پاسخ فصل ۱۰ مثلثات

۱۰۰۲ ۱ **۲** ۳ ۴

نکته: مقدار نسبت‌های مثلثاتی زوایای 30°، 45° و 60° در جدول زیر آمده است:

مقدار	30°	45°	60°
sin A	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos A	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tan A	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
cot A	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

$$\sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad \sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow (\sin 60^\circ - \sin 45^\circ)(\cos 30^\circ + \cos 45^\circ)$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{2}{4} = \frac{1}{4}$$

۱۰۰۳ **۱** ۲ ۳ ۴

$$\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad , \quad \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \frac{\tan 60^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 60^\circ \tan 30^\circ} = \frac{\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3}}$$

$$= \frac{\frac{3\sqrt{3} - \sqrt{3}}{3}}{1+1} = \frac{2\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \tan 30^\circ \Rightarrow x = 30^\circ$$

۱۰۰۴ ۱ **۲** ۳ ۴

با توجه به این‌که $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ و $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$، خواهیم داشت:

$$\sin^2 30^\circ = (\sin 30^\circ)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\cos^2 60^\circ = (\cos 60^\circ)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$(x+y)^2 \sin^2 30^\circ - (x-y)^2 \cos^2 60^\circ$$

$$= (x+y)^2 \times \frac{1}{4} - (x-y)^2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}((x+y)^2 - (x-y)^2)$$

$$= \frac{1}{4}(x^2 + y^2 + 2xy - (x^2 - 2xy + y^2)) = \frac{1}{4}(4xy) = xy$$

۱۰۰۵ ۱ **۲** ۳ ۴

x زاویهٔ حاده و $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ است، پس $x = 60^\circ$ می‌باشد.

$$\cos 3x = \cos 3(60^\circ) = \cos 180^\circ = -1$$

$$\sin \frac{x}{2} = \sin \frac{60^\circ}{2} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\tan\left(\frac{3}{4}x\right) = \tan\left(\frac{3}{4} \times 60^\circ\right) = \tan 45^\circ = 1$$

$$\Rightarrow \cos 3x + \sin \frac{x}{2} + \tan\left(\frac{3}{4}x\right) = -1 + \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

۱۰۰۶ ۱ ۲ ۳ **۴**

x و y دو زاویهٔ حاده‌اند، بنابراین:

$$\tan 45^\circ = 1 \ , \ \tan(x-y) = 1 \Rightarrow x - y = 45^\circ$$

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} \ , \ \sin\left(\frac{x}{4} + y\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x}{4} + y = 30^\circ \Rightarrow x + 4y = 120^\circ$$

$$\begin{cases} x - y = 45^\circ \\ x + 4y = 120^\circ \end{cases} \Rightarrow x = 60^\circ \ , \ y = 15^\circ \Rightarrow x + y = 75^\circ$$

۱۰۰۷ ۱ ۲ **۳** ۴

$$\sin(x-y) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad , \quad \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x - y = 45^\circ$$

$$\cos\left(\frac{2x}{3} - \frac{y}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \ , \ \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{2x}{3} - \frac{y}{6} = 45^\circ$$

$$\begin{array}{l} \\ 6 \times \end{array}\begin{cases} x - y = 45^\circ \\ \frac{2x}{3} - \frac{y}{6} = 45^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} (-1) \times \\ \\ \end{array}\begin{cases} x - y = 45^\circ \\ 4x - y = 270^\circ \end{cases}$$

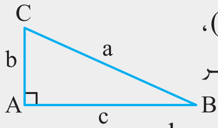
$$\Rightarrow \begin{cases} -x + y = -45^\circ \\ 4x - y = 270^\circ \end{cases} \Rightarrow 3x = 225^\circ \Rightarrow x = 75^\circ$$

$$x - y = 45^\circ \Rightarrow 75^\circ - y = 45^\circ \Rightarrow y = 30^\circ$$

$$\Rightarrow \sin(x + 15^\circ) + \cos 2y = \sin(75^\circ + 15^\circ) + \cos 60^\circ = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

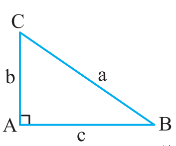
۱۰۰۸ ۱ ۲ ۳ **۴**

نکته: در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\widehat{A} = 90^\circ)$، نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ حادهٔ B به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:



$$\sin B = \frac{b}{a} \ , \ \cos B = \frac{c}{a} \ , \ \tan B = \frac{b}{c} \ , \ \cot B = \frac{c}{b}$$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\widehat{A} = 90^\circ)$، داریم:

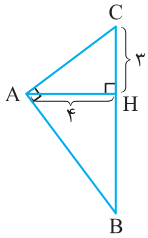


$$\tan B = \frac{b}{c} = \sqrt{2} \Rightarrow b = \sqrt{2}c \ , \ a = 3\sqrt{3}$$

رابطهٔ فیثاغورس: $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow (3\sqrt{3})^2 = (\sqrt{2}c)^2 + c^2$

$$\Rightarrow 27 = 2c^2 + c^2 \Rightarrow 3c^2 = 27 \Rightarrow c^2 = 9 \Rightarrow c = 3$$

۱۰۰۹ — **۱** ۲ ۳ ۴



$$\overset{\Delta}{AHC}: AC^{۲} = AH^{۲} + HC^{۲}$$

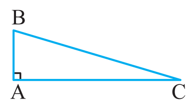
$$\Rightarrow AC^{۲} = ۴^{۲} + ۳^{۲} = ۲۵ \Rightarrow AC = ۵$$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ $ABC\ (\hat{A} = ۹۰^\circ)$، دو زاویهٔ B و C متمم یکدیگرند و در نتیجه داریم:

$$\cos B = \sin C = \frac{AH}{AC} = \frac{۴}{۵}$$

۱۰۱۰ — **۱** ۲ ۳ ۴

مطابق شکل، داریم:



$$\cos C = \frac{AC}{BC}\ ,\ \sin B = \frac{AC}{BC}\ ,\ \cos B = \frac{AB}{BC}$$

$$\Rightarrow \frac{\cos^{۲} C}{\sin B \cos B} = \frac{\frac{AC^{\cancel{۲}}}{\cancel{BC^{۲}}}}{\frac{\cancel{AC}}{\cancel{BC}} \times \frac{AB}{\cancel{BC}}} = \frac{AC}{AB} = \tan B$$

۱۰۱۱ — **۱** ۲ ۳ ۴

می‌دانیم اگر دو زاویهٔ x و y متمم باشند، آن‌گاه $\sin x = \cos y$ و $\cos x = \sin y$ از طرفی در مثلث قائم‌الزاویهٔ ACH داریم:

$$\cos C = \frac{CH}{AC} \Rightarrow \cos y = \frac{k}{۴} \Rightarrow k = ۴\cos y = ۴\sin x$$

۱۰۱۲ — **۱** ۲ ۳ ۴

در مثلث ACH داریم:

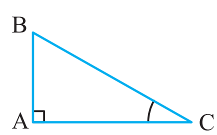
$$\tan C = \frac{AH}{HC} \Rightarrow \tan ۴۵^\circ = \frac{AH}{۳} \Rightarrow ۱ = \frac{AH}{۳} \Rightarrow AH = ۳$$

اکنون در مثلث ABH می‌توان نوشت:

$$\tan B = \frac{AH}{BH} \Rightarrow \tan ۶۰^\circ = \frac{AH}{BH} \Rightarrow \sqrt{۳} = \frac{۳}{BH}$$

$$\Rightarrow BH = \frac{۳}{\sqrt{۳}} = \frac{۳}{\sqrt{۳}} \times \frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}} = \frac{۳\sqrt{۳}}{۳} \Rightarrow BH = \sqrt{۳}$$

۱۰۱۳ — ۱ **۲** ۳ ۴



$$\begin{cases} \tan C = \frac{AB}{AC} \\ \tan C = \frac{۵}{۱۲} \end{cases} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{۵}{۱۲}$$

برای حل تست، مثلث قائم‌الزاویه با اضلاع قائمهٔ ۵ و ۱۲ می‌توان در نظر گرفت. داریم:

قضیهٔ فیثاغورس: $BC = \sqrt{AB^{۲} + AC^{۲}}$

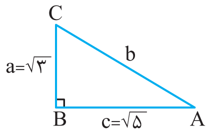
$$\Rightarrow BC = \sqrt{۵^{۲} + ۱۲^{۲}} = \sqrt{۱۶۹} \Rightarrow BC = ۱۳$$

$$\cos A + \cos B + \cos C = \cos ۹۰^\circ + \frac{AB}{BC} + \frac{AC}{BC}$$

$$= ۰ + \frac{۵}{۱۳} + \frac{۱۲}{۱۳} = \frac{۵}{۱۳} + \frac{۱۲}{۱۳} = \frac{۱۷}{۱۳}$$

۱۰۱۴ — **۱** ۲ ۳ ۴

بنابر قضیهٔ فیثاغورس داریم:



$$b^{۲} = a^{۲} + c^{۲} = (\sqrt{۳})^{۲} + (\sqrt{۵})^{۲} = ۳ + ۵ = ۸ \Rightarrow b = \sqrt{۸}$$

$$\sin A = \frac{\text{طول ضلع مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۸}}$$

$$\cot A = \frac{\text{طول ضلع مجاور}}{\text{طول ضلع مقابل}} = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{۵}}{\sqrt{۳}}$$

$$\sin^{۲} A + \cot^{۲} A = \left(\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۸}}\right)^{۲} + \left(\frac{\sqrt{۵}}{\sqrt{۳}}\right)^{۲} = \frac{۳}{۸} + \frac{۵}{۳} = \frac{۹ + ۴۰}{۲۴} = \frac{۴۹}{۲۴}$$

۱۰۱۵ — ۱ ۲ **۳** ۴

$$\cos C = \frac{AC}{BC} \Rightarrow \frac{۴}{۵} = \frac{۲۴}{BC} \Rightarrow BC = \frac{۲۴ \times ۵}{۴} = ۳۰$$

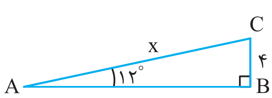
$$BC^{۲} = AB^{۲} + AC^{۲} \Rightarrow ۳۰^{۲} = AB^{۲} + ۲۴^{۲}$$

$$\Rightarrow AB^{۲} = ۹۰۰ - ۵۷۶ = ۳۲۴ \Rightarrow AB = ۱۸$$

محیط مثلث $= AC + AB + BC = ۲۴ + ۱۸ + ۳۰ = ۷۲$

۱۰۱۶ — ۱ ۲ **۳** ۴

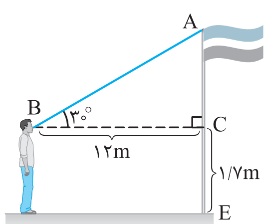
شکلی برای مسئله رسم می‌کنیم. هواپیما از نقطهٔ A با زاویهٔ ۱۲° از زمین بلند می‌شود و در نقطهٔ C به ارتفاع ۴ کیلومتری از سطح زمین می‌رسد. حال باید طول AC را به‌دست آوریم. داریم:



$$\sin ۱۲^\circ = \frac{BC}{AC}$$

$$\Rightarrow ۰/۲ \simeq \frac{۴}{x} \Rightarrow x \simeq ۲۰\text{km}$$

۱۰۱۷ — ۱ ۲ ۳ **۴**



با توجه به شکل می‌توان نوشت:

$$\tan B = \frac{AC}{BC} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۳} = \frac{AC}{۱۲}$$

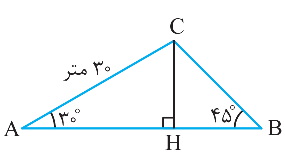
$$\Rightarrow AC = ۴\sqrt{۳} \simeq ۴ \times ۱/۷ = ۶/۸$$

پس طول میلهٔ پرچم برابر است با:

$$AE = AC + CE \simeq ۶/۸ + ۱/۷ = ۸/۵\,\text{m}$$

۱۰۱۸ — ۱ **۲** ۳ ۴

شکل ساده‌تری از مسئله درنظر گرفته و ارتفاع CH را رسم می‌کنیم. داریم:



$$\overset{\Delta}{ACH}: \sin A = \frac{CH}{AC} \Rightarrow \sin ۳۰^\circ = \frac{CH}{۳۰} \Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{CH}{۳۰}$$

$$\Rightarrow CH = ۱۵\,\text{m}$$

$$\overset{\Delta}{BCH}: \sin B = \frac{CH}{BC} \Rightarrow \sin ۴۵^\circ = \frac{۱۵}{BC} \Rightarrow \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{۱۵}{BC}$$

$$\Rightarrow BC = \frac{۳۰}{\sqrt{۲}} = \frac{۳۰}{\sqrt{۲}} \times \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} = \frac{۳۰\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\Rightarrow BC = ۱۵\sqrt{۲} \simeq ۱۵ \times ۱/۴ = ۲۱\,\text{m}$$

۱۰۱۹ (۱) (۲) (۳) (۴)

داریم $B\hat{A}D = ۹۰^\circ - ۱۸^\circ = ۷۲^\circ$، همچنین:

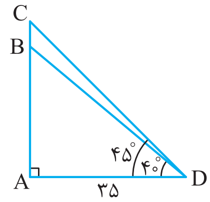
$$\overset{\Delta}{BDA}: \tan(B\hat{A}D) = \frac{DB}{DA} \Rightarrow \tan ۷۲^\circ = \frac{DB}{۲}$$

$$\Rightarrow ۳ \simeq \frac{DB}{۲} \Rightarrow DB \simeq ۶$$

$$\Rightarrow BC = DB - DC \simeq ۶ - ۲/۵ = ۳/۵$$

۱۰۲۰ (۱) (۲) (۳) (۴)

شکل ساده‌ای از مسئله رسم می‌کنیم. داریم:



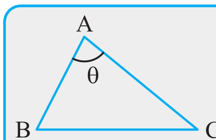
$$\overset{\Delta}{ABD}: \tan ۴۰^\circ = \frac{AB}{AD} \Rightarrow ۰/۸ \simeq \frac{AB}{۳۵} \Rightarrow AB \simeq ۲۸$$

$$\overset{\Delta}{ADC}: \tan ۴۵^\circ = \frac{AC}{AD} \Rightarrow ۱ = \frac{AC}{۳۵} \Rightarrow AC = ۳۵$$

طول مجسمه $= BC = AC - AB \simeq ۳۵ - ۲۸ = ۷$ (متر)

۱۰۲۱ (۱) (۲) (۳) (۴)

نکته: اگر طول دو ضلع از مثلث و اندازهٔ زاویهٔ بین آن‌ها را داشته باشیم، مساحت مثلث از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:



$$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{۱}{۲} AB \times AC \times \sin\theta$$

بنابراین:

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{۱}{۲} AB \times AC \times \sin A$$

$$= \frac{۱}{۲} \times ۴ \times ۶ \times \sin ۳۰^\circ = \frac{۱}{۲} \times ۴ \times ۶ \times \frac{۱}{۲} = ۶$$

۱۰۲۲ (۱) (۲) (۳) (۴)

نکته:

$$\sin ۱۲۰^\circ = \sin(۱۸۰^\circ - ۶۰^\circ) = \sin ۶۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

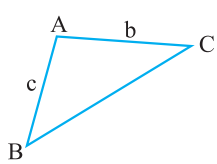
چون $\hat{C} = ۱۵^\circ$ و $\hat{B} = ۴۵^\circ$، پس $\hat{A} = ۱۲۰^\circ$، بنابراین داریم:

$$S = \frac{۱}{۲} AB \times AC \times \sin A = \frac{۱}{۲} \times ۸ \times \sqrt{۳} \times \sin ۱۲۰^\circ$$

$$= \frac{۱}{۲} \times ۸ \times \sqrt{۳} \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۶$$

۱۰۲۳ (۱) (۲) (۳) (۴)

مثلث ABC را مطابق شکل در نظر می‌گیریم.

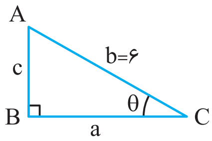


فرض می‌کنیم که زاویهٔ A ثابت بماند و دو ضلع b و c سه برابر شوند. با توجه به رابطهٔ $S = \frac{۱}{۲} bc\sin A$، اگر b و c سه برابر شوند و مساحت مثلث جدید را با S' نمایش دهیم، داریم:

$$\frac{S'}{S} = \frac{\frac{۱}{۲}(۳b)(۳c)\sin A}{\frac{۱}{۲} bc\sin A} = \frac{\frac{۹}{۲} bc.\sin A}{\frac{۱}{۲} bc.\sin A} = ۹$$

۱۰۲۴ (۱) (۲) (۳) (۴)

مثلث ABC $(\hat{B} = ۹۰^\circ)$ را رسم می‌کنیم:



$$\tan A = \frac{\text{طول ضلع مقابل}}{\text{طول ضلع مجاور}} = \frac{a}{c} = \frac{\sqrt{۵}}{۲}$$

$$\Rightarrow ۲a = \sqrt{۵}c \Rightarrow a = \frac{\sqrt{۵}}{۲}c$$

$$\overset{\Delta}{ABC}: \hat{B} = ۹۰^\circ \Rightarrow AC^۲ = AB^۲ + BC^۲ \Rightarrow ۳۶ = a^۲ + c^۲$$

$$\Rightarrow ۳۶ = \left(\frac{\sqrt{۵}}{۲}c\right)^۲ + c^۲ \Rightarrow \frac{۵}{۴}c^۲ + c^۲ = ۳۶$$

$$\Rightarrow ۹c^۲ = ۱۴۴ \Rightarrow c^۲ = ۱۶ \Rightarrow c = ۴$$

$$a = \frac{\sqrt{۵}}{۲}c = \frac{\sqrt{۵}}{۲} \times ۴ = ۲\sqrt{۵}$$

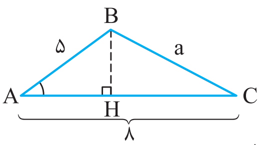
مساحت مثلث ABC $= \frac{ca}{۲} = \frac{۴ \times ۲\sqrt{۵}}{۲} = ۴\sqrt{۵}$

۱۰۲۵ (۱) (۲) (۳) (۴)

با توجه به فرض مسئله، شکلی برای آن رسم می‌کنیم. بنا بر فرض می‌توان نوشت:

$$S = ۱۶ \Rightarrow \frac{۱}{۲} bc\sin A = ۱۶ \Rightarrow \frac{۱}{۲} \times ۸ \times ۵\sin A = ۱۶$$

$$\Rightarrow \sin A = \frac{۴}{۵}$$



$$\sin^۲ A + \cos^۲ A = ۱ \Rightarrow \cos A = \frac{۳}{۵}$$

ارتفاع BH را رسم می‌کنیم. در مثلث ABH داریم:

$$\sin A = \frac{BH}{AB} \Rightarrow \frac{۴}{۵} = \frac{BH}{۵} \Rightarrow BH = ۴$$

$$\cos A = \frac{AH}{AB} \Rightarrow \frac{۳}{۵} = \frac{AH}{۵} \Rightarrow AH = ۳$$

$$\Rightarrow HC = AC - AH = ۸ - ۳ = ۵$$

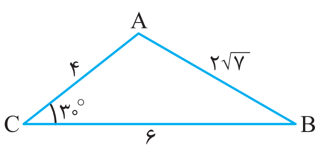
در مثلث BHC داریم:

$$BC^۲ = BH^۲ + HC^۲ \Rightarrow a^۲ = ۴^۲ + ۵^۲ = ۱۶ + ۲۵ = ۴۱$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{۴۱}$$

۱۰۲۶ (۱) (۲) (۳) (۴)

شکل مثلث ABC با اطلاعات داده شده به‌صورت زیر است:



مساحت مثلث ABC را با داشتن طول دو ضلع و زاویهٔ بین آن‌ها به‌دست می‌آوریم:

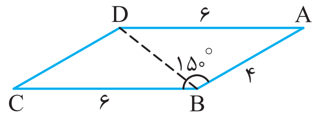
$$S = \frac{۱}{۲} CA \times CB \times \sin ۳۰^\circ = \frac{۱}{۲} \times ۴ \times ۶ \times \frac{۱}{۲} = ۶$$

از طرفی می‌توان مساحت مثلث ABC را با استفاده از زاویهٔ B نیز به‌دست آورد:

$$S = \frac{۱}{۲} BA \times BC \times \sin B \Rightarrow \cancel{۶} = \frac{۱}{\cancel{۲}} \times \cancel{۲}\sqrt{۷} \times \cancel{۶} \times \sin B$$

$$\Rightarrow \sqrt{۷}\sin B = ۱ \Rightarrow \sin B = \frac{۱}{\sqrt{۷}}$$

۱۰۲۷ (۱) **(۲)** (۳) (۴)



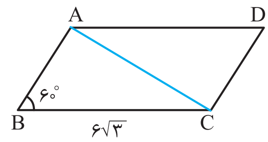
اگر قطر متوازی‌الاضلاع را رسم کنیم، آن‌گاه مساحت مثلث ABD، نصف مساحت متوازی‌الاضلاع خواهد بود. با توجه به شکل، داریم:

$$\hat{B}=150^\circ \Rightarrow \hat{A}=30^\circ \Rightarrow S_{\overset{\Delta}{ABD}}=\frac{1}{2}\times 6\times 4\times \sin A$$
$$=12\times \sin 30^\circ=12\times\frac{1}{2}=6 \Rightarrow S_{\text{متوازی‌الاضلاع}}=2\times 6=12$$

توجه کنید که چون $\sin 150^\circ=\sin(180^\circ-30^\circ)=\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$ است، می‌توان نوشت:

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}BA\times BC\times \sin 150^\circ=\frac{1}{2}\times 4\times 6\times\frac{1}{2}=6$$

۱۰۲۸ (۱) (۲) **(۳)** (۴)



$$S_{\overset{\Delta}{ABC}}=\frac{1}{2}S_{ABCD}=\frac{1}{2}\times 18=9$$
$$S_{\overset{\Delta}{ABC}}=\frac{1}{2}\times BA\times BC\times \sin 60^\circ=9$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2}\times BA\times 6\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=9 \Rightarrow \frac{18BA}{4}=9 \Rightarrow BA=2$$

۱۰۲۹ (۱) **(۲)** (۳) (۴)

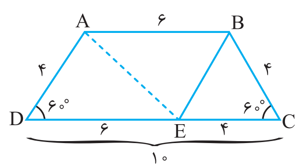
نکته: مساحت هر چهارضلعی برابر است با نصف حاصل‌ضرب طول دو قطر در سینوس زاویهٔ بین آن‌ها.

بنابراین:

$$S=\frac{1}{2}d\times d'\sin 135^\circ=\frac{1}{2}\times 8\times 12\times\frac{\sqrt{2}}{2}=24\sqrt{2}$$

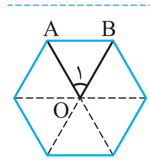
۱۰۳۰ (۱) **(۲)** (۳) (۴)

از نقطهٔ B خطی به موازات AD رسم می‌کنیم تا ضلع DC را در نقطهٔ E قطع کند. چون ذوزنقه متساوی‌الساقین است، پس $\hat{D}=B\hat{E}C=60^\circ$ و در نتیجه مثلث BEC متساوی‌الاضلاع و چهارضلعی ABED متوازی‌الاضلاع است.



$$S_{ABED}=2S_{\overset{\Delta}{ADE}}=2\times\frac{1}{2}\times AD\times DE\times \sin D$$
$$=2\times\frac{1}{2}\times 4\times 6\times \sin 60^\circ=12\sqrt{3}$$
$$S_{\overset{\Delta}{BCE}}=\frac{1}{2}BC\times EC\times \sin 60^\circ=\frac{1}{2}\times 4\times 4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$$
$$S_{ABCD}=S_{ABED}+S_{\overset{\Delta}{BCE}}=12\sqrt{3}+4\sqrt{3}=16\sqrt{3}$$

۱۰۳۱ (۱) **(۲)** (۳) (۴)



روش اول: اگر مرکز شش‌ضلعی منتظم را به رأس‌های آن وصل کنیم، ۶ مثلث مساوی ایجاد می‌شود. داریم:

$$\hat{O}_1=\frac{360^\circ}{6}=60^\circ \ , \ OA=OB$$

بنابراین مثلث OAB متساوی‌الاضلاع است. در نتیجه:

$$OA=OB=AB=2\sqrt{3}$$
$$S_{\overset{\Delta}{OAB}}=\frac{1}{2}\times OA\times OB\times \sin 60^\circ$$
$$=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times 2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$$
$$\text{مساحت شش‌ضلعی}=6S_{\overset{\Delta}{OAB}}=6\times 3\sqrt{3}=18\sqrt{3}$$

روش دوم: از نکتهٔ زیر می‌توان مساحت شش‌ضلعی منتظم را به‌دست آورد:

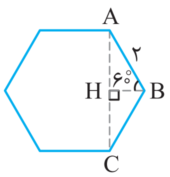
نکته: مساحت شش‌ضلعی منتظم به ضلع a برابر $\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$ است.

$$a=2\sqrt{3} \Rightarrow S=\frac{3\sqrt{3}}{2}\times(2\sqrt{3})^2=18\sqrt{3}$$

۱۰۳۲ (۱) (۲) (۳) **(۴)**

ابتدا طول قطر کوچک شش‌ضلعی منتظم به ضلع ۲ را به‌دست می‌آوریم.

$$\text{اندازهٔ هر زاویهٔ داخلی شش‌ضلعی منتظم}=\frac{(6-2)\times 180^\circ}{6}=120^\circ$$



در شش‌ضلعی منتظم مقابل، AC قطر کوچک است. از B عمود BH را بر ضلع AC رسم می‌کنیم. داریم:

$$\sin 60^\circ=\frac{AH}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{AH}{2} \Rightarrow AH=\sqrt{3} \Rightarrow AC=2\sqrt{3}$$

طول ضلع شش‌ضلعی منتظم جدید برابر $a=2\sqrt{3}$ است و در نتیجه مساحت آن برابر است با:

$$\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2=\frac{3\sqrt{3}}{2}\times(2\sqrt{3})^2=\frac{3\sqrt{3}}{\cancel{2}}\times\overset{6}{\cancel{12}}=18\sqrt{3}$$

۱۰۳۳ (۱) (۲) (۳) **(۴)**

نکته:

مقدار	0°	90°	180°	270°	360°
$\sin\theta$	۰	۱	۰	۱-	۰
$\cos\theta$	۱	۰	۱-	۰	۱
$\tan\theta$	۰	تعریف نشده	۰	تعریف نشده	۰
$\cot\theta$	تعریف نشده	۰	تعریف نشده	۰	تعریف نشده

$$\sin 30^\circ=\frac{1}{2} \ , \ \cos 0^\circ=1 \ , \ \tan 60^\circ=\sqrt{3}$$
$$\cot 45^\circ=1 \ , \ \sin 270^\circ=-1$$
$$\sin^2 30^\circ+\cos^2 0-\sqrt{3}\tan 60^\circ+3\cot 45^\circ-\sin^3 270^\circ$$
$$=\left(\frac{1}{2}\right)^2+(1)^2-\sqrt{3}\times\sqrt{3}+3(1)-(-1)^3$$
$$=\frac{1}{4}+1-3+3+1=\frac{9}{4}$$

۱۰۳۴ **(۱)** (۲) (۳) (۴)

$$\frac{\sin 270^\circ+\cos 180^\circ-\tan 180^\circ}{\sin 90^\circ+\cos 0^\circ-\cot 270^\circ}=\frac{-1-1-0}{1+1-0}=\frac{-2}{2}=-1$$

۱۰۳۵ (۱) (۲) (۳) (۴)

برای هر زاویه مثل θ، می‌دانیم $-1 \le \sin\theta \le 1$ و $-1 \le \cos\theta \le 1$ بنابراین از رابطهٔ $3\sin 2\alpha - 2\cos 3\beta = 5$، می‌توان نتیجه گرفت که:

$$\begin{cases}\sin 2\alpha = 1\\ \cos 3\beta = -1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2\alpha = 90^\circ\\ 3\beta = 180^\circ\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha = 45^\circ\\ \beta = 60\end{cases}$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\beta = \sin^2 45^\circ + \cos^2 60^\circ$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

۱۰۳۶ (۱) (۲) (۳) (۴)

$$\frac{2\sin x + \cos x}{\sin x + 2\cos x} = 2 \Rightarrow 2\cancel{\sin x} + \cos x = 2\cancel{\sin x} + 4\cos x$$

$$\Rightarrow 3\cos x = 0 \Rightarrow \cos x = 0 \Rightarrow x = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \sin(180^\circ + x) + \cos(180^\circ + x) + \cos 2x$$

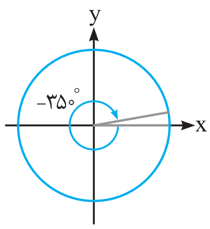
$$= \sin 270^\circ + \cos 270^\circ + \cos 180^\circ = -1 + 0 + (-1) = -2$$

۱۰۳۷ (۱) (۲) (۳) (۴)

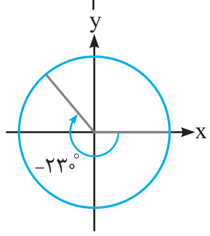
نکته:

ربع / نسبت	اول $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$	دوم $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$	سوم $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$	چهارم $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$
$\sin\alpha$	+	+	−	−
$\cos\alpha$	+	−	−	+
$\tan\alpha$	+	−	+	−
$\cot\alpha$	+	−	+	−

گزینهٔ (۱): زاویهٔ $190^\circ \in (180^\circ, 270^\circ)$، پس زاویهٔ 190° در ناحیهٔ سوم دایرهٔ مثلثاتی قرار دارد و در این ناحیه سینوس منفی است. پس این گزینه نادرست است.



گزینهٔ (۲): با توجه به شکل، زاویهٔ -350° در ناحیهٔ اول دایرهٔ مثلثاتی واقع است و در این ناحیه کسینوس مثبت است. لذا این گزینه صحیح است.



گزینهٔ (۳): با توجه به شکل، زاویهٔ -230° در ناحیهٔ دوم دایرهٔ مثلثاتی واقع است و در این ناحیه سینوس مثبت است. پس این گزینه نادرست است.

گزینهٔ (۴): زاویهٔ 310° در ناحیهٔ چهارم دایرهٔ مثلثاتی واقع است و در این ناحیه تانژانت منفی است و لذا این گزینه نیز نادرست است.

۱۰۳۸ (۱) (۲) (۳) (۴)

حاصل‌ضرب دو عبارت $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ مثبت است. بنابراین هر دو مثبت یا هر دو منفی‌اند. لذا تا این‌جا انتهای کمان α در ناحیهٔ اول یا سوم قرار می‌گیرد.

از طرفی می‌دانیم $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$، پس $\sin\alpha = \cos\alpha . \tan\alpha$، بنابراین از $\cos\alpha \tan\alpha < 0$ نتیجه می‌شود که $\sin\alpha < 0$، با توجه به این‌که انتهای کمان α در ناحیهٔ اول یا سوم قرار دارد، از $\sin\alpha < 0$ نتیجه می‌شود که انتهای کمان α در ناحیهٔ سوم قرار می‌گیرد.

۱۰۳۹ (۱) (۲) (۳) (۴)

با قرار دادن $\frac{\sin x}{\cos x}$ به جای $\tan x$، عبارت‌های داده شده را ساده می‌کنیم:

$$\sin x + \tan x = \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin x \cos x + \sin x}{\cos x}$$

$$= \frac{\sin x(\cos x + 1)}{\cos x} = \tan x(\underbrace{1 + \cos x}_{\text{نامنفی}}) > 0 \Rightarrow \tan x > 0$$

$\Rightarrow$ انتهای کمان x در ناحیهٔ اول یا سوم قرار دارد. (۱)

$$\frac{1}{\cos x} - \sin x \tan x = \frac{1}{\cos x} - \sin x \times \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\overbrace{1 - \sin^2 x}^{\text{همواره نامنفی}}}{\cos x} < 0$$

$\Rightarrow \cos x < 0 \Rightarrow$ انتهای کمان x در ناحیهٔ دوم یا سوم قرار دارد. (۲)

(۱) ، (۲) $\Rightarrow$ انتهای کمان x در ناحیهٔ سوم قرار دارد.

۱۰۴۰ (۱) (۲) (۳) (۴)

$$\cos x\sqrt{1 + \tan^2 x} - 1 = 0 \Rightarrow \cos x\sqrt{1 + \tan^2 x} = 1$$

واضح است که عبارت $\sqrt{1 + \tan^2 x}$ و عدد ۱ مثبت‌اند، پس باید $\cos x$ نیز مثبت باشد. همچنین در رابطهٔ $\tan x = \frac{-\sqrt{1 - \cos^2 x}}{\cos x}$، صورت کسر منفی و مخرج کسر طبق مطالب فوق، مثبت بوده و در نتیجه $\tan x$ منفی خواهد بود.

تنها ناحیه‌ای که در آن $\cos x$ مثبت و $\tan x$ منفی است، ناحیهٔ چهارم مثلثاتی می‌باشد.

۱۰۴۱ (۱) (۲) (۳) (۴)

$1 - \sin\theta = \frac{5}{4} \Rightarrow \sin\theta = -\frac{1}{4} < 0 \Rightarrow$ θ در ناحیهٔ سوم یا چهارم قرار دارد.

$\cot\theta . \sin\theta > 0 \Rightarrow$ θ در ناحیهٔ اول یا چهارم قرار دارد.

پس θ در ناحیهٔ چهارم مثلثاتی قرار می‌گیرد.

۱۰۴۲ (۱) (۲) (۳) (۴)

نکته: $\sin\theta$ در ناحیه‌های اول و چهارم صعودی و در ناحیه‌های دوم و سوم نزولی است.

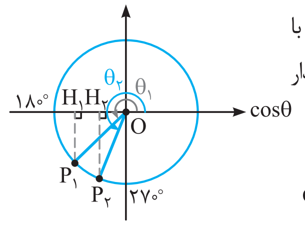
می‌دانیم روی دایرهٔ مثلثاتی، $\sin\theta$ همان y نقطه است.

وقتی زاویهٔ θ از 0° تا 180° زیاد می‌شود، θ از ناحیهٔ اول و از نقطهٔ صفر شروع شده و به تدریج به 90° می‌رسد. بدیهی است در ناحیهٔ اول با زیاد شدن θ، y نقطه که همان $\sin\theta$ است از عدد صفر به عدد ۱ می‌رسد و در نتیجه $\sin\theta$ در این ناحیه افزایشی است. اما در ناحیهٔ دوم یعنی از 90° تا 180° با زیادشدن θ، y نقطه رو به کاهش می‌گذارد و مقدار $\sin\theta$ از عدد ۱ رفته رفته کم شده و به صفر نزدیک می‌شود و لذا در این ناحیه $\sin\theta$ کاهشی است. پس در ناحیهٔ اول و دوم ابتدا $\sin\theta$ زیاد شده و سپس کم می‌شود.

۱۰۴۳ (۱) (۲) (۳) (۴)

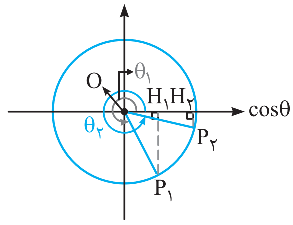
نکته: $\cos\theta$ در ناحیه‌های اول و دوم نزولی و در ناحیه‌های سوم و چهارم صعودی است.

در ناحیهٔ سوم ($۱۸۰^\circ < \theta < ۲۷۰^\circ$)، با زیاد شدن زاویهٔ θ از ۱۸۰° تا ۲۷۰°، مقدار $\cos\theta$ افزایش می‌یابد.



$$\theta_۱ < \theta_۲ \ ,\ \cos\theta_۱ = OH_۱$$
$$\cos\theta_۲ = OH_۲ \ ,\ OH_۲ > OH_۱$$
$$\Rightarrow \cos\theta_۲ > \cos\theta_۱$$

همچنین با زیاد شدن زاویهٔ θ از ۲۷۰° تا ۳۶۰°، مقدار $\cos\theta$ افزایش می‌یابد:



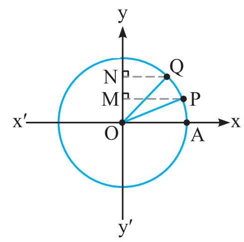
$$\theta_۲ > \theta_۱$$
$$OH_۲ = \cos\theta_۲ > OH_۱ = \cos\theta_۱$$

بنابراین مقدار $\cos\theta$ همواره با افزایش θ از ۱۸۰° تا ۳۶۰° افزایش می‌یابد.

۱۰۴۴ ۱ **۲** ۳ ۴

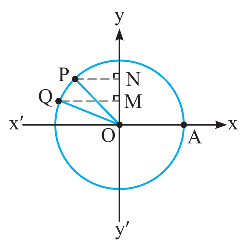
روی دایرهٔ مثلثاتی مقدار هر یک از عبارت‌های داده شده در گزینه‌ها را مشخص می‌کنیم و درستی یا نادرستی نامساوی‌ها را بررسی می‌کنیم.

گزینهٔ (۱):



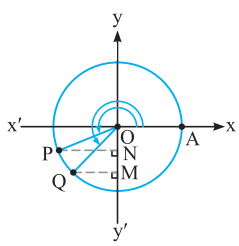
$$\begin{cases} A\hat{O}P = ۴۰^\circ \Rightarrow \sin ۴۰^\circ = OM \\ A\hat{O}Q = ۵۰^\circ \Rightarrow \sin ۵۰^\circ = ON \end{cases}$$
$$\Rightarrow ON > OM$$
$$\Rightarrow \sin ۵۰^\circ > \sin ۴۰^\circ$$

گزینهٔ (۲):



$$\begin{cases} A\hat{O}P = ۱۲۰^\circ \Rightarrow \sin ۱۲۰^\circ = ON \\ A\hat{O}Q = ۱۵۰^\circ \Rightarrow \sin ۱۵۰^\circ = OM \end{cases}$$
$$\Rightarrow ON > OM$$
$$\Rightarrow \sin ۱۲۰^\circ > \sin ۱۵۰^\circ$$

گزینهٔ (۳):



$$\begin{cases} A\hat{O}P = ۲۱۰^\circ \Rightarrow \sin ۲۱۰^\circ = ON \\ A\hat{O}Q = ۲۴۰^\circ \Rightarrow \sin ۲۴۰^\circ = OM \end{cases}$$
$$\Rightarrow ON > OM$$
$$\Rightarrow \sin ۲۱۰^\circ > \sin ۲۴۰^\circ$$

در گزینهٔ (۴)، $\sin ۲۷۰^\circ = -۱$ و $\sin ۹۰^\circ = ۱$، بنابراین نامساوی $\sin ۲۷۰^\circ > \sin ۹۰^\circ$ برقرار نیست.

۱۰۴۵ ۱ ۲ ۳ **۴**

اگر x و y دو زاویهٔ متمم باشند ($x + y = ۹۰^\circ$)، در این صورت $\sin x = \cos y$ و $\cos x = \sin y$. همچنین می‌دانیم در ناحیهٔ اول با افزایش θ، مقدار $\sin\theta$ افزایش و مقدار $\cos\theta$ کاهش می‌یابد. حال به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

گزینهٔ (۱):
$$۵۰^\circ + ۴۰^\circ = ۹۰^\circ \Rightarrow \cos ۵۰^\circ = \sin ۴۰^\circ$$
$$۲۰^\circ < ۴۰^\circ \Rightarrow \sin ۲۰^\circ < \sin ۴۰^\circ = \cos ۵۰^\circ$$

گزینهٔ (۲):
$$۵۰^\circ > ۳۰^\circ \Rightarrow \sin ۵۰^\circ > \sin ۳۰^\circ$$

گزینهٔ (۳):
$$۲۰^\circ + ۷۰^\circ = ۹۰^\circ \Rightarrow \sin ۷۰^\circ = \cos ۲۰^\circ$$
$$۲۰^\circ < ۴۰^\circ \Rightarrow \cos ۴۰^\circ < \cos ۲۰^\circ = \sin ۷۰^\circ$$

گزینهٔ (۴):
$$۵۰^\circ + ۴۰^\circ = ۹۰^\circ \Rightarrow \sin ۵۰^\circ = \cos ۴۰^\circ$$
$$۱۰^\circ < ۴۰^\circ \Rightarrow \cos ۱۰^\circ > \cos ۴۰^\circ = \sin ۵۰^\circ$$

۱۰۴۶ ۱ ۲ ۳ **۴**

نکته: اگر نقطهٔ $P(x , y)$ روی دایرهٔ مثلثاتی باشد، آن‌گاه $x^۲ + y^۲ = ۱$ و اگر θ زاویهٔ بین OP و جهت مثبت محور $\overrightarrow{Ox}$ باشد، آن‌گاه:
$$\sin\theta = y \ ,\ \cos\theta = x ,\ \tan\theta = \frac{y}{x} \ ,\ \cot\theta = \frac{x}{y}$$

با توجه به دایرهٔ مثلثاتی داده شده، عرض نقطهٔ P برابر $-\frac{۲}{۳}$ است. پس:
$$x^۲ + y^۲ = ۱ \Rightarrow x^۲ + \frac{۴}{۹} = ۱ \Rightarrow x^۲ = ۱ - \frac{۴}{۹}$$
$$\Rightarrow x^۲ = \frac{۵}{۹} \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{۵}}{۳} \xrightarrow[\text{قرار دارد}]{\text{نقطهٔ } P \text{ در ناحیهٔ چهارم}} x = \frac{\sqrt{۵}}{۳}$$

بنابراین:
$$\sin\theta = y \Rightarrow \sin\theta = \frac{-۲}{۳} \ ,\ \cos\theta = x \Rightarrow \cos\theta = \frac{\sqrt{۵}}{۳}$$
$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{\frac{-۲}{۳}}{\frac{\sqrt{۵}}{۳}} = -\frac{۲}{\sqrt{۵}} \Rightarrow \tan\theta = \frac{-۲\sqrt{۵}}{۵}$$
$$\cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{\frac{\sqrt{۵}}{۳}}{-\frac{۲}{۳}} \Rightarrow \cot\theta = -\frac{\sqrt{۵}}{۲}$$

۱۰۴۷ **۱** ۲ ۳ ۴

اگر $P(x , y)$ نقطه‌ای روی دایرهٔ مثلثاتی بوده و θ زاویهٔ بین نیم‌خط $\overrightarrow{OP}$ و محور $\overrightarrow{Ox}$ باشد، آن‌گاه:
$$x = \cos\theta \ ,\ y = \sin\theta \ ,\ x^۲ + y^۲ = ۱$$

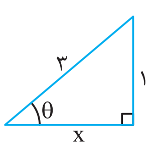
طبق فرض $x = -\frac{۱}{۳}$، پس:
$$x^۲ + y^۲ = ۱ \Rightarrow \frac{۱}{۹} + y^۲ = ۱ \Rightarrow y^۲ = ۱ - \frac{۱}{۹} = \frac{۸}{۹} \Rightarrow y = \pm\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$$

در ناحیهٔ دوم، y مثبت است. پس داریم:
$$\sin\theta = y = \frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$$

۱۰۴۸ ۱ **۲** ۳ ۴

در مثلث قائم‌الزاویه داریم $\sin\theta = \frac{\text{اندازهٔ ضلع مقابل به } \theta}{\text{اندازهٔ وتر}}$ و در این سؤال $\sin\theta = \frac{۱}{۳}$، لذا مثلث قائم‌الزاویه‌ای با زاویهٔ حادهٔ θ به گونه‌ای درنظر می‌گیریم که اندازهٔ ضلع مقابل به θ برابر ۱ و طول وتر آن برابر ۳ باشد.

بنابر رابطهٔ فیثاغورس داریم:



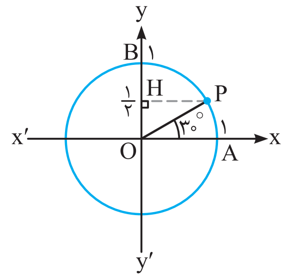
$$x^۲ = ۳^۲ - ۱^۲ = ۸ \Rightarrow x = ۲\sqrt{۲}$$

چون θ در ناحیهٔ دوم قرار دارد و در این ناحیه مقدار تانژانت منفی است، پس:
$$\tan\theta = -\frac{\text{اندازهٔ ضلع مقابل به } \theta}{\text{اندازهٔ ضلع مجاور به } \theta} = -\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}$$
$$= -\frac{۱}{۲\sqrt{۲}} \times \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} = -\frac{\sqrt{۲}}{۴}$$

۱۰۴۹ ۱ ۲ ۳ **۴**

$$۵\sin x = ۱ - ۲m \Rightarrow \sin x = \frac{۱ - ۲m}{۵}$$
$$\xrightarrow{-۱ \le \sin x \le ۱} -۱ \le \frac{۱ - ۲m}{۵} \le ۱ \xrightarrow{\times ۵} -۵ \le ۱ - ۲m \le ۵$$
$$\xrightarrow{-۱} -۶ \le -۲m \le ۴ \xrightarrow{\div(-۲)} -۲ \le m \le ۳$$

۱۰۵۰ ۱ **۲** ۳ ۴



می‌دانیم در دایرهٔ مثلثاتی $\sin\theta$ همان y زاویه است.
بنابراین وقتی که θ از ۳۰° تا ۹۰° تغییر می‌کند، مقدار $\sin\theta$ از OH تا OB تغییر می‌کند، یعنی:

$$۳۰^\circ \le \theta \le ۹۰^\circ \Rightarrow \frac{۱}{۲} \le \sin\theta \le ۱ \Rightarrow \frac{۱}{۲} \le m+۱ \le ۱$$

$$\xrightarrow{-۱} -\frac{۱}{۲} \le m \le ۰$$

۱۰۵۱ ۱ **۲** ۳ ۴

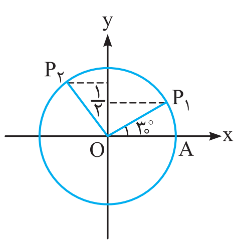
$۱۸۰^\circ < \theta < ۲۷۰^\circ$، در نتیجه θ در ناحیهٔ سوم دایرهٔ مثلثاتی قرار دارد.
در ناحیهٔ سوم دایرهٔ مثلثاتی کسینوس عددی منفی است.

$$-۱ < \cos\theta < ۰ \Rightarrow -۱ < \frac{۲m-۱}{۲} < ۰ \xrightarrow{\times ۲} -۲ < ۲m-۱ < ۰$$

$$\xrightarrow{+۱} -۱ < ۲m < ۱ \xrightarrow{\div ۲} -\frac{۱}{۲} < m < \frac{۱}{۲}$$

۱۰۵۲ ۱ **۲** ۳ ۴

فرض کنید $A\hat{O}P_۱ = ۳۰^\circ$ و $A\hat{O}P_۲ = ۱۳۰^\circ$ باشد. باید ببینیم وقتی مقدار زاویهٔ α از ۳۰° تا ۱۳۰° افزایش می‌یابد، y زاویه(همان $\sin\alpha$)، چگونه تغییر می‌کند. در حالتی‌که $\alpha = ۳۰^\circ$ باشد، عرض نقطهٔ $P_۱$ برابر $\frac{۱}{۲}$ است، با افزایش زاویهٔ α از ۳۰° تا ۹۰°، عرض نقطهٔ $P_۱(\sin\alpha)$ نیز افزایش می‌یابد و زمانی‌که $\alpha = ۹۰^\circ$ می‌شود، $\sin\alpha$ برابر ۱ می‌شود. با افزایش α از ۹۰° تا ۱۳۰°، دوباره $\sin\alpha$ رو به کاهش می‌گذارد تا زمانی که $\alpha = ۱۳۰^\circ$ می‌شود، $\sin\alpha$ برابر عددی بین $\frac{۱}{۲}$ و ۱ را اختیار می‌کند. پس می‌توان گفت با افزایش α از ۳۰° تا ۱۳۰°، حداقل مقدار $\sin\alpha$ برابر $\frac{۱}{۲}$ و حداکثر آن برابر ۱ است. پس داریم:



$$۳۰^\circ \le \alpha \le ۱۳۰^\circ \Rightarrow \frac{۱}{۲} \le \sin\alpha \le ۱$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲} \le \frac{۲m-۱}{۳} \le ۱$$

$$\xrightarrow{\times ۶} ۳ \le ۴m-۲ \le ۶$$

$$\xrightarrow{+۲} ۵ \le ۴m \le ۸ \xrightarrow{\div ۴} \frac{۵}{۴} \le m \le ۲$$

۱۰۵۳ ۱ ۲ **۳** ۴

نکته: اگر α زاویه‌ای باشد که خط با جهت مثبت محور افقی می‌سازد، آن‌گاه: شیب خط $= \tan\alpha$

بنابراین شیب این خط برابر $m = \tan ۴۵^\circ = ۱$ و در نتیجه معادلهٔ خطی که از نقطهٔ $(-۲،۳)$ می‌گذرد و شیب آن برابر ۱ باشد عبارت است از:

$$y - ۳ = ۱(x+۲) \Rightarrow y = x + ۵$$

برای یافتن نقطهٔ تلاقی این خط با محور yها، قرار می‌دهیم $x = ۰$ که در این‌صورت به‌دست می‌آید $y = ۵$

۱۰۵۴ ۱ **۲** ۳ ۴

شیب خط گذرنده از دو نقطه : $m = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱} = \frac{a+۷-a}{۲a-۱-۲}$

$$= \frac{۷}{۲a-۳} \quad (۱)$$

از طرفی تانژانت زاویه‌ای که خط با جهت مثبت محور xها دارد، برابر شیب خط است، داریم: $m = \tan ۴۵^\circ = ۱ \quad (۲)$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} \frac{۷}{۲a-۳} = ۱ \Rightarrow ۲a-۳ = ۷ \Rightarrow a = \frac{۱۰}{۲} = ۵$$

۱۰۵۵ **۱** ۲ ۳ ۴

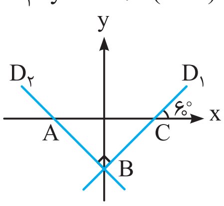
می‌دانیم شیب خط برابر تانژانت زاویه‌ای است که خط با جهت مثبت محور xها می‌سازد، بنابراین شیب خط $D_۱$ برابر است با:

$$m_{D_۱} = \tan ۶۰^\circ = \sqrt{۳}$$

معادلهٔ خط $D_۱$ را با دانستن نقطهٔ $C(۴،۰)$ و $m_{D_۱} = \sqrt{۳}$ می‌نویسیم:

$$D_۱ : y - ۰ = \sqrt{۳}(x-۴) \Rightarrow y = \sqrt{۳}x - ۴\sqrt{۳}$$

بنابراین مختصات نقطهٔ برخورد خط $D_۱$ با محور yها برابر $B(۰،-۴\sqrt{۳})$ می‌باشد (عرض از مبدأ خط $D_۱$)



چون دو خط $D_۱$ و $D_۲$ بر هم عمود هستند، پس $m_{D_۱} \times m_{D_۲} = -۱$.
بنابراین با دانستن نقطهٔ $B(۰،-۴\sqrt{۳})$ و $m_{D_۲} = -\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ معادلهٔ خط $D_۲$ را می‌نویسیم:

$$D_۲ : y + ۴\sqrt{۳} = -\frac{\sqrt{۳}}{۳}(x-۰) \Rightarrow y = -\frac{\sqrt{۳}}{۳}x - ۴\sqrt{۳}$$

برای پیدا کردن محل برخورد خط $D_۲$ با محور xها، به جای y، صفر قرار می‌دهیم:

$$۰ = -\frac{\sqrt{۳}}{۳}x - ۴\sqrt{۳} \Rightarrow -\frac{\sqrt{۳}}{۳}x = ۴\sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow x = \frac{۴\sqrt{۳}}{-\frac{\sqrt{۳}}{۳}} = \frac{۱۲\sqrt{۳}}{-\sqrt{۳}} = -۱۲$$

۱۰۵۶ ۱ **۲** ۳ ۴

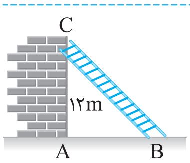
شیب خطی که با جهت مثبت محور xها زاویهٔ ۴۵° می‌سازد، برابر $m = \tan ۴۵^\circ = ۱$ است. از سوی دیگر شیب خط $(۲a+۳)x + (۵-a)y = ۱$ برابر است با:

$$m = -\frac{۲a+۳}{۵-a}$$

بنابراین:

$$-\frac{۲a+۳}{۵-a} = ۱ \Rightarrow ۲a+۳ = -۵+a \Rightarrow a = -۸$$

۱۰۵۷ **۱** ۲ ۳ ۴



شکلی برای مسئله رسم می‌کنیم.
بنابر فرض، $AC = ۱۲$ و $m = \tan B = \frac{۱۲}{۵}$،
اکنون باید طول BC را بیابیم، داریم:

$$\tan B = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \frac{۱۲}{۵} = \frac{۱۲}{AB} \Rightarrow AB = ۵$$

$$BC^۲ = AB^۲ + AC^۲$$

$$\Rightarrow BC^۲ = ۵^۲ + ۱۲^۲ = ۲۵ + ۱۴۴ = ۱۶۹ \Rightarrow BC = ۱۳$$

۱۰۵۸ ۱ ۲ **۳** ۴

بیش‌ترین مقدار کسینوس، عدد یک است، یعنی $\cos x \le ۱$

$$\cos x\le ۱ \Rightarrow ۱-\cos x \ge ۰ \Rightarrow |۱-\cos x| = ۱-\cos x$$

$$\cos x \le ۱ \Rightarrow ۲\cos x \le ۲ \Rightarrow ۲\cos x - ۳ \le -۱ < ۰$$

$$\Rightarrow |۲\cos x - ۳| = -(۲\cos x - ۳)$$

$$\Rightarrow |۱-\cos x| + |۲\cos x-۳| = ۱-\cos x-(۲\cos x -۳)$$

$$= ۱-\cos x - ۲\cos x + ۳ = ۴ - ۳\cos x$$

۱۰۵۹ ۱ ۲ **۳** ۴

می‌دانیم همواره $-۱\le \sin\theta \le ۱$، پس:

$$-۱\le\sin\theta\le ۱ \xrightarrow[\text{جهت عوض می‌شود}]{\times(-۲)} ۲\ge -۲\sin\theta \ge -۲$$

$$\xrightarrow{+۳} ۵\ge ۳-۲\sin\theta\ge ۱ \Rightarrow ۱\le A\le ۵ \Rightarrow A\in[۱,۵]$$

۱۰۶۰ ۱ ۲ **۳** ۴

فرض کنیم $y = ۳\sin x - ۴$ باشد، داریم:

$$-۱\le \sin x\le ۱ \xrightarrow{\times ۳} -۳\le ۳\sin x \le ۳$$

$$\xrightarrow{-۴} -۷\le ۳\sin x - ۴ \le -۱$$

$$\Rightarrow -۷\le y\le -۱ \Rightarrow \begin{cases} A=-۱\\ B=-۷\end{cases} \Rightarrow A+B^۲ = -۱+۴۹=۴۸$$

۱۰۶۱ ۱ ۲ ۳ **۴**

عبارت $A=۲\sin^۲ x - ۳\sin x + ۱$ را در نظر می‌گیریم. با فرض $t=\sin x$ عبارت A به صورت $A=۲t^۲-۳t+۱$ درمی‌آید. حدود t به‌صورت $-۱\le t\le ۱$ است. مقدار عبارت A را به ازای $t=-۱$ و $t=۱$ به‌دست می‌آوریم:

$$t=-۱\Rightarrow A = ۲(-۱)^۲ - ۳(-۱)+۱ = ۶$$

$$t=۱ \Rightarrow A = ۲(۱)^۲ - ۳(۱)+۱=۰$$

همچنین مقدار عبارت درجه دوم A را به ازای $t=-\frac{b}{۲a}=\frac{۳}{۴}$ به‌دست می‌آوریم:

$$t=\frac{۳}{۴} \Rightarrow A = ۲\times\left(\frac{۳}{۴}\right)^۲ - ۳\left(\frac{۳}{۴}\right)+۱ = \frac{۹}{۸} - \frac{۹}{۴} + ۱ = -\frac{۹}{۸}+۱ = -\frac{۱}{۸}$$

توجه کنید که مقدار $t=-\frac{b}{۲a}$، باید در محدودهٔ $[-۱,۱]$ باشد و اگر این عدد در این بازه نباشد، نباید مقدار A را به ازای این t به‌دست آورد.

۱۰۶۲ ۱ ۲ **۳** ۴

با استفاده از رابطهٔ $\cos^۲ x = ۱-\sin^۲ x$، ابتدا عبارت را ساده‌تر می‌کنیم:

$$A = ۳\sin^۲ x - \cos^۲ x + ۳ = ۳\sin^۲ x - (۱-\sin^۲ x) + ۳$$

$$= ۳\sin^۲ x - ۱ + \sin^۲ x + ۳ \Rightarrow A = ۴\sin^۲ x + ۲$$

می‌دانیم $۰\le\sin^۲ x\le ۱$، پس:

$$۰\le ۴\sin^۲ x \le ۴ \xrightarrow{+۲} ۲\le ۴\sin^۲ x + ۲ \le ۶ \Rightarrow ۲\le A\le ۶$$

بنابراین بیش‌ترین مقدار A برابر ۶ و کم‌ترین مقدار آن برابر ۲ است. بنابراین:

$$Max(A) - Min(A) = ۶-۲=۴$$

۱۰۶۳ ۱ ۲ **۳** ۴

نکته: اگر اندازهٔ زاویه‌ای بر حسب درجه برابر D و بر حسب رادیان برابر R باشد، آن‌گاه $D=\frac{۱۸۰R}{\pi}$ و $R=\frac{\pi D}{۱۸۰}$، البته اگر زاویه بر حسب رادیان باشد، می‌توان با قرار دادن ۱۸۰° به جای π، اندازهٔ زاویه را بر حسب درجه به‌دست آورد.

با قرار دادن ۱۸۰° به جای π، اندازهٔ زاویه بر حسب درجه به‌دست می‌آید:

$$\pi = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \frac{۲\pi}{۹} = \frac{۲\times۱۸۰^\circ}{۹} = ۴۰^\circ$$

۱۰۶۴ ۱ **۲** ۳ ۴

از رابطهٔ $R=\frac{\pi D}{۱۸۰}$، اندازهٔ زاویه بر حسب رادیان به‌دست می‌آید:

$$D=۳۷/۵ \Rightarrow R = \frac{\pi\times ۳۷/۵}{۱۸۰} = \frac{\pi\times\overset{\overset{۵}{\cancel{۲۵}}}{\cancel{۳۷۵}}}{\underset{۱۲}{\cancel{۱۸۰}}\times\underset{۲}{\cancel{۱۰}}} = \frac{۵\pi}{۲۴}$$

۱۰۶۵ **۱** ۲ ۳ ۴

فرض کنیم اندازهٔ زوایای داخلی مثلث $۳x$، $۵x$ و $۷x$ باشد، داریم:

$$\text{مجموع زاویه‌های داخلی} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۳x+۵x+۷x = ۱۸۰^\circ$$

$$\Rightarrow ۱۵x = ۱۸۰^\circ \Rightarrow x = ۱۲^\circ$$

اندازهٔ کوچک‌ترین زاویهٔ مثلث بر حسب درجه برابر $۳x = ۳۶^\circ$ و بر حسب رادیان برابر است با:

$$R=\frac{D}{۱۸۰^\circ}\times\pi = \frac{۳۶^\circ}{۱۸۰^\circ}\times\pi = \frac{\pi}{۵}$$

۱۰۶۶ ۱ ۲ **۳** ۴

مجموع زاویه‌های داخلی هر چهارضلعی محدب برابر ۳۶۰° است. تناسب داده‌شده را برابر t می‌گیریم و اندازهٔ هر یک از زاویه‌ها را بر حسب t می‌نویسیم:

$$\frac{\hat A}{۸}=\frac{\hat B}{۵}=\frac{\hat C}{۷}=\frac{\hat D}{۴}=t \Rightarrow \hat A = ۸t, \hat B = ۵t, \hat C = ۷t, \hat D = ۴t$$

$$\hat A+\hat B+\hat C+\hat D = ۳۶۰^\circ \Rightarrow ۸t+۵t+۷t+۴t = ۳۶۰^\circ$$

$$\Rightarrow ۲۴t = ۳۶۰^\circ \Rightarrow t = \frac{۳۶۰^\circ}{۲۴} = ۱۵^\circ \Rightarrow \hat C = ۷t = ۱۰۵^\circ$$

اندازهٔ زاویهٔ C بر حسب رادیان برابر $R = \frac{\pi\times\overset{۷}{\cancel{۱۰۵}}}{\underset{۱۲}{\cancel{۱۸۰}}} = \frac{۷\pi}{۱۲}$ می‌باشد.

۱۰۶۷ ۱ ۲ **۳** ۴

ابتدا عبارت $\cos^۴\theta - \sin^۴\theta$ را به کمک اتحادهای مثلثاتی ساده می‌کنیم:

$$\cos^۴\theta-\sin^۴\theta = (\cos^۲\theta - \sin^۲\theta)\underbrace{(\cos^۲\theta+\sin^۲\theta)}_{۱}$$

$$=\cos^۲\theta - \sin^۲\theta = \cos^۲\theta - (۱-\cos^۲\theta)$$

$$= ۲\cos^۲\theta - ۱ = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow ۲\cos^۲\theta = ۱-\frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \cos^۲\theta = \frac{۱}{۴} \Rightarrow \cos\theta = \pm\frac{۱}{۲}$$

$$\xrightarrow[\cos\theta>۰]{\theta\ \text{حاده است}} \cos\theta = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{۳}$$