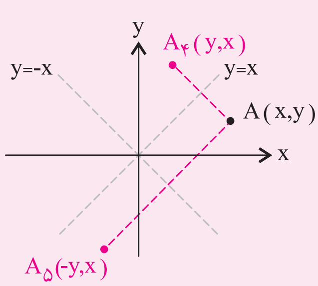
۳۲ چون نمودار بر نیمسازهای ربع‌های دوم و چهارم (یعنی $y=-x$) منطبق شده، باید بعد از آن که معادله خط را به صورت $y=mx+h$ در آوردیم، ضریب x، (-۱) و جمله ثابت آن صفر باشد، در نتیجه:

$$y=\frac{-(a-۱)}{-(b+۳)}x+\frac{-(c-۲)}{-(b+۳)}\Rightarrow y=\frac{a-۱}{b+۳}x+\frac{c-۲}{b+۳}$$

$$\begin{cases}\dfrac{a-۱}{b+۳}=-۱\Rightarrow a-۱=-b-۳\Rightarrow a+b=-۲\\[2mm] \dfrac{c-۲}{b+۳}=۰\Rightarrow c-۲=۰\Rightarrow c=۲\end{cases}\Rightarrow a+b+c=-۲+۲=۰$$

جمع‌بندی قرینه‌یابی





۱ قرینهٔ نقطهٔ $A(x,y)$ نسبت به محور xها، نقطهٔ $A_{۱}(x,-y)$ است.

۲ قرینهٔ نقطهٔ $A(x,y)$ نسبت به محور yها، نقطهٔ $A_{۲}(-x,y)$ است.

۳ قرینهٔ نقطهٔ $A(x,y)$ نسبت به مبدأ مختصات نقطهٔ $A_{۳}(-x,-y)$ است.

۴ قرینهٔ نقطهٔ $A(x,y)$ نسبت نیمساز ناحیهٔ اول و سوم، نقطهٔ $A_{۴}(y,x)$ است.

۵ قرینهٔ نقطهٔ $A(x,y)$ نسبت به نیمساز ناحیهٔ دوم و چهارم، نقطهٔ $A_{۵}(-y,-x)$ است.

۶ قرینهٔ نقطهٔ $A(x,y)$ نسبت به خط $x=a$، نقطهٔ $A_{۶}(۲a-x,y)$ است.

۷ قرینهٔ نقطهٔ $A(x,y)$ نسبت به خط $y=b$، نقطهٔ $A_{۷}(x,۲b-y)$ است.

قرینهٔ خط به معادلهٔ $۳y - ۲x = ۴$ را نسبت به خط $y = x$، خط d می‌نامیم. عرض از مبدأ خط d کدام است؟ *(سراسری ۹۷)*

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) -۱ ۴) -۲

۴ برای به دست آوردن قرینه یک خط نسبت به خط $y = x$، کافی است جای x و y را با هم عوض کنیم.

$$۳y - ۲x = ۴ \xrightarrow[x \to y]{y \to x} ۳x - ۲y = ۴$$

حال برای بدست آوردن عرض از مبدأ، x را برابر صفر می‌گذاریم:
$$x = ۰ \Rightarrow -۲y = ۴ \Rightarrow y = -۲$$

اگر قرینهٔ خط به معادله $y = ax + b$ نسبت به محور xها، خط به معادلهٔ $y = -۳x + ۲$ باشد، $a + b$ چقدر است؟

۱) -۳ ۲) ۰ ۳) ۱ ۴) ۳

۳ قرینه هر نقطه به مختصات (x, y) نسبت به محور xها به صورت $(x, -y)$ است، بنابراین برای تعیین معادلهٔ قرینه $y = ax + b$ نسبت به محور xها، y را به $-y$ تبدیل می‌کنیم، بنابراین:

$$y = ax + b \xrightarrow{y \Rightarrow -y} -y = ax + b \Rightarrow y = (-a)x + (-b)$$

معادله به دست آمده را هم‌ارز $y = -۳x + ۲$ قرار می‌دهیم، داریم:

$$\begin{cases} -a = -۳ \Rightarrow a = ۳ \\ -b = ۲ \Rightarrow b = -۲ \end{cases} \Rightarrow a + b = ۳ - ۲ = ۱$$

معادله خط شامل میانه AM در مثلثی که مختصات سه رأس آن $A(۱,۰)$، $B(۰,۲)$ و $C(۲,۲)$ باشد، کدام است؟

۱) $y = ۱$ ۲) $x = ۱$ ۳) $x + y = ۱$ ۴) $x - y = ۱$

۲ ابتدا مختصات نقطهٔ M وسط ضلع BC را بدست می‌آوریم.
$$M\left(\frac{۰+۲}{۲}, \frac{۲+۲}{۲}\right) \Rightarrow M(۱,۱)$$

شیب میانه AM که از نقاط $A(۱,۰)$ و $M(۱,۱)$ می‌گذرد، محاسبه می‌کنیم.
$$m = \frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{۱-۰}{۱-۱} = \frac{۱}{۰} = \text{تعریف نشده}$$

شیب تعریف نشده ، بنابراین $x = ۱$ معادله شامل خط میانه AM است.

نقاط $A(۲\beta, \beta)$ و $B(\beta + ۳, \beta - ۴)$ دو رأس مثلث ABC و معادلهٔ خط شامل میانهٔ نظیر رأس C، $y = ۵$ است. مختصات وسط AB کدام است؟

۱) $(۵,۹)$ ۲) $(۵,۱۲)$ ۳) $(۹,۵)$ ۴) $(۱۲,۵)$

۴ مختصات نقطهٔ M وسط ضلع AB برابر است با $M\left(\frac{۳\beta+۳}{۲}, \frac{۲\beta-۴}{۲}\right)$. نقطهٔ M روی میانه CM واقع است و چون معادله خط شامل CM، $y = ۵$ می‌باشد؛ عرض M برابر ۵ است. یعنی:
$$\frac{۲\beta - ۴}{۲} = ۵ \Rightarrow ۲\beta - ۴ = ۱۰ \Rightarrow ۲\beta = ۱۴ \Rightarrow \beta = ۷$$

بنابراین نقطه M به صورت $(۱۲,۵)$ است.

دو خط متمایز به معادلات $y = ۲x + m$ و $y = mx + ۲$ یکدیگر را روی نیمساز ربع اول و سوم قطع می‌کنند. m چقدر است؟

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) -۳ ۴) ۳

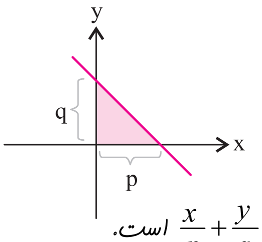
۱ دو خط به معادله‌های $y = ۲x + m$ و $y = mx + ۲$ را قطع می‌دهیم:

$$\begin{cases} y = ۲x + m \\ y = mx + ۲ \end{cases} \Rightarrow ۲x + m = mx + ۲ \Rightarrow x(۲ - m) = ۲ - m \Rightarrow x = \frac{۲-m}{۲-m} = ۱$$

پس $x = ۱$ و $y = ۲ + m$. چون نقطه تقاطع یعنی $(۱, ۲+m)$ روی نیمساز ربع اول و سوم است، طول و عرض آن برابر است، بنابراین:

$$x = y \Rightarrow ۲ + m = ۱ \Rightarrow m = -۱$$

برای هر معادله خط می‌توانیم نقاط برخورد با محورهای x و y را پیدا کنیم.
اگر در معادله خط x را برابر صفر قرار دهیم، نقطهٔ تلاقی خط با محور y ها بدست می‌آید. به عرض نقطهٔ تلاقی با محور y ها، عرض از مبدأ می‌گوییم.اگر در معادله خط y را برابر صفر قرار دهیم، نقطه تلاقی خط با محور x ها بدست می‌آید. به طول نقطهٔ تلاقی با محور x ها، طول از مبدأ می‌گوییم.



اگر طول از مبدأ و عرض از مبدأ خطی مخالف صفر باشد (خط افقی یا عمودی نباشد)، بین خط و محورهای مختصات ناحیه‌ای به شکل یک مثلث قائم‌الزاویه ایجاد می‌شود. مساحت این مثلث برابر است با:

$$S=\frac{۱}{۲}\left|\text{طول از مبدأ}\times\text{عرض از مبدأ}\right|=\frac{۱}{۲}|pq|$$

توجه داشته باشید معادلهٔ خطی که طول از مبدأ آن p و عرض از مبدأ آن q $(p,q\neq ۰)$ باشد، به صورت $\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=۱$ است.

عرض از مبدأ خط گذرنده از نقطهٔ تلاقی دو خط $۲x+۳y=۷$ و $۲x-y=۳$ و نقطه $A(۳,-۱)$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۲ ابتدا نقطهٔ تلاقی خطوط $۲x+۳y=۷$ و $۲x-y=۳$ را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases}۲x+۳y=۷\\ ۲x-y=۳\end{cases}\Rightarrow x=۲,y=۱\Rightarrow B(۲,۱)$$

حال خط گذرا از دو نقطه $A(۳,-۱)$ و $B(۲,۱)$ را محاسبه می کنیم.

$$m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{۱-(-۱)}{۲-۳}=\frac{۲}{-۱}=-۲$$

$$y-y_A=m(x-x_A)\Rightarrow y+۱=-۲(x-۳)\Rightarrow y=-۲x+۵$$

برای به دست آوردن عرض از مبدأ، کافی است در معادله جای x، صفر قرار دهیم.

$$y=-۲x+۵\xrightarrow{x=۰}y=۵$$

روش‌های نوشتن معادله خط

نوشتن معادلهٔ خط با یک نقطه روی آن و شیب خط

معادلهٔ خط گذرنده از نقطهٔ $A(x_A,y_A)$ با شیب m به صورت زیر است:

$$y-y_A=m(x-x_A)$$

نوشتن معادلهٔ خط با دو نقطه متمایز روی آن

ابتدا شیب خط (m) گذرنده از دو نقطهٔ $A(x_A,y_A)$ و $B(x_B,y_B)$ را محاسبه می‌کنیم. سپس مشابه قبل، معادله خط را با استفاده از شیب و یکی از نقاط به دلخواه می‌نویسیم.

$$y-y_A=m(x-x_A)\ \text{یا}\ y-y_B=m(x-x_B)$$

اگر در معادلهٔ خط، به غیر از x و y پارامتر دیگری داشته باشیم، می‌گوییم معادله دسته خطوط داریم. دسته خطوط شامل بی‌شمار خط است که همگی از یک نقطه ثابت می‌گذرند. برای یافتن مختصات نقطهٔ ثابت یک دسته خطوط کافی است برای پارامتر اضافه دو مقدار دلخواه در نظر بگیریم و نقطهٔ تقاطع دو خط به دست آمده را بیابیم.

مختصات نقطه‌ای که خط‌های $(m-۲)x+۳my+m+۴=۰$ به ازای جمیع مقادیر m از آن می‌گذرند، کدام است؟

۱) $(۰,۱)$ ۲) $(۲,-۱)$ ۳) $(۲,۱)$ ۴) $(۲,۲)$

۲ با قرار دادن $m=۲$ و $m=۰$ داریم:

$$\begin{cases} m=۲ \Rightarrow ۶y+۶=۰ \Rightarrow ۶y=-۶ \Rightarrow y=-۱ \\ m=۰ \Rightarrow -۲x+۴=۰ \Rightarrow -۲x=-۴ \Rightarrow x=۲ \end{cases} \Rightarrow A(۲,-۱)$$

وضعیت نسبی دو خط در صفحه

دو خط در صفحه یا متقاطع‌اند یا موازی. (توجه داشته باشید که دو خط منطبق را یک خط در نظر می‌گیریم)

حالت اول: دو خط متقاطع

اگر دو خط در صفحه فقط یک نقطهٔ اشتراک داشته باشند، آنگاه دو خط متقاطع هستند. اگر $ax+by+c=۰$ و $a'x+b'y+c'=۰$ معادلهٔ دو خط در صفحه باشند، آنگاه متقاطع‌اند اگر و فقط اگر $ab'-ba'\neq ۰$. در حالتی که همه ضرایب مخالف صفر باشند $\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}$.

وقتی دو خط $ax+by+c=۰$ و $a'x+b'y+c'=۰$ در صفحه متقاطع هستند، دستگاه $\begin{cases} ax+by+c=۰ \\ a'x+by'+c'=۰ \end{cases}$ فقط یک جواب دارد. *(نقطه تقاطع)*

دو خط عمود بر هم:

یکی از حالت‌های خاص دو خط متقاطع، تعامد است یعنی دو خط بر هم عمود باشند. دو خط که هیچ‌کدام قائم یا افقی نیستند با شیب m و m' بر هم عمودند، اگر و تنها اگر $mm'=-۱$. در حالت کلی اگر $ax+by+c=۰$ و $a'x+b'y+c'=۰$ معادله دو خط در صفحه باشند، آن‌گاه بر هم عمودند اگر و فقط اگر $aa'+bb'=۰$. توجه داشته باشید که دو خط به معادله‌های $x=l$ و $y=k$ همواره بر هم عمودند.

به ازای چه مقدار k دو خط $y=۲x+۱$ و $y+kx+۲=۰$ بر هم عمودند؟

۱) -۲ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۲

۳ شیب خط اول برابر است با: $y=۲x+۱ \Rightarrow m=۲$

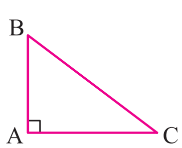
شیب خط دوم برابر است با: $y=-kx-۲ \Rightarrow m'=-k$

دو خط بر هم عمود هستند، بنابراین: $mm'=-۱ \Rightarrow ۲(-k)=-۱ \Rightarrow k=\frac{۱}{۲}$

نقاط $A(۱,۰)$، $B(۴,۲)$ و $C(a,-a)$ مفروض‌اند. به ازای کدام مقدار a، مثلث ABC در رأس A قائمه است؟

۱) -۳ ۲) -۲ ۳) ۲ ۴) ۳

۴ *روش اول:* چون مثلث ABC قائم‌الزاویه است، بین اضلاع آن رابطه فیثاغورس برقرار است. داریم:



$$(AB)^۲+(AC)^۲=(BC)^۲$$
$$\Rightarrow (-۳)^۲+(-۲)^۲+(۱-a)^۲+(a)^۲=(۴-a)^۲+(۲+a)^۲$$
$$\Rightarrow ۹+۴+۱+a^۲-۲a+a^۲=۱۶+a^۲-۸a+۴+a^۲+۴a \Rightarrow ۶-۲a=۰ \Rightarrow a=۳$$

روش دوم: چون مثلث ABC در رأس A قائمه است، شیب AB عکس و قرینه شیب AC است. بنابراین:

$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{۲-۰}{۴-۱}=\frac{۲}{۳}\quad,\quad m_{AC}=\frac{y_C-y_A}{x_C-x_A}=\frac{-a-۰}{a-۱}=\frac{a}{۱-a}$$

$$m_{AB}\times m_{AC}=-۱\Rightarrow \frac{۲}{۳}\times\frac{a}{۱-a}=-۱\Rightarrow \frac{a}{۱-a}=-\frac{۳}{۲}\Rightarrow a=۳$$

معادله عمودمنصف پاره‌خط AB با دو رأس $A(۷,-۲)$ و $B(۱,۶)$ کدام است؟

۱) $۳x-۴y=۴$ ۲) $x+y=۶$ ۳) $۴x-۳y=۱۰$ ۴) $۴x+۳y=۲۲$

۱ ابتدا وسط پاره‌خط AB را بدست می‌آوریم:

$$M(\frac{x_A+x_B}{۲},\frac{y_A+y_B}{۲})\Rightarrow M(۴,۲)$$

چون خط عمودمنصف پاره‌خط AB، بر AB عمود است، پس شیب آن (m') عکس و قرینه شیب AB است. بنابراین ابتدا شیب خط AB را محاسبه کرده و سپس آن را عکس و قرینه می‌کنیم تا شیب خط عمودمنصف بدست می‌آید.

$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{۶-(-۲)}{۱-۷}=\frac{۸}{-۶}=-\frac{۴}{۳}\Rightarrow m_{AB}=-\frac{۴}{۳}\Rightarrow m'=\frac{۳}{۴}$$

حال معادله خط گذرا از نقطهٔ $M(۴,۲)$ با شیب $m'=\frac{۳}{۴}$ را می‌نویسیم.

$$y-y_x=m(x-x_m)\Rightarrow y-۲=\frac{۳}{۴}(x-۴)\Rightarrow y=\frac{۳}{۴}x-۱\xrightarrow{\times ۴}۴y=۳x-۴\Rightarrow ۳x-۴y=۴$$

معادلات خط‌های شامل اضلاع مثلثی به صورت $AB:-x+۴y-۱۱=۰$، $BC:x+۲y-۱=۰$ و $AC:-۵x-۴y+۱۷=۰$ است. مختصات نقطهٔ H، پای ارتفاع وارد بر ضلع BC کدام است؟

۱) $(\frac{-۱}{۵},\frac{۲}{۵})$ ۲) $(\frac{۱}{۵},\frac{۲}{۵})$ ۳) $(\frac{۱}{۵},\frac{۴}{۵})$ ۴) $(\frac{-۱}{۵},\frac{۳}{۵})$

۴ ابتدا مختصات نقطهٔ A را از تقاطع دو خط به معادلات $x-۴y+۱۱=۰$ و $۵x+۴y-۱۷=۰$ بدست می‌آوریم.

$$\begin{cases}x-۴y=-۱۱\\ ۵x+۴y=۱۷\end{cases}\Rightarrow ۶x=۶\Rightarrow x=۱\Rightarrow y=۳\Rightarrow A(۱,۳)$$

حال معادلهٔ ارتفاع AH را با عکس و قرینه کردن شیب خط BC می‌نویسیم.

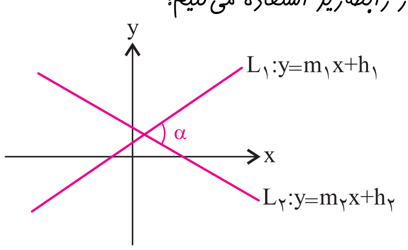
$$m_{BC}=\frac{-۱}{۲}\Rightarrow m_{AH}=۲$$

$$y-y_A=m_{AH}(x-x_A)\Rightarrow y-۳=۲(x-۱)\Rightarrow y=۲x+۱$$

نقطهٔ H از تلاقی دو خط AH و BC بدست می‌آید. بنابراین:

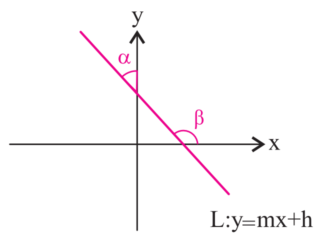
$$\begin{cases}y-۲x=۱\\ x+۲y=۱\end{cases}\Rightarrow -۵x=۱\Rightarrow x=\frac{-۱}{۵}\Rightarrow y=\frac{۳}{۵}\Rightarrow H(\frac{-۱}{۵},\frac{۳}{۵})$$

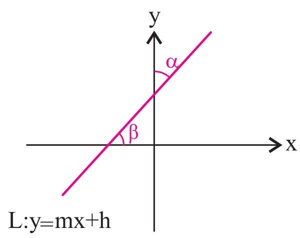
برای محاسبه زاویه حاده بین دو خط متقاطع $L_۱$ و $L_۲$ با شیب‌های $m_۱$ و $m_۲$ از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم:



$$\tan\alpha=\left|\frac{m_۱-m_۲}{۱+m_۱m_۲}\right|$$

توجه داشته باشید که برای یافتن اندازهٔ زاویه بین هر خط دلخواه با محور yها (یا با هر خط موازی محور yها) با توجه به شکل‌های زیر، ابتدا زاویه خط با محور xها را پیدا می‌کنیم $(m=\tan\beta)$ و سپس با استفاده از نمودار و زاویه‌های مکمل و متمم اندازه زاویه با محور yها را محاسبه می‌کنیم. به شکل‌های زیر توجه کنید:





اگر دو خط به معادله‌های $y=(m^2-4)x+1$ و $y=(m^2+m-5)x+2$ با هم موازی باشند. آنگاه با خط معادلهٔ $y=2x+1$ چه زاویه‌ای می‌سازند؟

۱) 30° ۲) 45° ۳) 60° ۴) 90°

۲ چون دو خط با هم موازی‌اند، پس شیب‌های آن‌ها با هم برابر است بنابراین:

$$m^2+m-5=m^2-4 \Rightarrow m=1 \Rightarrow y=-3x+1$$

تانژانت زاویه بین دو خط $y=-3x+1$ و $y=2x+1$ برابر است با:

$$\tan\alpha=\left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right|=\left|\frac{-3-2}{1-6}\right|=\left|\frac{-5}{-5}\right|=|-1|=1 \Rightarrow \alpha=45^\circ$$

حالت دوم: دو خط موازی

اگر $ax+by+c=0$ و $a'x+b'y+c'=0$ معادلهٔ دو خط باشند، این دو خط با هم موازی‌اند اگر و فقط اگر $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$.

وقتی دو خط $ax+by+c=0$ و $a'x+by'+c'=0$ در صفحه موازی و متمایز هستند، دستگاه $\begin{cases}ax+by+c=0\\ a'x+b'y+c'=0\end{cases}$ جواب ندارد.

دو خط منطبق:

یکی از حالت‌های خاص دو خط موازی، انطباق است یعنی دو خط بر هم منطبق باشند. اگر $ax+by+c=0$ و $a'x+b'y+c'=0$ معادلهٔ دو خط منطبق در صفحه باشند، آنگاه $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$ است.

وقتی دو خط $ax+by+c=0$ و $a'x+b'y+c'=0$ در صفحه منطبق هستند، دستگاه $\begin{cases}ax+by+c=0\\ a'x+b'y+c'=0\end{cases}$ بی‌شمار جواب دارد.

به ازای چه مقدار m دو خط $mx+2(m^2+1)y=3m+2$ و $2x+5my=4$ بر هم منطبق هستند؟

۱) $m=-2$ ۲) $m=2$ ۳) $m=1$ ۴) $m=-1$

۱ دو خط در صفحه منطبق هستند اگر و تنها اگر $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$. بنابراین:

$$\frac{m}{2}=\frac{2(m^2+1)}{5m}=\frac{-3m-2}{-4}$$

از تساوی کسر اول و سوم داریم:

$$\frac{m}{2}=\frac{3m+2}{4} \Rightarrow 2m=3m+2 \Rightarrow m=-2$$

جمع‌بندی اوضاع نسبی دو خط $ax+by+c=0$ و $a'x+b'y+c'=0$ در صفحه:

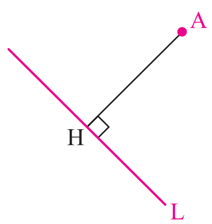
۱ اگر $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$، دو خط متقاطع‌اند. $(m \neq m')$

۲ اگر $aa'+bb'=0$، دو خط بر هم عمودند. $(mm'=-1)$

۳ اگر $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$، دو خط موازی‌اند. $(m=m')$

۴ اگر $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$، دو خط بر هم منطبق‌اند. $(m=m')$

فاصلهٔ یک نقطه از خط



اگر خط L به معادلهٔ $ax+by+c=0$ و نقطهٔ $A(x_A, y_A)$ خارج این خط مطابق شکل مفروض باشند. آنگاه منظور از فاصلهٔ نقطهٔ A از خط L طول پاره‌خطی است که از نقطهٔ A به خط L عمود می‌شود که از نظر اندازه کوتاه‌ترین پاره‌خطی است که می‌توان از نقطهٔ A به خط L رسم نمود و مقدار آن را می‌توان از فرمول زیر محاسبه نمود.

$$AH = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

فاصلهٔ مبدأ مختصات تا خط $ax+by+c=0$ برابر است با:

$$OH = \frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

مبدأ مختصات به کدام یک از خط‌های زیر نزدیکتر است؟

۱) $y=-x+2$ ۲) $4x=3$ ۳) $7x=3$ ۴) $x+y=1$

فاصله مبدأ مختصات را از هر کدام از خطوط پیدا می‌کنیم.

گزینه (۱): $x+y-2=0 \Rightarrow OH_1 = \frac{|2|}{\sqrt{1+1}} = \sqrt{2}$

گزینه (۲): $4x-3=0 \Rightarrow OH_2 = \frac{|-3|}{\sqrt{16+0}} = \frac{3}{4}$

گزینه (۳): $7x-3=0 \Rightarrow OH_3 = \frac{|-3|}{\sqrt{49+0}} = \frac{3}{7}$

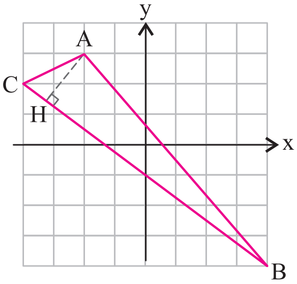
گزینه (۴): $x+y-1=0 \Rightarrow OH_4 = \frac{|-1|}{\sqrt{1+1}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

با توجه به اعداد محاسبه شده، اندازه OH_3 از همه کمتر است، پس مبدأ مختصات به خط $7x=3$ نزدیک‌تر است.

اگر $A(-2,3)$ و $B(4,-4)$ و $C(-4,2)$ سه رأس یک مثلث باشند و AH ارتفاع وارد بر ضلع BC باشد. مختصات نقطه H برابر است با:

۱) $(-\frac{16}{5}, \frac{7}{5})$ ۲) $(-\frac{4}{5}, \frac{7}{5})$ ۳) $(-\frac{26}{5}, -\frac{7}{5})$ ۴) $(-\frac{8}{5}, \frac{7}{5})$

۱۹ برای محاسبه مختصات نقطه H، ابتدا معادلهٔ خط BC را بدست می‌آوریم. سپس معادله ارتفاع وارد بر آن یعنی AH را بدست می‌آوریم. از حل دستگاه این دو خط، نقطه تقاطع آن‌ها یعنی H به دست می‌آید.



معادله خط BC:

$$y-y_B=\frac{y_C-y_B}{x_C-x_B}(x-x_B)\Rightarrow y+۴=\frac{۲+۴}{-۴-۴}(x-۴)\Rightarrow y=-\frac{۳}{۴}x-۱$$

معادله ارتفاع AH: چون AH عمود بر BC است، شیب آن عکس و قرینه شیب BC است.

$$y-y_A=\frac{۴}{۳}(x-x_A)\Rightarrow y-۳=\frac{۴}{۳}(x+۲)\Rightarrow y=\frac{۴}{۳}x+\frac{۱۷}{۳}$$

مختصات نقطه H:

$$\begin{cases} y=\frac{۴}{۳}x+\frac{۱۷}{۳} \\ y=-\frac{۳}{۴}x-۱ \end{cases}\Rightarrow ۰=\frac{۲۵}{۱۲}x+\frac{۲۰}{۳}\Rightarrow \frac{۲۵x}{۱۲}=-\frac{۲۰}{۳}\Rightarrow x=-\frac{۱۶}{۵}\Rightarrow y=\frac{۷}{۵}\Rightarrow H(-\frac{۱۶}{۵},\frac{۷}{۵})$$

محاسبهٔ مساحت مثلث در حالت‌های مختلف

برای محاسبهٔ مساحت مثلث روش‌های مختلفی وجود دارد که هر یک با توجه به معلومات مسئله قابل استفاده است.

روش اول: روش اول همان محاسبه مساحت از فرمول معروف (ارتفاع× قاعده) $S=\frac{۱}{۲}$ است.

روش دوم: این روش وقتی استفاده می‌شود که مختصات سه رأس مثلث مشخص باشد.

$$S=\frac{۱}{۲}\left|x_A(y_B-y_C)+x_B(y_c-y_A)+x_c(y_A-y_B)\right|$$

روش سوم: این روش وقتی استفاده می‌شود که اندازه اضلاع مثلث مشخص باشد.(فرمول هرون)

$$S=\sqrt{P(P-a)(P-a)(P-c)}$$

P در فرمول بالا برابر نصف محیط است.

مساحت مثلثی به سه رأس به مختصات $A(۲,۵)$، $B(۳,۰)$ و $C(۰,۲)$ کدام است؟ (سراسری خارج کشور ۹۲)

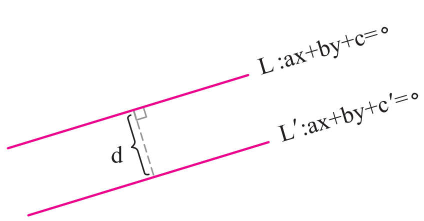
۱) ۶ ۲) ۶/۵ ۳) ۷ ۴) ۷/۵

۲۰

$$S=\frac{۱}{۲}\left|x_A(y_B-y_C)+x_B(y_C-y_A)+x_C(y_A-y_B)\right|=\frac{۱}{۲}\left|۲(۰-۲)+۳(۲-۵)+۰(۵-۰)\right|=\frac{۱۳}{۲}=۶/۵$$

فاصله دو خط موازی

دو خط موازی L و L' به معادلات $L:ax+by+c=۰$ و $L':ax+by+c'=۰$ مطابق شکل مفروض اند. برای محاسبهٔ فاصلهٔ این دو خط موازی از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم.



$$d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

توجه داشته باشید که برای استفاده از فرمول ، باید ضرایب x و y (یعنی a و b) در دو معادله حتماً یکسان باشند.

فاصلهٔ دو خط موازی به معادلات $۳x-۴y+۷=۰$ و $۶x-۸y+۲۴=۰$ برابر $m-۵$ است. مقدار m کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۳

روش اول:

$$\begin{cases}۳x-۴y+۷=۰\\۶x-۸y+۲۴=۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۳x-۴y+۷=۰\\۳x-۴y+۱۲=۰\end{cases}\Rightarrow d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|۷-۱۲|}{\sqrt{۹+۱۶}}=\frac{|-۵|}{\sqrt{۲۵}}=\frac{۵}{۵}=۱$$

فاصلهٔ دو خط موازی برابر ۱ است، بنابراین:

$$m-۵=۱\Rightarrow m=۶$$

روش دوم:

فاصلهٔ نقطه $(۰,۳)$ روی خط دوم را از خط اول پیدا کرده و برابر $m-۵$ قرار می‌دهیم:

$$\frac{|۳(۰)-۴(۳)+۷|}{\sqrt{۳^۲+(-۴)^۲}}=m-۵\Rightarrow\frac{|-۱۲+۷|}{\sqrt{۲۵}}=m-۵\Rightarrow ۱=m-۵\Rightarrow m=۶$$

معادلات خط‌های شامل دو ضلع مقابل مربعی به صورت $x-۲y+۲=۰$ و $۳x-۶y-۲=۰$ است. مساحت مربع چقدر است؟

۱) $\frac{۵۸}{۴۵}$ ۲) $\frac{۶۲}{۴۵}$ ۳) $\frac{۶۸}{۴۵}$ ۴) $\frac{۶۴}{۴۵}$

معادله دو ضلع مقابل به صورت زیر است:

$$\begin{cases}x-۲y+۲=۰\\۳x-۶y-۲=۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x-۲y+۲=۰\\x-۲y-\frac{۲}{۳}=۰\end{cases}$$

چون دو خط موازی هستند، از فاصلهٔ دو خط موازی استفاده می‌کنیم. بنابراین:

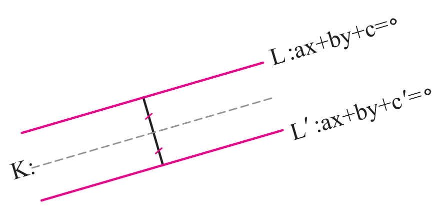
$$d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{\left|۲-(\frac{-۲}{۳})\right|}{\sqrt{۱+۴}}=\frac{۸}{۳\sqrt{۵}}$$

پس اندازه ضلع مربع برابر $\frac{۸}{۳\sqrt{۵}}$ و مساحت آن $\frac{۶۴}{۴۵}$ است.

نقاطی از صفحه که از دو خط موازی به یک فاصله‌اند

معادلهٔ خطی که با خط‌های $L:ax+by+c=۰$ و $L':ax+by+c'=۰$ موازی بوده و از آن‌ها به یک فاصله است، عبارت است از:

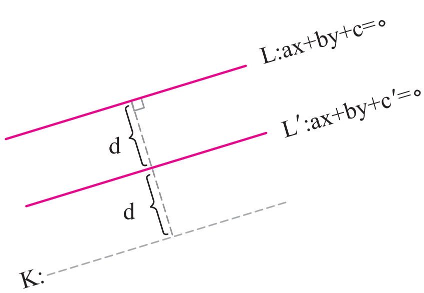
$$K:ax+by+\frac{c+c'}{۲}=۰$$



قرینهٔ یک خط نسبت به خط مفروض موازی خود

معادلهٔ خطی که با خط $L:ax+by+c=۰$ موازی و قرینهٔ آن نسبت به خط $L':ax+by+c'=۰$ باشد، برابر است با:

$$K:ax+by+۲c'-c=۰$$



معادله خطی که با خط به معادلات $۲x+۳y+۴=۰$ موازی و قرینه آن نسبت به خط $۴x+۶y+۵=۰$ باشد، کدام است؟

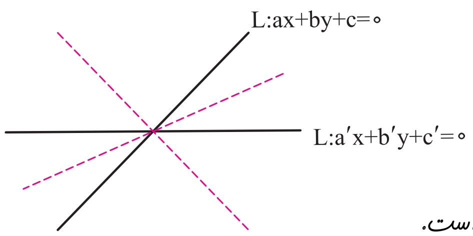
۱) $۲x+۳y=\frac{-۹}{۲}$ ۲) $۲x+۳y=-۱$ ۳) $۲x+۳y=۱$ ۴) $۲x+۳y=\frac{۹}{۲}$

۲ چون دو خط $L:۲x+۳y+۴=۰$ و $L':۲x+۳y+\frac{۵}{۲}=۰$ با هم موازی هستند، داریم:

$$K:۲x+۳y+۲(\frac{۵}{۲})-۴=۰ \Rightarrow K:۲x+۳y+۱=۰$$

معادلهٔ مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو خط متقاطع $L:ax+by+c=۰$ و $L':a'x+b'y+c'=۰$ به یک فاصله باشند برابر است با:

$$\frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|a'x+b'y+c'|}{\sqrt{a'^۲+b'^۲}}$$



توجه داشته باشید که این معادلات، معادله‌های خطوط شامل نیمسازهای زوایای بین دو خط است.

کدام یک از نقاط زیر بر نیمساز زاویه بین دو خط $x-\frac{y}{۲}-\frac{۱}{۲}=۰$ و $\frac{x}{۲}-y=-۲$ قرار دارند؟

۱) $(۲,۱)$ ۲) $(۳,۱)$ ۳) $(۳,۳)$ ۴) $(۱,۴)$

۴ معادلهٔ نیمسازهای زوایای دو خط را بدست می‌آوریم، سپس مختصات گزینه‌ها را در معادلات بدست آمده صدق می‌دهیم:

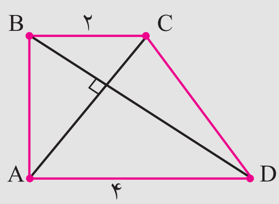
$$\begin{cases} x-\frac{y}{۲}-\frac{۱}{۲}=۰ \\ \frac{x}{۲}-y+۲=۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲x-y-۱=۰ \\ x-۲y+۴=۰ \end{cases} \Rightarrow \frac{|۲x-۶-۱|}{\sqrt{۴+۱}}=\frac{|x-۲y+۴|}{\sqrt{۴+۱}} \Rightarrow \begin{cases} ۲x-y-۱=x-۲y+۴ \\ ۲x-y-۱=-x+۲y-۴ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=۵ \\ ۳x-۳y=-۳ \end{cases}$$

مختصات نقطهٔ $(۱,۴)$ در معادلهٔ اول صدق می‌کند.

حل بعضی از مسائل هندسه به کمک هندسه مختصاتی:

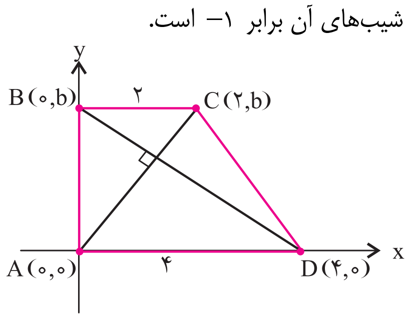
بعضی از مسائل هندسی را می‌توان با انتخاب صحیح محورهای مختصات و یافتن مختصات نقاط روی شکل هندسی، حل کرد.

در شکل روبه‌رو اندازهٔ AB چقدر است؟



۱) ۲
۲) $\sqrt{۲}$
۳) $۲\sqrt{۲}$
۴) ۴

۳ محورها را به صورت زیر در نظر می‌گیریم. چون BD بر AC عمود است، حاصل ضرب شیب‌های آن برابر -۱ است.



$$m_{AC}=\frac{y_C-y_A}{x_C-x_A}=\frac{b-۰}{۲-۰}=\frac{b}{۲}$$

$$m_{BD}=\frac{y_D-y_B}{x_D-x_B}=\frac{۰-b}{۴-۰}=\frac{-b}{۴}$$

$$m_{AC}.m_{BD}=-۱ \Rightarrow \frac{b}{۲}.(\frac{-b}{۴})=-۱ \Rightarrow b^۲=۸ \Rightarrow b=۲\sqrt{۲}$$

دور اول

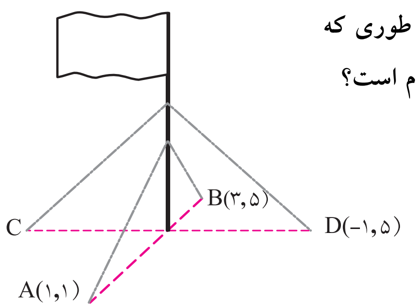
۱. $A(۲x-۱,x+۲)$ در ناحیهٔ دوم است، هرگاه:

۱) $x>\frac{۱}{۲}$ ۲) $x>\frac{۱}{۲}$ یا $x<-۲$ ۳) $x<-۲$ ۴) $-۲<x<\frac{۱}{۲}$

۲. اگر نقطهٔ $A(۰,۶)$ قرینهٔ نقطهٔ B نسبت به نقطه $M(۴,۷)$ باشد. مجموع طول و عرض نقطهٔ B کدام است؟

۱) صفر ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۱۶

۳. یک میله پرچم، مطابق شکل توسط کابل‌هایی به چهار نقطه در زمین محکم شده است به طوری که فاصلهٔ هر نقطه تا میله برابر است با فاصلهٔ نقطهٔ مقابل آن تا میله. مختصات نقطهٔ C کدام است؟



۱) $(۵,۳)$
۲) $(۵,۱)$
۳) $(۱۱,۵)$
۴) $(۱۱,۳)$

۴. نقطهٔ تلاقی خط $y=۲x-۳$ را با محورهای مختصات x و y به ترتیب A و B می‌نامیم. نقطهٔ P بر روی پاره‌خط AB چنان است که $PA=\frac{۱}{۳}BA$ مختصات نقطهٔ P کدام است؟

۱) $(-۱,۱)$ ۲) $(۱,-۱)$ ۳) $(۱,-۳)$ ۴) $(-۳,۱)$

۵. نقاط $A(۱,۲)$ و $B(-۵,۲)$ و $C(-۵,-۲)$ سه رأس یک مستطیل هستند. مجموع طول و عرض رأس چهارم کدام است؟

۱) -۳ ۲) -۵ ۳) -۱ ۴) ۱

۶. هرگاه دونقطهٔ $A(۳,۳)$ و $B(۵,۳)$ دو رأس مجاور یک مربع باشند، آن‌گاه محیط مربع برابر است با:

۱) ۸ ۲) ۶ ۳) ۴ ۴) ۱۲

۷. نقاط $A(۳,۳)$ و $B(-۱,۱)$ و $O(۰,۰)$ سه رأس یک مستطیل هستند. مساحت مستطیل چقدر است؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۱۲ ۴) ۹

۸. نقاط $A(۲,-۱)$ و $B(۰,۱)$ و $C(-۱,۱)$ سه رأس یک مثلث هستند. طول میانه CM برابر است با:

۱) $\sqrt{۵}$ ۲) ۴ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) $\sqrt{۲}$

۹. کدام خط زیر از محل برخورد میانه‌های مثلث ABC به رئوس $A(۳a+۱,۷)$، $B(-a+۳,۹a-۱)$ و $C(۴a-۷,-۳a)$ عبور می‌کند؟

۱) $y=-x+۳$ ۲) $y=۲x-۱$ ۳) $y=۲x+۱$ ۴) $y=x+۳$

۱۰. نقطه A روی محور طول‌ها است به طوری که مجموع فواصل آن از دو نقطه به طول‌های ۵ و ۲- روی محور طول‌ها برابر ۸ است. کمترین فاصلهٔ نقطهٔ A تا مبدأ کدام است؟

۱) ۲/۵ ۲) ۴/۵ ۳) ۶ ۴) ۷/۵

۱۱. اگر شیب خط $(k-۳)x+(۲k-۶)y+۸=۰$ برابر یک باشد، مقدار k کدام است؟

۱) ۱۱/۵ ۲) ۹/۵ ۳) ۳ ۴) ۲/۵

۱۲. به ازای کدام مقدار a، خط گذرنده از نقاط $A(۳,a+۲)$ و $B(۲a-۱,a+۳)$ با جهت مثبت محور xها زاویهٔ ۴۵° می‌سازد؟

۱) $\frac{۲}{۵}$ ۲) $\frac{۱}{۵}$ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) $-\frac{۳}{۲}$