

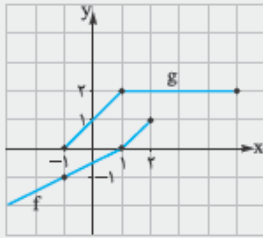
# فهرست

۷	فصل اول: مجموعه
۱۹	فصل دوم: الگو و دنباله
۳۸	فصل سوم: توان‌های گویا و عبارهای جبری
۵۵	فصل چهارم: معادله، نامعادله و تعیین علامت
۶۹	فصل پنجم: معادله و تابع درجه دوم
۹۰	فصل ششم: قدرمطلق و جزء صحیح
۱۰۹	فصل هفتم: توابع نمایی و لگاریتم
۱۳۰	فصل هشتم: هندسه تحلیلی
۱۴۳	فصل نهم: هندسه
۱۶۷	فصل دهم: تابع
۲۱۷	فصل یازدهم: مثلثات
۲۶۴	فصل دوازدهم: حد و پیوستگی
۳۰۹	فصل سیزدهم: مشتق
۳۵۴	فصل چهاردهم: کاربرد مشتق
۳۸۶	فصل پانزدهم: مقاطع مخروطی
۴۱۱	فصل شانزدهم: ترکیبیات
۴۲۸	فصل هفدهم: احتمال
۴۶۲	فصل هجدهم: آمار
۴۷۶	پاسخ‌نامه تشریحی
۸۵۰	پاسخ‌نامه کلیدی

حالا دامنه تابع را محاسبه می‌کنیم. باید عبارت زیر رادیکال بزرگتر یا مساوی صفر باشد:

$$-x^2 - x + 2 \geq 0 \xrightarrow{\times(-1)} x^2 + x - 2 \leq 0 \Rightarrow (x-1)(x+2) \leq 0 \Rightarrow -2 \leq x \leq 1 \xrightarrow{(*)} 0 < x \leq 1 \Rightarrow \text{دامنه} = (0, 1]$$

**نکته** اگر نمودار توابع  $f$  و  $g$  به صورت مقابل باشد، آن گاه  $f+g$  شامل کدام ضابطه است؟



$$x+1, x \geq 1 \quad (1)$$

$$2x, -1 \leq x \leq 1 \quad (2)$$

$$\frac{1}{2}(3x+1), -1 \leq x \leq 1 \quad (3)$$

$$x+2, 1 \leq x \leq 2 \quad (4)$$

**پاسخ** گزینه «۳» به ازای  $-1 \leq x \leq 1$  تابع  $g$  خطی است که از دو نقطه  $(1, 2)$  و  $(-1, 0)$  می‌گذرد. پس:

$$\begin{cases} (-1, 0) \in g \\ (1, 2) \in g \end{cases} \Rightarrow y - 0 = \frac{0-2}{-1-1}(x-(-1)) \Rightarrow y = x+1 \Rightarrow g(x) = x+1, -1 \leq x \leq 1$$

$$g(x) = \begin{cases} x+1 & -1 \leq x \leq 1 \\ 2 & 1 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

به ازای  $1 \leq x \leq 5$  تابع  $g$  تابع ثابت  $y=2$  است، پس:

$$\begin{cases} (1, 0) \in f \\ (2, 1) \in f \end{cases} \Rightarrow y - 0 = \frac{0-1}{1-2}(x-1) \Rightarrow y = x-1 \Rightarrow f(x) = x-1, 1 \leq x \leq 2$$

به ازای  $1 \leq x \leq 2$  تابع  $f$  خطی است که از دو نقطه  $(2, 1)$  و  $(1, 0)$  می‌گذرد، پس:

$$\Rightarrow y = x-1 \Rightarrow f(x) = x-1, 1 \leq x \leq 2$$

$$\begin{cases} (1, 0) \in f \\ (-1, -1) \in f \end{cases} \Rightarrow y - 0 = \frac{0-(-1)}{1-(-1)}(x-1) \Rightarrow y = \frac{1}{2}(x-1) \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}(x-1), x \leq 1$$

به ازای  $x \leq 1$  تابع  $f$  خطی است که از دو نقطه  $(1, 0)$  و  $(-1, -1)$  می‌گذرد، پس:

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2}(x-1) \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}(x-1), x \leq 1 \Rightarrow (f+g)(x) = \begin{cases} x-1+2 = x+1 & , 1 \leq x \leq 2 \\ \frac{1}{2}(x-1) + x+1 = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}, -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

دقت کنید دامنه  $f+g$  که از اشتراک دامنه‌های  $f$  و  $g$  به دست می‌آید برابر  $-1 \leq x \leq 2$  است.

### ترکیب توابع

گفتیم تابع همانند یک ماشین عمل می‌کند و اعضای دامنه را می‌گیرد و با انجام عملیات ریاضی بر روی آن (با توجه به دستور ریاضی تابع)، محصول نهایی که همان برد تابع است را تولید می‌کند.

به عنوان نمونه مطابق شکل مقابل، تابعی مانند  $g$  را در نظر بگیرید. اگر ورودی این تابع  $x$  باشد، محصولی که از آن خارج می‌شود،  $g(x)$  خواهد بود.

$$x \rightarrow \boxed{g} \rightarrow g(x)$$

حالا فرض کنید خروجی تابع  $g$ ، بیف و میل نشود! و این خروجی، تابع دیگری مانند  $f$  را تغذیه کند (خروجی  $g$  برای  $f$  در حکم ورودی است). در این صورت مطابق شکل مقابل، محصول نهایی تابع به نام  $f(g(x))$  خواهد بود.

$$x \rightarrow \boxed{g} \xrightarrow{g(x)} \boxed{f} \rightarrow f(g(x))$$

بنابراین از ترکیب دو تابع  $f$  و  $g$  آش لذیذی (البته برای طراحان) به صورت  $f(g(x))$  یا  $(g \circ f)(x)$  پخته می‌شود. این ترکیبات را به صورت

$$f(g(x)) = fog(x)$$

مقابل هم نمایش می‌دهند:

$$g(f(x)) = g \circ f(x)$$

به طریق مشابه:

اما برای تشکیل تابع  $fog$  (یا  $g \circ f$ ) چگونه باید عمل کنیم؟ پاسخ به این سؤال را در دو حالت برای تابع  $fog$  بررسی می‌کنیم.

**۱** حالت زوج مرتبی: اگر توابع  $f$  و  $g$  به صورت زوج مرتبی باشند، برای تشکیل تابع  $fog$  از دامنه تابع داخلی (تابع  $g$ )، استفاده می‌کنیم و تشکیل شدن  $fog$  را بررسی می‌کنیم.

**مثال** اگر  $f = \{(0, -2), (3, 1), (-1, 2)\}$  و  $g = \{(-4, 0), (2, 3), (5, 1)\}$ ، آن گاه تابع  $\frac{fog}{g}$  را بیابید.

**پاسخ** اول تابع  $fog$  را تشکیل می‌دهیم. برای این کار از دامنه تابع داخلی، یعنی تابع  $g$  استفاده می‌کنیم. دامنه تابع  $g$  برابر  $\{-4, 2, 5\}$  است، بنابراین:

$$\begin{cases} x = -4 : f(g(-4)) = f(0) = -2 \Rightarrow (-4, -2) \in fog \\ x = 2 : f(g(2)) = f(3) = 1 \Rightarrow (2, 1) \in fog \\ x = 5 : f(g(5)) = f(1) : \text{تعریف نشده} \end{cases} \Rightarrow fog = \{(-4, -2), (2, 1)\}$$



روشن سریع ترش هم این طوره،  $(2, 2) \in g, (3, 1) \in f \Rightarrow (2, 1) \in fog$   $(-4, 0) \in g, (0, -2) \in f \Rightarrow (-4, -2) \in fog$

تشکیل نمی‌شود.  $\Rightarrow$  در تابع  $f$  زوج مرتبی با مؤلفه اول یک نداریم  $(5, 1) \in g$

حالا باید تابع  $\frac{fog}{g}$  را تشکیل دهیم. پس دامنه تابع را می‌یابیم:

$$D_{\frac{fog}{g}} = D_{fog} \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\} = \{-4, 2\} \cap \{-4, 2, 5\} - \{-4\} = \{2\} \Rightarrow \frac{fog}{g}(2) = \frac{fog(2)}{g(2)} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{fog}{g} = \{(2, \frac{1}{3})\}$$

۲ حالت ضابطه‌ای: اگر  $f$  و  $g$  به صورت ضابطه باشند، برای تشکیل تابع  $fog$  باید به جای هر  $x$  در تابع بیرونی (تابع  $f$ )، ضابطه تابع داخلی (تابع  $g$ ) را قرار می‌دهیم.

نست اگر  $f(x) = \frac{2x+3}{2-x}$  و  $g(x) = \frac{1-3x}{x+2}$  باشد، ضابطه تابع  $g(f(x))$  کدام است؟

- (۱)  $x$  (۲)  $-x$  (۳)  $-x-1$  (۴)  $x+1$

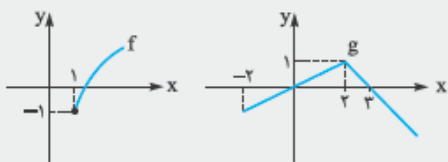
پاسخ گزینه «۳» با توجه به ضابطه‌های  $f$  و  $g$  داریم:

$$g(f(x)) = g\left(\frac{2x+3}{2-x}\right) = \frac{1-3\left(\frac{2x+3}{2-x}\right)}{\frac{2x+3}{2-x}+2} = \frac{\frac{2-x-6x-9}{2-x}}{\frac{2x+3+4-2x}{2-x}} = \frac{-5x-7}{4} = -x-1$$

محاسبه دامنه ترکیب توابع: مطابق ماشین شکل مقابل، برای محاسبه دامنه تابع  $fog$ ، ابتدا باید  $x$  اجازه ورود به تابع  $g$  را داشته باشد ( $x \in D_g$ )، سپس  $g(x)$  باید وارد تابع  $f$  شود؛ پس باید این اجازه را داشته باشد؛ در نتیجه باید:  $g(x) \in D_f$ ؛ پس:

$$x \rightarrow \boxed{g} \rightarrow \boxed{f} \rightarrow f(g(x)) \quad D_{fog} = \{x \in D_g, g(x) \in D_f\}$$

نست نمودار توابع  $f$  و  $g$  به صورت زیر است. دامنه تابع  $fog$  شامل چند عدد صحیح است؟



- (۱) صفر  
(۲) ۱  
(۳) ۲  
(۴) بی‌شمار

پاسخ گزینه «۲» با استفاده از تعریف، دامنه تابع  $fog$  را می‌یابیم. فقط قبل از هر کاری باید دامنه توابع  $f$  و  $g$  را محاسبه کنیم. با توجه به نمودارها:

$$D_g : x \geq -2, D_f : x \geq 1$$

$$D_{fog} = \{x \in D_g, g(x) \in D_f\} \Rightarrow D_{fog} = \{x \geq -2, \underbrace{g(x) \geq 1}_{(*)}\} \quad (۱)$$

برای حل نامعادله (\*) به نمودار  $g$  رجوع می‌کنیم. با توجه به نمودار، مقادیر تابع  $g$  کوچک‌تر یا مساوی ۱ هستند. پس نامعادله  $g(x) \geq 1$  زمانی جواب دارد که:

$$g(x) = 1 \xrightarrow{\text{با توجه به نمودار}} x = 2$$

$$D_{fog} = \{x \geq -2, x = 2\} \Rightarrow D_{fog} : x = 2$$

پس دامنه  $fog$  تنها شامل یک عدد صحیح است.

نست اگر  $f(x) = \sqrt{x+|x|}$  و  $g(x) = \frac{1}{x^2-4x}$  باشد، دامنه تابع  $gof$  کدام است؟

- (۱)  $(0, 8) \cup (8, +\infty)$  (۲)  $\mathbb{R} - \{0, 8\}$  (۳)  $\mathbb{R} - \{0\}$  (۴)  $(0, +\infty)$

پاسخ گزینه «۱» راه اول: ابتدا دامنه هر یک از توابع  $f$  و  $g$  را می‌یابیم:

$$x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x(x-4) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 4 \Rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{0, 4\} \text{ یا } D_g : x \neq 0, 4$$

ریشه‌های مخرج برابرند با:

$$D_f : \text{عبارت زیررادیکال} \geq 0 \Rightarrow x + |x| \geq 0$$

از آنجا که  $x + |x|$  هیچ‌گاه منفی نمی‌شود؛ پس:  $D_f = \mathbb{R}$  (توجه کنید که  $x + |x|$  به ازای  $x > 0$ ، همواره مثبت و به ازای  $x \leq 0$  مقدار صفر دارد؛ چون

$$D_{\text{gof}} = \{x \in D_f, f(x) \in D_g\} \Rightarrow D_{\text{gof}} = \{x \in \mathbb{R}, \sqrt{x+|x|} \neq 0, \sqrt{x+|x|} \neq 4\} \quad (*)$$

بنابراین:  $(x + |x|) = x - x = 0$

هر یک از دو نامعادله بالا را حل می‌کنیم:

$$\sqrt{x+|x|} \neq 0 \Rightarrow x+|x| \neq 0 \Rightarrow x > 0$$

$$\sqrt{x+|x|} \neq 4 \xrightarrow{\text{به توان } 2} x+|x| \neq 16 \Rightarrow x \neq 8$$

(اشاره شد که به ازای  $x \leq 0$  عبارت  $x + |x|$  برابر صفر می‌شود.)

$$D_{\text{gof}} = \{x \in \mathbb{R}, x > 0, x \neq 8\} = (0, 8) \cup (8, +\infty)$$

بنابراین با توجه به (\*):

راه دوم: از گزینه‌ها استفاده می‌کنیم.  $x = 8$  در ① و ② نیست و در دو گزینه دیگر قرار دارد.  $x = 8$  را در تابع  $\text{gof}$  قرار می‌دهیم:

$$x = 8: (\text{gof})(8) = g(f(8))$$

$$g(f(8)) = g(4) = \frac{1}{4^2 - 4(4)} \quad \text{تعریف نشده.} \quad f(8) = \sqrt{8+|8|} = \sqrt{16} = 4 \quad \text{بنابراین:}$$

$$x = -1: g(f(-1)) = g(\sqrt{-1+|-1|}) = g(0) = \frac{1}{0} \quad \text{تعریف نشده.}$$

پس یکی از ① یا ② درست است. حالا یک عدد منفی قرار می‌دهیم:

در نتیجه ② هم که شامل  $-1$  است، جواب نیست.

**محاسبه  $f$  یا  $g$  از روی ضابطه  $\text{fog}$ :** گاهی اوقات تابع  $\text{fog}$  و یکی از توابع  $f$  یا  $g$  را می‌دهند و تابع دیگر را می‌خواهند. پس بسته به نوع ضابطه‌هایی که در اختیار داریم، حالت‌های زیر را خواهیم داشت:

**الف) تابع  $\text{fog}$  و تابع درونی  $g$  را داریم و تابع بیرونی  $f$  را می‌خواهیم.**

① معمول‌ترین روش این است که  $g(x)$  را برابر  $t$  قرار دهیم، سپس  $x$  را برحسب  $t$  محاسبه کنیم.

و در نهایت در تابع  $\text{fog}$  هر جا  $x$  دیدیم، به جای آن، معادله آن را برحسب  $t$  می‌نویسیم.

(ریاضی خارج  $A^3$ )

**نست) اگر  $f(x) = \frac{x}{2-x}$  و  $(\text{gof})(x) = \frac{1}{3}x$ ، ضابطه تابع  $g$  برابر کدام است؟**

$$\frac{x+1}{x} \quad (4)$$

$$\frac{x}{x-1} \quad (3)$$

$$\frac{x-1}{x} \quad (2)$$

$$\frac{x}{x+1} \quad (1)$$

**پاسخ) گزینه ①** راه اول: تابع  $\text{gof}$  و تابع درونی  $f$  را داریم، پس با فرض  $f(x) = t$  و محاسبه  $x$  برحسب  $t$ ، ضابطه  $g$  را می‌یابیم:

$$\begin{cases} g(f(x)) = \frac{1}{3}x \\ f(x) = \frac{x}{2-x} \end{cases} \Rightarrow g\left(\frac{x}{2-x}\right) = \frac{1}{3}x \quad (*)$$

تابع  $\text{gof}$  و تابع درونی  $f$  را داریم. پس با فرض  $f(x) = t$  و محاسبه  $x$  برحسب  $t$ ، ضابطه  $g$  را می‌یابیم:

$$f(x) = \frac{x}{2-x} = t \Rightarrow x = 2t - xt \Rightarrow x + xt = 2t \Rightarrow x(1+t) = 2t \Rightarrow x = \frac{2t}{1+t}$$

$$g(t) = \frac{1}{3}\left(\frac{2t}{1+t}\right) = \frac{t}{1+t} \Rightarrow g(x) = \frac{x}{x+1}$$

با جای‌گذاری در (\*): ضابطه  $g$  را می‌یابیم:

$$g(f(x)) = \frac{1}{3}x \xrightarrow{x=1} g(f(1)) = \frac{1}{3}(1) = \frac{1}{3}$$

راه دوم: از گزینه‌ها و روش مقاردهی استفاده می‌کنیم:

$$g(f(1)) = \frac{1}{3} \Rightarrow g(1) = \frac{1}{3} \Rightarrow \left(1, \frac{1}{3}\right) \in g$$

با توجه به ضابطه  $f$ ،  $f(1) = \frac{1}{2-1} = 1$  و در نتیجه:

$$g(x) = \frac{x}{x+1} \Rightarrow g(1) = \frac{1}{2} \quad \checkmark$$

این نقطه تنها در تابع ① صدق می‌کند:

② اگر با قراردادن  $t = g(x)$ ، یافتن رابطه  $x$  برحسب  $t$  دشوار باشد، باید از اتحاد، تجزیه، روابط جبری یا مثلثاتی استفاده کنیم و طرف راست را برحسب  $g(x)$  بنویسیم.

**نست) اگر  $f\left(\frac{x^2-1}{x}\right) = \frac{x^2-1}{x^2}$ ، آن‌گاه ضابطه تابع  $f$  کدام است؟**

$$x^2 + x \quad (4)$$

$$x^2 - x \quad (3)$$

$$x^2 + 3x \quad (2)$$

$$x^2 - 3x \quad (1)$$

**پاسخ گزینه ۲:** تابع درونی را داریم؛ پس:

$$\frac{x^2-1}{x} = t$$

اما پیدا کردن رابطه  $x$  بر حسب  $t$  و بعد هم جای گذاری، بسیار کار سختی است. پس به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\begin{cases} \frac{x^2-1}{x} = t \Rightarrow x - \frac{1}{x} = t \\ \frac{x^2-1}{x^2} = x^2 - \frac{1}{x^2} = (x - \frac{1}{x})^2 + 2(x - \frac{1}{x})(\frac{1}{x}) = (x - \frac{1}{x})^2 + 2(x - \frac{1}{x}) \cdot \frac{1}{x} \end{cases}$$

(در سطر دوم از اتحاد  $a^2 - b^2 = (a-b)^2 + 2(a-b)(ab)$  استفاده کردیم.)

$$f\left(\frac{x^2-1}{x}\right) = \frac{x^2-1}{x^2} \Rightarrow f\left(x - \frac{1}{x}\right) = (x - \frac{1}{x})^2 + 2(x - \frac{1}{x}) \Rightarrow f(t) = t^2 + 2t \Rightarrow f(x) = x^2 + 2x$$

پس:

**ب) تابع fog** و تابع بیرونی  $f$  را داریم و تابع درونی  $g$  را می‌خواهیم.

در این حالت ابتدا به جای  $x$ های تابع  $f$ ،  $g(x)$  قرار می‌دهیم و تابع  $f(g(x))$  را بر حسب  $g(x)$  می‌نویسیم. از آن جا که تابع  $fog$  را هم داریم، با معادل قرار دادن این دو ضابطه، تابع  $g$  را می‌یابیم.

**نکته:** اگر  $f(x) = \frac{x+1}{x}$ ، آن‌گاه تابع  $g$  کدام باشد تا  $fog(x) + f(x) = 0$  باشد؟

$x$  (۴)       $\frac{x}{2x+1}$  (۳)       $-\frac{x}{2x+1}$  (۲)       $-x$  (۱)

**پاسخ گزینه ۲:** ابتدا به جای  $x$ های تابع  $f$ ،  $g(x)$  قرار می‌دهیم تا  $f(g(x))$  تشکیل شود. حالا این عبارت را در تساوی داده‌شده قرار می‌دهیم:

$$f(g(x)) + f(x) = 0 \Rightarrow \frac{g(x)+1}{g(x)} + \frac{x+1}{x} = 0 \Rightarrow \frac{g(x)+1}{g(x)} = -\frac{x+1}{x} \Rightarrow 1 + \frac{1}{g(x)} = -\frac{x+1}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{g(x)} = -\frac{x+1}{x} - 1 \Rightarrow \frac{1}{g(x)} = \frac{-x-1-x}{x} \Rightarrow \frac{1}{g(x)} = \frac{-2x-1}{x} \Rightarrow g(x) = \frac{x}{-2x-1} = \frac{-x}{2x+1}$$

**نکته:** برای حل معادله  $f(g(x)) = k$  بهترین روش این است که ابتدا معادله  $f(x) = k$  را حل کنید. سپس  $g(x)$  را برابر ریشه‌های این معادله قرار دهید.

**نکته:** اگر  $f(x) = x^2 + 2x + 2$  و  $g(x) = x^2 - 3x^2 + 1$ ، آن‌گاه معادله  $f(g(x)) = 1$  چند جواب حقیقی دارد؟

$4$  (۴)       $3$  (۳)       $2$  (۲)       $1$  (۱)

**پاسخ گزینه ۴:** براساس نکته گفته‌شده، ابتدا باید معادله  $f(x) = 1$  را حل کنیم:

$$f(x) = 1 \Rightarrow x^2 + 2x + 2 = 1 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x+1)^2 = 0 \Rightarrow x = -1$$

بعد قرار بر این شد که  $g(x)$  را برابر ریشه این معادله قرار دهیم. در نتیجه:

$$x^2 - 3x^2 + 1 = -1 \Rightarrow x^2 - 3x^2 + 2 = 0 \Rightarrow (x^2 - 1)(x^2 - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \\ x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

معادله چهار جواب دارد.

**محاسبه برد تابع مرکب:** فرض کنید می‌خواهیم برد تابع  $fog$  را بیابیم. برای این کار باید ابتدا برد تابع داخلی، یعنی  $g$  را محاسبه کنیم. سپس مجموعه برد تابع  $g$  را به عنوان ورودی برای تابع  $f$  در نظر می‌گیریم. (هر چند که ممکن است برخی مقادیر، مجوز ورود نداشته باشند، اما نیازی به توجه به این مسائل نیست) و با توجه به این، مجموعه برد تابع  $f$  را می‌یابیم. مجموعه نهایی حاصل، همان برد تابع  $fog$  خواهد بود.

**نکته:** اگر  $f(x) = 2 - x^2$  و  $g(x) = 2^{x+1}$ ، برد تابع  $gof$  کدام است؟

$(0, 16]$  (۴)       $(0, 8]$  (۳)       $[8, +\infty)$  (۲)       $[16, +\infty)$  (۱)

**پاسخ گزینه ۳:** گفتیم اول برد تابع داخلی که این جا تابع  $f$  است را محاسبه کنیم. پس با توجه به ضابطه  $f$ ، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$x^2 \geq 0 \xrightarrow{\times(-1)} -x^2 \leq 0 \xrightarrow{+2} 2 - x^2 \leq 2$$

این مجموعه یعنی بازه  $(-\infty, 2]$  را برای تابع  $g$  به عنوان ورودی فرض می‌کنیم. پس برد تابع  $g(x) = 2^{x+1}$  را به ازای  $x \in (-\infty, 2]$  محاسبه می‌کنیم:

$$x \in (-\infty, 2] \Rightarrow x \leq 2 \xrightarrow{+1} x+1 \leq 3 \Rightarrow 2^{x+1} \leq 2^3 = 8 \xrightarrow{2^{x+1} > 0} 0 < 2^{x+1} \leq 8 \Rightarrow R_{\text{gof}} = (0, 8]$$

**تعیین صعودی یا نزولی بودن تابع fog:** اگر  $f$  و  $g$  توابعی یکنوا باشند، برای بررسی یکنوایی تابع fog می‌توانید از تعریف یکنوایی تابع برای تابع داخلی استفاده کنید و سپس تابع بیرونی را تأثیر دهید.

**نکته** اگر  $f$  تابعی صعودی و  $g$  تابعی نزولی باشند، آن‌گاه fog الزاماً چگونه تابعی است؟

- (۱) صعودی  
(۲) نزولی  
(۳) هم صعودی و هم نزولی  
(۴) نه صعودی و نه نزولی

**پاسخ** گزینه «۲» اگر  $x_1$  و  $x_2$  عضو دامنه fog باشند؛ به طوری که  $x_1 \leq x_2$ ، آن‌گاه برای تشکیل تابع fog ابتدا باید از طرفین نامساوی  $x_1 \leq x_2$  بگیریم. چون  $g$  تابعی نزولی است، بنابراین جهت نامعادله عوض می‌شود:

$$x_1 \leq x_2 \Rightarrow g(x_1) \geq g(x_2)$$

$$g(x_1) \geq g(x_2) \Rightarrow f(g(x_1)) \geq f(g(x_2))$$

حالا باید از طرفین،  $f$  بگیریم؛  $f$  تابعی صعودی است، پس علامت تغییر نمی‌کند:

و در نهایت چون از  $x_1 \leq x_2$  رسیدیم به این‌که  $f(g(x_1)) \geq f(g(x_2))$  پس fog تابعی نزولی است.

**روش سریع:** در بررسی صعودی یا نزولی بودن ترکیب توابع، می‌توانید به این صورت عمل کنید که تابع صعودی را با علامت «+» و تابع نزولی را با علامت «-» در نظر بگیرید، سپس از ضرب علامت‌ها استفاده کنید و صعودی و نزولی بودن fog را بررسی کنید.

$$\begin{array}{c} \text{fog} \\ \downarrow \downarrow \\ (+)(-) \end{array} \xrightarrow{\text{ضرب}} (-) \Rightarrow \text{fog نزولی است.}$$

در مثال قبل چون  $f$  صعودی و  $g$  نزولی بود؛ بنابراین:

## پرسش‌های چهارگزینه‌ای

### اعمال روی توابع

۹۸۴- اگر  $f(x) = \sqrt{x+1}$  و  $g(x) = \frac{x+1}{x-2}$  مقدار  $(2f-g)(3)$  کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) صفر (۳) ۱ (۴) ۲

۹۸۵- اگر  $f(x) = \begin{cases} x-5 & x \geq -1 \\ \sqrt{-x} & x < -1 \end{cases}$  و  $g(x) = \begin{cases} x^2-1 & x \geq 1 \\ x+3 & x < 1 \end{cases}$  مقدار تابع  $f-g$  در  $x = (f+g)(1)$  کدام است؟

- (۱) -۴ (۲) ۴ (۳) -۳ (۴) ۳

۹۸۶- اگر  $f = \{(-2, 2), (0, -2), (2, 0)\}$  آن‌گاه تابع  $\frac{f}{g}$  کدام است؟

- (۱)  $\{(-2, \frac{1}{2})\}$  (۲)  $\{(-2, \frac{1}{2}), (0, \frac{1}{2})\}$  (۳)  $\{(4, \frac{1}{2}), (0, \frac{1}{2})\}$  (۴)  $\{(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})\}$

۹۸۷- اگر  $f = \{(1, 3), (2, 0), (-1, 2)\}$  و  $g = \{(2, 1), (1, -2), (3, 4)\}$  آن‌گاه حداکثر عرض تابع  $\frac{f}{g} - \frac{1}{g}$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{5}{6}$  (۲)  $\frac{5}{6}$  (۳)  $\frac{1}{3}$  (۴)  $-\frac{2}{3}$

۹۸۸- نمودار توابع  $f$  و  $g$  مطابق شکل مقابل است. دامنه تابع  $\frac{g}{f-g}$  کدام است؟

(۱)  $(-2, 2] - \{0, 1\}$

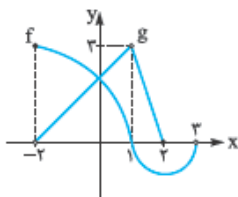
(۲)  $(-2, 2) - \{1\}$

(۳)  $(-2, 3) - \{0, 1\}$

(۴)  $(-2, 3) - \{1\}$

۹۸۹- اگر  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+3}}$  و  $g(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x+3}}$  دامنه تابع  $y = \frac{f(x)}{g(x)}$  کدام است؟

- (۱)  $(-3, +\infty) - \{1\}$  (۲)  $\mathbb{R} - \{1\}$  (۳)  $(-3, +\infty)$  (۴)  $(-3, +\infty) - \{0\}$





(ق. ۴۰)

۹۹۰- دامنه تابع با ضابطه  $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x-3}} + \sqrt{\frac{2-x}{x}}$  کدام فاصله است؟

- (۱)  $(0, 1]$  (۲)  $(0, 2)$  (۳)  $[1, 2]$  (۴)  $(2, 3)$

۹۹۱- دامنه تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{\sqrt{x(x^2-1)}}{\sqrt{|x|+x}}$  کدام است؟

- (۱)  $(1, +\infty)$  (۲)  $(-\infty, 1)$  (۳)  $(-\infty, 1]$  (۴)  $[1, +\infty)$

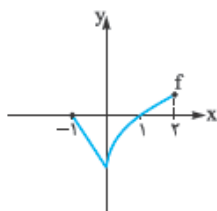
۹۹۲- اگر نمودار  $f$  به صورت روبه‌رو باشد، دامنه تابع  $y = \frac{f(x)}{f(2-x)}$  کدام است؟

(۱)  $[0, 2] - \{1\}$

(۲)  $(-1, 1)$

(۳)  $[-1, 2] - \{1\}$

(۴)  $(-1, 2) - \{0\}$



۹۹۳- تابع  $f(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{x-1}$  کدام یک از ویژگی‌های زیر را دارا است؟

- (۱) معکوس‌ناپذیر (۲) ثابت (۳) همانی (۴) مثبت

۹۹۴- اگر  $f(x) = x[x]$  و  $g(x) = 2[x]$  برد تابع  $\frac{f}{g}$  چند عدد صحیح را شامل نمی‌شود؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۹۹۵- اگر  $f(x) = 1 + \sqrt{1-x^2}$  و  $g(x) = 1 - \sqrt{1-x^2}$  برد تابع  $f.g$  کدام است؟

- (۱)  $\mathbb{R}$  (۲)  $\{1\}$  (۳)  $[0, 1]$  (۴)  $[0, +\infty)$

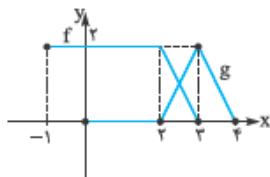
۹۹۶- اگر نمودار توابع  $f$  و  $g$  به صورت مقابل باشد، مساحت محصور بین نمودار تابع  $f+g$  و محور  $x$ ها کدام است؟

(۱) ۴

(۲) ۶

(۳) ۸

(۴) ۱۲



### ترکیب توابع

۹۹۷- اگر  $f = \{(1, 7), (-2, 4), (3, -5), (1, 0)\}$  و  $g = \{(2, 11), (4, -2), (6, 3), (3, 2)\}$  آن‌گاه کدام زوج مرتب در تابع  $f \circ g$  قرار ندارد؟

- (۱)  $(2, 7)$  (۲)  $(4, 4)$  (۳)  $(3, 0)$  (۴)  $(6, -5)$

(تجربی ۸۳)

۹۹۸- اگر  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  و  $f = \{(x, 2x-1), x \in A\}$  تابع  $f(f(x))$  چند عضو دوتایی دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

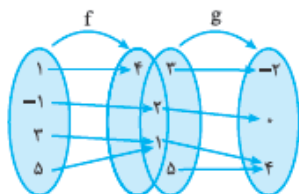
۹۹۹- با توجه به شکل روبه‌رو، توابع  $f \circ g$  و  $g \circ f$  به ترتیب چند زوج مرتب دارند؟

(۱) صفر - ۳

(۲) ۳ - صفر

(۳) ۱ - ۲

(۴) ۲ - ۱



۱۰۰۰- توابع  $f = \{(2, 1), (3, 2), (4, 5), (1, 7)\}$  و  $g = \{(1, 2), (3, 1), (a, 3), (b, 1)\}$  مفروض‌اند. اگر  $(4, 2) \in f \circ g$  و  $(4, 1) \in g \circ f$  باشند، دوتایی

(ریاضی ۹۰)

کدام است  $(a, b)$ ؟

- (۱)  $(3, 4)$  (۲)  $(4, 3)$  (۳)  $(4, 5)$  (۴)  $(5, 4)$

(تجربی ۹۱)

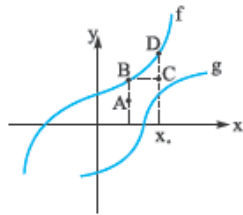
۱۰۰۱- اگر  $f(x) = x + \sqrt{x}$  و  $g = \{(1, 2), (5, 4), (6, 5), (2, 3)\}$  و  $g(f(a)) = 5$  آن‌گاه عدد  $a$  کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

(ریاضی فارغ ۸۵)

 ۱۰۰۲- دو تابع  $f$  و  $g$  به صورت مجموعه زوج‌های مرتب بیان شده‌اند. در حالت کلی کدام رابطه ممکن است تابع نباشد؟

- $f \cap g$  (۱)       $f - g$  (۳)       $f \cup g$  (۴)       $f \circ g$  (۲)

 ۱۰۰۳- با توجه به شکل مقابل، کدام یک از نقاط زیر می‌تواند مربوط به مختصات نقطه  $(f \circ g)(x_0)$  باشد؟


- A (۱)  
 B (۲)  
 C (۳)  
 D (۴)

(تجربی ۹۰)

 ۱۰۰۴- در تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} x - \sqrt{x+4} & x > 3 \\ 2x+3 & x \leq 3 \end{cases}$  مقدار  $f(f(5)) + f(f(1))$  کدام است؟

- ۶ (۱)      ۷ (۲)      ۸ (۳)      ۹ (۴)

(تجربی ۸۹)

 ۱۰۰۵- اگر  $f(x) = |x|$  و  $g(x) = x^2 + 2x + 1$  آن‌گاه حاصل  $(f \circ g)(1 - \sqrt{2}) - (g \circ f)(1 - \sqrt{2})$  کدام است؟

- $4(1 - \sqrt{2})$  (۱)       $4(\sqrt{2} - 1)$  (۲)      ۴ (۳)       $2\sqrt{2}$  (۴)

 ۱۰۰۶- اگر  $f(x) = x^2 + x - 1$  و  $g(\sqrt{x}) = \frac{2x-1}{x+3}$  آن‌گاه حاصل  $f(g(2))$  کدام است؟

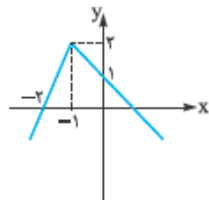
- $\frac{4}{25}$  (۱)       $-\frac{1}{25}$  (۲)      ۱ (۳)      ۵ (۴)

 ۱۰۰۷- اگر  $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 9}{x^2 + 4x + 5}$  باشد،  $f \circ f(\sqrt{3} - 2)$  کدام است؟

- $\frac{15}{11}$  (۱)       $\frac{17}{13}$  (۲)       $\frac{21}{17}$  (۳)      ۲ (۴)

 ۱۰۰۸- اگر  $f(x) = 4x^2 - 2[x]$  و  $g(x) = \frac{x}{1-x}$  حاصل  $f(-\frac{1}{4}g(\sqrt{2}))$  کدام است؟

- $4(1 + \sqrt{2})$  (۱)       $4(1 - \sqrt{2})$  (۲)       $4\sqrt{2}$  (۳)       $-4\sqrt{2}$  (۴)


 ۱۰۰۹- اگر نمودار تابع  $f$  به صورت روبه‌رو باشد، حاصل  $f \circ f(3)$  کدام است؟

- ۱ (۱)  
 -۲ (۲)  
 صفر (۳)  
 -۳ (۴)

(ریاضی فارغ ۹۰)

 ۱۰۱۰- اگر  $f(x) = 2 - |x - 2|$  ضابطه تابع  $f(f(x))$  برابر کدام است؟

- $x$  (۱)       $4 - x$  (۲)       $f(x)$  (۳)       $2 - f(x)$  (۴)

(تجربی ۹۶)

 ۱۰۱۱- اگر  $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$  و  $g(x) = \frac{2x+2}{2-x}$  باشند، ضابطه تابع  $g(f(x))$  کدام است؟

- $x - 1$  (۱)       $x + 1$  (۲)       $x$  (۳)       $2x$  (۴)

 ۱۰۱۲- اگر  $f$  یک چندجمله‌ای از درجه ۳ و  $g$  یک چندجمله‌ای از درجه ۲ باشند،  $g \circ f(x) = (k-1)x^5 + x^4 - 1$  به ازای کدام مقدار  $k$  تابع  $g \circ f$  خط

 $y = 2$  را در نقطه‌ای به طول ۱- قطع می‌کند؟

- ۱ (۱)      ۳ (۲)      -۲ (۳)      ۵ (۴)

 ۱۰۱۳- اگر  $f(x) = x^2 + x - 2$  و  $g(x) = \frac{1}{4}(x-3)$  مجموعه طول نقاطی از منحنی  $f \circ g$  که در زیر محور  $x$  قرار گیرند، برابر کدام بازه است؟

- $(-5, 1)$  (۱)       $(-1, 5)$  (۲)       $(-2, 1)$  (۳)       $(1, 5)$  (۴)

(تجربی فارغ ۹۱)

(ریاضی فارغ ۹۱)

 ۱۰۱۴- اگر  $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$  تابع  $g(x) = (f(\sqrt{x}))^2 - f(x)$  چگونه است؟

- ثابت (۱)      همانی (۲)      یک‌به‌یک (۳)      مثبت (۴)





۱۰۱۵- اگر  $f(x) = x^2 + x$  و  $g(x) = \sqrt{4x+1}$  باشند، مساحت ناحیه محدود به نمودار تابع  $g \circ f$  و خط به معادله  $y = 3$  کدام است؟ (تجربی ۹۵)

- (۱) ۴/۵ (۲) ۹ (۳) ۳ (۴) ۶

۱۰۱۶- اگر  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1}-1 & x \geq 1 \\ 2 & x < 1 \end{cases}$  حاصل  $f(f(2-\sin^2 x))$  کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) صفر (۳)  $|\cos x|$  (۴) ۲

۱۰۱۷- اگر  $f(x) = x^2 - 1$  نمودار تابع  $y = f \circ f(x)$  با محور  $x$ ها کدام وضعیت را دارد؟ (ریاضی ۸۳)

- (۱) یک نقطه تلاقی - دو نقطه تماس  
(۲) دو نقطه تلاقی - یک نقطه تماس  
(۳) سه نقطه تلاقی - فاقد نقطه تماس  
(۴) فاقد نقطه تلاقی - دو نقطه تماس

۱۰۱۸- اگر خروجی ماشین شکل مقابل  $\frac{4}{3}$  باشد، مقدار ورودی کدام است؟ (ریاضی ۸۶)



- (۱)  $\frac{11}{9}$  (۲)  $\frac{7}{2}$  (۳) ۳ (۴) ۴

۱۰۱۹- اگر  $g(x) = 2x - 1$  و  $(f \circ g)(x) = \frac{x}{x-3}$  مقدار  $f(3)$  کدام است؟ (ریاضی ۹۱)

- (۱) -۴ (۲) -۲ (۳) ۲ (۴) ۴

۱۰۲۰- اگر  $f(x-3) = x^2 - 4x + 5$ ، آن گاه  $f(1-x)$  کدام است؟ (تجربی ۹۰)

- (۱)  $x^2 + 1$  (۲)  $x^2 + 3$  (۳)  $x^2 + 4x + 5$  (۴)  $x^2 - 4x + 5$

۱۰۲۱- اگر  $g(x) = 2x - 3$  و  $(f \circ g)(x) = 4(x^2 - 4x + 5)$  باشند، تابع  $f(x)$  کدام است؟ (ریاضی ۹۳)

- (۱)  $x^2 - 4x + 3$  (۲)  $x^2 - 4x + 5$  (۳)  $x^2 - 2x + 5$  (۴)  $x^2 - 2x + 3$

۱۰۲۲- اگر  $f(g(x)) = x + |x|$  و  $g(x) = \sqrt[3]{x-1}$ ،  $g \circ f(1)$  کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) ۱ (۳)  $\sqrt[3]{-2}$  (۴)  $\sqrt[3]{3}$

۱۰۲۳- اگر  $f(x\sqrt{x}+1) = x(x^2+2\sqrt{x})$ ، آن گاه  $f(\sqrt{3})$  کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۲ (۳)  $3\sqrt{3}$  (۴)  $2\sqrt{3}$

۱۰۲۴- فرض کنیم  $f(x) = x - \frac{1}{x}$  و  $f(g(x)) = x^2 + \frac{1}{x^2} - 4$  در این صورت  $f(x)$  کدام است؟

- (۱)  $x^2 - 4$  (۲)  $x^2 - 2$  (۳)  $x^2$  (۴)  $x^2 + 2$

۱۰۲۵- مقدار  $g(1)$  کدام است؟ (تجربی ۸۴)

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۱۰۲۶- اگر  $f$  و  $g$  به عنوان ماشین به صورت  $2x \Rightarrow g \Rightarrow f \Rightarrow x$  باشند، مقدار  $f(5)$  کدام است؟ (تجربی خارج ۹۱)

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۰۲۷- اگر عرض از مبدأ تابع  $f \circ g$  برابر ۲ باشد و  $f(x) = \frac{x+3}{x+1}$ ، آن گاه  $g(0)$  کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) ۳

۱۰۲۸- اگر  $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$ ، آن گاه تابع  $g$  کدام باشد تا  $(f \circ g)(x) = (f+g)(x)$  باشد؟

- (۱)  $\frac{x}{2x+1}$  (۲)  $\frac{-x}{2x+1}$  (۳)  $\frac{x}{x^2+1}$  (۴)  $\frac{2x}{x^2+1}$

۱۰۲۹- اگر  $f(x) = x^2 - x - 2$  و  $f(g(x)) = x^2 + x - 2$ ، آن گاه  $(f+g)(x)$  کدام گزینه می تواند باشد؟ (تجربی خارج ۹۰)

- (۱)  $x^2 - 1$  (۲)  $x^2 + 1$  (۳)  $x^2 - 2x$  (۴)  $x^2 + 2x$

۱۰۳۰- تابع  $f$  با ضابطه  $g(x) = x - \sqrt{x}$  مفروض است. اگر نمودار تابع  $f$  محور  $x$ ها را در دو نقطه به طول های ۶ و  $-\frac{1}{4}$  قطع کند، آن گاه نمودار تابع  $f \circ g$  محور  $x$ ها را با کدام طول قطع می کند؟ (ریاضی خارج ۹۳)

- (۱)  $\frac{1}{9}$  و ۴ (۲)  $\frac{1}{4}$  و ۹ (۳)  $\frac{1}{4}$  (۴) ۴ و ۹



۱۰۳۱- اگر  $f(x) = x^2 - 8x + 12$  و  $g(x) = \begin{cases} x^2 + x & x \geq 0 \\ 2x + 3 & x < 0 \end{cases}$ ، آن گاه مجموع ریشه‌های تابع  $f \circ g$  کدام است؟

- (۱) -۱      (۲)  $-2/5$       (۳)  $2/5$       (۴) ۱

۱۰۳۲- اگر  $f(x) = \sqrt{1-x^2}$  و  $g(x) = x^2 + 1$ ، آن گاه معادله  $(g \circ f)(x) = x^2 + 3x$  چند جواب دارد؟

- (۱) صفر      (۲) ۱      (۳) ۲      (۴) ۳

۱۰۳۳- اگر  $f$  و  $g$  توابعی چند جمله‌ای باشند، به گونه‌ای که  $f(f(x)) = 4x + 3$  و  $g(2x + 3) = 3x - 2$ ، در این صورت  $(g \circ f)(-1)$  کدام است؟

- (۱) -۲      (۲) -۵      (۳) -۸      (۴) -۱۱

۱۰۳۴- اگر  $2f(2-x) - 2f(2+x) = -15x + 5$ ، آن گاه معادله  $x^2 = f(x)$  چند ریشه دارد؟

- (۱) صفر      (۲) ۱      (۳) ۲      (۴) ۳

۱۰۳۵- اگر  $f(\cot x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$ ، ضابطه  $f(x)$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{x^2+1}{x^2}$       (۲)  $\frac{x^2+1}{x^2}$       (۳)  $\frac{x^2-1}{x^2}$       (۴)  $\frac{x^2-1}{x^2}$

۱۰۳۶- تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = \sqrt{x-1}$  مفروض است. دامنه تابع  $f \circ f$  کدام است؟

- (۱)  $[1, +\infty)$       (۲)  $\{1\}$       (۳)  $[2, +\infty)$       (۴)  $\emptyset$

۱۰۳۷- اگر  $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$  و  $g(x) = \sqrt{x^2+3x}$ ، آن گاه دامنه تابع  $f \circ g$  چند عدد صحیح را شامل نمی‌شود؟

- (۱) ۲      (۲) ۳      (۳) ۴      (۴) ۵

۱۰۳۸- اگر  $f(x) = \sqrt{1-x}$  و  $g(x) = \sqrt{|x|-1}$ ، آن گاه دامنه تابع  $f \circ g$  کدام است؟

- (۱)  $\{1\}$       (۲)  $[1, 2)$       (۳)  $[1, 2]$       (۴)  $[1, 2]$

(ریاضی خارج ۹۶)

۱۰۳۹- اگر  $f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$  و  $g(x) = \sqrt{x-x^2}$  باشند، دامنه تابع  $g \circ f$  کدام است؟

- (۱)  $[0, 1]$       (۲)  $[-1, 1]$       (۳)  $\mathbb{R}$       (۴)  $\mathbb{R} - (-1, 1)$

(ریاضی خارج ۹۵)

۱۰۴۰- اگر  $f(x) = \sqrt{2-x}$  و  $g(x) = \log(x^2 - 15x)$  باشند، دامنه تابع  $f \circ g$  کدام است؟

- (۱)  $(0, 5) \cup [20, 25)$       (۲)  $[-5, 0) \cup (15, 20]$       (۳)  $(15, 20]$       (۴)  $[-5, 0)$

(تجربی خارج ۹۴)

۱۰۴۱- اگر  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{-x^2+x+2}}$  و  $g(x) = (\frac{1}{4})^x$  باشند، دامنه تابع  $f \circ g$  کدام است؟

- (۱)  $(-\frac{1}{4}, +\infty)$       (۲)  $(\frac{1}{4}, +\infty)$       (۳)  $(-2, 0)$       (۴)  $(-1, \frac{1}{4})$

۱۰۴۲- اگر  $f(x) = \sqrt{1-x^2}$  و  $g(x) = \sqrt{x}$ ، آن گاه دامنه تابع  $(f+g) \circ f$  کدام است؟

- (۱)  $[-1, 1]$       (۲)  $[0, 1]$       (۳)  $[0, +\infty)$       (۴)  $\{0\}$

۱۰۴۳- تابع  $f(x) = \begin{cases} x - |x-1| & x > 1 \\ x^2 & x < 1 \end{cases}$  مفروض است. دامنه تابع  $f \circ f$  کدام ویژگی را دارد؟

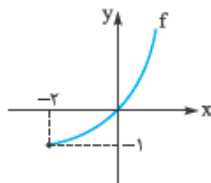
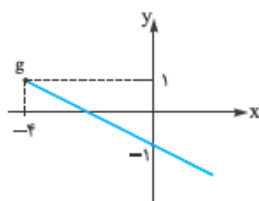
(۲) فقط شامل عدد ۱ نیست.

(۱) همه اعداد طبیعی به جز عدد ۱ را شامل می‌شود.

(۴) در مجموعه اعداد صحیح و منفی فقط -۱ را شامل نمی‌شود.

(۳) فقط شامل -۱ نیست.

۱۰۴۴- نمودار توابع  $f$  و  $g$  به صورت زیر است. دامنه تابع  $f \circ g$  شامل چند عدد صحیح است؟



(۱) ۶

(۲) ۷

(۳) ۴

(۴) ۵

(تجربی خارج ۸۵)

۱۰۴۵- اگر  $f(x) = [x]$ ، مجموعه مقادیر  $f(x - f(x))$  کدام است؟

- (۱)  $\{0\}$       (۲)  $\{1\}$       (۳)  $\{0, 1\}$       (۴)  $\{-1, 0, 1\}$

۱۰۴۶- اگر  $f(x) = x^2 + 1$  و  $g(x) = \sqrt{x-1}$  برد تابع fog کدام مجموعه است؟ (ق. ۴۰)

- (۱)  $y \geq 0$  (۲)  $y \geq 1$  (۳)  $y \geq -1$  (۴)  $\mathbb{R}$

۱۰۴۷- دو تابع با ضابطه‌های  $f(x) = [x] + [-x]$  و  $g(x) = x^2 + x - 2$  مفروض‌اند. اگر  $g(f(x)) = -2$  آن‌گاه مجموعه مقادیر  $x$  کدام است؟

- (۱)  $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$  (۲)  $\mathbb{Z}$  (۳)  $\mathbb{R}$  (۴)  $\emptyset$  (ریاضی ۱۹)

۱۰۴۸- اگر  $f(x) = x - [x]$  و  $g(x) = \frac{1-x}{x}$  برد تابع gof کدام بازه است؟ (ریاضی خارج ۱۸۶)

- (۱)  $(0, +\infty)$  (۲)  $[0, +\infty)$  (۳)  $(1, +\infty)$  (۴)  $[1, +\infty)$

۱۰۴۹- اگر  $f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2}$  و  $g(x) = 2 + \sqrt{x-1}$  برد تابع fog کدام است؟

- (۱)  $[-\frac{5}{3}, -1]$  (۲)  $(-\frac{5}{3}, -1]$  (۳)  $[-\frac{5}{3}, 0)$  (۴)  $(-\infty, -\frac{5}{3})$

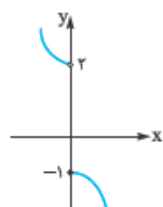
۱۰۵۰- اگر  $f(x) = x - [x]$  آن‌گاه برد تابع  $g(x) = f(2x-3) - 2f(x)$  کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۲)

- (۱)  $[-1, 0]$  (۲)  $[0, 1]$  (۳)  $\{-1, 0\}$  (۴)  $\{0, 1\}$

۱۰۵۱- اگر  $f$  تابعی نزولی و  $g$  صعودی باشد، کدام یک از توابع زیر نزولی است؟

- (۱)  $f - g$  (۲)  $f + g$  (۳)  $f \cdot g$  (۴) fog

۱۰۵۲- اگر نمودار تابع  $f$  به صورت زیر باشد، در کدام فاصله، نمودار  $f(x^2)$  بالاتر از نمودار  $f(x+2)$  قرار می‌گیرد؟



- (۱)  $(-1, 2)$  (۲)  $(-2, 0)$  (۳)  $(-1, 2)$  (۴)  $(0, 2)$

### تبدیل نمودار توابع

یکی از روش‌هایی که می‌توانید نمودار بسیاری از توابع را به سادگی رسم کنید، استفاده از روش‌های تبدیل نمودار توابع است. این روش‌ها عبارت‌اند از: انتقال‌های عمودی و افقی، انقباض و انقباض‌های افقی و عمودی و «قرینه‌یابی» است. همه این حالات را در جدول زیر بررسی می‌کنیم: ( $a > 0$ )

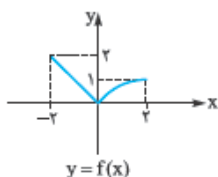
ضابطه	تغییرات روی نمودار $f$	مثال
$f(x+a)$	نمودار، $a$ واحد به چپ می‌رود.	
$f(x-a)$	نمودار، $a$ واحد به راست می‌رود.	
$f(x)+a$	نمودار، $a$ واحد به بالا می‌رود.	

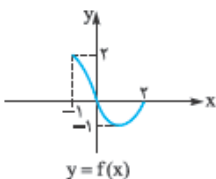
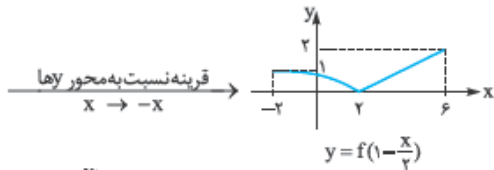
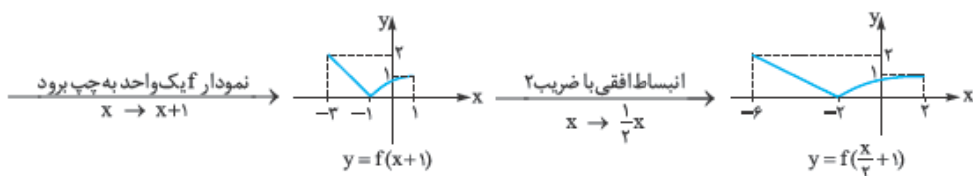
ضابطه	تغییرات روی نمودار $f$	مثال
$f(x) - a$	نمودار، $a$ واحد به پایین می‌رود.	
$-f(x)$	نمودار نسبت به محور $X$ ها قرینه می‌شود.	
$f(-x)$	نمودار نسبت به محور $Y$ ها قرینه می‌شود.	
$f(ax)$ ( $0 < a < 1$ )	نمودار در راستای محور $X$ ها با ضریب $\frac{1}{a}$ منبسط می‌شود. (طول‌ها $\frac{1}{a}$ برابر می‌شوند.)	
$f(ax)$ ( $a > 1$ )	نمودار در راستای محور $X$ ها با ضریب $\frac{1}{a}$ منقبض می‌شود. (طول‌ها $\frac{1}{a}$ برابر می‌شوند.)	
$af(x)$ ( $0 < a < 1$ )	نمودار در راستای محور $Y$ ها با ضریب $a$ منقبض می‌شود. (عرض‌ها $a$ برابر می‌شوند.)	
$af(x)$ ( $a > 1$ )	نمودار در راستای محور $Y$ ها با ضریب $a$ منبسط می‌شود. (عرض‌ها $a$ برابر می‌شوند.)	

اما در حالت‌های ترکیبی باید دو مورد زیر را مدنظر قرار دهید:

### ۱ رسم نمودار $f(ax + b)$ :

برای رسم، ابتدا انتقال عدد ثابت  $b$  را انجام می‌دهیم. سپس تغییرات مربوط به ضریب  $X$  را روی شکل اعمال می‌کنیم. برای مثال اگر نمودار تابع  $f$  به صورت مقابل باشد، نمودار تابع  $f(1 - \frac{x}{3})$  را رسم می‌کنیم.



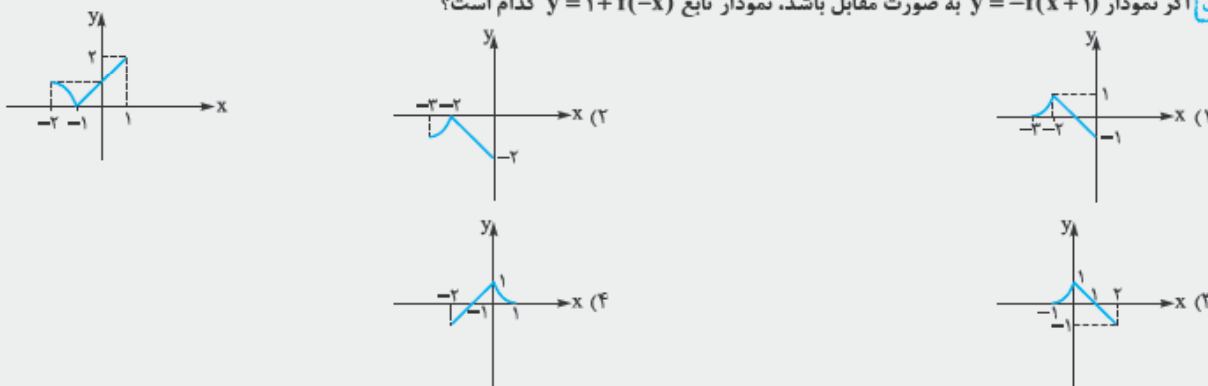


**۲ رسم نمودار  $af(x) + b$ :**

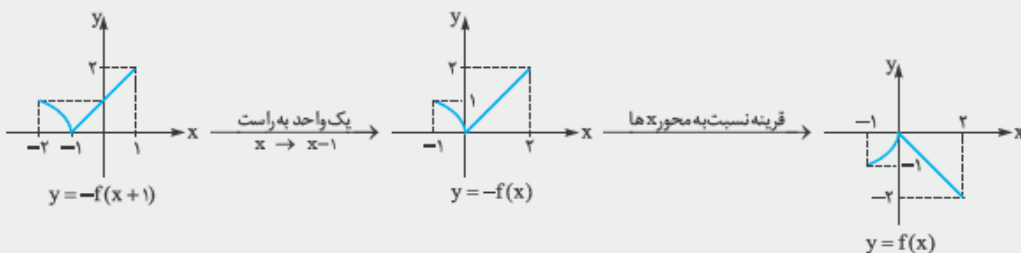
برای رسم، ابتدا ضریب  $a$  را تأثیر می‌دهیم و بعد انتقال عدد ثابت  $b$  را انجام می‌دهیم. برای مثال اگر نمودار تابع  $f$  به صورت مقابل باشد، نمودار تابع  $y = 1 - 2f(x)$  به صورت زیر رسم می‌شود:



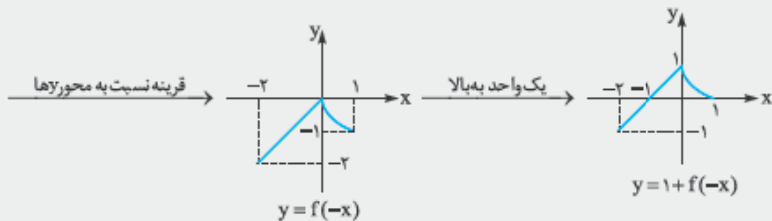
**نکته** اگر نمودار  $y = -f(x+1)$  به صورت مقابل باشد، نمودار تابع  $y = 1 + f(-x)$  کدام است؟



**پاسخ** گزینه «۴» ابتدا از نمودار  $y = -f(x+1)$  و با استفاده از انتقال و قرینه‌یابی به نمودار  $f$  می‌رسیم:

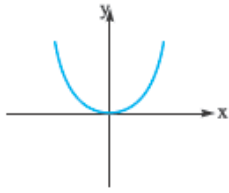


حالا باید نمودار  $y = 1 + f(-x)$  را رسم کنیم. برای این کار نمودار  $y = f(x)$  را ابتدا نسبت به محور  $y$  ها قرینه کرده و سپس یک واحد به بالا منتقل می‌کنیم:

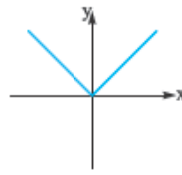




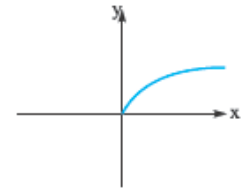
در رسم نمودارها، یک سری نمودار اصلی را باید به خاطر بسپارید. این نمودارها را در زیر آوردیم:



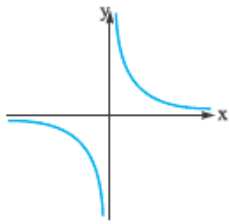
$$y = x^r$$



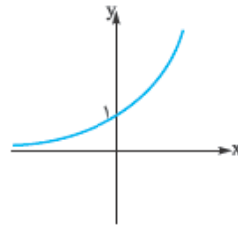
$$y = |x|$$



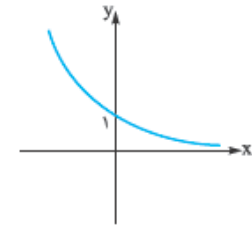
$$y = \sqrt{x}$$



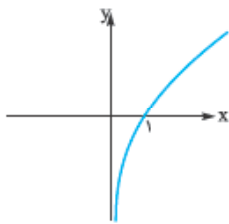
$$y = \frac{1}{x}$$



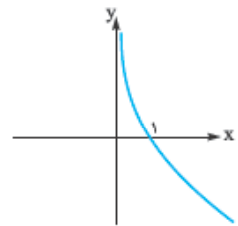
$$y = a^x \quad (a > 1)$$



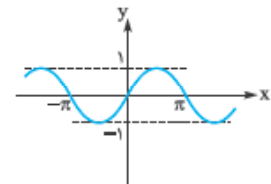
$$y = a^x \quad (0 < a < 1)$$



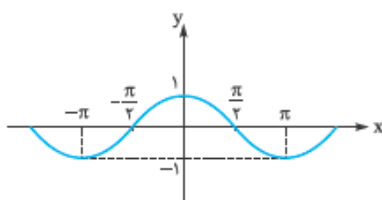
$$y = \log_a x \quad (a > 1)$$



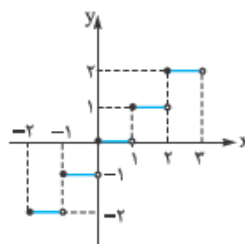
$$y = \log_a x \quad (0 < a < 1)$$



$$y = \sin x$$

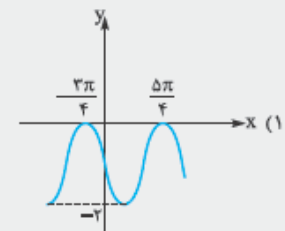
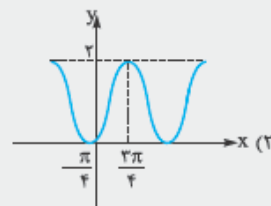
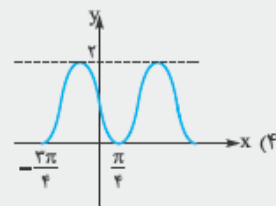


$$y = \cos x$$



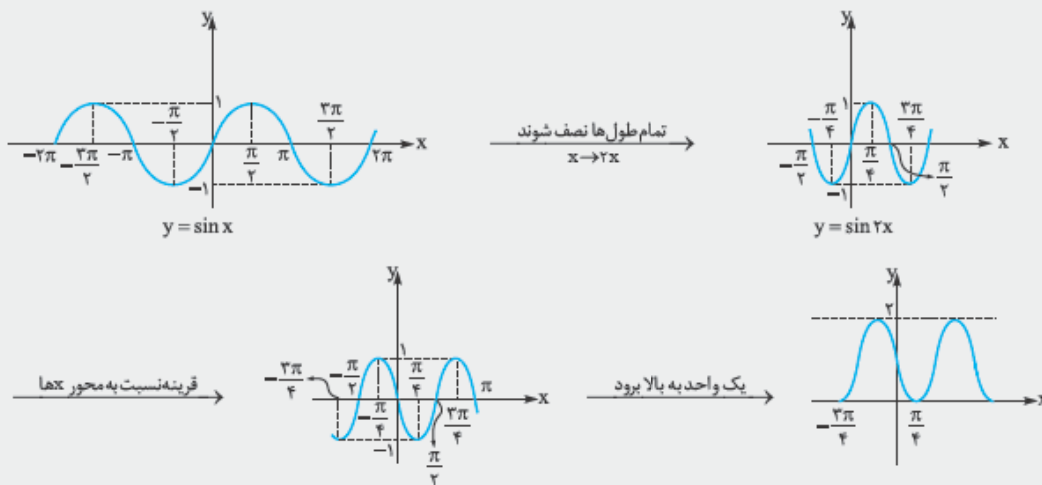
$$y = [x]$$

نکته نمودار تابع  $y = 1 - \sin 2x$  کدام است؟





**پاسخ گزینه ۴:** برای رسم نمودار  $y = 1 - \sin 2x$  از نمودار  $y = \sin x$  کمک می‌گیریم و مراحل زیر را انجام می‌دهیم:



**نکته:** برای رسم نمودار  $y = 2x^2 - 4x + 3$  با استفاده از نمودار  $y = x^2$  به ترتیب چه مراحل باید صورت پذیرد؟

- (۱) دو واحد به راست، انبساط عمودی با ضریب ۲، ۳ واحد به بالا  
 (۲) یک واحد به راست، انبساط عمودی با ضریب ۲، یک واحد به بالا  
 (۳) دو واحد به راست، انبساط افقی با ضریب  $\frac{1}{2}$ ، ۳ واحد به بالا  
 (۴) یک واحد به راست، انبساط افقی با ضریب  $\frac{1}{2}$ ، یک واحد به بالا

**پاسخ گزینه ۲:** اول با استفاده از مربع کامل کردن، ضابطه تابع  $y = 2x^2 - 4x + 3$  را جمع و جبرش کنیم:

$$y = 2x^2 - 4x + 3 = 2x^2 - 4x + 2 + 1 = 2(x^2 - 2x + 1) + 1 = 2(x-1)^2 + 1$$

برای رسم نمودار این تابع با استفاده از نمودار  $y = x^2$  به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$y = x^2 \xrightarrow[\text{یک واحد به راست}]{x \rightarrow x-1} y = (x-1)^2 \xrightarrow[\text{انبساط عمودی با ضریب ۲}]{y \rightarrow 2y} y = 2(x-1)^2 \xrightarrow[\text{یک واحد به بالا}]{y \rightarrow y+1} y = 2(x-1)^2 + 1$$

یک موضوع دیگر که حتماً باید بررسی کنیم، تحلیل وضعیت نقاط متناظر تابع و انتقال یافته آن است.

**نکته:** اگر نقطه  $(2x_0 - 1, -\frac{y_0}{2})$  روی نمودار  $g(x) = k|ax + b|$  متناظر نقطه  $(x_0, y_0)$  روی نمودار  $f(x) = |x|$  باشد، کدام  $a + b + k$  است؟

- (۱)  $-\frac{1}{2}$  (۲)  $\frac{1}{2}$  (۳) ۱ (۴)  $-1$

$$f(x_0) = y_0 \quad (*)$$

**پاسخ گزینه ۲:** نقطه  $(x_0, y_0)$  روی نمودار تابع  $f$  قرار دارد، بنابراین:

$$g(2x_0 - 1) = -\frac{y_0}{2} \xrightarrow{(*)} g(2x_0 - 1) = -\frac{1}{2}f(x_0) \quad (**)$$

هم‌چنین نقطه  $(2x_0 - 1, -\frac{y_0}{2})$  روی نمودار تابع  $g$  قرار دارد، پس:

$$2x_0 - 1 = x_0 \Rightarrow x_0 = \frac{x+1}{2}$$

حالا با فرض  $2x_0 - 1 = x$  داریم:

$$\xrightarrow{(**)} g(x) = -\frac{1}{2}f\left(\frac{x+1}{2}\right) \xrightarrow{f(x)=|x|} g(x) = -\frac{1}{2}\left|\frac{x+1}{2}\right| = -\frac{1}{4}\left|\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right| = k|ax + b|$$

$$k = -\frac{1}{4}, a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2} \Rightarrow k + a + b = \frac{1}{2}$$

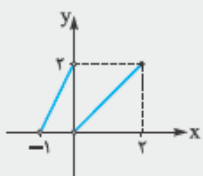
در نتیجه:

### نمایشگر نمودار توابع روی دامنه و برد

فرض کنیم  $u$  عبارتی خطی برحسب  $x$  باشد، در این صورت داریم:

**۱)** اگر دامنه  $f$  بازه  $[a, b]$  باشد، برای یافتن دامنه  $cf(u) + d$  کافی است نامعادلات مضاعف  $a \leq u \leq b$  را حل کنیم.

**نکته:** اگر نمودار تابع  $f$  به صورت مقابل باشد، دامنه تابع  $y = 2f(1 - \frac{x}{3})$  کدام است؟



- (۱)  $(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$  (۲)  $(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}) - \{1\}$   
 (۳)  $[-6, 2]$  (۴)  $[-3, 6] - \{3\}$

$$D_f = (-1, 2] - \{0\}$$

پاسخ گزینه ۴ با توجه به نمودار، دامنه تابع  $f$  برابر است با:

بنابراین برای محاسبه دامنه  $y = 2f(1 - \frac{x}{3})$  باید نامعادلات زیر را حل کنیم:

$$\left\{ \begin{array}{l} -1 < 1 - \frac{x}{3} \leq 2 \xrightarrow{-1} -2 < -\frac{x}{3} \leq 1 \xrightarrow{\times(-3)} -3 \leq x < 6 \\ \text{و} \\ 1 - \frac{x}{3} \neq 0 \Rightarrow \frac{x}{3} \neq 1 \Rightarrow x \neq 3 \end{array} \right. \xrightarrow{\text{اشتراک}} \text{دامنه} = [-3, 6) - \{3\}$$

۳ اگر دامنه  $cf(u) + d$  بازه  $[a, b]$  باشد، برای یافتن دامنه تابع  $y = f(x)$  با قراردادن  $a \leq x \leq b$  و تشکیل عبارت  $u$ ، دامنه  $f$  را می‌یابیم.

نکته اگر دامنه تابع  $y = f(x - 2)$  بازه  $[1, 4]$  باشد، دامنه تابع  $g(x) = 1 - f(2x)$  کدام است؟

(۱)  $[6, 12]$  (۲)  $[\frac{3}{2}, 3]$  (۳)  $[-\frac{1}{2}, 1]$  (۴)  $[-2, 4]$

پاسخ گزینه ۳ ابتدا با کمک دامنه تابع  $y = f(x - 2)$ ، دامنه تابع  $y = f(x)$  را می‌یابیم:

$$1 \leq x < 4 \xrightarrow{-2} -1 \leq x - 2 < 2 \Rightarrow D_f = [-1, 2)$$

حالا برای محاسبه دامنه تابع  $g(x) = 1 - f(2x)$  نامعادلات روبه‌رو را حل می‌کنیم:

$$-1 \leq 2x < 2 \xrightarrow{+2} -\frac{1}{2} \leq x < 1 \Rightarrow D_g = [-\frac{1}{2}, 1)$$

۳ اگر برد تابع  $f$  بازه  $[a, b]$  باشد، برای یافتن برد  $y = cf(u) + d$  کافی است برد  $f$  را ابتدا در  $c$  ضرب و سپس با  $d$  جمع کنیم.

نکته اگر برد تابع  $f$  بازه  $(1, 3)$  باشد، برد تابع  $y = 1 - 2f(3x)$  کدام است؟

(۱)  $[-5, -1]$  (۲)  $[-3, 1]$  (۳)  $(-9, -3]$  (۴)  $(-4, 2]$

پاسخ گزینه ۱ برد  $f$  بازه  $(1, 3)$  است، پس  $1 < f(x) \leq 3$  و در نتیجه:

$$1 < f(3x) \leq 3 \xrightarrow{\times(-2)} -6 \leq -2f(3x) < -2 \xrightarrow{+1} -5 \leq 1 - 2f(3x) < -1$$

پس برد تابع داده‌شده، بازه  $[-5, -1)$  است.

## پرسش‌های چهارگزینه‌ای

### نبدیل نمودار توابع

۱۰۵۳- نمودار تابع  $y = |x + 1| - 1$  از کدام ناحیه نمی‌گذرد؟

(۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم

۱۰۵۴- تابع  $y = x^2$  با دامنه  $(-2, 1)$  مفروض است. اگر مجموعه‌های  $A$  و  $B$  به ترتیب دامنه و برد تابع  $y = f(x - 1) - 2$  باشند،  $B - A$  کدام است؟

(۱)  $[0, 2]$  (۲)  $(0, 2)$  (۳)  $(-2, -1)$  (۴)  $[-2, -1]$

۱۰۵۵- اگر نمودار تابع  $y = [2x]$  را یک واحد به سمت چپ و سپس نمودار حاصل را ..... واحد به ..... منتقل کنیم، نمودار حاصل و نمودار اولیه

بر هم منطبق می‌شوند.

(۱) یک - بالا (۲) یک - پایین (۳) دو - بالا (۴) دو - پایین

۱۰۵۶- برای رسم نمودار تابع  $y = \frac{2^x - 4}{3}$  با انتقال نمودار تابع  $y = 2(2^x)$  چه مراحل طی می‌شود؟

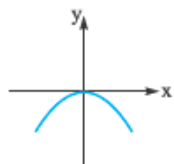
(۱) دو واحد به راست و دو واحد به پایین (۲) دو واحد به چپ و دو واحد به پایین

(۳) چهار واحد به پایین و انقباض عمودی با ضریب  $\frac{1}{3}$  (۴) چهار واحد به پایین و انقباض عمودی با ضریب ۴





۱۰۵۷- اگر نقطه  $(-2, -1)$  روی سهمی مقابل را با انتقال‌های عمودی و افقی به نقطه  $(1, 1)$  ببریم، تابع حاصل با چه عرضی محور  $y$  را قطع می‌کند؟



- (۱)  $-\frac{1}{2}$  (۲)  $-\frac{1}{4}$   
 (۳)  $\frac{1}{2}$  (۴)  $\frac{1}{4}$

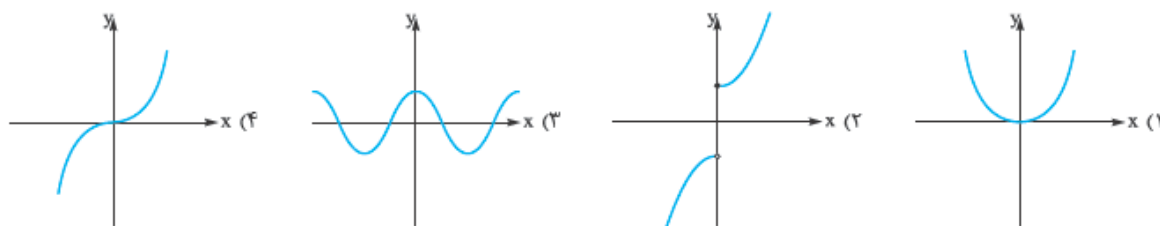
۱۰۵۸- نمودار تابع  $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$  از کدام ناحیه نمی‌گذرد؟

- (۱) دوم (۲) سوم (۳) چهارم (۴) از هر چهار ناحیه می‌گذرد.

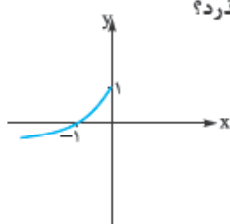
۱۰۵۹- نمودار تابع  $y = 1 + \sqrt{x^2 - 2x + 1}$  را ابتدا دو واحد به چپ و سپس یک واحد به پایین منتقل می‌کنیم. ضابطه نمودار تابع حاصل کدام است؟

- (۱)  $\sqrt{x^2 - 2x + 3}$  (۲)  $\sqrt{x^2 - 2x - 1}$  (۳)  $|x - 1|$  (۴)  $|x + 1|$

۱۰۶۰- نمودار  $f$  کدام باشد تا تساوی  $f(x) = -f(-x)$  به ازای هر  $x$  عضو دامنه برقرار باشد؟



۱۰۶۱- نمودار تابع مقابل از قرینه‌یابی و انتقال نمودار تابع  $y = \sqrt{x}$  به دست آمده است. نمودار تابع از کدام نقطه زیر می‌گذرد؟



- (۱)  $(-4, -1)$  (۲)  $(-4, -2)$   
 (۳)  $(-9, -3)$  (۴)  $(-9, -4)$

۱۰۶۲- نمودار تابع  $y = \sqrt{x}$  را نسبت به محور  $x$ ها قرینه کرده و سپس ۲ واحد به طرف چپ و در نهایت ۱ واحد به پایین منتقل می‌کنیم. ضابطه تابع حاصل کدام است؟

- (۱)  $y = \sqrt{2-x} - 1$  (۲)  $y = -\sqrt{x-2} - 1$  (۳)  $y = -\sqrt{x+2} - 1$  (۴)  $y = \sqrt{2-x} - 1$

۱۰۶۳- با انتقال نمودار  $f(x) = 1 + \sqrt{x-1}$  به نمودار  $g(x) = 2 + \sqrt{x+1}$  رسیده‌ایم. مراحل انتقال به ترتیب کدام است؟

- (۱) دو واحد به چپ و یک واحد به بالا (۲) دو واحد به راست و یک واحد به بالا  
 (۳) دو واحد به چپ و یک واحد به پایین (۴) دو واحد به راست و یک واحد به پایین

۱۰۶۴- نمودار تابع  $y = \sqrt{4x+12}$  را ابتدا با ضریب  $\frac{1}{4}$  در راستای عمودی منقبض، سپس نسبت به محور  $x$ ها قرینه کرده و در نهایت یک واحد به بالا منتقل می‌کنیم. ضابطه تابع حاصل کدام است؟

- (۱)  $y = 1 - \sqrt{x+3}$  (۲)  $y = 1 + \sqrt{3-x}$  (۳)  $y = 1 - 2\sqrt{4x+12}$  (۴)  $y = 1 + 2\sqrt{12-4x}$

۱۰۶۵- برای رسم نمودار تابع  $g(x) = -2x^2 + 4x$  با استفاده از نمودار  $f(x) = x^2$  چه انتقال‌هایی باید صورت گیرد؟

- (۱) یک واحد به چپ، انبساط عمودی با ضریب ۲، قرینه نسبت به محور  $y$ ها، دو واحد به بالا  
 (۲) یک واحد به راست، انبساط عمودی با ضریب ۲، قرینه نسبت به محور  $x$ ها، دو واحد به بالا  
 (۳) یک واحد به چپ، انقباض افقی با ضریب  $\frac{1}{2}$ ، قرینه نسبت به محور  $y$ ها  
 (۴) یک واحد به راست، انقباض افقی با ضریب  $\frac{1}{2}$ ، قرینه نسبت به محور  $x$ ها

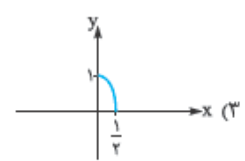
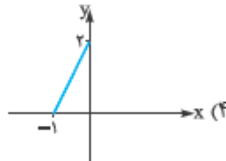
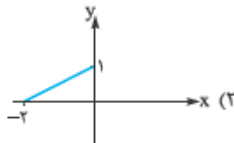
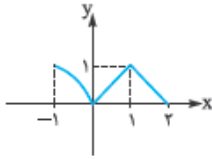
۱۰۶۶- تابع  $f(x) = \log_4(x+2)$  مفروض است. به ازای کدام مقدار  $a$  نمودار تابع  $y = f(2x) + a$  فقط از دو ناحیه عبور می‌کند؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) -۱ (۴) -۲

۱۰۶۷- تابع  $f(x) = \frac{x+1}{x}$  مفروض است. اگر نمودار تابع را با ضریب  $\frac{1}{4}$  در راستای افقی منقبض و سپس نسبت به محور  $y$ ها قرینه کنیم و در نهایت یک واحد به پایین منتقل کنیم، تابع  $g$  حاصل می‌شود. خط  $y = 3$  نمودار تابع  $f$  را با کدام طول قطع می‌کند؟

- (۱) -۱ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) -۲

۱۰۶۸- اگر نمودار تابع  $y = f(x)$  به صورت مقابل باشد، کدام نمودار زیر بخشی از نمودار تابع  $y = 2f(x+1)$  است؟

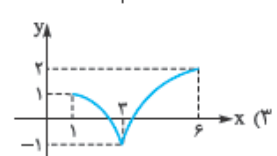
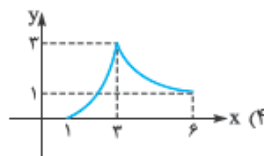
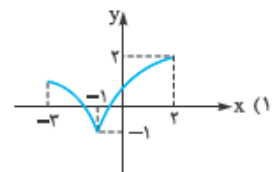
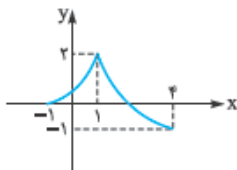


۱۰۶۹- نمودار تابع  $y = \log_4(2x-1)$  را ابتدا دو واحد به راست و سپس با ضریب ۲ در راستای افقی منبسط کرده و در نهایت یک واحد به پایین منتقل می‌کنیم. نمودار تابع حاصل، محور  $x$ ها را با کدام طول قطع می‌کند؟

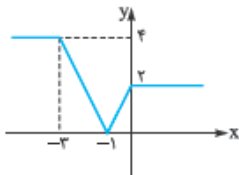
- (۱)  $7/5$  (۲)  $8/5$  (۳) ۷ (۴) ۸

۱۰۷۰- برای رسم نمودار  $y = \sqrt{1 - \cos^2 x}$  با استفاده از نمودار  $y = |\sin(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{4})|$  چه مرحله‌ای را می‌توان طی کرد؟

- (۱) انبساط افقی با ضریب ۲،  $\frac{\pi}{6}$  به چپ  
 (۲) انبساط افقی با ضریب ۲،  $\frac{\pi}{6}$  به راست  
 (۳) انقباض افقی با ضریب  $\frac{1}{4}$ ،  $\frac{\pi}{6}$  به چپ  
 (۴) انقباض افقی با ضریب  $\frac{1}{4}$ ،  $\frac{\pi}{6}$  به راست



۱۰۷۲- اگر نمودار تابع  $y = f(1-x)$  به صورت مقابل باشد، سطح محصور بین نمودار تابع  $y = f(x-1)$  و محور  $x$ ها در فاصله  $[0, 5]$  کدام است؟



- (۱) ۸  
 (۲)  $8/5$   
 (۳) ۹  
 (۴)  $9/5$

۱۰۷۳- نقطه  $(-8, 6)$  روی نمودار  $y = f(x)$  قرار دارد. کدام نقطه به طور قطع روی نمودار  $y = \frac{1}{4}f(-x) + 1$  قرار دارد؟

- (۱)  $(-8, 4)$  (۲)  $(8, 4)$  (۳)  $(8, 10)$  (۴)  $(-8, -2)$

۱۰۷۴- اگر  $g(x) = 1 - 2f(\frac{x}{4} - 1)$  و نقطه  $(2, -1)$  روی نمودار  $g$  باشد، نقطه متناظر  $A$  روی نمودار  $f$  کدام است؟

- (۱)  $(0, 1)$  (۲)  $(6, 3)$  (۳)  $(0, -1)$  (۴)  $(6, -3)$

۱۰۷۵- اگر نقطه  $(2x_0 - 1, 1 - y_0)$  روی نمودار  $g$ ، متناظر نقطه  $(x_0, y_0)$  روی نمودار  $f$  باشد، رابطه بین  $f$  و  $g$  به کدام صورت است؟

- (۱)  $f(x) = 1 + g(2x - 1)$  (۲)  $f(x) = 1 + g(\frac{x+1}{4})$  (۳)  $g(x) = 1 - f(2x - 1)$  (۴)  $g(x) = 1 - f(\frac{x+1}{4})$

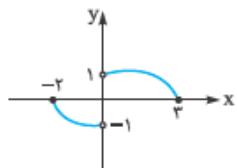


ناشر تبدیل نمودار توابع روی دامنه و برد

۱۰۷۶- اگر دامنه تابع  $f$  بازه  $(-2, 1]$  باشد، دامنه تابع  $y = 1 - f(1 - \frac{x}{3})$  کدام است؟

- (۱)  $(0, 9]$  (۲)  $(\frac{2}{3}, \frac{5}{3}]$  (۳)  $(0, 9)$  (۴)  $(\frac{2}{3}, \frac{5}{3})$

(۴)  $(\frac{2}{3}, \frac{5}{3})$



۱۰۷۷- اگر نمودار تابع  $f$  به صورت مقابل باشد، دامنه تابع  $y = \frac{x}{\sqrt{f(-3x)}}$  به کدام صورت قابل نمایش است؟

- (۱)  $(a, b) - \{c\}$  (۲)  $(a, b) \cup \{c\}$  (۳)  $(a, b)$  (۴)  $(a, b]$

۱۰۷۸- اگر دامنه تابع  $y = 3 - f(2x - 3)$  بازه  $[-1, 1)$  باشد، دامنه تابع  $y = 2f(x - 1)$  کدام است؟

- (۱)  $(0, 1)$  (۲)  $[-4, 0)$  (۳)  $[-1, 1)$  (۴)  $[1, 3)$

(تجربی ۹۲)

۱۰۷۹- اگر  $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$ ، دامنه تابع  $f(3 - x)$  کدام است؟

- (۱)  $[0, 2]$  (۲)  $[0, 3]$  (۳)  $[1, 2]$  (۴)  $[1, 3]$

(بارج تجربی ۹۳)

۱۰۸۰- اگر  $f(x) = \sqrt{x + |x + 2|}$ ، دامنه تابع  $f(-x)$  کدام است؟

- (۱)  $x \leq -1$  (۲)  $x \geq -1$  (۳)  $x \leq 1$  (۴)  $x \geq 1$

(تجربی بارج ۹۴)

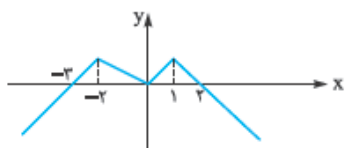
۱۰۸۱- شکل زیر نمودار تابع  $y = f(x - 2)$  است. دامنه تابع  $\sqrt{xf(x)}$  کدام است؟

- (۱)  $[-1, 1] \cup [0, 6]$  (۲)  $[-3, 1] \cup [0, 2]$  (۳)  $[-5, -3] \cup [-1, 2]$  (۴)  $[-5, -3] \cup [0, 2]$



۱۰۸۲- اگر نمودار تابع  $y = f(x + 1)$  به صورت مقابل باشد، آن گاه به ازای چند مقدار صحیح تابع  $y = \log_{x+1} f(x)$  تعریف می شود؟

- (۱) ۴ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳



۱۰۸۳- اگر برد تابع  $f$  برابر  $\mathbb{R}_f = [-\sqrt{3}, 2]$  باشد، برد تابع  $y = \sqrt{2}f(x - 1) + 1$  شامل چند عدد صحیح است؟

- (۱) ۵ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

تابع یک به یک

در این قسمت، شرایط یک به یک بودن یک تابع را در حالت های مختلف بررسی و نکات آن را بیان می کنیم.

۱- نمایش زوج مرتبی

در نمایش زوج مرتبی یک تابع یک به یک، هیچ دو زوج مرتب متمایزی، مؤلفه دوم برابر ندارند (دقت کنید که چون باید شرایط تابع بودن را داشته باشند، مؤلفه های اول نیز نباید یکسان باشند). پس:

**نکته:** اگر در یک تابع، مؤلفه های دوم برابر باشند، برای یک به یک بودن باید مؤلفه های اول نیز برابر باشند. باز هم تأکید می کنم بررسی شرط تابع بودن فراموش نشود.

**نست:** اگر تابع  $f = \{(-2, -1), (a^2 - 3a, -1), (a - 1, 4), (0, 1), (-a + 2, k)\}$  یک به یک باشد،  $k$  کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

**پاسخ:** گزینه «۲» دو زوج مرتب  $(a^2 - 3a, -1)$  و  $(-2, -1)$  مؤلفه های دوم برابر دارند؛ پس باید مؤلفه های اول آن ها نیز برابر باشد.

$a^2 - 3a = -2 \Rightarrow a^2 - 3a + 2 = 0 \Rightarrow (a - 1)(a - 2) = 0 \Rightarrow a = 1, a = 2$

$\{a = 1: f = \{(-2, -1), (0, 4), (0, 1), (1, k)\}\}$  تابع نیست.

$\{a = 2: f = \{(-2, -1), (1, 4), (0, 1), (0, k)\}\} \Rightarrow k = 1$

هر دو حالت را بررسی می کنیم:

۹۸۷- گزینه ۱ ابتدا دامنه  $\frac{y}{f} - \frac{1}{g}$  را می‌یابیم که برابر اشتراک

دامنه‌های توابع  $\frac{y}{f}$  و  $\frac{1}{g}$  است:

$$D_{\frac{y}{f}} = D_f - \{x \mid f = 0\} = \{1, 2, -1\} - \{2\} = \{-1, 1\}$$

$$D_{\frac{1}{g}} = D_g - \{x \mid g = 0\} = \{2, 1, 3\} - \emptyset = \{1, 2, 3\}$$

$$D_{\frac{y}{f-g}} = D_{\frac{y}{f}} \cap D_{\frac{1}{g}} = \{1\} \Rightarrow \left(\frac{y}{f} - \frac{1}{g}\right)(1) = \frac{y}{f(1)} - \frac{1}{g(1)}$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{-2} = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{7}{6}$$

۹۸۸- گزینه ۱ طبق تعریف داریم:

$$D_{\frac{g}{f-g}} = D_g \cap D_{f-g} - \{x \mid f-g = 0\}$$

$$\Rightarrow D_{\frac{g}{f-g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid f = g\}$$

$$\Rightarrow D_{\frac{g}{f-g}} = D_g \cap D_f - \{x \mid f = g\}$$

حالا باید از نمودار، اطلاعات مورد نیاز را استخراج کنیم:

$$D_g = (-2, 2] - \{1\} \quad D_f = [-2, 3)$$

هم‌چنین در  $x=0$  مقدار دو تابع  $f$  و  $g$  با هم برابر هستند.

$$\Rightarrow D_{\frac{g}{f-g}} = \underbrace{((-2, 2] - \{1\}) \cap ([-2, 3))}_{(-2, 2] - \{1\}} - \{x = 0\}$$

$$\Rightarrow D_{\frac{g}{f-g}} = ((-2, 2] - \{1\}) - \{0\} \Rightarrow D_{\frac{g}{f-g}} = (-2, 2] - \{0, 1\}$$

۹۸۹- گزینه ۱ راه اول: ابتدا دامنه هر یک از توابع  $f$  و  $g$  را محاسبه

$$D_f = (\text{دامنه مخرج}) \cap (\text{دامنه صورت}) - \{x \mid \text{مخرج} = 0\}$$

$$D_f = (\mathbb{R}) \cap (x \geq -3) - \{x \mid \sqrt{x+3} = 0 \Rightarrow x = -3\}$$

$$\Rightarrow D_f = (x \geq -3) - \{-3\} = (x > -3) \Rightarrow D_f = (-3, +\infty)$$

به همین ترتیب برای تابع  $g$  داریم:

$$D_g = (\mathbb{R}) \cap (x \geq -3) - \{x \mid \sqrt{x+3} = 0 \Rightarrow x = -3\}$$

$$\Rightarrow D_g = (x \geq -3) - \{-3\} = x > -3 \Rightarrow D_g = (-3, +\infty)$$

حالا دامنه تابع  $y = \frac{f(x)}{g(x)}$  را محاسبه می‌کنیم:

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\}$$

$$\Rightarrow D_{\frac{f}{g}} = (-3, +\infty) \cap (-3, +\infty) - \{x \mid \frac{x-1}{\sqrt{x+3}} = 0\}$$

$$\Rightarrow x = 1 \Rightarrow D_{\frac{f}{g}} = (-3, +\infty) - \{1\}$$

راه دوم: از گزینه‌ها برای حل استفاده می‌کنیم.

$x=1$  را در تابع قرار می‌دهیم ( $x=1$  در ۱ و ۲ قرار ندارد و در

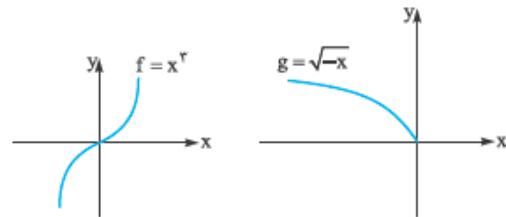
۳ و ۴ هست.)

۹۸۱- گزینه ۱  $y = \log_{\Delta} x$  صعودی است (مینا بزرگ‌تر از واحد است).

$y = \log_{\Delta} x$  نزولی است (مینا بین صفر و یک است)؛ پس  $-\log_{\Delta} x$

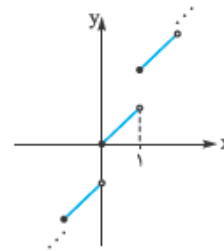
صعودی است و  $y = \log_{\Delta} x - \log_{\Delta} x$  مجموع دو تابع صعودی است که خود، صعودی است.

۹۸۲- گزینه ۳ نمودارهای  $f$  و  $g$  را ببینید:



تابع  $f$  صعودی و  $g$  نزولی است. با توجه به صعودی بودن  $f$ ،  $-f$  نزولی است. بنا به نکات درس‌نامه،  $g - f$  نزولی است.

۹۸۳- گزینه ۳ نمودار  $y = x + [x]$  را رسم می‌کنیم:



تابع اکیداً صعودی است.

۹۸۴- گزینه ۲ با توجه به این‌که  $(2f - g)(3) = 2f(3) - g(3)$

کافی است  $f(3)$  و  $g(3)$  را پیدا کنیم:

$$f(3) = \sqrt{3+1} = 2, \quad g(3) = \frac{3+1}{3-2} = 4$$

$$2f(3) - g(3) = 2(2) - 4 = 0$$

۹۸۵- گزینه ۴ ابتدا  $x = (f+g)(1)$  را به دست می‌آوریم:

$$x = (f+g)(1) = f(1) + g(1) = (1-5) + (1^2-1) = -4$$

حالا باید  $(f-g)(-4)$  را محاسبه کنیم:

$$(f-g)(-4) = f(-4) - g(-4) = \sqrt{-(-4)} - (-(-4+3)) = 2 - (-1) = 3$$

۹۸۶- گزینه ۲ ابتدا باید دامنه  $\frac{y}{f^2}$  را پیدا کنیم.  $f^2 = f \cdot f$  است؛ پس

دامنه  $f^2$  همان دامنه  $f$  و برابر  $\mathbb{R}$  است. ( $D_{f^2} = \mathbb{R}$ )

$$D_{\frac{y}{f^2}} = D_f - \{x \mid f^2 = 0 \Rightarrow f = 0\} = \{-2, 0, 2\} - \{2\} = \{-2, 0\}$$

مقدار  $\frac{y}{f^2}$  را به ازای عضوهای دامنه‌اش می‌یابیم:

$$\bullet \frac{y}{f^2}(-2) = \frac{2}{f^2(-2)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

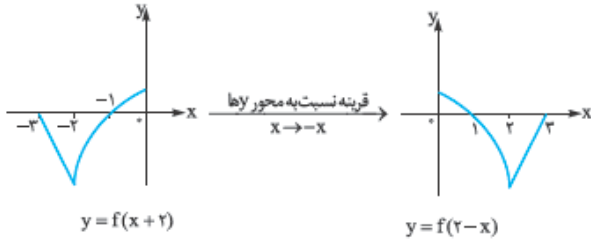
$$\bullet \frac{y}{f^2}(0) = \frac{2}{f^2(0)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{y}{f^2} = \left\{ \left(-2, \frac{1}{2}\right), \left(0, \frac{1}{2}\right) \right\}$$

پس:



**۹۹۲- گزینه ۱** دامنه تابع  $f(x)$ ، بازه  $[-1, 2]$  است. برای رسم نمودار  $f(2-x)$ ، نمودار  $f(x)$  را ۲ واحد به چپ منتقل کرده و سپس نسبت به محور  $y$ ها قرینه می‌کنیم:



دامنه تابع  $f(2-x)$ ، بازه  $[0, 3]$  است. دامنه  $y$ ، اشتراک دامنه صورت و مخرج به غیر از  $f(2-x) = 0$  است:

$$D_y = (D_f \cap D_{f(2-x)}) - \{x \mid f(2-x) = 0\}$$

$$= ([-1, 2] \cap [0, 3]) - \{1, 3\} = [0, 2] - \{1\}$$

**۹۹۳- گزینه ۲** دامنه تابع را که از اشتراک دامنه توابع  $y = \sqrt{x-1}$  و  $y = \sqrt{1-x}$  محاسبه می‌شود را می‌یابیم:

$$\begin{cases} \sqrt{x-1} : x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \\ \sqrt{1-x} : 1-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} x=1$$

بنابراین  $f$  تابعی تک‌عضوی است. مقدار تابع را در  $x=1$  می‌یابیم:  
 $x=1: f(1) = \sqrt{1-1} + \sqrt{1-1} = 0 \Rightarrow (1, 0) \in f \Rightarrow f = \{(1, 0)\}$   
 پس  $f$  معکوس‌پذیر است، چون یک‌به‌یک است (رد ۱)، همانی نیست، چون ورودی و خروجی آن یکسان نیست (رد ۲) و مثبت نیست، چون مقدار آن در  $x=1$  صفر شده (رد ۴) اما به دلیل این‌که برد آن تک‌عضوی است، پس تابعی ثابت است.

**۹۹۴- گزینه ۲** دامنه  $f$  و  $g$ ،  $\mathbb{R}$  است.

بریم سراغ دامنه  $\frac{f}{g}$

$$D_{\frac{f}{g}} = (D_f \cap D_g) - \{x \mid g(x) = 0\}$$

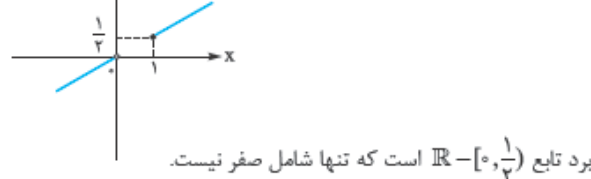
$$= \mathbb{R} - \{x \mid \sqrt{x} = 0\} \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow x \in [0, 1])$$

حالا ضابطه  $\frac{f}{g}$  را به دست می‌آوریم:

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x[x]}{\sqrt{x}} = \frac{x}{\sqrt{x}}$$

پس:  $\frac{f}{g}(x) = \frac{x}{\sqrt{x}} ; x \in [0, 1)$

تابع  $y = \frac{x}{\sqrt{x}}$  را روی  $\mathbb{R} - [0, 1)$  رسم می‌کنیم:



برد تابع  $[0, \frac{1}{\sqrt{2}})$  است که تنها شامل صفر نیست.

**۹۹۵- گزینه ۳**  $f.g(x)$  را روی دامنه آن محاسبه می‌کنیم.

بنابراین ابتدا دامنه  $f.g$  را پیدا می‌کنیم:

$$D_{f.g} = D_f \cap D_g = \{x \mid x \in [-1, 1]\}$$

(دامنه  $f$  و  $g$  از نامساوی  $1-x^2 \geq 0$  به دست می‌آید.)

$$\begin{cases} f(1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow y = \frac{f(1)}{g(1)} \\ g(1) = 0 \end{cases}$$

تعریف نمی‌شود:

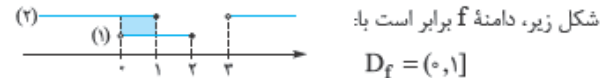
پس  $x=1$  در دامنه تابع قرار ندارد و در نتیجه ۳ و ۴ حذف می‌شوند. هم‌چنین  $x=-4$  عبارت زیر رادیکال‌ها را منفی می‌کند، پس  $x=-4$  هم در دامنه نیست؛ پس ۲ هم رد می‌شود و تمام!

**۹۹۰- گزینه ۱** دامنه هر یک از توابع  $y = \sqrt{\frac{x-1}{x-3}}$  و  $y = \sqrt{\frac{2-x}{x}}$  محاسبه می‌کنیم و سپس از جواب‌ها اشتراک می‌گیریم:

$$\sqrt{\frac{2-x}{x}} : \frac{2-x}{x} \geq 0 \xrightarrow{x(-)} \frac{x-2}{x} \leq 0 \Rightarrow 0 < x \leq 2 \quad (1)$$

$$\sqrt{\frac{x-1}{x-3}} : \frac{x-1}{x-3} \geq 0 \Rightarrow x \leq 1 \text{ یا } x > 3 \quad (2)$$

دامنه  $f$  از اشتراک دو مجموعه جواب فوق حاصل می‌شود؛ پس با توجه به شکل زیر، دامنه  $f$  برابر است با:



**۹۹۱- گزینه ۴** راه اول: با توجه به تعریف دامنه تابع  $\frac{f}{g}$ ، داریم:

$$x(x^2-1) \geq 0 \Rightarrow x(x-1)(x+1) \geq 0$$

$$\Rightarrow x(x-1)(x+1) \geq 0$$



$$\Rightarrow \text{دامنه} = [-1, 0] \cup [1, +\infty)$$

$$\text{دامنه مخرج} \geq 0 \Rightarrow |x| + x \geq 0 \quad (*)$$

از آن‌جا که  $|x| \leq x \leq |x|$ ، بنابراین با توجه به نامساوی سمت چپ یعنی

$$x + |x| \geq 0 \xrightarrow{(*)} \text{دامنه مخرج} = \mathbb{R}$$

$$\text{ریشه‌های مخرج} |x| + x = 0 \Rightarrow |x| = -x$$

با توجه به تعریف قدرمطلق، تساوی  $|x| = -x$  به ازای هر  $x \in (-\infty, 0]$  برقرار است.

در نتیجه: (ریشه‌های مخرج) - (دامنه مخرج)  $\cap$  (دامنه صورت)

$$D_f = ((-\infty, 0] \cup [1, +\infty)) \cap (\mathbb{R} - ((-\infty, 0]))$$

$$\Rightarrow D_f = [1, +\infty)$$

راه دوم:  $x=1$  در ۳ و ۴ قرار دارد. با قراردادن  $x=1$  در تابع داریم:

$$f(1) = \frac{\sqrt{1(1-1)}}{\sqrt{1+1}} = \frac{0}{\sqrt{2}} = 0$$

چون تابع در  $x=1$  مقدار دارد؛ پس  $x=1$  عضو دامنه تابع است. از طرفی

$x=0$  در ۳ هست و در ۴ نیست.

$$f(0) = \frac{\sqrt{0(0-1)}}{\sqrt{0+0}} = \frac{0}{0} = \text{تعریف نشده}$$

پس  $x=0$  نباید عضو دامنه باشد، پس ۴ صحیح است.

و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم. پس تابع  $f$  برابر است با:

$$f = \{(1, 1), (2, 3), (3, 5), (4, 7), (5, 9)\}$$

حالا تابع  $f \circ f$  را محاسبه می‌کنیم:  $(1, 1) \in f, (1, 1) \in f \Rightarrow (1, 1) \in f \circ f$

$$(2, 3) \in f, (3, 5) \in f \Rightarrow (2, 5) \in f \circ f$$

$$(3, 5) \in f, (5, 9) \in f \Rightarrow (3, 9) \in f \circ f$$

$$f \circ f = \{(1, 1), (2, 5), (3, 9)\}$$
 بنابراین:

**۹۹۹- گزینه ۱** می‌توانیم با توجه به نمودارهای  $f$  و  $g$  را به صورت زوج مرتبی بنویسیم:

$$f = \{(1, 4), (-1, 2), (3, 1), (5, 1)\}$$

$$g = \{(3, -2), (2, 0), (1, 4), (5, 4)\}$$

حالا توابع  $f \circ g$  و  $g \circ f$  را تشکیل می‌دهیم.

تشکیل  $g \circ f$ : زوج مرتب زمانی تشکیل می‌شود که خروجی تابع داخلی یعنی  $f$  با ورودی تابع بیرونی یعنی  $g$  برابر باشد:

$$(-1, 2) \in f, (2, 0) \in g \Rightarrow (-1, 0) \in g \circ f$$

$$(3, 1) \in f, (1, 4) \in g \Rightarrow (3, 4) \in g \circ f$$

$$(5, 1) \in f, (1, 4) \in g \Rightarrow (5, 4) \in g \circ f$$

$$\Rightarrow g \circ f = \{(-1, 0), (3, 4), (5, 4)\}$$

پس تابع  $g \circ f$  سه زوج مرتب دارد.

تشکیل  $f \circ g$ : در هیچ حالتی خروجی تابع  $g$  و ورودی تابع  $f$  یکسان نیست؛ پس این تابع هیچ زوج مرتبی ندارد.

$$(4, 1) \in g \circ f \Rightarrow g(f(4)) = 1$$
 **۱۰۰۰- گزینه ۳**

با توجه به تابع  $f$ :  $(4, 5) \in f$  و در نتیجه  $f(4) = 5$  پس:  $g(5) = 1$  از آنجا که  $(b, 1) \in g$  است؛ پس:  $b = 5$

$$(4, 2) \in f \circ g \Rightarrow f(g(4)) = 2$$
 **هم‌چنین:**

با توجه به مقدار  $b$ : دامنه  $g$  به صورت  $\{1, 3, a, 5\}$  است. پس برای این  $f(4) = 2$  تعریف شود، باید  $a = 4$  باشد. پس زوج مرتب  $(a, b)$  برابر  $(4, 5)$  است.

**۱۰۰۱- گزینه ۴** ضابطه  $f$ : به صورت  $f(x) = x + \sqrt{x}$  است، بنابراین:

$$f(a) = a + \sqrt{a}$$

$$g(a + \sqrt{a}) = 5$$
 از آنجا که  $g(f(a)) = 5$ ، بنابراین:

حالا به تابع  $g$  نگاه می‌کنیم. تنها زوج مرتبی که خروجی ۵ دارد، زوج مرتب  $(6, 5)$  است. پس ورودی باید ۶ باشد. در تساوی بالا ورودی  $g$ :  $a + \sqrt{a}$

$$a + \sqrt{a} = 6 \rightarrow a = 4$$
 **با توجه به گزینه‌ها** **است؛ بنابراین:**

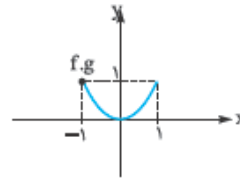
**۱۰۰۲- گزینه ۱** مشخص است که اگر  $f$  و  $g$  تابع باشند،  $f \pm g$ ،  $f \cap g$ ،  $f \cup g$

مشخص است که اگر  $f$  و  $g$  تابع باشند، اما در مورد  $f \cup g$  نمی‌توان نظر قطعی داد. برای مثال:

$$\begin{cases} f = \{(1, 0)\} \\ g = \{(1, -1)\} \end{cases} \Rightarrow f \cup g = \{(1, 0), (1, -1)\}$$
 **تابع نیست:**

$$f \cdot g(x) = f(x)g(x) = (1 + \sqrt{1-x^2})(1 - \sqrt{1-x^2}) = 1 - (1-x^2) = x^2$$

تابع  $f \cdot g$  را رسم می‌کنیم:



برد  $f \cdot g$ : بازه  $[0, 1]$  است.

**۹۹۶- گزینه ۲** با توجه به نمودار، دامنه  $f$  بازه  $[-1, 3]$  و دامنه  $g$  بازه  $[0, 4]$  است. پس دامنه  $f + g$  برابر است با:

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g = [-1, 3] \cap [0, 4] = [0, 3]$$

حالا به دوتا نمودار توجه کنید. هر دوتا در نقطه  $x = 2$  شکسته شده‌اند. پس دوتا حالت داریم:

**۱** بازه  $[0, 2]$ : در این فاصله، تابع  $f$  تابع ثابت  $y = 2$  و تابع  $g$  تابع ثابت  $y = 0$  است؛ در نتیجه:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = 2 + 0 = 2$$

**۲** بازه  $[2, 3]$ : در این فاصله هر دو تابع، خطی هستند؛ پس مجموع آن‌ها نیز خطی خواهد بود. در نتیجه فقط در نقاط ابتدا و انتهای بازه،  $f + g$  را می‌یابیم و سپس معادله خط آن را می‌نویسیم. (دقت کنید که با توجه به نمودار،  $f(2) = 2$ ،  $f(3) = 0$ ،  $g(2) = 0$  و  $g(3) = 2$ )

$$x = 2: (f+g)(2) = f(2) + g(2) = 2 + 0 = 2 \Rightarrow (2, 2) \in f+g$$

$$x = 3: (f+g)(3) = f(3) + g(3) = 0 + 2 = 2 \Rightarrow (3, 2) \in f+g$$

در نتیجه:

$$\begin{cases} (2, 2) \in f+g \\ (3, 2) \in f+g \end{cases} \Rightarrow y - 2 = \frac{2-2}{3-2}(x-2)$$

$$\Rightarrow y - 2 = 0 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow (f+g)(x) = 2$$

پس تابع  $f + g$  و در نتیجه نمودار آن به صورت زیر است:

$$(f+g)(x) = 2, x \in [0, 3]$$

ناحیه محصور بین نمودار تابع  $f + g$  و محور  $x$ ها همان ناحیه رنگی است، که مساحت آن برابر است با:

$$S = 2 \times 3 = 6$$

**۹۹۷- گزینه ۳** برای به دست آوردن  $f \circ g$ ، از دامنه  $g$  شروع می‌کنیم.

$$f \circ g(2) = f(g(2)) = f(1) = 7 \Rightarrow (2, 7) \in f \circ g$$

$$f \circ g(3) = f(g(3)) = f(2) = 7 \Rightarrow (3, 7) \in f \circ g$$

$$f \circ g(4) = f(g(4)) = f(3) = 4 \Rightarrow (4, 4) \in f \circ g$$

$$f \circ g(6) = f(g(6)) = f(3) = -5 \Rightarrow (6, -5) \in f \circ g$$

$$\Rightarrow f \circ g = \{(2, 7), (3, 7), (4, 4), (6, -5)\}$$

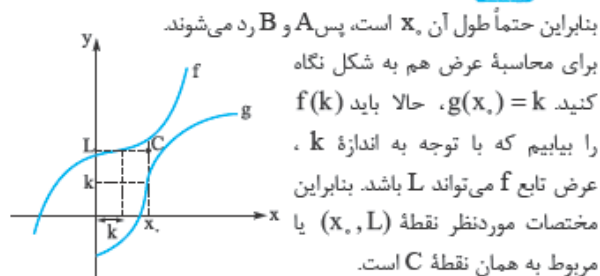
**۹۹۸- گزینه ۳** اول تابع  $f$  را تشکیل می‌دهیم. از آنجا که  $x \in A$  است، داریم:

$$x = 1: (x, 2x-1) = (1, 1)$$

$$x = 2: (x, 2x-1) = (2, 3)$$



۱۰۰۳- گزینه ۳ چون مختصات نقطه مربوط به  $f \circ g(x_0)$  را خواسته.



بنابراین حتماً طول آن  $x_0$  است، پس A و B رد می‌شوند.

برای محاسبه عرض هم به شکل نگاه کنید  $f(x_0) = k$ ، حالا باید  $f(k)$  را بیابیم که با توجه به اندازه  $k$ ، عرض تابع  $f$  می‌تواند  $L$  باشد. بنابراین مختصات موردنظر نقطه  $(x_0, L)$  یا  $(x_0, k)$  مربوط به همان نقطه  $C$  است.

۱۰۰۴- گزینه ۳ محاسبه  $f(f(\Delta))$ : ابتدا باید  $f(\Delta)$  را محاسبه کنیم. برای محاسبه  $f(\Delta)$ ، چون  $\Delta > 3$  است، باید از ضابطه بالا استفاده کنیم:

$$f(x) = x - \sqrt{x+4} \Rightarrow f(\Delta) = \Delta - \sqrt{\Delta+4} = \Delta - 3 = 2$$

$$\Rightarrow f(f(\Delta)) = f(2)$$

حالا برای محاسبه  $f(2)$  باید از ضابطه پایین استفاده کنیم:

$$(چون 2 < 3)$$

$$f(x) = 2x + 3 \Rightarrow f(2) = 2(2) + 3 = 7 \Rightarrow f(f(\Delta)) = 7$$

محاسبه  $f(f(1))$ : برای محاسبه  $f(1)$  از ضابطه پایین استفاده می‌کنیم:

$$f(1) = 2(1) + 3 = 5 \Rightarrow f(f(1)) = f(5)$$

$$f(5) = 2$$

$$\Rightarrow f(f(1)) = 2$$

در نتیجه حاصل عبارت خواسته شده برابر است با:

$$f(f(\Delta)) + f(f(1)) = 7 + 2 = 9$$

۱۰۰۵- گزینه ۱ اول با استفاده از اتحاد مربع کامل، ضابطه  $g$  را به صورت ساده‌تر می‌نویسیم:

$$g(x) = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$$

با استفاده از ضابطه‌های  $f(x) = |x|$  و  $g(x) = (x+1)^2$  توابع  $f \circ g$  و  $g \circ f$  را تشکیل داده و مقادیر خواسته شده را محاسبه می‌کنیم:

$$(1) f(g(x)) = f((x+1)^2) = |(x+1)^2|$$

چون عبارت  $(x+1)^2$  همواره نامنفی است، بنابراین:

$$f(g(x)) = (x+1)^2 \Rightarrow f(g(1-\sqrt{2})) = (1-\sqrt{2}+1)^2$$

$$= (2-\sqrt{2})^2 = 2^2 + (\sqrt{2})^2 - 4\sqrt{2} = 4 + 2 - 4\sqrt{2} = 6 - 4\sqrt{2}$$

$$(2) g(f(x)) = g(|x|) = (|x|+1)^2$$

$$\Rightarrow g(f(1-\sqrt{2})) = (|1-\sqrt{2}|+1)^2$$

$$= (-(1-\sqrt{2})+1)^2 = (-1+\sqrt{2}+1)^2 = (\sqrt{2})^2 = 2$$

در نتیجه مقدار خواسته شده برابر است با:

$$f \circ g(1-\sqrt{2}) - g \circ f(1-\sqrt{2}) = 6 - 4\sqrt{2} - 2 = 4 - 4\sqrt{2} = 4(1-\sqrt{2})$$

۱۰۰۶- گزینه ۳ برای به دست آوردن  $g(2)$ ،  $x$  را ۴ در نظر می‌گیریم:

$$g(\sqrt{4}) = g(2) = \frac{2(4)-1}{4+3} = 1$$

$$f(g(2)) = f(1) = 1^2 + 1 - 1 = 1$$

حالا نوبت  $f(g(2))$  است:

۱۰۰۷- گزینه ۳ تابع  $f(x)$  را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{x^2 + 4x + 9}{x^2 + 4x + 5} = \frac{x^2 + 4x + 4 + 5}{x^2 + 4x + 4 + 1} = \frac{(x+2)^2 + 5}{(x+2)^2 + 1}$$

$$\Rightarrow f(\sqrt{3}-2) = \frac{\sqrt{3}^2 + 5}{\sqrt{3}^2 + 1} = \frac{4}{4} = 2$$

$$\Rightarrow f(f(\sqrt{3}-2)) = f(2)$$

$$f(2) = \frac{4^2 + 5}{4^2 + 1} = \frac{21}{17}$$

با محاسبه  $f(2)$  به مقصود می‌رسیم:

۱۰۰۸- گزینه ۱ اول  $g(\sqrt{2})$  را به دست بیآوریم:

$$g(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} \times \frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = -(\sqrt{2}+1)$$

$$f(-\frac{1}{\sqrt{2}}g(\sqrt{2})) = f(1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}) = 4(1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}})^2 - 2[1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}]$$

بین ۱ و ۲

$$= 4(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}) - 2 = 4(1 + \sqrt{2})$$

۱۰۰۹- گزینه ۳ برای محاسبه  $(f \circ f)(3)$  یا همان  $f(f(3))$  اول باید مقدار  $f(3)$  را بیابیم. برای محاسبه  $f(3)$  باید از نیم‌خط سمت راستی نمودار تابع، کمک بگیریم. اگر این خط را  $L$  بنامیم، آن‌گاه:

$$\begin{cases} (-1, 2) \in L \\ (0, 1) \in L \end{cases} \Rightarrow L: \text{معادله } y-1 = \frac{2-1}{-1-0}(x-0)$$

$$\Rightarrow y-1 = -x \Rightarrow y = 1-x \Rightarrow f(3) = 1-3 = -2$$

$$f(f(3)) = f(-2)$$

$$f(f(3)) = f(-2) = 0$$

در نتیجه:

$$f(f(3)) = f(-2) = 0$$

با توجه به شکل،  $f(-2) = 0$  در نتیجه:

۱۰۱۰- گزینه ۳ با استفاده از ضابطه  $f$ ،  $f(f(x))$  را تشکیل می‌دهیم:

$$f(x) = 2 - |x-2| \Rightarrow f(f(x)) = f(2 - |x-2|)$$

$$\Rightarrow 2 - |2 - |x-2|| = 2 - |-|x-2||$$

$$f(f(x)) = 2 - |x-2| = f(x)$$

از آن‌جا که  $|u| = |-u|$ ، بنابراین:

۱۰۱۱- گزینه ۳ راه اول: با توجه به ضابطه  $f$ :

$$g(f(x)) = g(\frac{2x-1}{x+1})$$

پس در تابع  $g$  هر جا  $x$  دیدیم باید به جای آن  $\frac{2x-1}{x+1}$  قرار دهیم:

$$\Rightarrow g(f(x)) = \frac{2(\frac{2x-1}{x+1}) + 2}{2 - \frac{2x-1}{x+1}} = \frac{\frac{4x-2}{x+1} + 2}{\frac{2(x+1) - 2x + 1}{x+1}}$$

$$= \frac{\frac{4x-2+2x+2}{x+1}}{\frac{2}{x+1}} = \frac{6x}{2} = 3x$$

ارتفاع مثلث که برابر ۳ است. برای محاسبه قاعده باید طول های  $a$  و  $b$  را حساب کنیم.  $a$  و  $b$  طول نقاط تلاقی نمودار  $y = |2x+1|$  و خط  $y = 3$  است. پس:

$$|2x+1|=3 \Rightarrow \begin{cases} 2x+1=3 \Rightarrow x=1 \Rightarrow b=1 \\ 2x+1=-3 \Rightarrow x=-2 \Rightarrow a=-2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{مساحت مثلث} = \frac{b-a}{2} \times \text{ارتفاع} = \frac{1-(-2)}{2} \times 3 = \frac{3 \times 3}{2} = \frac{9}{2}$$

۱۰۱۶- گزینه ۴ مقادیر  $\sin x$  در بازه  $[-1, 1]$  و مقادیر  $\sin^2 x$  در بازه  $[0, 1]$  قرار دارد؛ پس  $0 \leq \sin^2 x \leq 1$ .

پس برای محاسبه  $f(2 - \sin^2 x)$  از ضابطه بالای  $f$  استفاده می کنیم:

$$f(2 - \sin^2 x) = \sqrt{2 - \sin^2 x - 1} - 1 = \sqrt{1 - \sin^2 x} - 1$$

$$= \sqrt{\cos^2 x} - 1 = |\cos x| - 1 \leq 0$$

بنابراین برای محاسبه  $f(|\cos x| - 1)$  باید از ضابطه پایین  $f$  استفاده کنیم:

$$\Rightarrow f(|\cos x| - 1) = 2$$

۱۰۱۷- گزینه ۲ تابع  $f \circ f$  را تشکیل می دهیم:

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(x^2 - 1) = (x^2 - 1)^2 - 1$$

حالا نقاط تلاقی تابع با محور  $x$ ها را پیدا می کنیم:

برای این کار باید ضابطه تابع را برابر صفر قرار دهیم:

$$(x^2 - 1)^2 - 1 = 0 \Rightarrow (x^2 - 1)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 1 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} \\ x^2 - 1 = -1 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \end{cases}$$

نکته: ریشه های مکرر تابع (یعنی ریشه  $x - a = 0$ ) وقتی  $n \geq 2$

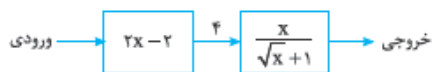
(است). نقاط تماس تابع با محور  $x$ ها هستند؛ پس ریشه معادله  $x^2 = 0$  یعنی  $x = 0$  نقطه تماس نمودار تابع با محور  $x$ ها است.

۱۰۱۸- گزینه ۳ خروجی ماشین برابر  $\frac{4}{3}$  است. این خروجی همان

$$\text{خروجی} = \frac{x}{\sqrt{x+1}} \text{ است. ببینیم ورودی این تابع چه بوده؟}$$

$$\frac{x}{\sqrt{x+1}} = \frac{4}{3} \Rightarrow x = 4$$

پس ماشین به صورت زیر، باز رسم می شود:



با توجه به شکل عدد ۴، خروجی تابع  $y = 2x - 2$  است. پس:

$$2x - 2 = 4 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3$$

ورودی:

۱۰۱۹- گزینه ۲ با توجه به این که تابع  $f \circ g(x) = f(g(x))$  را داریم،

برای محاسبه  $f(3)$  باید  $x$  را طوری بیابیم که در تابع  $f(g(x))$  تابع داخلی یعنی  $g(x)$  برابر ۳ شود:

$$\Rightarrow g(x) = 3 \Rightarrow 2x - 1 = 3 \Rightarrow x = 2$$

حالا با قراردادن  $x = 2$  در تابع  $f \circ g$ ، مقدار  $f(3)$  را می یابیم:

$$f(g(x)) = \frac{x}{x-3} \Rightarrow f(g(2)) = \frac{2}{2-3} \Rightarrow f(3) = -2$$

راه دوم: به ازای یک مقدار دلخواه، مقدار تابع را محاسبه می کنیم:

$$x = 2: g(f(x)) = g(f(2))$$

$$f(2) = \frac{2}{2-3} = -1$$

با توجه به ضابطه  $f$ :

$$g(f(2)) = g(-1)$$

پس:

$$g(-1) = \frac{-1}{-1-3} = \frac{1}{4}$$

با توجه به ضابطه  $g$ :

تنها گزینه ای که به ازای  $x = 2$  مقدار ۴ دارد، ۴ است.

۱۰۱۲- گزینه ۲ تابع  $f$  از درجه ۳ و تابع  $g$  درجه ۲ است. بنابراین درجه

$g \circ f$ ،  $2 \times 3 = 6$  خواهد بود؛ پس  $n = 6$ :

$$g \circ f(x) = (k-1)x^6 + x^2 - 1$$

نقطه  $(-1, 2)$  در  $g \circ f$  صدق می کند:

$$g \circ f(-1) = 2 \Rightarrow g \circ f(-1) = k - 1 + 1 - 1 = 2 \Rightarrow k = 3$$

۱۰۱۳- گزینه ۲ روش معمولی حل، این است که به جای  $x$ های  $f$ ،  $g(x)$

را قرار دهیم و بعد از ساده سازی، خواسته مسئله را اجرا کنیم. اما در این جا یک روش با  $g \circ f$  را ببینیم. از آن جا که تابع  $f$  تجزیه پذیر است و می خواهیم مجموعه نقاطی را بیابیم که  $f \circ g$  پایین محور  $x$ هاست یا به عبارت دیگر  $f(g(x)) < 0$  است به صورت زیر عمل می کنیم:

تجزیه شده  $f$  به صورت  $f(x) = (x-1)(x+2)$  است؛ پس:

$$\Rightarrow f(g(x)) = (g(x)-1)(g(x)+2) < 0 \Rightarrow -2 < g(x) < 1$$

در نهایت با توجه به ضابطه  $g$  داریم:

$$-2 < \frac{1}{3}(x-3) < 1 \xrightarrow{\times 3} -6 < x-3 < 3 \xrightarrow{+3} -3 < x < 6$$

۱۰۱۴- گزینه ۱ تابع  $g$  را با استفاده از ضابطه  $f$  تشکیل می دهیم:

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2} \Rightarrow f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 + \frac{1}{(\sqrt{x})^2}$$

$$\Rightarrow f(\sqrt{x}) = x + \frac{1}{x} \Rightarrow (f(\sqrt{x}))^2 = (x + \frac{1}{x})^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$$

بنابراین تابع  $g$  برابر است با:

$$g(x) = (f(\sqrt{x}))^2 - f(x) = (x^2 + \frac{1}{x^2} + 2) - (x^2 + \frac{1}{x^2})$$

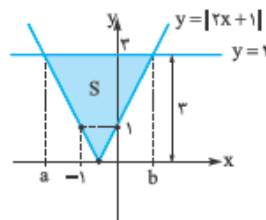
$$\Rightarrow g(x) = 2 \text{ تابع ثابت}$$

۱۰۱۵- گزینه ۱ تابع  $g \circ f$  را تشکیل می دهیم:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 + x) = \sqrt{4(x^2 + x) + 1}$$

$$= \sqrt{4x^2 + 4x + 1} = \sqrt{(2x+1)^2} = |2x+1|$$

با رسم نمودار تابع  $y = |2x+1|$  مساحت محصور بین نمودار و خط  $y = 3$  را محاسبه می کنیم:



$x$	$-1$	$-\frac{1}{2}$	$0$
$y$	$1$	$0$	$1$

$$\Rightarrow \text{مساحت} = \frac{\text{ارتفاع} \times \text{قاعده}}{2}$$





**۱۰۲۰- گزینۀ ۴** راه اول: با فرض  $x-3=t$ ، ضابطه  $f(x)$  را می‌یابیم:  
 $x-3=t \Rightarrow x=t+3$

در تساوی داده‌شده به جای  $x$ ،  $t+3$  قرار می‌دهیم:

$$f(x-3) = x^2 - 4x + 5 \Rightarrow f(t) = (t+3)^2 - 4(t+3) + 5$$

$$\Rightarrow f(t) = t^2 + 6t + 9 - 4t - 12 + 5 \Rightarrow f(t) = t^2 + 2t + 2$$

حالا برای محاسبه  $f(1-x)$  به جای  $t$  در تساوی بالا،  $1-x$  قرار می‌دهیم:

$$f(1-x) = (1-x)^2 + 2(1-x) + 2$$

$$\Rightarrow f(1-x) = x^2 - 2x + 1 + 2 - 2x + 2$$

$$\Rightarrow f(1-x) = x^2 - 4x + 5$$

راه دوم: می‌توانیم میانبر هم بزنیم. اگر در ضابطه  $f(x-3)$  به جای  $x$ ،  $x-4$  قرار دهیم، ضابطه  $f(1-x)$  ساخته می‌شود.

پس با توجه به تساوی  $f(x-3) = x^2 - 4x + 5$ ، به جای  $x$ ،  $x-4$  قرار می‌دهیم:

$$f(4-x-3) = (4-x)^2 - 4(4-x) + 5$$

$$\Rightarrow f(1-x) = 16 + x^2 - 8x - 16 + 4x + 5$$

$$\Rightarrow f(1-x) = x^2 - 4x + 5$$

**۱۰۲۱- گزینۀ ۳** راه اول: تابع  $f \circ g$  و تابع درونی  $g$  را داریم. نگاه کن!

$$\begin{cases} (f \circ g)(x) = f(g(x)) = 4(x^2 - 4x + 5) \\ g(x) = 2x - 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(2x-3) = 4(x^2 - 4x + 5) \quad (*)$$

چون تابع درونی را داریم، با فرض  $g(x) = 2x-3 = t$  داریم:

$$2x-3=t \Rightarrow x = \frac{t+3}{2}$$

با قراردادن این تساوی در  $(*)$ ،  $f(x)$  را می‌یابیم:

$$\Rightarrow f(t) = 4\left(\left(\frac{t+3}{2}\right)^2 - 4\left(\frac{t+3}{2}\right) + 5\right)$$

$$= 4\left(\frac{t^2 + 6t + 9}{4} - 2t - 6 + 5\right) = t^2 + 6t + 9 - 8t - 4$$

$$\Rightarrow f(t) = t^2 - 2t + 5 \Rightarrow f(x) = x^2 - 2x + 5$$

راه دوم: مقداردهی می‌کنیم:

$$f(g(x)) = 4(x^2 - 4x + 5) \Rightarrow f(2x-3) = 4(x^2 - 4x + 5)$$

با قراردادن مقدار دلخواه  $x=0$  در این تساوی داریم:  $f(-3) = 4(5) = 20$ . حالا در گزینه‌ها که ضابطه  $f$  هستند،  $x=-3$  قرار می‌دهیم؛ هر کدام  $20$  شد جواب است که تنها  $(3)$  این مقدار را می‌دهد. *ابتداء!*

$$x^2 - 2x + 5 \stackrel{x=-3}{=} (-3)^2 - 2(-3) + 5 = 20$$

**۱۰۲۲- گزینۀ ۴** ابتدا از  $f(g(x))$ ،  $g$  و  $f$  را پیدا می‌کنیم. برای این کار

$g(x)$  را  $t$  گرفته و  $x$  را برحسب  $t$  به دست می‌آوریم:

$$g(x) = \sqrt{x-1} = t \Rightarrow x-1 = t^2 \Rightarrow x = t^2 + 1$$

$x$  برحسب  $t$  را در  $f(g(x))$  جای‌گذاری می‌کنیم تا  $f(t)$  حاصل شود:

$$f(g(x)) = f(t) = t^2 + 1 + |t^2 + 1| \Rightarrow f(x) = x^2 + 1 + |x^2 + 1|$$

$$\Rightarrow g(f(1)) = g(1^2 + 1 + |1^2 + 1|) = g(4) = \sqrt{4}$$

**۱۰۲۳- گزینۀ ۲** ابتدا باید  $f(x)$  را پیدا کنیم. برای این کار از تغییر

متغیر  $x\sqrt{x} + 1 = t$  استفاده می‌کنیم:

$$x(x^2 + 2\sqrt{x}) = x\sqrt{x}(x\sqrt{x} + 2) \xrightarrow{x\sqrt{x}+1=t}$$

از  $\sqrt{x}$  فاکتور می‌گیریم

$$= (t-1)(t+1) = t^2 - 1 \Rightarrow f(t) = t^2 - 1$$

$$\Rightarrow f(x) = x^2 - 1 \xrightarrow{x=\sqrt{3}} f(\sqrt{3}) = 2$$

**۱۰۲۴- گزینۀ ۲** راه اول: با توجه به ضابطه  $g(x) = x - \frac{1}{x}$

$$f(g(x)) = f\left(x - \frac{1}{x}\right)$$

چون  $f(g(x)) = x^2 + \frac{1}{x^2} - 4$ ، بنابراین:

$$f\left(x - \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2} - 4 \quad (*)$$

خبه تابع داخلی را داریم، پس آن را برابر  $t$  قرار می‌دهیم:

اما تنهاکردن  $x$  کار آسانی به نظر نمی‌رسد؛ پس از اتحادها برای محاسبه تابع  $f$  استفاده می‌کنیم. نگاه کنید:

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2 \xrightarrow{(*)} f\left(x - \frac{1}{x}\right) = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2 - 4$$

$$\Rightarrow f\left(x - \frac{1}{x}\right) = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 - 2$$

$$\xrightarrow{x - \frac{1}{x} = t} f(t) = t^2 - 2 \Rightarrow f(x) = x^2 - 2$$

$$f\left(x - \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2} - 4 \quad \text{راه دوم:}$$

مقدار دلخواه  $x=1$  را در تساوی بالا قرار می‌دهیم:

$$f(0) = 1 + 1 - 4 = -2 \Rightarrow f(0) = -2$$

تنها گزینه‌ای که به ازای  $x=0$  مقدار  $-2$  دارد،  $(2)$  است.

**۱۰۲۵- گزینۀ ۴** برای یافتن  $g(1)$  در تابع  $f \circ g$ ،  $x=1$  قرار می‌دهیم:

$$f(g(x)) = \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1} \Rightarrow f(g(1)) = \frac{1+2}{1+1} = \frac{3}{2} \Rightarrow f(g(1)) = \frac{3}{2} \quad (*)$$

حالا در ضابطه  $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ ، به جای  $x$ ،  $g(1)$  قرار می‌دهیم:

$$f(g(1)) = \frac{g(1)+1}{g(1)-1} \xrightarrow{(*)} \frac{3}{2} = \frac{g(1)+1}{g(1)-1}$$

$$\Rightarrow 3g(1) - 3 = 2g(1) + 2 \Rightarrow g(1) = 5$$

**۱۰۲۶- گزینۀ ۲** شکل داده‌شده، مربوط به تابع  $g \circ f$  است. با توجه به

$$g \circ f(x) = 2x \Rightarrow g(f(x)) = 2x \quad (*)$$

از آن‌جا که  $g(x) = 3x + 4$ ، بنابراین:

$$g(f(x)) = 3f(x) + 4$$

از آن‌جا که با توجه به  $(*)$ ،  $g(f(x)) = 2x$  است؛ پس:

$$3f(x) + 4 = 2x$$

حالا برای بررسی  $f(5)$ ، در این تساوی  $x=5$  قرار می‌دهیم:

$$3f(5) + 4 = 2(5) \Rightarrow 3f(5) = 6 \Rightarrow f(5) = 2$$

**۱۰۲۷- گزینۀ ۲** وقتی عرض از مبدأ تابع  $f \circ g$  برابر  $2$  باشد، یعنی

$f \circ g(0) = 2$  است.  $g(0) = a$  در نظر می‌گیریم:

$$f(g(0)) = 2 \xrightarrow{g(0)=a} f(a) = 2 \Rightarrow \frac{a+3}{a+1} = 2$$

$$\Rightarrow a+3 = 2a+2 \Rightarrow a=1 \Rightarrow g(0) = 1$$

۱۰۳۱- گزینه ۳ برای حل معادله  $f(g(x)) = 0$  اول معادله  $f(x) = 0$

را حل می‌کنیم:

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 8x + 12 = 0 \Rightarrow (x-2)(x-6) = 0$$

$$\Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow x = 2, x = 6$$

$$f(g(x)) = 0 \Rightarrow \begin{cases} g(x) = 2 \\ g(x) = 6 \end{cases} \text{ حالا به جای } x \text{ ها، } g(x) \text{ قرار می‌دهیم.}$$

چون  $g$  دوضابطه‌ای است، پس هر دو ضابطه  $g$  را یک بار برابر ۲ و یک بار برابر ۶ قرار می‌دهیم و جواب‌های حاصل را با توجه به شرط ضابطه می‌پذیریم.

$$g(x) = 2 \Rightarrow \begin{cases} x^2 + x = 2 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \\ \Rightarrow x = 1, -2 \xrightarrow{x \geq 0} x = 1 \checkmark \\ 2x + 3 = 2 \Rightarrow 2x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \\ \xrightarrow{x < 0} x = -\frac{1}{2} \checkmark \text{ قق} \end{cases}$$

$$g(x) = 6 \Rightarrow \begin{cases} x^2 + x = 6 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \\ \Rightarrow (x+3)(x-2) = 0 \\ \Rightarrow x = -3, 2 \xrightarrow{x \geq 0} x = 2 \checkmark \\ 2x + 3 = 6 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \xrightarrow{x < 0} \text{ غقق} \end{cases}$$

پس معادله سه جواب  $x = 1, x = -\frac{1}{2}, x = 2$  دارد و مجموع آن‌ها برابر  $\frac{2}{5}$  است.

۱۰۳۲- گزینه ۲ ابتدا ضابطه تابع  $g \circ f$  را بدون ساده کردن آن می‌یابیم.

(برای این که از بابت دامنه مشکلی نداشته باشیم.)

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{1-x^2}) \Rightarrow g \circ f(x) = (\sqrt{1-x^2})^2 + 1$$

پس معادله خواسته شده به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$g \circ f(x) = x^2 + 3x \Rightarrow (\sqrt{1-x^2})^2 + 1 = x^2 + 3x \quad (*)$$

حالا می‌توانیم معادله را مرتب کنیم:

$$\Rightarrow 1 - x^2 + 1 = x^2 + 3x \Rightarrow 2x^2 + 3x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2(2)} = \frac{-3 \pm 5}{4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-3+5}{4} = \frac{1}{2} \checkmark \\ x = \frac{-3-5}{4} = -2 \checkmark \end{cases}$$

در معادله (\*) عبارت زیر رادیکال منفی می‌شود. \*

۱۰۳۳- گزینه ۳ چون  $f$  و  $g$  چندجمله‌ای هستند و  $f \circ f$  و  $f \circ g(2x+3)$

خطی شده، پس حتماً  $f$  و  $g$  توابعی خطی هستند. پس می‌توانیم توابع  $f$  و  $g$  را به صورت  $f(x) = ax + b$  و  $g(x) = cx + d$  در نظر بگیریم. حالا

با توجه به اطلاعات مسئله داریم:

$$f(f(x)) = f(ax + b) = a(ax + b) + b = a^2x + ab + b$$

۱۰۲۸- گزینه ۳

با داشتن  $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$ ، تساوی  $f \circ g(x) = (f+g)(x)$  را با  $g(x)$  تشکیل می‌دهیم:

$$\bullet f \circ g(x) = f(g(x)) = \frac{g^2(x)+1}{g(x)}$$

$$\bullet (f+g)(x) = f(x)+g(x) = \frac{x^2+1}{x} + g(x) = \frac{x^2+1+gx(x)}{x}$$

$$f \circ g(x) = (f+g)(x) \Rightarrow \frac{g^2(x)+1}{g(x)} = \frac{x^2+1+gx(x)}{x}$$

$$xg^2(x) + x = x^2g(x) + g(x) + xg^2(x)$$

$$\Rightarrow g(x)(1+x^2) = x \Rightarrow g(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

۱۰۲۹- گزینه ۱ ضابطه  $f \circ g$  و ضابطه تابع بیرونی  $f$  را داریم. پس به کمک

ضابطه  $f$ ، تابع  $f(g(x))$  را تشکیل می‌دهیم:

$$f(x) = x^2 - x - 2 \Rightarrow f(g(x)) = g^2(x) - g(x) - 2$$

از آن جا که  $f(g(x)) = x^2 + x - 2$ ؛ بنابراین:

$$g^2(x) - g(x) - 2 = x^2 + x - 2 \Rightarrow g^2(x) - g(x) = x^2 + x$$

حالا برای این که تابع  $g$  را بیابیم از مربع کامل کردن استفاده می‌کنیم:

$$\Rightarrow (g(x) - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} = (x + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow (g(x) - \frac{1}{2})^2 = (x + \frac{1}{2})^2 \Rightarrow g(x) - \frac{1}{2} = \pm(x + \frac{1}{2})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} g(x) - \frac{1}{2} = x + \frac{1}{2} \Rightarrow g(x) = x + 1 \\ g(x) - \frac{1}{2} = -x - \frac{1}{2} \Rightarrow g(x) = -x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} g(x) - \frac{1}{2} = x + \frac{1}{2} \Rightarrow g(x) = x + 1 \\ g(x) - \frac{1}{2} = -x - \frac{1}{2} \Rightarrow g(x) = -x \end{cases}$$

حالا با هر کدام از ضابطه‌ها، تابع  $f+g$  را تشکیل می‌دهیم.

هر کدام در گزینه‌ها بود جواب است:  $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

$$\Rightarrow \begin{cases} (f+g)(x) = (x^2 - x - 2) + (x + 1) = x^2 - 1 \\ (f+g)(x) = (x^2 - x - 2) + (-x) = x^2 - 2x - 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (f+g)(x) = (x^2 - x - 2) + (x + 1) = x^2 - 1 \\ (f+g)(x) = (x^2 - x - 2) + (-x) = x^2 - 2x - 2 \end{cases}$$

که عبارت  $x^2 - 1$  در گزینه‌ها هست.

۱۰۳۰- گزینه ۲ نقاط تقاطع  $f \circ g$  با محور  $x$ ها یعنی جاهایی که

$f(g(x)) = 0$  می‌شود. برای حل این معادله، اول معادله  $f(x) = 0$  را حل

می‌کنیم، سپس به جای  $x$ ها،  $g(x)$  قرار می‌دهیم. خوشبختانه طراح به ما

گفته  $f$  در دو نقطه به طول‌های  $6$  و  $-\frac{1}{4}$  محور  $x$ ها را قطع می‌کند. در نتیجه:

$$f(x) = 0 \Rightarrow x = 6, x = -\frac{1}{4}$$

حالا با جای‌گذاری  $g(x)$  به جای  $x$ ها داریم:

$$f(g(x)) = 0 \Rightarrow g(x) = 6, g(x) = -\frac{1}{4}$$

$$\begin{cases} x - \sqrt{x} = 6 \\ x - \sqrt{x} = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

از آن جا که  $g(x) = x - \sqrt{x}$ ، بنابراین:

$$\begin{cases} x - \sqrt{x} = 6 \\ x - \sqrt{x} = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

حالا دوتا روش داریم. یا معادلات را حل کنیم که ولعمرون کن بابا! یا از گزینه‌ها

کمک بگیریم که ایول همینه!  $x = 4$  ریشه هیچ‌کدام از معادلات بالا نیست؛

پس جواب نیست. در نتیجه ۱، ۲ و ۴ حذف می‌شوند و فلاس!



از آن جا که  $f(f(x)) = 4x + 3$  است؛ بنابراین:

$$a^2x + ab + b = 4x + 3 \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 4 \\ ab + b = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \pm 2 \quad (*) \\ ab + b = 3 \end{cases} \xrightarrow{(*)} \begin{cases} a = 2 \Rightarrow 2b + b = 3 \\ \Rightarrow b = 1 \\ a = -2 \Rightarrow -2b + b = 3 \\ \Rightarrow b = -3 \end{cases}$$

پس  $f(x) = -2x - 3$  یا  $f(x) = 2x + 1$ .

حالا برای ضابطه دوم داریم  $(g(x) = cx + d)$ :

$$g(2x + 3) = 2x - 2 \Rightarrow c(2x + 3) + d = 2x - 2$$

$$\Rightarrow 2cx + 3c + d = 2x - 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2c = 2 \Rightarrow c = 1 \quad (**) \\ 3c + d = -2 \end{cases} \xrightarrow{(**)} \frac{9}{1} + d = -2 \Rightarrow d = -11$$

حالا برای محاسبه  $(g \circ f)(-1)$  یا  $g(f(-1))$  از هر کدام از ضابطه‌های استفاده کنیم فرقی نمی‌کند، چون  $f(-1)$  برای هر دو ضابطه  $f$  برابر  $-1$  است؛ پس:

$$g(f(-1)) = g(-1) = \frac{3}{1}(-1) - \frac{11}{1} = -14$$

**۱۰۳۴ - گزینه ۳** ابتدا باید ضابطه تابع  $f$  را بیابیم، برای این کار در تساوی

داده شده یعنی  $(*) \quad 3f(2-x) - 2f(2+x) = -15x + 5$  به جای  $x$  مقدار  $-x$  قرار می‌دهیم (به خاطر این که در داخل پرانتزها، عبارت‌های مشابهی داریم و فقط  $x$  ها قرینه هم هستند).

$x \Rightarrow -x \xrightarrow{(*)} 3f(2+x) - 2f(2-x) = 15x + 5 \quad (**)$   
حالا با توجه به  $(*)$  و  $(**)$  از روش حذفی یکی از عبارات  $f(2+x)$  یا  $f(2-x)$  را حذف کرده و مقدار دیگری را محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{cases} 3f(2-x) - 2f(2+x) = -15x + 5 \\ 3f(2+x) - 2f(2-x) = 15x + 5 \end{cases} \quad \text{داریم:}$$

$$\begin{aligned} \xrightarrow{-x^2} & \begin{cases} 9f(2-x) - 6f(2+x) = -45x + 15 \\ 6f(2+x) - 4f(2-x) = 30x + 10 \end{cases} \\ \xrightarrow{-x^2} & \end{aligned}$$

$$\text{جمع: } \Delta f(2-x) = -15x + 25 \Rightarrow f(2-x) = -3x + 5$$

حالا با فرض  $t = 2-x$ ،  $f(x)$  را می‌یابیم:

$$2-x=t \Rightarrow x=2-t \xrightarrow{f(2-x)=-3x+5} f(t) = -3(2-t) + 5$$

$$\Rightarrow f(t) = 3t - 1 \Rightarrow f(x) = 3x - 1$$

پس معادله  $x^2 = f(x)$  به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$x^2 = 3x - 1 \Rightarrow x^2 - 3x + 1 = 0 \xrightarrow{\Delta > 0} \text{دو ریشه دارد}$$

**۱۰۳۵ - گزینه ۲** از تغییر متغیر  $\cot x = z$  استفاده می‌کنیم و

$$\left(\cot x = \frac{1}{\tan x}\right) \quad \text{را بر حسب } \cot x \text{ می‌نویسیم:} \quad \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

$$\frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos x} \times \frac{1}{\cos x} = \tan x(1 + \tan^2 x)$$

$$= \frac{1}{\cot x} \left(1 + \frac{1}{\cot^2 x}\right) = \frac{z^2 + 1}{z^2} \Rightarrow f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2}$$

**۱۰۳۶ - گزینه ۳** از تعریف دامنه  $f \circ f$  استفاده کنیم:

$$D_{f \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_f\}$$

با توجه به ضابطه  $f$ ،  $D_f = \{x \geq 1\}$ ؛ پس:

$$f(x) \in D_f \Rightarrow \sqrt{x-1} \geq 1$$

$$\xrightarrow{\text{به توان } 2} x-1 \geq 1 \Rightarrow x \geq 2$$

$$\Rightarrow D_{f \circ f} = \{x \geq 1 \mid x \geq 2\} = [2, +\infty)$$

**۱۰۳۷ - گزینه ۳** از تعریف دامنه  $f \circ g$  استفاده می‌کنیم:

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

برای این کار، دامنه  $f$  و  $g$  را محاسبه می‌کنیم:

$$\bullet f(x) = \frac{x+1}{x-2} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{2\}$$

$$\bullet g(x) = \sqrt{x^2 + 3x} = \sqrt{x(x+3)}$$

$$\Rightarrow D_g = (-\infty, -2] \cup [0, +\infty)$$

بنابراین:  $D_{f \circ g} = \{x \in (-\infty, -2] \cup [0, +\infty) \mid \sqrt{x^2 + 3x} \in \mathbb{R} - \{2\}\}$

با توجه به این که باید  $\sqrt{x^2 + 3x} \neq 2$ ؛ پس داریم:

$$\xrightarrow{\text{به توان } 2} x^2 + 3x \neq 4 \Rightarrow x^2 + 3x - 4 \neq 0$$

$$\Rightarrow x \neq 1, x \neq -4$$

$$D_{f \circ g} = (-\infty, -2] \cup [0, +\infty) - \{-4, 1\}$$

در نتیجه:

بنابراین این دامنه شامل اعداد صحیح  $\{-4, -2, -1, 1\}$  نمی‌شود.

**۱۰۳۸ - گزینه ۳** تابع  $f \circ g$  را تشکیل می‌دهیم:

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = \sqrt{1-g(x)} = \sqrt{1-\sqrt{[x]-1}}$$

دامنه تابع، اشتراک مجموعه جواب نامعادله‌های  $[x]-1 \geq 0$  و  $1-\sqrt{[x]-1} \geq 0$  است:

$$\bullet [x]-1 \geq 0 \Rightarrow [x] \geq 1 \Rightarrow x \geq 1 \quad (1)$$

$$\bullet \sqrt{[x]-1} \leq 1 \Rightarrow [x]-1 \leq 1 \Rightarrow [x] \leq 2 \Rightarrow x < 3 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1) \cap (2)} 1 \leq x < 3$$

**۱۰۳۹ - گزینه ۲** اول دامنه دو تابع  $f$  و  $g$  را محاسبه می‌کنیم. در تابع

گویای  $f$  از آن جا که مخرج صفر نمی‌شود، بنابراین دامنه تابع  $f$  برابر  $\mathbb{R}$  است.

از طرفی برای محاسبه دامنه  $g$ ، عبارت زیر رادیکال را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$x - x^2 \geq 0 \xrightarrow{x(-1)} x^2 - x \leq 0 \Rightarrow x(x-1) \leq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 1$$

حالا با کمک تعریف، دامنه تابع  $g \circ f$  را محاسبه می‌کنیم:

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f, f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R}, 0 \leq \frac{1-x^2}{1+x^2} \leq 1\} \quad (**)$$

برای حل نامعادلات مضاعف  $0 \leq \frac{1-x^2}{1+x^2} \leq 1$ ، چون مخرج مثبت است،

طرفین را در  $1+x^2$  ضرب می‌کنیم:

$$\xrightarrow{x(1+x^2)} \left(0 \leq \frac{1-x^2}{1+x^2} \leq 1\right) \Rightarrow \underbrace{0 \leq 1-x^2}_{(1)} \leq \underbrace{1+x^2}_{(2)}$$

۱۰۴۲- گزینه ۱ اول دامنه توابع  $f, g$  و  $f+g$  را محاسبه می‌کنیم:

$$D_f : \text{عبارت زیر رادیکال} : \geq 0 \Rightarrow 1-x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$$

$$D_g : \text{عبارت زیر رادیکال} : \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$$

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g = (-1 \leq x \leq 1) \cap (x \geq 0) = (0 \leq x \leq 1)$$

حالا دامنه تابع  $(f+g) \circ f$  را با کمک تعریف می‌یابیم:

$$D_{(f+g) \circ f} = \{x \in D_f, f(x) \in D_{f+g}\}$$

$$= \{x \in D_f, 0 \leq \sqrt{1-x^2} \leq 1\}$$

برقرار است

$$= \{x \in D_f, \sqrt{1-x^2} \leq 1 \xrightarrow{\text{بنتوان}} 1-x^2 \leq 1 \Rightarrow x^2 \geq 0\}$$

برقرار است

$$\Rightarrow D_{(f+g) \circ f} = \{x \in D_f\} = [-1, 1]$$

۱۰۴۳- گزینه ۴ تابع  $f$  را بازنویسی می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} x - |x-1| & x > 1 \\ x^2 & x < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - x + 1 = 1 & x > 1 \\ x^2 & x < 1 \end{cases}$$

دامنه تابع  $f, \mathbb{R} - \{1\}$  است.

$$D_{f \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_f\} \quad \text{طبق تعریف دامنه } f \circ f:$$

$$= \{x \in \mathbb{R} - \{1\} \mid f(x) \in \mathbb{R} - \{1\}\}$$

(\*)

$$(*) : f(x) \in \mathbb{R} - \{1\} \Rightarrow f(x) \neq 1$$

چون ضابطه اول  $f(x) = 1$  است؛ پس  $x > 1$  حذف می‌شود. در ضابطه دوم باید  $x^2 \neq 1$  باشد و این برای  $x = 1, -1$  اتفاق می‌افتد که  $x = 1$  در دامنه نیست؛ بنابراین دامنه  $f \circ f$  برابر  $\mathbb{R} - \{1\}$  است که شامل تمام اعداد صحیح منفی به جز  $x = -1$  است.

۱۰۴۴- گزینه ۲ با توجه به نمودارها:

$$D_f : [-2, +\infty), \quad D_g : [-4, +\infty)$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} \quad \text{با استفاده از تعریف دامنه } f \circ g \text{ داریم:}$$

$$= \{x \in [-4, +\infty) \mid \underbrace{-\frac{1}{2}x - 1}_{g(x)} \in [-2, +\infty)\}$$

(\*)

پس برای یافتن مجموعه جواب (\*) باید معادله تابع  $g(x)$  را پیدا کنیم:

$$A(-4, 1), B(0, -1) \Rightarrow g(x) = -\frac{1}{2}x - 1$$

$$\Rightarrow D_{f \circ g} = \{x \in [-4, +\infty) \mid -\frac{1}{2}x - 1 \geq -2\}$$

$$= \{x \in [-4, +\infty) \mid x \leq 2\} = [-4, 2]$$

$$\{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\} \quad \text{که شامل ۷ عدد صحیح است.}$$

۱۰۴۵- گزینه ۱ با توجه به این که  $f(x) = [x]$  داریم:

$$f(x - f(x)) = f(x - [x])$$

حالا در تابع  $f$  به جای  $x, x - [x]$  قرار می‌دهیم:

$$\Rightarrow f(x - [x]) = [x - [x]]$$

چون  $[x]$  عددی صحیح است، می‌تواند از داخل جزء صحیح بزرگ‌تر،

$$f(x - [x]) = [x] - [x] = 0 \quad \text{بیرون بیاید؛ پس:}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1-x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1 \\ \text{و} \\ 1-x^2 \leq 1+x^2 \Rightarrow 2x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 0 \end{cases}$$

همواره برقرار  $x^2 \geq 0$

اشتراک  $\rightarrow -1 \leq x \leq 1$

بنابراین با توجه به (\*) داریم:  $D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R}, -1 \leq x \leq 1\} = [-1, 1]$

۱۰۴۰- گزینه ۲ راه اول: دامنه هر یک از توابع  $f$  و  $g$  را می‌یابیم:

$$D_f : 2-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 2$$

$$D_g : x^2 - 15x > 0 \Rightarrow x(x-15) > 0 \Rightarrow x < 0 \text{ یا } x > 15$$

(دقت کنید که مبنای لگاریتم برابر ۱۰ است.)

حالا با کمک تعریف، دامنه  $f \circ g$  را محاسبه می‌کنیم:

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g, g(x) \in D_f\}$$

$$= \{x < 0 \text{ یا } x > 15, \log(x^2 - 15x) \leq 2\} \quad (*)$$

برای حل نامعادله  $\log(x^2 - 15x) \leq 2$  داریم:

$$x^2 - 15x \leq 10^2 \Rightarrow x^2 - 15x - 100 \leq 0$$

$$\Rightarrow (x-20)(x+5) \leq 0 \Rightarrow -5 \leq x \leq 20$$

$$D_{f \circ g} = \{x < 0 \text{ یا } x > 15, -5 \leq x \leq 20\} \quad \text{داریم: } (*)$$

اشتراک  $\rightarrow D_{f \circ g} = [-5, 0) \cup (15, 20]$

راه دوم: می‌توانیم ابتدا تابع  $f \circ g$  را تشکیل دهیم و بعد دامنه  $f \circ g$  را بیابیم:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\log(x^2 - 15x)) = \sqrt{2 - \log(x^2 - 15x)}$$

حالا دامنه این تابع را محاسبه می‌کنیم:

$$(1) \log(x^2 - 15x) : x^2 - 15x > 0 \Rightarrow x(x-15) > 0$$

$$\Rightarrow x < 0 \text{ یا } x > 15$$

$$(2) \sqrt{2 - \log(x^2 - 15x)} : 2 - \log(x^2 - 15x) \geq 0$$

$$\Rightarrow \log(x^2 - 15x) \leq 2 \Rightarrow x^2 - 15x \leq 100 \Rightarrow -5 \leq x \leq 20$$

با اشتراک (۱) و (۲) دامنه  $f$  برابر  $[-5, 0) \cup (15, 20]$  خواهد بود.

راه سوم: می‌توانید از عددگذاری هم استفاده کنید.

۱۰۴۱- گزینه ۱ دامنه تابع  $g$  برابر  $\mathbb{R}$  است. برای محاسبه دامنه  $f$  هم باید

عبارت زیر رادیکال را بزرگ‌تر از صفر قرار دهیم (به خاطر این که تو مفرقه مساوی

$$-x^2 + x + 2 > 0 \xrightarrow{\times(-1)} x^2 - x - 2 < 0 \quad \text{صفر نمی‌داریم}$$

$$\Rightarrow (x-2)(x+1) < 0 \Rightarrow -1 < x < 2$$

پس طبق تعریف، دامنه تابع  $f \circ g$  برابر است با:

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g, g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R}, -1 < \left(\frac{1}{4}\right)^x < 2\}$$

تابع نمایی  $y = a^x$  همواره مثبت است؛ پس نامعادله  $-1 < \left(\frac{1}{4}\right)^x < 2$  همواره

برقرار است. برای حل نامعادله  $\left(\frac{1}{4}\right)^x < 2$  به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\left(\frac{1}{4}\right)^x < 2 \Rightarrow (2^{-2})^x < 2 \Rightarrow 2^{-2x} < 2^1 \Rightarrow -2x < 1$$

$$\xrightarrow{\times(-1)} 2x > -1 \Rightarrow x > -\frac{1}{2}$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R}, x > -\frac{1}{2}\} = \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

پس:



۱۰۴۶- گزینه ۴ راه اول: ابتدا دامنه تابع fog را می‌یابیم.

(دامنه f برابر  $\mathbb{R}$  و دامنه g:  $x \geq 1$  است.)

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

$$D_{fog} = \{x \geq 1, \sqrt{x-1} \in \mathbb{R}\} = [1, +\infty)$$

همواره برقرار

حالا تابع fog را تشکیل می‌دهیم:

$$f(g(x)) = f(\sqrt{x-1}) = (\sqrt{x-1})^2 + 1$$

$$\Rightarrow f(g(x)) = x - 1 + 1 \Rightarrow f(g(x)) = x$$

با توجه به این که  $x \geq 1$  است؛ پس  $(fog)(x) \geq 1$  و در نتیجه برد تابع fog برابر  $[1, +\infty)$  است.

راه دوم: برد تابع g را می‌یابیم:

$$g(x) = \sqrt{x-1} \geq 0 \Rightarrow g \text{ برد} = [0, +\infty)$$

این برد برای تابع f در حکم دامنه است. پس برد تابع  $f(x) = x^2 + 1$  با شرط  $x \geq 0$  می‌یابیم:

$$x \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 1 \geq 1$$

برد تابع fog برابر  $[1, +\infty)$  است.

۱۰۴۷- گزینه ۳ می‌دانیم:

$$f(x) = [x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

پس تابع gof را تشکیل می‌دهیم. برای این کار با توجه به تساوی بالا و ضابطه g خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x \in \mathbb{Z} : g(f(x)) = g(0) = 0^2 + 0 - 2 = -2 \\ \Rightarrow g(f(x)) = -2 \quad \checkmark \text{ (به ازای } x \in \mathbb{Z} \text{ برقرار است)} \\ x \notin \mathbb{Z} : g(f(x)) = g(-1) = (-1)^2 + (-1) - 2 = -2 \\ \Rightarrow g(f(x)) = -2 \quad \checkmark \text{ (به ازای } x \notin \mathbb{Z} \text{ برقرار است)} \end{cases}$$

این که کلاً برقرار بود؛ پس تساوی به ازای هر  $x \in \mathbb{R}$  برقرار است.

۱۰۴۸- گزینه ۱ می‌دانیم حدود تغییرات تابع  $f(x) = x - [x]$  بازه  $(0, 1)$  است.

پس برای محاسبه برد تابع gof کافی است برد تابع  $g(x) = \frac{1-x}{x}$  را در فاصله  $(0, 1)$  حساب کنیم. در نتیجه ابتدا تابع g را با کمک تفکیک

کسر، ساده و سپس حدود آن را محاسبه می‌کنیم.

$$g(x) = \frac{1-x}{x} = \frac{1}{x} - 1$$

$$x \in (0, 1) \Rightarrow 0 < x < 1 \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{1}{x} > 1$$

$$\xrightarrow{-1} \frac{1}{x} - 1 > 0 \Rightarrow g(x) > 0$$

پس برد تابع gof فاصله  $(0, +\infty)$  است.

توجه کنید که چون  $x < 1$  و  $x$  نامنفی است؛ پس  $\frac{1}{x} > 1$ .

۱۰۴۹- گزینه ۱ اول برد تابع g را می‌یابیم:

$$\sqrt{x-1} \geq 0 \Rightarrow 2 + \sqrt{x-1} \geq 2 \Rightarrow g(x) \geq 2$$

این برد برای تابع f در تابع fog در حکم دامنه تابع است.

یعنی برای محاسبه برد fog کافی است برد تابع  $f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2}$  را به

ازای  $x \geq 2$  (برگرفته از برد g) محاسبه کنیم. برای این کار باید از تفکیک کسر کمک بگیریم و f را ساده‌تر کنیم:

$$f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2} = \frac{x^2-1+2}{1-x^2} = \frac{x^2-1}{1-x^2} + \frac{2}{1-x^2}$$

$$= \frac{-(1-x^2)}{1-x^2} + \frac{2}{1-x^2} = -1 + \frac{2}{1-x^2}$$

حالا از شرط  $x \geq 2$  کمک می‌گیریم و از مخرج شروع می‌کنیم و تابع را می‌سازیم:

$$x \geq 2 \Rightarrow x^2 \geq 4 \Rightarrow -x^2 \leq -4 \Rightarrow 1-x^2 \leq -3$$

حالا باید طرفین را معکوس کنیم. فقط دقت کنید که چون  $1-x^2 \leq -3$  و در نتیجه منفی است، پس معکوس آن هم منفی است. در نتیجه باید شرط کوچک‌تر از صفر بودن آن را خودمان اضافه کنیم:

$$1-x^2 \leq -3 \Rightarrow 0 > \frac{1}{1-x^2} \geq -\frac{1}{3} \xrightarrow{\times 2} 0 > \frac{2}{1-x^2} \geq -\frac{2}{3}$$

$$\xrightarrow{-1} -1 > -1 + \frac{2}{1-x^2} \geq -\frac{5}{3} \Rightarrow \text{برد fog} = [-\frac{5}{3}, -1)$$

۱۰۵۰- گزینه ۳ با کمک ضابطه f تابع g را تشکیل می‌دهیم:

$$g(x) = f(2x-3) - 2f(x) = ((2x-3) - [2x-3]) - 2(x - [x])$$

$$= \cancel{2x} - 3 - ((\cancel{2x}) - 3) - \cancel{2x} + 2[x]$$

$$= -\cancel{2x} - [2x] + \cancel{2x} + 2[x] = 2[x] - [2x]$$

$$[x+y] = \begin{cases} [x]+[y] \\ \text{یا} \\ [x]+[y]+1 \end{cases} \quad \text{در بخش جزء صحیح گفتیم که:}$$

$$[2x] = [x+x] = \begin{cases} [x]+[x] = 2[x] \\ [x]+[x]+1 = 2[x]+1 \end{cases} \quad \text{در نتیجه:}$$

پس مجموعه مقادیر  $[2x] - [2x]$  برابر است با:

$$[2x] - [2x] = \begin{cases} 2[x] - 2[x] = 0 \\ 2[x] - (2[x]+1) = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{برد } g = \{0, -1\} = \text{مجموعه مقادیر تابع g}$$

۱۰۵۱- گزینه ۴ f نزولی (-) و g صعودی (+) است، پس:

$$\begin{matrix} f & o & g \\ \downarrow & & \downarrow \\ (-) & (+) & \end{matrix} \xrightarrow{\text{حاصل ضرب}} (-) \Rightarrow \text{fog نزولی است}$$

۱۰۵۲- گزینه ۳ نمودار  $f(x^2)$ ، بالاتر از نمودار  $f(x+2)$  است، پس:

$$f(x^2) > f(x+2) \xrightarrow{f \text{ ابتدا نزولی}} x^2 < x+2$$

$$\Rightarrow x^2 - x - 2 < 0 \Rightarrow (x+1)(x-2) < 0 \Rightarrow -1 < x < 2$$

۱۰۵۳- گزینه ۴ باید نمودار  $y = |x+1| - 1$  را رسم کنیم. برای این کار

ابتدا نمودار  $y = |x|$  را رسم کرده و سپس نمودار را یک واحد به سمت چپ و یک واحد به پایین منتقل می‌کنیم:

۱۰۵۶- گزینۀ ۱ تابع  $y = \frac{2^x - 4}{2}$  را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$y = \frac{2^x - 4}{2} = 2^{x-1} - 2$$

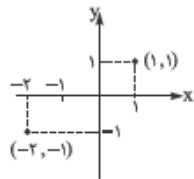
قرار است انتقالی روی نمودار تابع  $y = 2(2^x) = 2^{x+1}$  صورت گیرد تا به  $y = 2^{x-1} - 2$  برسیم. ابتدا نمودار  $y = 2^{x+1}$  را دو واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم، بنابراین:  $(x \rightarrow x-2)$

$$y = 2^{x+1} \xrightarrow{x \rightarrow x-2} y_1 = 2^{x-1}$$

اگر  $y_1$  را دو واحد به پایین منتقل کنیم به  $y = 2^{x-1} - 2$  می‌رسیم.

۱۰۵۷- گزینۀ ۲ چون نقطه  $(-2, -1)$  روی سهمی مطابق شکل قرار

دارد و سهمی از مبدأ می‌گذرد، پس معادله سهمی به صورت  $y = -\left(\frac{x}{3}\right)^2$  است. قرار است از نقطه  $(-2, -1)$  به نقطه  $(1, 1)$  برسیم. این نقاط را در دستگاه مختصات نشان می‌دهیم تا راحت‌تر به انتقال‌های عمودی و افقی برسیم:



کافی است از نقطه  $(-2, -1)$  ۳ واحد به راست و سپس ۲ واحد به بالا حرکت کنیم؛ بنابراین  $y = -\left(\frac{x}{3}\right)^2$  به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$y = -\left(\frac{x}{3}\right)^2 \xrightarrow[\text{۳ واحد به راست}]{x \rightarrow x-3} y = -\left(\frac{x-3}{3}\right)^2$$

$$\xrightarrow{\text{۲ واحد به بالا}} y = -\left(\frac{x-3}{3}\right)^2 + 2$$

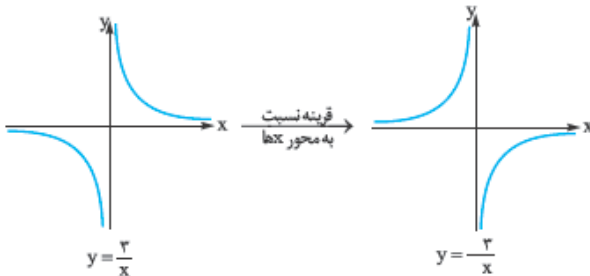
تابع بالا، محور  $y$ ها را در نقطه‌ای به عرض  $-\frac{1}{4}$  قطع می‌کند. ببینید:

$$x = 0 \Rightarrow y = -\left(\frac{0-3}{3}\right)^2 + 2 = -\frac{9}{9} + 2 = -\frac{1}{4}$$

۱۰۵۸- گزینۀ ۲ تابع  $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$  را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$f(x) = \frac{2x-1}{x+1} = \frac{2(x+1)-3}{x+1} = 2 - \frac{3}{x+1}$$

نمودار  $y = \frac{3}{x}$  را رسم می‌کنیم و سپس نسبت به محور  $x$ ها قرینه کرده تا  $y_1 = -\frac{3}{x}$  به دست آید:



نمودار را یک واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم تا  $-\frac{3}{x+1}$  حاصل شود، سپس

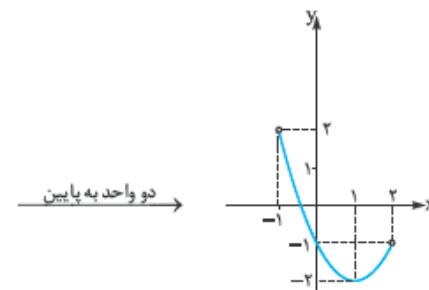
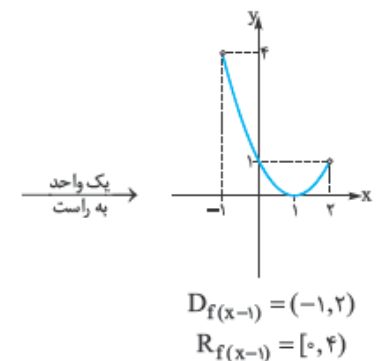
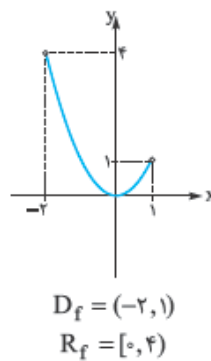
دو واحد به بالا منتقل می‌کنیم تا نمودار  $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$  به دست آید:



نمودار از ناحیه چهارم نمی‌گذرد.

۱۰۵۹- گزینۀ ۲ نمودار  $f(x) = x^2$  در دامنه  $(-2, 1)$  را رسم می‌کنیم

و سپس با انتقال یک واحد به راست و ۲ واحد به پایین به نمودار  $y = f(x-1) - 2$  می‌رسیم:



$$D_{f(x-1)-2} = (-1, 2) = A$$

$$R_{f(x-1)-2} = [-2, 2) = B$$

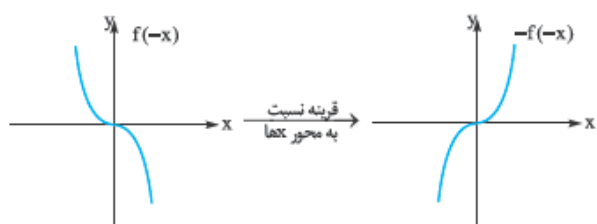
$$\Rightarrow B - A = [-2, 2) - (-1, 2) = [-2, -1]$$

۱۰۵۵- گزینۀ ۲ وقتی نمودار تابع  $y = [2x]$  را یک واحد به چپ منتقل

کنیم، تابع به صورت زیر تبدیل می‌شود:

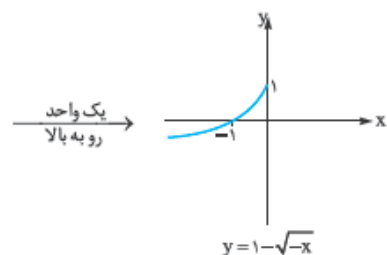
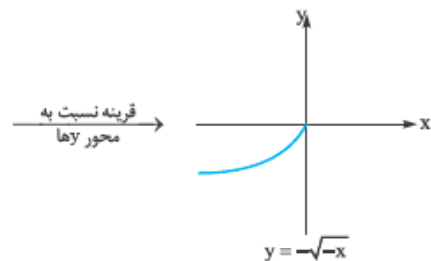
$$y = [2x] \xrightarrow[\text{یک واحد به چپ}]{x \rightarrow x+1} y_1 = [2(x+1)] = [2x+2] = [2x] + 2$$

برای این‌که تابع بالا دوباره به  $y = [2x]$  تبدیل شود باید  $y_1$  را دو واحد به پایین منتقل کنیم.



پس در نمودار ۴ تساوی  $f(x) = -f(-x)$  برقرار است.

۱۰۶۱- گزینه ۱ باید تغییرات زیر روی نمودار تابع  $y = \sqrt{x}$  انجام شود.



نقطه  $(-4, -1)$  در  $y = 1 - \sqrt{-x}$  صدق می‌کند.

۱۰۶۲- گزینه ۳ وقتی نمودار نسبت به محور  $x$  قرینه می‌شود، آن‌گاه:

$$f(x) \Rightarrow -f(x) \Rightarrow \sqrt{x} \Rightarrow -\sqrt{x}$$

حالا باید نمودار را دو واحد به طرف چپ منتقل کنیم:

(روی محور  $x$  جا به جا کنیم) پس باید:

$$x \Rightarrow x+2 \Rightarrow -\sqrt{x} \Rightarrow -\sqrt{x+2}$$

پس تا الان ضابطه تابع به صورت  $y = -\sqrt{x+2}$  تبدیل شد. در پایان هم

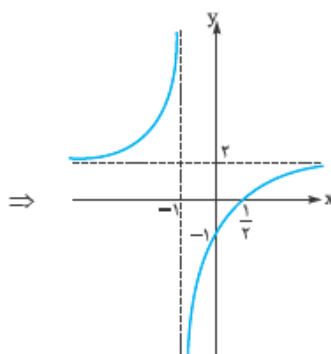
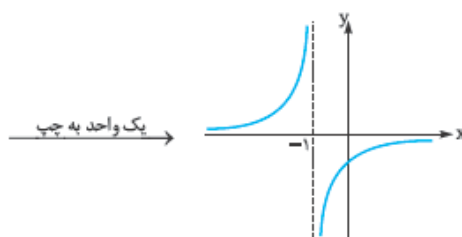
نمودار تابع را باید یک واحد به پایین منتقل کنیم: (کل ضابطه را منهای

$$\Rightarrow y = -\sqrt{x+2} - 1 \text{ (یک می‌کنیم.)}$$

۱۰۶۳- گزینه ۱ اگر نمودار را دو واحد به چپ ببریم  $(x \rightarrow x+2)$

$$f(x) = 1 + \sqrt{x-1} \text{ ضابطه تابع به صورت مقابل می‌شود:}$$

$$\text{دو واحد به چپ} \rightarrow y = 1 + \sqrt{x+2-1} \Rightarrow y = 1 + \sqrt{x+1}$$



نمودار تابع از هر ۴ ناحیه می‌گذرد.

۱۰۵۹- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که:

$$\sqrt{x^2 - 2x + 1} = \sqrt{(x-1)^2} = |x-1| \Rightarrow y = 1 + |x-1|$$

اگر نمودار، دو واحد به چپ منتقل شود، آن‌گاه:

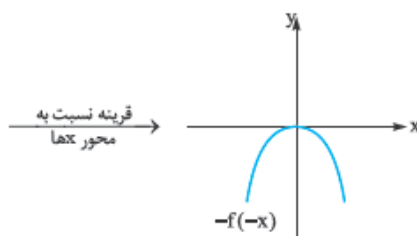
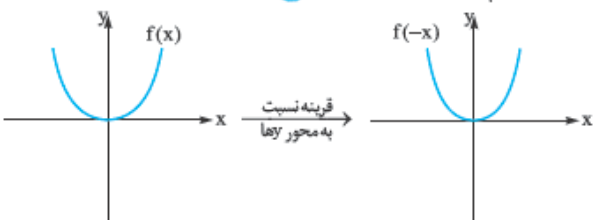
$$x \rightarrow x+2 \Rightarrow y = 1 + |x+2-1| \Rightarrow y = 1 + |x+1|$$

حالا اگر نمودار، یک واحد به پایین منتقل شود، ضابطه تابع برابر

$$y = |x+1| \text{ خواهد شد.}$$

۱۰۶۰- گزینه ۴ باید گزینه‌ها را بررسی کنیم. ما اینجا دو تا شو بررسی می‌کنیم

دو تاش رو هم فودتون بررسی کنید. در ۱ داریم:



پس ۱ نادرست است. حالا به ۴ نگاه کنید.



۲۳ اگر  $f$  را یک واحد به پایین منتقل کنیم، به  $g$  می‌رسیم:

$$g(x) = \frac{-2x+1}{-2x} - 1 = \frac{-1}{2x}$$

با داشتن  $f(x) = \frac{x+1}{x}$  و  $f \circ g(x) = \frac{-1}{2x}$  را می‌یابیم:

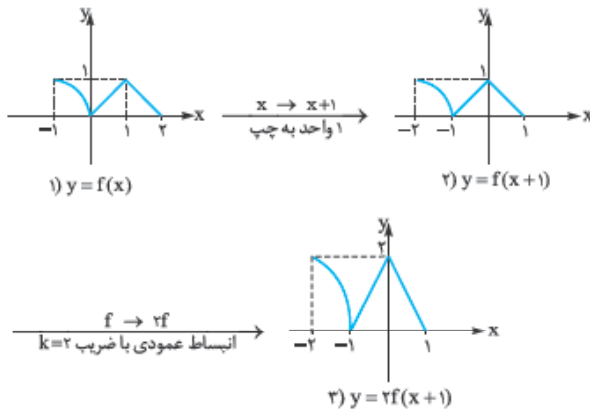
$$f \circ g(x) = f(g(x)) = \frac{g(x)+1}{g(x)} = \frac{\frac{-1}{2x}+1}{\frac{-1}{2x}} = \frac{-1+2x}{-2x} = 1-2x$$

حالا نقطه تلاقی خط  $y=3$  را با تابع  $f \circ g$  می‌یابیم:

$$\begin{cases} y=3 \\ f \circ g = 1-2x \end{cases} \Rightarrow 1-2x=3 \Rightarrow x=-1$$

۱۰۶۸ گزیده نمودار تابع  $y=f(x)$  را داریم. برای رسم نمودار تابع

$y=2f(x+1)$ ، مراحل زیر را انجام می‌دهیم:



نمودار تابع به دست آمده در بازه  $[-1,0]$  در ۴ آمده است.

۱۰۶۹ گزیده نمودار  $y = \log_2(2x-1)$  را ۲ واحد به راست منتقل

می‌کنیم، پس به جای  $x$ ،  $x-2$  می‌گذاریم:

$$\log_2(2x-1) \xrightarrow{x \rightarrow x-2} \log_2(2(x-2)-1) = \log_2(2x-5)$$

سپس با ضرب ۲ در راستای افقی،  $x$  را منبسط می‌کنیم:

$$\log_2(2x-5) \xrightarrow{x \rightarrow \frac{x}{2}} \log_2(x-5)$$

در نهایت یک واحد به پایین منتقل می‌شود که باید به ضابطهٔ اخیر، ۱- را

اضافه کنیم:  $\log_2(x-5) \xrightarrow{-1} -1 + \log_2(x-5)$

می‌خواهیم بدانیم تابع  $y = -1 + \log_2(x-5)$ ، محور  $x$ ها را با کدام طول قطع می‌کند، پس به جای  $y$ ، صفر را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\xrightarrow{y=0} -1 + \log_2(x-5) = 0$$

$$\Rightarrow \log_2(x-5) = 1 \Rightarrow x-5 = 2 \Rightarrow x = 7$$

۱۰۷۰ گزیده ابتدا تابع  $y = \sqrt{1-\cos^2 x}$  را به صورت ساده‌تر

$$y = \sqrt{1-\cos^2 x} = \sqrt{\sin^2 x} = |\sin x|$$

قرار است از نمودار  $y = |\sin(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{2})|$  نمودار،  $y = |\sin x|$  را رسم کنیم:

حالا برای این که به نمودار  $g(x) = 2 + \sqrt{x+1}$  برسیم، باید نمودار

$y = 1 + \sqrt{x+1}$  را یک واحد به بالا منتقل کنیم.

$$y = 1 + \sqrt{x+1} \xrightarrow{\text{یک واحد به بالا}} y = 2 + \sqrt{x+1}$$

پس برای رسم نمودار  $g$  با کمک نمودار  $f$ ، باید نمودار  $f$  را دو واحد به چپ و سپس یک واحد به بالا منتقل کنیم.

۱۰۶۴ گزیده ابتدا تابع را به فرم بهتری می‌نویسیم:

$$y = \sqrt{2x+12} = \sqrt{2(x+3)} = 2\sqrt{x+3}$$

حالا نمودار را در راستای عمودی با ضرب  $\frac{1}{2}$  منقبض می‌کنیم:

$$\xrightarrow{f \rightarrow \frac{1}{2}f} y = \sqrt{x+3}$$

بعد نسبت به محور  $x$ ها قرینه می‌کنیم:

$$\xrightarrow{f \rightarrow -f} y = -\sqrt{x+3}$$

و بالاخره یک واحد به بالا منتقل می‌کنیم:

$$y = 1 - \sqrt{x+3}$$

۱۰۶۵ گزیده با استفاده از مربع کامل کردن،  $g(x)$  را به صورت زیر

می‌نویسیم:

$$g(x) = -2(x^2 - 2x) = -2(x^2 - 2x + 1) + 2 = -2(x-1)^2 + 2$$

حالا از  $f(x) = x^2$  به  $g(x)$  می‌رسیم:

$$f(x) = x^2 \xrightarrow{\text{یک واحد به راست}} f_1(x) = (x-1)^2$$

$$\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } x} f_2(x) = 2(x-1)^2 \xrightarrow{\text{انقباض عمودی با ضرب ۲}} f_3(x) = -2(x-1)^2$$

$$f_3(x) = -2(x-1)^2 \xrightarrow{\text{۲ واحد به سمت بالا}} g(x) = -2(x-1)^2 + 2$$

۱۰۶۶ گزیده با استفاده از  $f(x) = \log_2(x+2)$ ، تابع  $f(2x)$  را

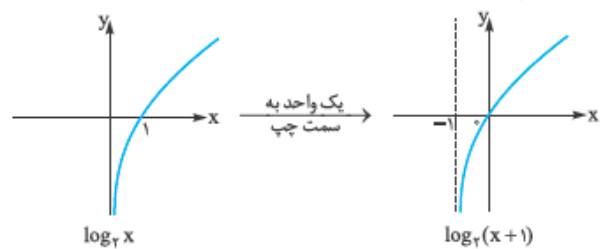
تشکیل می‌دهیم:  $f(2x) = \log_2(2x+2) = \log_2 2(x+1)$

$$= \log_2 2 + \log_2(x+1) = 1 + \log_2(x+1)$$

$$\xrightarrow{y=f(2x)+a} y = 1 + a + \log_2(x+1) (*)$$

با رسم نمودار  $y_1 = \log_2 x$  و انتقال آن یک واحد به سمت چپ، نمودار

$\log_2(x+1)$  را رسم می‌کنیم:



$\log_2(x+1)$  از ۲ ناحیه می‌گذرد؛ پس با توجه به (\*) باید  $1+a=0$

باشد یعنی  $a=-1$ .

۱۰۶۷ گزیده مرحله به مرحله پیش می‌رویم تا از  $f$  به  $g$  برسیم:

۱ نمودار  $f$  با ضرب  $\frac{1}{2}$  در راستای افقی منقبض شده است؛ پس در

نمودار  $f$ ،  $x \rightarrow 2x$  تبدیل شده است:

$$f(x) = \frac{x+1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 2x} f(2x) = \frac{2x+1}{2x}$$

۲  $f$  را نسبت به محور  $y$ ها قرینه می‌کنیم و این یعنی  $x \rightarrow -x$ :

$$f(2x) = \frac{2x+1}{2x} \xrightarrow{x \rightarrow -x} f(-2x) = \frac{-2x+1}{-2x}$$



**۱۰۷۲ - نکته ۲** از  $f(x)$  با انتقال‌های مناسب به  $y = \frac{1}{3}f(-x) + 1$  می‌رسیم: اول  $x$  را به  $-x$  تبدیل می‌کنیم؛ یعنی نمودار  $f$  نسبت به محور  $y$ ها قرینه می‌شود و نقطه  $(-۸, ۶)$  به  $(۸, ۶)$  تبدیل می‌شود و سپس در راستای عمودی با ضریب  $\frac{1}{3}$  منقبض می‌شود که عرض نقطه نصف می‌شود.

$f(-x) \xrightarrow{\frac{x}{3}} \frac{1}{3}f(-x) \Rightarrow (۸, ۶) \Rightarrow (۸, ۳)$   
در آخر کافی است نمودار یک واحد به بالا منتقل شود، که به  $y$ ها یک واحد اضافه می‌شود.  $(۸, ۳) \xrightarrow{\text{یک واحد به بالا}} (۸, ۴)$

**۱۰۷۳ - نکته ۱** نقطه  $(۲, -۱)$  روی نمودار  $g$  است؛ پس:  
 $g(x) = 1 - 2f(\frac{x}{3}) \Rightarrow g(2) = 1 - 2f(\frac{2}{3}) = -1$   
 $\Rightarrow g(2) = 1 - 2f(0) = -1$   
 $-2f(0) = -2 \Rightarrow f(0) = 1 \Rightarrow (0, 1) \in f$

**۱۰۷۴ - نکته ۴** نقطه  $(2x_0 - 1, 1 - y_0)$  روی نمودار  $g$  قرار دارد، پس  $g(2x_0 - 1) = 1 - y_0$ . همچنین  $(x_0, y_0)$  روی نمودار  $f$  قرار دارد و این یعنی  $f(x_0) = y_0$ . از این دو رابطه به تساوی زیر می‌رسیم:

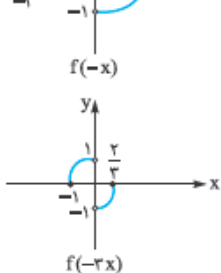
$g(2x_0 - 1) = 1 - y_0 \xrightarrow{y_0 = f(x_0)} g(2x_0 - 1) = 1 - f(x_0)$   
 $\Rightarrow f(x_0) = 1 - g(2x_0 - 1) \quad (*)$   
که به طور مستقیم در گزینه‌ها وجود ندارد. باید  $g(x)$  را پیدا کنیم. با فرض  $2x_0 - 1 = x \Rightarrow x_0 = \frac{x+1}{2}$  داریم:  
 $x_0 = \frac{x+1}{2}$  را در  $(*)$  جای‌گذاری می‌کنیم:  
 $f(\frac{x+1}{2}) = 1 - g(x) \Rightarrow g(x) = 1 - f(\frac{x+1}{2})$

**۱۰۷۶ - نکته ۳** دامنه تابع، بازه  $(-۲, ۱]$  است. برای تعیین دامنه تابع  $y$  کافی است نامعادله زیر را حل کنیم:  
 $-۲ < 1 - \frac{x}{3} \leq 1 \xrightarrow{+(-1)} -۳ < -\frac{x}{3} \leq 0 \xrightarrow{\times(-3)} 0 \leq x < 9$

**یادآوری:** اگر دامنه  $f$  بازه  $[a, b]$  و  $u$  تابعی چندجمله‌ای برحسب  $x$  باشد، دامنه  $y = \alpha f(u) + \beta$  از حل نامعادله مقابل به دست می‌آید:  $a \leq u \leq b$

**۱۰۷۷ - نکته ۳** با توجه به نمودار تابع  $f$ ، دامنه آن  $\{0\} - [-۲, ۳]$  است. بریم سراغ دامنه  $y$ :

نمودار  $y = f(-3x)$  را با کمک نمودار  $f$  رسم می‌کنیم: ابتدا به جای  $x$ ،  $-x$  را قرار می‌دهیم که نمودار نسبت به محور  $y$ ها قرینه می‌شود:



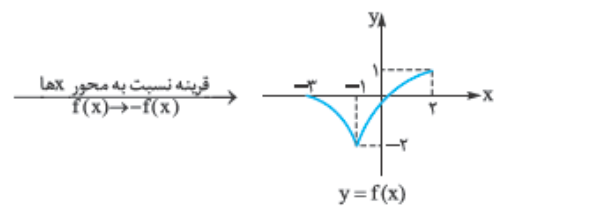
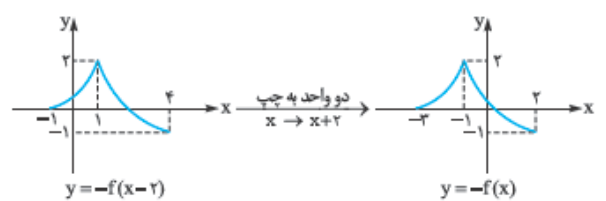
در این مرحله باید  $x \rightarrow 3x$  تبدیل شود که نمودار با ضریب  $\frac{1}{3}$  در راستای افقی منقبض می‌شود.

با توجه به نمودار،  $f(-3x)$  در بازه  $(-۱, ۰)$  مثبت است؛ پس دامنه  $y$  به صورت  $(a, b)$  است.

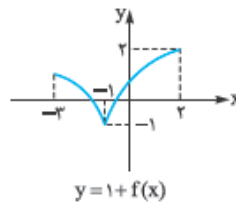
**۱** اول از همه باید  $x \rightarrow 2x$  تبدیل شود که انقباض افقی، با ضریب  $\frac{1}{3}$  را خواهیم داشت:

$|\sin(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{3})| \xrightarrow{x \rightarrow 2x} |\sin(\frac{\pi}{6} - x)| = |\sin(x - \frac{\pi}{6})|$   
**۲** باید  $x \rightarrow x + \frac{\pi}{6}$  تبدیل شود که به این معنی است، نمودار  $\frac{\pi}{6}$  به سمت چپ حرکت کند.  
**یادآوری:**  $|-x| = |x|$

**۱۰۷۱ - نکته ۱** ابتدا باید از روی نمودار  $y = -f(x-2)$  نمودار تابع  $y = f(x)$  را بیابیم.

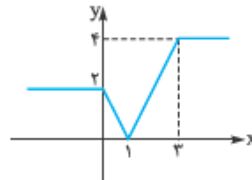


حالا برای این که نمودار  $y = 1 + f(x)$  را رسم کنیم کافی است نمودار  $y = f(x)$  را یک واحد به بالا منتقل کنیم.

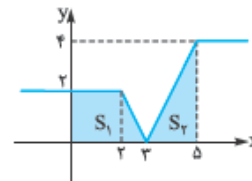


**۱۰۷۲ - نکته ۳** باید با انتقال‌هایی مناسب  $f(1-x)$  را به  $f(x-1)$  تبدیل کنیم:

ابتدا به جای  $x$ ،  $-x$  را جای‌گذاری می‌کنیم. در این حالت، نمودار نسبت به محور  $y$ ها قرینه می‌شود:



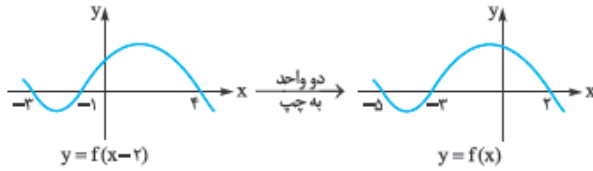
حالا کافی است به جای  $x$ ،  $x-2$  قرار دهیم، در این حالت نمودار  $2$  واحد به سمت راست منتقل می‌شود:



$$\left. \begin{aligned} S_1 &= \frac{(2+3) \times 2}{2} = 5 \\ S_2 &= \frac{2 \times 4}{2} = 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{مساحت کل} = S_1 + S_2 = 9$$

$$1081- \text{گزینه ۴} \quad \begin{cases} x \geq 0, f(x) \geq 0 \\ \text{یا} \\ x \leq 0, f(x) \leq 0 \end{cases} \quad (*)$$

اما ما الان نمودار  $y = f(x-2)$  را داریم. پس باید نمودار  $f$  را رسم کنیم. اگر نمودار  $y = f(x)$  را دو واحد به راست ببریم نمودار  $y = f(x-2)$  به دست می‌آید. حالا الان برعکس، نمودار  $f(x-2)$  را داریم. نمودار  $f(x)$  را لازم داریم. پس باید نمودار  $y = f(x-2)$  را **بنشینیم سرپاش!** بنابراین باید دو واحد به چپ منتقل کنیم:



بنابراین از رابطه (\*) داریم:

$$1 \quad x \geq 0, f(x) \geq 0 \xrightarrow{\text{نمودار}} \begin{array}{c} \text{Graph of } f(x) \text{ for } x \geq 0 \\ \Rightarrow x \in [0, 2] \end{array}$$

$$2 \quad x \leq 0, f(x) \leq 0 \xrightarrow{\text{نمودار}} \begin{array}{c} \text{Graph of } f(x) \text{ for } x \leq 0 \\ \Rightarrow x \in [-5, -2] \end{array}$$

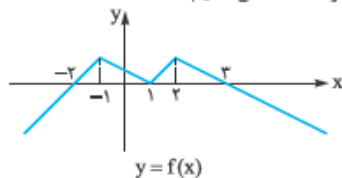
دامنه تابع برابر اجتماع دو بازه حاصل است، در نتیجه:

$$\text{دامنه} = [-5, -2] \cup [0, 2]$$

1082- **گزینه ۲** دامنه تابع  $y = \log_{(x+1)} f(x)$  از اشتراک جواب‌های نامعادلات زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ x+1 > 0 \Rightarrow x > -1 \\ x+1 \neq 1 \Rightarrow x \neq 0 \end{cases}$$

برای حل نامعادله اول باید از نمودار استفاده کنیم. از آنجا که نمودار  $y = f(x+1)$  را داریم، برای رسم نمودار  $y = f(x)$  کافی است نمودار  $y = f(x+1)$  را یک واحد به راست منتقل کنیم:



با توجه به شرط  $x > -1$ ، باید در این فاصله، محدودی از  $x$  را بیابیم که  $f(x) > 0$  است. با توجه به نمودار  $f$  داریم:

$$f(x) > 0 \Rightarrow x \in (-1, 2) - \{1\}$$

(در  $x = 1$ ،  $f(x) = 0$  می‌شود)

پس دامنه تابع، مجموعه  $\{1\} - (-1, 2)$  است که این مجموعه شامل عدد صحیح ۲ است.

1078- **گزینه ۴** با استفاده از دامنه تابع  $y = 3 - f(2x-3)$ . دامنه تابع  $f(x)$  را پیدا می‌کنیم:

$$-1 < 2x-3 < 1 \xrightarrow{-3} -2 < 2x < 2 \xrightarrow{-2} -5 < 2x-3 < -1$$

$$\Rightarrow D_f = [-5, -1)$$

برای این که از دامنه تابع  $f(x)$  به دامنه  $y = 2f(x-1)$  برسیم، باید  $x-1$  را در دامنه  $f$  قرار دهیم. (درس **تازه رو فوب بفرست**)

$$-5 \leq x-1 < -1 \xrightarrow{+1} -4 \leq x < 0 \Rightarrow D_y = [-4, 0)$$

1079- **گزینه ۳** راه اول: ابتدا تابع  $f(3-x)$  را تشکیل می‌دهیم:

$$f(3-x) = \sqrt{2(3-x) - (3-x)^2}$$

$$= \sqrt{6-2x-9+6x-x^2} = \sqrt{-x^2+4x-3}$$

حالا دامنه این تابع را محاسبه می‌کنیم:

$$-x^2+4x-3 \geq 0 \xrightarrow{\times(-)} x^2-4x+3 \leq 0$$

$$\Rightarrow (x-1)(x-3) \leq 0 \Rightarrow 1 \leq x \leq 3$$

راه دوم: ابتدا دامنه  $f(x)$  را می‌یابیم:

$$2x-x^2 \geq 0 \xrightarrow{\times(-)} x^2-2x \leq 0 \Rightarrow x(x-2) \leq 0$$

$$\Rightarrow 0 \leq x \leq 2 \quad (*)$$

حالا برای محاسبه دامنه  $f(3-x)$  کافی است در رابطه (\*) به جای  $x$ ،  $(3-x)$  قرار دهیم:

$$0 \leq 3-x \leq 2 \xrightarrow{-3} -3 \leq -x \leq -1 \xrightarrow{\times(-1)} 1 \leq x \leq 3$$

1080- **گزینه ۳** راه اول: ابتدا ضابطه  $f(-x)$  را می‌یابیم.

$$f(-x) = \sqrt{-x+| -x+2 |}$$

برای محاسبه دامنه این تابع باید عبارت زیر رادیکال را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار دهیم:

$$-x+| -x+2 | \geq 0 \xrightarrow{|u|=|-u|} -x+|x-2| \geq 0$$

با کمک تعیین علامت عبارت داخل قدرمطلق، نامعادله را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} x \geq 2: -x+x-2 \geq 0 \Rightarrow -2 \geq 0 \\ \text{یا} \\ x < 2: -x-x+2 \geq 0 \Rightarrow 2x \leq 2 \Rightarrow x \leq 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \emptyset \\ \text{یا} \xrightarrow{\text{اجتماع}} x \leq 1 \\ x \leq 1 \end{cases}$$

راه دوم: ابتدا دامنه تابع  $f$  را می‌یابیم:

$$x+|x+2| \geq 0 \Rightarrow |x+2| \geq -x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \geq -2: x+2 \geq -x \Rightarrow 2x \geq -2 \Rightarrow x \geq -1 \\ \text{یا} \\ x < -2: -x-2 \geq -x \Rightarrow -2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{x \geq -2} x \geq -1 \\ \text{یا} \xrightarrow{\text{اجتماع}} x \geq -1 \\ \emptyset \end{cases}$$

پس دامنه تابع  $f$  برابر  $x \geq -1$  است. حالا برای محاسبه دامنه  $y = f(-x)$  خواهیم داشت:

$$\text{در دامنه } f \text{ به جای } x, -x \text{ قرار می‌دهیم.} \quad -x \geq -1 \Rightarrow x \leq 1$$