

پاسخنامہ کنکور

آزمون اختصاصی
گروه آزمایشی علوم ریاضی و فنی

۱۷۵ دقیقہ

مدت پاسخ گویی

۱۳۵

تعداد سؤال

مدت پاسخ گویی	تا شماره	از شماره	تعداد سؤال	مواد امتحانی	ردیف
۸۵ دقیقہ	۵۵	۱	۵۵	ریاضیات	۱
۵۵ دقیقہ	۱۰۰	۵۶	۴۵	فیزیک	۲
۳۵ دقیقہ	۱۳۵	۱۰۱	۳۵	شیمی	۳





۶. گزینه [۳] اگر چند جمله‌ای $P(x)$ بر $x - c$ بخش پذیر باشد، آنگاه $P(c) = 0$ ؛ پس از اینجا:

$$\begin{aligned} x - 2 = 0 &\Rightarrow \begin{cases} P(2) = 0 \\ P(-1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8 + 4a + 2b + 1 = 0 \\ -1 + a - b + 1 = 0 \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} 4a + 2b = -9 \\ 2a - 2b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{3}{2} \\ b = -\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow a + b = -3 \end{aligned}$$

۷. گزینه [۴] می‌دانیم در معادله $ax^2 + bx + c = 0$ مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها از رابطه $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ و $\alpha\beta = \frac{c}{a}$ به دست می‌آیند؛ پس در معادله داده شده $\alpha + \beta = -\frac{-3}{1} = 3$ و $\alpha\beta = \frac{-2}{1} = -2$ حاصل ضرب ریشه‌های معادله خواسته شده را می‌یابیم:

$$\begin{aligned} S &= \left(\frac{2}{\alpha} - 1\right) + \left(\frac{2}{\beta} - 1\right) = \frac{2(\beta + \alpha)}{\alpha\beta} - 2 = \frac{6}{-2} - 2 = -5 \\ P &= \left(\frac{2}{\alpha} - 1\right)\left(\frac{2}{\beta} - 1\right) = \frac{4}{\alpha\beta} - \frac{2}{\alpha} - \frac{2}{\beta} + 1 \\ &= \frac{4 - 2(\alpha + \beta) + \alpha\beta}{\alpha\beta} = \frac{4 - 2 \times 3 - 2}{-2} = 2 \end{aligned}$$

معادله‌ای که مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های آن S و P باشد، به صورت $x^2 - Sx + P = 0$ است؛ پس معادله خواسته شده $x^2 - 5x + 2 = 0$ یا $x^2 + 5x + 2 = 0$ است.

۸. گزینه [۱] نسبت محیط به عرض مستطیل برابر است با:

$$\frac{2(L+W)}{W} = \frac{2L}{W} + 2$$

از رابطه داده شده باید $\frac{L}{W}$ را بیابیم. با فرض $\frac{L}{W} = x$ ، معادله را بازنویسی و حل می‌کنیم:

$$\frac{L}{W} = 1 + \frac{6W}{K} \Rightarrow x = 1 + \frac{6}{x} \Rightarrow x^2 = x + 6$$

$$\Rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow (x+2)(x-3) = 0 \Rightarrow x = 3 \quad (x > 0)$$

بنابراین $\frac{L}{W} = 3$ ؛ نسبت محیط به عرض مستطیل برابر $2 \times 3 + 2 = 8$ است.

۹. گزینه [۲] اگر دو خط با هم موازی باشند، شیب‌های آن‌ها با هم برابر است. شیب دو خط داده شده، به ترتیب $\frac{a}{4}$ و -3 است؛ بنابراین:

$$\frac{a}{4} = -3 \Rightarrow a = -12$$

در این صورت معادله دو خط به صورت زیر است:

$$\begin{cases} L_1: -6x - 2y = 2 \\ L_2: y + 3x = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L_1: 3x + y = -1 \\ L_2: 3x + y = b \end{cases}$$

می‌دانیم فاصله دو خط موازی، برابر $\frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ است؛ پس در اینجا:

$$\frac{|b - (-1)|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{10}} \Rightarrow |b + 1| = 3 \Rightarrow b + 1 = \pm 3$$

$$\Rightarrow b = -4 \quad \text{یا} \quad b = 2 \quad (b > 0)$$

۱. گزینه [۴] راه اول:

$$\begin{aligned} \sqrt{2}A &= \sqrt{2(\sqrt{5+2\sqrt{6}} - \sqrt{5-2\sqrt{6}})} \\ &= \sqrt{10+4\sqrt{6}} - \sqrt{10-4\sqrt{6}} \\ &= \sqrt{(\sqrt{6}+2)^2} - \sqrt{(\sqrt{6}-2)^2} \\ &= \sqrt{6}+2 - (\sqrt{6}-2) = 4 \end{aligned}$$

راه دوم: دو طرف فرض را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\begin{aligned} A^2 &= (\sqrt{5+2\sqrt{6}} - \sqrt{5-2\sqrt{6}})^2 \\ &= 5+2\sqrt{6} + 5-2\sqrt{6} - 2\sqrt{25-24} - 24 = 8 \\ \Rightarrow 2A^2 &= 16 \Rightarrow \sqrt{2}A = 4 \end{aligned}$$

۲. گزینه [۴] ابتدا دقت کنید قدرنسبت دنباله برابر ۵- است. حال تعداد جملات مثبت را پیدا می‌کنیم:

$$a_n = a_1 + (n-1)d = 74 + (n-1)(-5) = -5n + 79$$

$$a_n > 0 \Rightarrow -5n + 79 > 0 \Rightarrow n < \frac{79}{5} \Rightarrow n \leq 15$$

پس ۱۵ جمله مثبت داریم. حاصل جمع این ۱۵ جمله را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) = \frac{15}{2}(2 \times 74 + 14(-5)) \\ &= 15(74 - 35) = 585 \end{aligned}$$

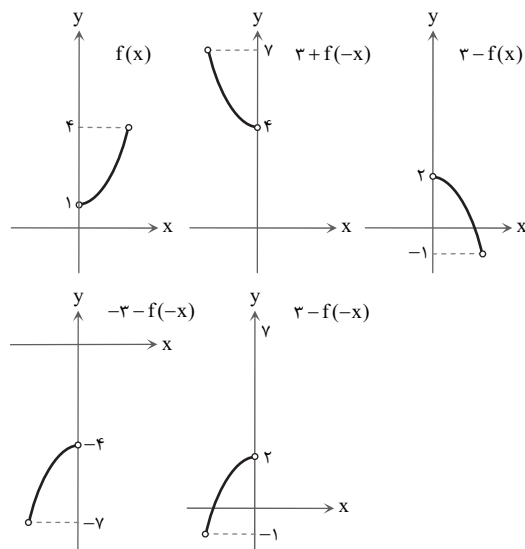
۳. گزینه [۲] مجموعه جواب نامعادله $ax + b \geq 0$ بازه $(-\infty, +\infty)$ است. پس اولاً $a > 0$ ثانیاً $x = 2$ ریشه معادله $ax + b = 0$ است. یعنی $2a + b = 0$ یا $b = -2a$ است. حال داریم:

$$\begin{aligned} -(bx + a) \geq 0 &\Rightarrow bx + a \leq 0 \Rightarrow -2ax + a \leq 0 \\ \Rightarrow a(-2x + 1) \leq 0 &\xrightarrow{a > 0} -2x + 1 \leq 0 \Rightarrow x \geq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

۴. گزینه [۲] $D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$

$$\begin{aligned} &= \{-2 \leq x \leq 2 \mid -\sqrt{3} \leq \sqrt{4-x^2} \leq \sqrt{3}\} \\ &= \{-2 \leq x \leq 2 \mid 4-x^2 \leq 3\} \\ &= \{-2 \leq x \leq 2 \mid 1 \leq x^2\} = [-2, -1] \cup [1, 2] \end{aligned}$$

۵. گزینه [۲] نمودار گزینه‌ها را رسم می‌کنیم:



دقت کنید برای رسم $f(-x)$ نمودار $f(x)$ را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم. برای رسم $-f(x)$ نمودار $f(x)$ را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم.

فرض کنید $b = 1$. به ازای $x = 0$ کمان دورن تابع سینوس برابر $-\frac{\pi}{6}$ است. با افزایش x از صفر، مقدار کمان و در نتیجه سینوس آن افزایش می‌یابد؛ اما از روی نمودار تابع در حال کاهش است؛ پس $a < 0$ است. از طرفی ماکزیمم تابع برابر ۶ است و می‌دانیم ماکزیمم تابع $a \sin(bx + c) + d$ برابر $|a| + d$ است؛ پس:

$$|a| + 4 = 6 \Rightarrow a = -2 \Rightarrow a - b = -2 - 1 = -3$$

اگر $b = -1$ باشد، مشابه بالا به دست می‌آید $a = 2$ و در نتیجه $a - b = 3$ ؛ اما دقت کنید که با توجه به شکل $6 < f(0) < 4$ ؛ پس باید:

$$4 < 4 + a(-\frac{1}{2}) < 6 \Rightarrow 0 < -\frac{1}{2}a < 2 \Rightarrow -4 < a < 0$$

بنابراین فقط حالت اول قابل قبول است و در نتیجه $a - b = -3$ است.

۱۵. گزینه [۲]

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} f(x)g(x) &= \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{x+1}{2x^2-x-1} \times \left(2 + \frac{a}{x}\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{(x+1)\left(2 + \frac{a}{x}\right)}{2x^2-x-1} \end{aligned}$$

حد مخرج صفر است. اگر حد بالا موجود باشد، باید حد صورت هم صفر باشد؛ یعنی:

$$\left(-\frac{1}{2} + 1\right)\left(2 - 2a\right) = 0 \Rightarrow a = 1$$

با جای گذاری در سؤال و ضرب صورت و مخرج کسر در x خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{(x+1)\left(2 + \frac{1}{x}\right)}{2x^2-x-1} &= \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{(x+1)(2x+1)}{x(x-1)(2x+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{x+1}{x(x-1)} = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2} \times \frac{-3}{2}} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

۱۶. گزینه [۲] این تابع در $x = 0$ پیوسته است، هرگاه حد راست، حد چپ و مقدار تابع در $x = 0$ با هم برابر باشند.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{x}\right)^2 = 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(x - a\left[\frac{2}{1+x}\right]\right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(x - a\left[\frac{2}{1^-}\right]\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(x - a[2^+]\right) = 0 - 2a \end{aligned}$$

$$f(0) = 0 - a[2] = -2a$$

پس باید:

$$\frac{1}{2} = -2a = -2a \Rightarrow a = -\frac{1}{4}$$

۱۰. گزینه [۳] جرم اولیه نمک $m_0 = 1 \text{ g}$ است. اگر جرم نمک پس از t دقیقه از رابطه $m(t) = m_0 a^t$ به دست آید، پس از یک دقیقه $2 \text{ g} = 20 \times 10^{-2} \text{ g}$ نمک در آب حل می‌شود و ۸ گرم نمک باقی می‌ماند؛ بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} 8 = 1 \cdot a^1 \Rightarrow a = \frac{4}{5} \Rightarrow m &= m_0 \left(\frac{4}{5}\right)^t \\ \text{می‌خواهیم بدانیم در کدام } t \text{ داریم } m &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5 = 1 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^t \Rightarrow \frac{1}{2} &= \left(\frac{4}{5}\right)^t \\ \Rightarrow t = \log_{\frac{4}{5}} \frac{1}{2} &= \frac{\log \frac{1}{2}}{\log \frac{4}{5}} = \frac{-\log 2}{\log 4 - \log 5} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow t = \frac{-\log 2}{3 \log 2 - 1} = \frac{-0.3}{3(0.3) - 1} = \frac{-0.3}{-0.1} = 3$$

۱۱. گزینه [۲] می‌دانیم $\log_c a - \log_c b = \log_c \frac{a}{b}$ ($a, b > 0$)؛ پس:

$$\begin{aligned} \log_7 (21 - 12x) - \log_7 (3 - x^2) &= 2 \Rightarrow \log_7 \frac{21 - 12x}{3 - x^2} = 2 \\ \Rightarrow \frac{21 - 12x}{3 - x^2} &= 7^2 \Rightarrow 21 - 12x = 12 - 4x^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 12x + 9 = 0 \Rightarrow (2x - 3)^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \quad \checkmark$$

در این صورت: $\log_7 6x = \log_7 9 = 2$

۱۲. گزینه [۱] می‌دانیم همواره $\cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) = -\sin \alpha$ ؛ پس:

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

حال رابطه داده شده را بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{-\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} &= 2 \Rightarrow \cot\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -2 \\ \Rightarrow \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

۱۳. گزینه [۲]

$$2 \cos^2 x - 9 \cos x = 5 \Rightarrow 2 \cos^2 x - 9 \cos x - 5 = 0$$

با تغییر متغیر $\cos x = t \in [-1, 1]$ معادله را بازنویسی و حل می‌کنیم:

$$2t^2 - 9t - 5 = 0 \Rightarrow (t - 5)(2t + 1) = 0 \Rightarrow t = 5, -\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} -1 \leq t \leq 1 \\ \Rightarrow t = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

بنابراین، باید ریشه‌های معادله $\cos x = -\frac{1}{2}$ را که به بازه $(0, 2\pi)$ تعلق دارد، بیابیم ریشه‌های معادله $\frac{4\pi}{3}$ و $\frac{2\pi}{3}$ و تفاضل آن‌ها $\frac{2\pi}{3}$ است.

۱۴. گزینه [۳] نمودار در بازه‌ای به طول 2π رسم شده است؛ ضمناً با توجه به شکل، روشن است که نمودار در یک دوره تناوب رسم شده است.

از آنجا که دوره تناوب $a \sin(bx + c) + d$ برابر $\frac{2\pi}{|b|}$ است، داریم:

$$\frac{2\pi}{|b|} = 2\pi \Rightarrow |b| = 1$$





پس در رابطه (*) داریم:

$$\Delta = 12 \times \frac{1}{4} + 12g'(2) \Rightarrow 12g'(2) = 2 \Rightarrow g'(2) = \frac{1}{6}$$

راه دوم: با توجه به رابطه $(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$ می توان نوشت:

$$g(x) = \frac{f(x)}{3x^2} \Rightarrow g'(x) = \frac{f'(x) \times 3x^2 - 6xf(x)}{9x^4}$$

$$\Rightarrow g'(2) = \frac{f'(2) \times 12 - 12f(2)}{9 \times 16}$$

$$\Rightarrow g'(2) = \frac{12(\Delta - 3)}{9 \times 16} = \frac{3 \times 8}{9 \times 16} = \frac{1}{6}$$

۲۰. گزینه [۴] با تغییر متغیر $-2h = \Delta x$ حد داده شده را بازنویسی می کنیم.

$$\text{حد} = 2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-2h) - f(1)}{-2h} = 2 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x}$$

با توجه به تعریف مشتق دوم، حد بالا همان $2f''(1)$ است. حال می توان نوشت:

$$f(x) = (x-1)^2(x+3)$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2(x-1)(x+3) + (x-1)^2 \times 1$$

$$= (x-1)[2(x+3) + (x-1)]$$

$$= (x-1)(3x+5) = 3x^2 + 2x - 5$$

$$\Rightarrow f''(x) = 6x + 2 \Rightarrow f''(1) = 8$$

پس حاصل حد برابر ۱۶ است.

نکته

اگر $f(x) = (x-1)^2 g(x)$ و g تابعی مشتق پذیر باشد، آنگاه:

$$f'(a) = 2g(a)$$

در اینجا: $f(x) = (x-1)^2(x+3) \Rightarrow f''(1) = 2(1+3) = 8$

۲۱. گزینه [۱] بازه داده شده بسته نیست و (احتمالاً) تابع نیز ناپیوسته است؛ پس بهتر است به کمک رسم، وضعیت اکسترم‌های مطلق تابع را بررسی کنیم. دقت کنید که:

$$2 < x \leq 4 \Rightarrow \pi < \frac{\pi}{4}x \leq 2\pi \Rightarrow -1 < \cos \frac{\pi}{4}x \leq 1$$

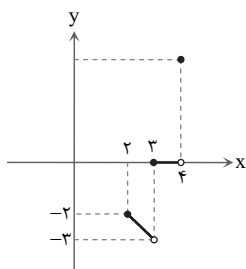
بنابراین باید بازه $[2, 4]$ را به گونه‌ای افراز کنیم که $[\cos \frac{\pi}{4}x]$ در هر کدام تنها یک عدد صحیح باشد:

$$2 < x < 3 \Rightarrow \pi < \frac{\pi}{4}x < \frac{3\pi}{4} \Rightarrow -1 < \cos \frac{\pi}{4}x < 0$$

$$\Rightarrow [\cos \frac{\pi}{4}x] = -1 \Rightarrow f(x) = x(-1) = -x$$

$$3 \leq x < 4 \Rightarrow \frac{3\pi}{4} \leq \frac{\pi}{4}x < 2\pi \Rightarrow 0 \leq \cos \frac{\pi}{4}x < 1$$

$$\Rightarrow [\cos \frac{\pi}{4}x] = 0 \Rightarrow f(x) = x(0) = 0$$



ضمناً $f(4) = 4 \times 1 = 4$ ؛ پس

نمودار تابع مطابق مقابل است:

ماکزیمم مطلق تابع برابر ۴ است؛ اما تابع مینیمم مطلق ندارد.

۱۷. گزینه [۴] می دانیم $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} \tan x = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} \tan x = +\infty$

می توان نوشت:

$$f \circ g(x) = \frac{2^{\tan x} + 3}{2^{\tan x} - 1} = \frac{(2^{\tan x} - 1) + 4}{2^{\tan x} - 1} = 1 + \frac{4}{2^{\tan x} - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} y = 1 + \frac{4}{2^{+\infty} - 1} = 1 + \frac{4}{+\infty} = 1 \quad \text{پس:}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} y = 1 + \frac{4}{2^{-\infty} - 1} = 1 + \frac{4}{-1} = 1 - 4 = -3$$

اختلاف دو حد به دست آمده برابر ۴ است.

راه دوم:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} f(g(x)) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} f(\tan x) = \lim_{t \rightarrow -\infty} f(t)$$

$$= \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{2^t + 3}{2^t - 1} = \frac{0 + 3}{0 - 1} = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} f(g(x)) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} f(\tan x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{2^t + 3}{2^t - 1} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{2^t}{2^t} = 1$$

۱۸. گزینه [۳] مطابق تعریف داریم:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{f(2-2h) - f(2+h)}{(2-2h) - (2+h)} \\ = \frac{f(2-2h) - f(2+h)}{-3h}$$

با توجه به ضابطه تابع داریم:

$$f(2-2h) = (2-2h)((2-2h)^2 - 4) = (2-2h)|-8h + 4h^2| \\ = \lambda(1-h)|h|h - 2|$$

$$f(2+h) = (2+h)((2+h)^2 - 4) = (2+h)|4h + h^2| \\ = (2+h)|h||4+h|$$

پس:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} m_{AB} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\lambda(1-h)h(2-h) - (2+h)h(4+h)}{-3h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\lambda(1-h)(2-h) - (2+h)(4+h)}{-3}$$

$$= \frac{\lambda \times 1 \times 2 - 2 \times 4}{-3} = -\frac{\lambda}{3}$$

توجه

آیا می توانید با افزودن و کاستن $f(2)$ در صورت کسر، حد مطلوب را به مشتقات چپ و راست تابع در $x = 2$ مرتبط کنید.

۱۹. گزینه [۴] راه اول: می دانیم $(fg)' = f'g + fg'$. در این سؤال

می توان نوشت:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = 3x^2 \Rightarrow f(x) = 3x^2 g(x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = (3x^2)'g(x) + 3x^2 g'(x) = 6xg(x) + 3x^2 g'(x)$$

با جای گذاری $x = 2$ داریم:

$$f'(2) = 12g(2) + 12g'(2) \quad (*)$$

$f'(2)$ معلوم است؛ پس باید $g(2)$ نیز معلوم باشد تا بتوانیم $g'(2)$ را

محاسبه کنیم. با جای گذاری $x = 2$ در رابطه داده شده داریم:

$$\frac{f(2)}{g(2)} = 12 \Rightarrow g(2) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

۲۵. گزینه [۳] مکان هندسی نقاطی که از A به فاصله ۲ هستند دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۲. و مکان هندسی نقاطی که از B به فاصله ۲/۵ هستند دایره‌ای به مرکز B و شعاع ۲/۵ است. برخورد این دو مکان نقاط مورد نظر این سؤال هستند. چون طول خط‌المرکزین این دو دایره یعنی AB برابر ۳ است پس این دو دایره در دو نقطه متقاطع هستند و مسئله دو جواب دارد.

۲۶. گزینه [۴] با دو بار استفاده از قضیه تالس می‌نویسیم:

$$\left. \begin{aligned} BC \parallel DE &\Rightarrow \frac{AC}{CE} = \frac{AB}{BD} \\ BE \parallel DF &\Rightarrow \frac{AE}{EF} = \frac{AB}{BD} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{AC}{CE} = \frac{AE}{EF} \Rightarrow \frac{4}{x} = \frac{4+x}{3}$$

$$\Rightarrow x^2 + 4x - 12 = 0 \Rightarrow (x+6)(x-2) = 0 \Rightarrow x = 2$$

۲۷. گزینه [۲] در نظر می‌گیریم $CH = x$ پس $BH = 14 - x$ بنا بر قضیه فیثاغورس داریم:

$$\left. \begin{aligned} \triangle AHC: AH^2 &= 13^2 - x^2 \\ \triangle AHB: AH^2 &= 15^2 - (14-x)^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 15^2 - (14-x)^2 = 13^2 - x^2$$

$$\Rightarrow 225 - 196 - x^2 + 28x = 169 - x^2 \Rightarrow 28x = 140 \Rightarrow x = 5$$

پس $AH = 12$ بنابراین $AH^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144$

در نتیجه:

$$S_{AHC} = \frac{1}{2} AH \times HC = \frac{1}{2} (12)(5) = 30$$

۲۸. گزینه [۱] می‌دانیم نسبت مساحت‌های دو شکل متشابه مساوی توان دوم نسبت محیط‌های آنها است در صورتی که $p = 12$ باشد داریم:

$$\frac{s}{s'} = \left(\frac{p}{p'}\right)^2 \Rightarrow \frac{4}{9} = \left(\frac{12}{p'}\right)^2 \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{12}{p'} \Rightarrow p' = 18$$

در حالت دوم $p' = 12$ انتخاب می‌کنیم.

$$\frac{s}{s'} = \left(\frac{p}{p'}\right)^2 \Rightarrow \frac{4}{9} = \left(\frac{p}{12}\right)^2 \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{p}{12} \Rightarrow p = 8$$

۲۹. گزینه [۲] ابتدا مساحت هر دو چندضلعی شبکه‌ای را به دست می‌آوریم:

$$b=9 \Rightarrow s = \frac{b}{2} + i - 1 = \frac{9}{2} + 13 - 1 = \frac{33}{2}$$

چندضلعی بزرگتر

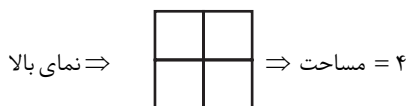
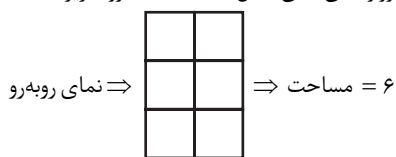
$$b=5 \Rightarrow s' = \frac{b}{2} + i - 1 = \frac{5}{2} + 3 - 1 = \frac{9}{2}$$

چندضلعی کوچکتر

پس مساحت قسمت ۷ رنگی برابر است با:

$$\frac{33}{2} - \frac{9}{2} = \frac{24}{2} = 12$$

۳۰. گزینه [۲] نمای روبه‌رو و نمای بالای شکل داده شده به صورت زیر است.



پس نسبت مساحت‌ها برابر $\frac{6}{4} = \frac{3}{2} = 1/5$ است.

۲۲. گزینه [۱] نقطه اکسترمم نسبی روی تابع است؛ پس $f'(1) = 2$ ؛ یعنی $a + b = 2$ ؛ ضمناً نقطه اکسترمم نسبی جزء نقاط بحرانی است؛ از طرفی تابع در دامنه‌اش مشتق‌پذیر است؛ بنابراین $f'(1) = 0$ ؛ می‌دانیم $f'(x) = a - \frac{b}{x^2}$ ؛ پس $a - b = 0$. در نتیجه:

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ a - b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = b = 1 \Rightarrow f(x) = x + \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$$

$x = \pm 1$ ریشه‌های $f'(x) = 0$ و طول نقاط بحرانی است؛ ضمناً تابع در $x = 0$ تعریف نشده است. با توجه به جدول تغییرات تابع $x = 1$ طول نقطه مینیمم نسبی است.

x	-1	0	1	
y'	+	-	-	
y	↗	↘	↗	
	max		min	

۲۳. گزینه [۲] y'' در نقطه عطف تغییر علامت می‌دهد. برای تعیین علامت y'' ، ابتدا y' را در ضابطه‌ای می‌نویسیم و سپس دو بار مشتق می‌گیریم. ریشه‌های قدرمطلق ۰ و ۲ است؛ لذا می‌توان نوشت:

$$y = \begin{cases} x(x^2 - 2x) = x^2 - 2x^2 & x \leq 0 \text{ یا } x \geq 2 \\ -x(x^2 - 2x) = -x^2 + 2x^2 & 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y' = \begin{cases} 2x^2 - 4x & x \leq 0 \text{ یا } x > 2 \\ -2x^2 + 4x & 0 \leq x < 2 \end{cases}$$

دقت کنید که مشتقات چپ و راست در $x = 0$ (برخلاف $x = 2$) با هم برابرند؛ لذا در ضابطه y' برای صفر، مساوی قرار دادیم.

$$y'' = \begin{cases} 6x - 4 & x < 0 \text{ یا } x > 2 \\ -6x + 4 & 0 < x < 2 \end{cases}$$

$x = \frac{2}{3}$ ریشه $y'' = 0$ است. ضمناً y'' در $0, 2$ تغییر ضابطه می‌دهد؛ پس جدول تعیین علامت y'' مطابق زیر است:

x	0	2/3	2
y''	-	+	-
y	∩	∪	∩

تغیر نمودار در نقاط $0, \frac{2}{3}, 2$ ؛ $x = 0$ تغییر می‌کند؛ اما تابع در $x = 2$ مشتق ناپذیر و در دو نقطه دیگر مشتق‌پذیر (و دارای مماس) است؛ پس $x = 0, \frac{2}{3}$ طول نقاط عطف تابع است.

توجه

$x = 2$ ریشه ساده قدرمطلق است در این نقطه مشتقات چپ و راست دو عدد حقیقی متمایزند. $x = 2$ نقطه گوشه‌ای نمودار تابع است.

۲۴. گزینه [۱] نمودار از نقطه $(0, -5)$ می‌گذرد؛ پس $f(0) = c = -5$ ؛ ضمناً نمودار تابع در نقاط $-2, 0$ مماس افقی دارد؛ پس این دو نقطه بحرانی تابع اند و در نتیجه مشتق در آن‌ها صفر است؛ پس:

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \Rightarrow \begin{cases} f'(0) = b = 0 \\ f'(-2) = 12 - 4a + b = 0 \end{cases}$$

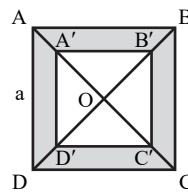
$$\Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = x^2 + 3x^2 - 5$$

پس ضابطه تابع به صورت $f(x) = x^2 + 3x^2 - 5$ است و داریم $f(1) = -1$





۳۱. گزینه [۴] فرض کنیم مربع $A'B'C'D'$ مجانس مربع $ABCD$ به مرکز O با نسبت $\frac{2}{3}$ باشد. در این صورت داریم:



$$OA' = \frac{2}{3}OA = \frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right) = \frac{\sqrt{2}}{3}a \Rightarrow A'C' = \frac{2\sqrt{2}}{3}a$$

از طرف دیگر بنا بر فرض داریم:

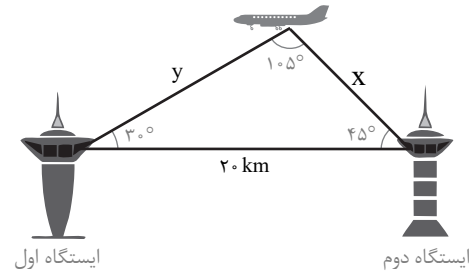
$$\frac{1}{2}AC^2 - \frac{1}{2}A'C'^2 = 5 \Rightarrow AC^2 - A'C'^2 = 10$$

$$\Rightarrow (a\sqrt{2})^2 - \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}a\right)^2 = 10 \Rightarrow 2a^2 - \frac{8a^2}{9} = 10$$

$$\Rightarrow \frac{10a^2}{9} = 10 \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$$

پس محیط مربع اولیه برابر $4 \times 3 = 12$ است.

۳۲. گزینه [۱] بنا بر فرض سؤال شکل زیر را خواهیم داشت.



با استفاده از قضیه سینوس‌ها داریم:

$$\frac{x}{\sin 30^\circ} = \frac{20}{\sin 105^\circ} \Rightarrow \frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{20}{\frac{24}{25}} \Rightarrow x = \frac{125}{12}$$

$$\frac{y}{\sin 45^\circ} = \frac{20}{\sin 105^\circ} \Rightarrow \frac{y}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{20}{\frac{24}{25}} \Rightarrow y = \frac{125\sqrt{2}}{12}$$

$$\text{بنابراین } x + y = \frac{125}{12}(\sqrt{2} + 1)$$

۳۳. گزینه [۱] در ماتریس قطری دایره‌های بالا و پایین قطر اصلی صفر هستند. داریم:

$$A \times B = \begin{bmatrix} 4 & a \\ b & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+3a & -8+2a \\ b-3 & -2b-2 \end{bmatrix}$$

چون AB قطری است نتیجه می‌گیریم:

$$-8+2a=0 \Rightarrow a=4, \quad b-3=0 \Rightarrow b=3$$

$$\text{پس } 2a-b=5$$

۳۴. گزینه [۴] با توجه به تعریف درایه‌های A داریم:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 4 & 4 \\ 4 & 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

پس مجموع درایه‌های ماتریس A برابر ۵۳ است.

۳۵. گزینه [۳] از طرفین تساوی داده شده دترمینان می‌گیریم.

$$A = \begin{bmatrix} 5|A| & |A| \\ 5 & 4|A|^2 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 5|A| & |A| \\ 5 & 4|A|^2 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow |A| = 20|A|^2 - 5|A| \Rightarrow 20|A|^2 = 6|A|$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |A| = 0 \\ |A|^2 = \frac{6}{20} \Rightarrow |A| = \pm \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}} \end{cases}$$

پس $|A|^2 - 2$ مساوی -2 یا مساوی $2 - \frac{3\sqrt{3}}{10\sqrt{10}}$ است. که عدد -2 در گزینه‌ها وجود دارد.

۳۶. گزینه [۳] با توجه به ویژگی $|kA| = k^2|A|$ که A ماتریس 3×3 است. داریم:

$$| -|A|A | = (-|A|)^3 |A| = -|A|^4 = -5^4$$

۳۷. گزینه [۱] فرض کنیم معادله دایره محیطی به صورت $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ باشد.

$$A \in \text{دایره} \Rightarrow 1+1-a-b+c=0 \quad (1)$$

$$B \in \text{دایره} \Rightarrow 1+1+a+b+c=0 \quad (2)$$

$$C \in \text{دایره} \Rightarrow 1+9+a-3b+c=0 \quad (3)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow 2c = -4 \Rightarrow c = -2 \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} (2), (4) &\Rightarrow a+b=0 \\ (3), (4) &\Rightarrow a-3b=-8 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a=-2, \quad b=2$$

پس معادله دایره به صورت $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2 = 0$ است.

۳۸. گزینه [۴] معادله سهمی را به صورت استاندارد می‌نویسیم.

$$y = x^2 + 3x + 5 \Rightarrow x^2 + 3x = y - 5$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} = y - 5 \Rightarrow \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = y - \frac{11}{4}$$

پس دهانه این سهمی رو به بالا است و رأس آن $\left(-\frac{3}{2}, \frac{11}{4}\right)$ و $4a = 1$ است. معادله خط هادی این نوع سهمی به صورت زیر است:

$$y = -a + \beta \Rightarrow y = -\frac{1}{4} + \frac{11}{4} \Rightarrow y = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

۳۹. گزینه [۴] فرض کنیم θ زاویه بین دو بردار a و b باشد، داریم:

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \Rightarrow \cos \theta = \frac{2+1+0}{\sqrt{9}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = 45^\circ$$

پس زاویه بین این دو بردار برابر $\frac{\pi}{4}$ است.

۴۰. گزینه [۲] بردار عمود بر بردارهای a و b در راستای $\vec{a} \times \vec{b}$ قرار دارد.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -5 \end{vmatrix} = 13\vec{i} + \vec{j} - 5\vec{k}$$

و در بین گزینه‌ها بردار $(5, -1, -13)$ که برابر $-\vec{a} \times \vec{b}$ است می‌تواند درست باشد.

۴۱. گزینه [۱] الف) اگر $n = 3$ باشد $2^3 + 1 = 9$ است که عددی اول نیست، بنابراین ارزش گزاره «الف» نادرست است.

ب) گزاره «ب» به ازای $x = 3$ نادرست است.

ج) ۲ عددی اول نیست و هم‌چنین ۲ مربع کامل نیست و چون هر دو نادرست‌اند، ترکیب دوشرطی آن‌ها درست است.

د) گزاره سمت چپ به ازای $y = 3$ درست است. بنابراین این سور وجودی درست است و چون ترکیب فصلی داریم ارزش کل گزاره درست

است (۱۹۱۷ بر ۳ بخش پذیر بوده و اول نیست)

۴۷. گزینه ۲ در نمونه‌گیری سیستماتیک اندازه هر طبقه (فاصله بین دو نمونه متوالی) از رابطه $t = \frac{N}{n}$ به دست می‌آید (t تا t تا جلو می‌رویم) و اگر شماره اولین واحد انتخابی a باشد، شماره k امین واحد انتخابی از رابطه $t(k-1) + a$ به دست می‌آید. دنباله حسابی با قدرنسبت t و جمله اول a و تعداد طبقات با تعداد نمونه برابر است.

$$t = \frac{N}{n} = \frac{1365}{21} = 65$$

$$807 = 65(13-1) + 27 \Rightarrow \text{شماره ۱۳ امین واحد انتخابی}$$

۴۸. گزینه ۲

نکته

$$\frac{n(n+1)}{2} \text{ و } \frac{n^2(n+1)^2}{4} \text{ وقتی و فقط وقتی زوج هستند که } n$$

به یکی از فرم‌های $4k-1$ یا $4k$ باشد.

در بین اعداد داده شده اعداد زیر به این فرم هستند:

$$396, 398, 371, 372, 375, 376, \dots, 395, 396$$

$$\text{که تعداد آن‌ها برابر است با } (1 + \frac{396-396}{4}) \times 2 = 2 \text{ که } 16 \text{ است.}$$

نکته

برای پیدا کردن باقی‌مانده یک عدد چندرقمی بر ۴ کافی است باقی‌مانده دو رقم سمت راست آن عدد را بر ۴ بیاییم.

۴۹. گزینه ۴

$$\left. \begin{matrix} a|7m+6 \\ a|6m+5 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} a|42m+36 \\ a|42m+35 \end{matrix} \right\} \Rightarrow a|1 \Rightarrow a = \pm 1$$

بنابراین باقی‌مانده 8931 بر عدد a برابر صفر است.

$$423x \equiv 79 \Rightarrow 5x \equiv 2 \Rightarrow 5x \equiv 2+3 \times 11 \quad \text{گزینه ۲}$$

$$\Rightarrow x \equiv 7$$

$$8x \equiv 20 \Rightarrow 2x \equiv 5+3 \Rightarrow x \equiv 4$$

$$a-b = 7-4 = 3$$

نکته

$$a \equiv b \pmod{(m,c)} \iff a.c \equiv b.c \pmod{m} \text{ اگر } a.c \equiv b.c \pmod{m} \text{ آن‌گاه}$$

۵۱. گزینه ۴ اگر هریک از افراد را رأس و رابطه دست دادن هر دو نفر را یک یال بین آن‌ها در نظر بگیریم، طبق فرض، ۶ رأس از درجه ۲ خواهیم داشت. بنابراین درجه رأس هفتم باید زوج باشد، زیرا مجموع درجات رئوس گراف باید زوج باشد. در نتیجه گزینه «۴» درست است. گراف مربوطه به صورت شکل مقابل است.



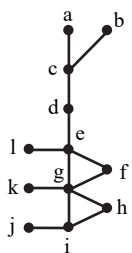
۵۲. گزینه ۲ بزرگترین مجموعه مینیمال:

$$A = \{a, b, d, l, k, j, f, h\}$$

کوچکترین مجموعه مینیمال:

$$B = \{c, e, g, i\}$$

$$8-4 = 4$$



۴۲. گزینه ۱

$$\begin{aligned} & (A' \cap B) \cup \underbrace{((B \cap A) - B') \cap (B \cup A)}_{(B \cap A) \cap B = B \cap A} \\ &= (A' \cap B) \cup \underbrace{((B \cap A) \cap (B \cup A))}_{B \cap A} \\ &= (A' \cap B) \cup (A \cap B) = B \cap (A' \cup A) = B \cap U = B \end{aligned}$$

۴۳. گزینه ۱ $P(\{x, y, z\}) = 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} P(\{x, y\}) = 1 - P(\{z\}) = \frac{2}{3} \Rightarrow P(\{z\}) = \frac{1}{3} \\ P(\{z, y\}) = 1 - P(\{x\}) = \frac{1}{3} \Rightarrow P(\{x\}) = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow P(\{x\}) = 1 - (\frac{1}{3} + \frac{1}{3}) = \frac{1}{3}$$

۴۴. گزینه ۳ برای این که هر عدد حداقل یک مرتبه ظاهر شود باید یکی از اعداد دقیقاً دو بار و بقیه حتماً یک بار ظاهر شوند:

عددی که باید دو بار ظاهر شود

$$p = \frac{6!}{6^7} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{6^7} = \frac{7 \times 5 \times 4 \times 3}{6^5} = \frac{35}{648}$$

۴۵. گزینه ۴

نکته

اگر A و B مستقل باشند آنگاه پیشامدهای A, A', B, B' نیز مستقل اند.

ولی $A-B$ و A مستقل نیستند، زیرا:

$$\begin{aligned} P(A \cap (A-B)) &= P[A-B] = P(A) \times P(B') \\ &\neq P(A)P(A-B) \end{aligned}$$

۴۶. گزینه ۲ ابتدا داده‌ها را مرتب می‌کنیم و میانگین و انحراف معیار و ضریب تغییرات را به دست می‌آوریم:

$$17, 20, 23, 26, 29, 32, 35$$

(الف)

نکته

اگر اعداد تشکیل دنباله حسابی بدهند و a اولین جمله و b آخرین جمله و تعداد جملات n و قدرنسبت d باشد، داریم:

$$\bar{x} = \frac{a+b}{2}, \delta^2 = \frac{n^2-1}{12} d^2$$

$$\bar{x}_{\text{الف}} = \frac{17+35}{2} = 26, \sigma_{\text{الف}}^2 = \frac{7^2-1}{12} \times 3^2 = 36$$

$$\bar{x}_{\text{ب}} = 22+30+22+36+17+30+25 = \frac{182}{7} = 26 \quad \text{ب)}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{ب}}^2 &= \frac{1}{7} (26-22)^2 + (26-30)^2 + (26-22)^2 + (26-36)^2 \\ &\quad + (26-17)^2 + (26-30)^2 + (26-25)^2 \\ &= \frac{1}{7} (4^2 + 4^2 + 4^2 + 10^2 + 9^2 + 4^2 + 1^2) \\ &= \frac{1}{7} (16+16+16+100+81+16+1) = \frac{246}{7} = 35\frac{1}{7} \end{aligned}$$

هر دو کارخانه میانگین یکسانی دارند و از ضریب تغییرات استفاده می‌کنیم.

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}$$

کارخانه‌ای که ضریب تغییرات کمتری دارد را باید انتخاب کرد و کارخانه «ب» بهتر است.





۵۳. گزینه ۳

$$\left. \begin{aligned} x_1^2 + x_2 + x_3 + x_4 &= 20 \\ x_1 &= 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x_2 + x_3 + x_4 = 12$$

از آنجایی که $x_2 > 3$ است ابتدا $x_2 = x_3 = 3$ قرار می‌دهیم و شرط

$$x_2 + x_3 + x_4 = 9 \Rightarrow x_4 = 0$$

از آنجا که جواب به صورت $\binom{n-1}{k-1} = \binom{9-1}{3-1}$ می‌باشد پس جواب عدد ۲۸ به دست می‌آید.

۵۴. گزینه ۲ در C تمام اعداد دو

رقمی که یکانشان ۱ تا ۵ و

دهگانشان نیز ۱ تا ۵ است آمده

است. یعنی درایه‌های C به صورت

مقابل است: ۵۱، ۵۲، ۵۳، ۵۴، ۵۵

$$? = 10 \times 5 + (1+2+3+4+5) + 20 \times 5 + (1+2+3+4+5)$$

$$+ \dots + 50 \times 5 + (1+2+3+4+5)$$

$$= 50(1+2+3+4+5) + 5(1+2+3+4+5)$$

$$= 55 \times \frac{5 \times 6}{2} = 825$$

۵۵. گزینه ۱ برای شمارش تعداد توابع پوشا از

 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ به $B = \{a, b, c\}$ از اصل شمول و عدم

شمول استفاده می‌کنیم:

$$n(a \cap b \cap c) = n(\text{کل}) - 3n(a')$$

$$= 3n(a' \cap b') - n(a' \cap b' \cap c')$$

$$= 3^6 - 3 \times 2^6 + 3 \times 1^6 - 0 = 729 - 192 + 3 = 540$$

فیزیک

۵۶. گزینه ۱

$$v \times 10^{-6} \text{ m} = \square \text{ nm} \Rightarrow \square = \frac{v \times 10^{-6} \text{ m}}{10^{-9} \text{ m}} = v \times 10^3$$

۵۷. گزینه ۱ در این سؤال ابعاد قوطی کبریت را با تخمین به دست

می‌آوریم. $(2 \times 5 \times 3)$ به طور تخمینی حجم قوطی کبریت 10 cm^3 است. که معادل $10 \times 10^{-6} \text{ m}^3$ است.

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow 1000 \times 10^6 = \frac{m}{10 \times 10^{-6}} \Rightarrow m = 1000 \text{ kg}$$

۵۸. گزینه ۲ با استفاده از قضیه پایستگی انرژی مکانیکی خواهیم

داشت: $E_1 = E_2$

$$\frac{1}{2} m v_1^2 = mgh + \frac{1}{2} m v_2^2 \Rightarrow \frac{1}{2} (10) (20)^2 = (10)(h) + \frac{1}{2} (20)^2$$

$$\Rightarrow 2200 - 200 = 10h \Rightarrow h = 200 \text{ m}$$

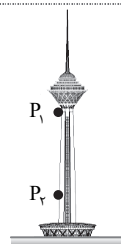
۵۹. گزینه ۲ اختلاف فشار دو نقطه چنین است:

$$\Delta P = P_2 - P_1$$

$$P_2 = P_1 + \rho gh$$

$$\Rightarrow \Delta P = \rho gh = (10)(10)(200)$$

$$= 2000 \text{ Pa}$$

۶۰. گزینه ۲ طبق قضیه کار و انرژی جنبشی $W_f = K_f - K_i$

$$\Rightarrow W_{\text{وزن}} + W_{\text{مقاومت هوا}} = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2$$

$$= \frac{1}{2} (10)(5^2 - 0^2) = 1000 \text{ J}$$

دقت کنید، کل کار انجام شده روی چتر باز ۱۰۰۰ ژول است. این کار شامل کار وزن و کار مقاومت هوا می‌شود.

$$W_{\text{mg}} = +(10)(10)(100) = +64 \times 10^4 \text{ J}$$

$$\Rightarrow W_{\text{مقاومت هوا}} = 10000 - 64 \times 10^4 = -639000 \text{ J}$$

۶۱. گزینه ۳ طبق معادله پیوستگی خواهیم داشت: $A_1 v_1 = A_2 v_2$

$$\Rightarrow (1)(0.15) = (10^{-2})(v_2) \Rightarrow v_2 = 15 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

۶۲. گزینه ۱ با کاهش تدریجی چگالی، فشار هوا نیز به صورت نمودار

شکل «۱» خواهد بود و تقریباً در ارتفاع ۱۵ km از سطح دریا فشار هوا

به ۱۰۰۰۰ پاسکال می‌رسد.

۶۳. گزینه ۱ نادرستی گزینه «۱»:

$$F = \frac{9}{5} \theta + 32 \Rightarrow \Delta F = \frac{9}{5} \Delta \theta$$

$$P = \frac{Q}{t} \Rightarrow Q = (60)(50) = 3000 \text{ J} \quad \text{گزینه ۱}$$

$$Q_{\text{کل}} = Q_{\text{آب}} + Q_{\text{گرمسنج}} \Rightarrow 3000 = \left(\frac{1}{10}\right)(4200)5 + mc\Delta\theta$$

$$\Rightarrow \frac{3000 - 2100}{5} = mc = 180 \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

۶۵. گزینه ۲ توجه داشته باشیم که فشارسنج‌ها، فشار پیمانه‌ای

(اختلاف فشار با P_0) را نشان می‌دهند. $P_1 = 14 + 1 = 15 \text{ atm}$

$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2} \Rightarrow \frac{(15)(12)}{280} = \frac{(P_2)(25)}{350} \Rightarrow P_2 = 9 \text{ atm}$$

اگرچه فشار مخزن به ۹ atm می‌رسد ولی فشارسنج عدد ۸ atm را نشان می‌دهد.

۶۶. گزینه ۳ چون شیب $P - T$ ثابت است، فرآیند هم حجم است

$$PV = nRT \Rightarrow P = \frac{nR}{V} T$$

دقت کنید که نمودار $P - T$ از مبدأ عبور می‌کند ولی $P - \theta$ از $(273^\circ \text{C}) - 273^\circ \text{C}$ عبور می‌کند. اگر حجم گاز سؤال می‌شد، از معادله حالت

استفاده می‌کردیم:

$$P_1 V_1 = nRT_1 \Rightarrow (2 \times 10^5)(V_1) = (1)(8)(27 + 273)$$

$$\Rightarrow V_1 = 12 \times 10^{-3} \text{ m}^3 = 12 \text{ L}$$

در اینجا برای محاسبه ΔU از قانون اول استفاده می‌کنیم:

$$\Delta U = Q + W$$

$$\Delta U = Q = nC_V \Delta T = n\left(\frac{3}{2}R\right)(\Delta\theta) = (1)\left(\frac{3}{2}\right)(8)(50) = 600 \text{ J}$$

۶۷. گزینه ۱

$$Q_H = Q_{AB} = \frac{C_P}{R} P \Delta V = \frac{5}{2} (4)(10^5)(2 \times 10^{-3}) = 2000 \text{ J}$$

$$Q_L = Q_{BC} = \frac{C_V}{R} V \Delta P = \frac{3}{2} (2)(10^{-3})(-3 \times 10^5) = -1350 \text{ J}$$

$$\eta = 1 - \frac{|Q_L|}{Q_H} = 1 - \frac{1350}{2000} = \frac{650}{2000} = \frac{13}{40}$$

$$\Rightarrow \frac{13}{40} \times 100 = 32.5\%$$

$$\frac{1}{R_{F,G}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{\frac{\Delta}{R}} = \frac{\Delta}{\Delta R} \Rightarrow R_{F,G} = \frac{\Delta}{\Delta} R$$

$$\Rightarrow \frac{R_{F,H}}{R_{F,G}} = \frac{\frac{R}{\Delta}}{\frac{\Delta}{\Delta}} = \frac{4}{5}$$

۷۳. گزینه ۴ ابتدا جریان کل مدار را به دست می آوریم:

$$I = \frac{\varepsilon}{R_s + r_1 + r_2} = \frac{24 - 6}{4 + 1 + 1} = 3 \text{ A}$$

اکنون از نقطه A تا B در جهت ساعتگرد (در خلاف جهت جریان مدار) حرکت می کنیم:

$$V_A + 6 + (3 \times 1) + (3 \times 4) = V_B = 0 \Rightarrow V_A = -21 \text{ V}$$

بنابراین ولت متر عدد ۲۱ ولت را نشان می دهد. اگر از A تا B در خلاف جهت عقربه های ساعت حرکت کنیم:

$$V_A + 24 - 3 \times 1 = V_B \Rightarrow V_A = -21 \text{ V}$$

۷۴. گزینه ۲ ابتدا اثر تغییر دما بر مقاومت ویژه را معلوم می کنیم:

$$\rho = \rho_0 [1 + \alpha(T - T_0)]$$

$$\Rightarrow \rho = 5 \times 10^{-8} [1 + 2 \times 10^{-3} (100)] = 6 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$$

$$R = \rho \frac{L}{A} = (6 \times 10^{-8}) \frac{(1)}{(3 \times 10^{-6})} = 20 \Omega$$

۷۵. گزینه ۳ درستی گزینه «۱»: در حضور میدان الکتریکی، سر مثبت

و منفی به طرف صفحه های مخالف خود قرار می گیرند.

درستی گزینه «۲»: دی الکتریک ها ممکن است قطبی (آب، NH_3 ، HCl) یا غیرقطبی باشند.

نادرستی گزینه «۳»: خازنی که بار Q دارد، بار در یک صفحه +Q و در یک صفحه دیگر -Q است.

درستی گزینه «۴»: ولتاژ تأثیری بر ظرفیت خازن ندارد:

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{\frac{k\varepsilon_0 A}{d}}{\frac{k\varepsilon_0 A}{d}} = \frac{d_1}{d_2} = \frac{1}{4}$$

۷۶. گزینه ۴ شرط صفر شدن میدان برآیند:

$$\left(\frac{\mu_0 NI}{l}\right)_P = \left(\frac{\mu_0 NI}{l}\right)_Q \Rightarrow N_P I_P = N_Q I_Q$$

$$(400)(2) = (200)I_Q \Rightarrow I_Q = I = 4 \text{ A}$$

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2R} = \frac{(4\pi \times 10^{-7})(4000)(20 \times 10^{-3})}{2(6/28 \times 10^{-2})} \quad \text{گزینه ۱}$$

$$= 8 \times 10^{-4} \text{ T} = 8 \text{ G}$$

۷۸. گزینه ۳ از لحظه ورود قاب به میدان تا ورود کامل یا از لحظه خروج

قاب تا خروج کامل بیشترین تغییرات شار انجام می شود و ε_{max} ایجاد می شود.

$$\bar{\varepsilon} = -\frac{N\Delta\phi}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow \bar{\varepsilon} = \frac{\Delta BA}{\Delta t} = -\frac{(10^{-1} - 0)(100 \times 10^{-4})}{\left(\frac{0.1}{2}\right)} = -0.2 \text{ V}$$

۶۸. گزینه ۲ در فرآیند همدمای تراکمی تغییر انرژی درونی صفر است $\Delta U = Q + W = 0$ و به دلیل تراکم $W > 0$ است، یعنی روی گاز کار انجام می شود.

$$0 = \Delta U = Q + W \Rightarrow Q < 0$$

بنابراین گاز گرما از دست می دهد. طبق رابطه $PV = nRT$ به دلیل ثابت بودن دما با کاهش حجم، فشار افزایش می یابد.

۶۹. گزینه ۲

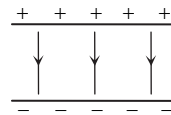
$$F_{12} = 9 \times 10^9 \frac{(2/5 \times 10^{-6})(4 \times 10^{-6})}{6^2} = 2/5 \times 10^{-3} \text{ N}$$

$$F_{23} = 9 \times 10^9 \frac{(10^{-6})(4 \times 10^{-6})}{2^2} = 9 \times 10^{-3} \text{ N}$$

$$F_{12} \leftarrow \bullet \rightarrow F_{13} \Rightarrow F_T = 6/5 \times 10^{-3} \text{ N}$$

دقت کنید این نیرو به صورت $(-6/5 \times 10^{-3})\vec{i}$ خواهد بود.

۷۰. گزینه ۳ با توجه به این که



نیروی گرانشی به طرف پایین است نیروی الکتریکی باید هم اندازه و به طرف بالا باشد، تا برآیند نیروها صفر شود.

$$\Rightarrow \begin{matrix} \uparrow F_E \\ \downarrow mg \end{matrix} \quad mg = Eq \Rightarrow (5 \times 10^{-3})(10) = (5 \times 10^6)(q)$$

$$\Rightarrow q = 10^{-4} \text{ C}$$

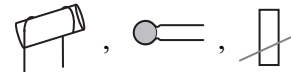
علامت بار باید منفی باشد تا توسط میدان، F_E رو به بالا وارد شود.

۷۱. گزینه ۳ نادرستی گزینه «۱»: مقاومت های ترکیبی از کربن، برخی

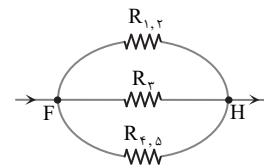
نیم رساناها و یا لایه های نازک فلزی ساخته می شود. موارد گزینه «۱» مربوط به مقاومت های پیچیده ای است.

نادرستی گزینه «۲»: رنوستا از انواع مشهور مقاومت پیچیده ای است.

نادرستی گزینه «۴»: ترمیستورها بستگی به مقاومتشان به دما با مقاومت های معمولی متفاوت است و آنها را با نمادهای زیر نشان می دهیم.



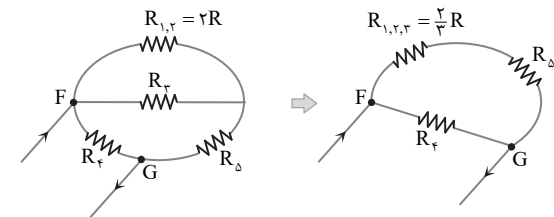
۷۲. گزینه ۲ R_2 و R_1 متوالی و R_4 و R_5 متوالی هستند.



$$R_{F,H} = ?$$

$$\Rightarrow \frac{1}{R_{F,H}} = \frac{1}{2R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{2R} = \frac{4}{2R} \Rightarrow R_{F,H} = \frac{R}{2}$$

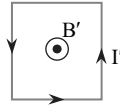
$$R_{F,G} = ?$$



$$\Rightarrow \frac{1}{R_{F,G}} = \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_{1,2,3,5}}$$



۷۹. گزینه [۲] طبق قانون لنز هنگام بستن کلید، میدان مغناطیسی درون سو در حلقه (۲) در حال افزایش خواهد بود. بنابراین باید جهت جریان القایی میدان مغناطیسی برون سو ایجاد کند.

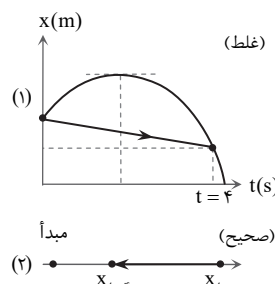


۸۰. گزینه [۲] در گزینه «۱» طبق رابطه $\bar{v} = \frac{\bar{d}}{\Delta t}$ به دلیل برداری بودن \bar{d} ، سرعت متوسط برداری است.

در گزینه «۲» در مدار حرکت ماه به دور زمین مسافت بزرگتر از جابه‌جایی است.

در گزینه «۳» طبق تعریف برداری جابه‌جایی چنین است.

در گزینه «۴» سرعت متحرک هم‌جهت با سوی حرکت است و به مکان جسم بستگی ندارد.



۸۱. گزینه [۴] توجه داشته باشید که بردار مکان، برداری است که از مبدأ مکان به مکان جسم وصل می‌شود. این بردار باید روی مسیر حرکت مشخص شود. برخی دانش‌آموزان به اشتباه روی نمودار مکان - زمان مطابق شکل (۱) بردار مکان را رسم می‌کنند.

۸۲. گزینه [۳] درستی گزینه «الف»:

$$x = m(t-a)(t-b) \Rightarrow x = -\Delta(t^2 - \Delta t)$$

$$x_{t=10} = -\Delta(100 - 10) = -100 \text{ m}$$

$$\Rightarrow \bar{S} = \frac{d}{t} = \frac{100 + 100}{10} = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

درستی گزینه «ب»: در بازه زمانی $4 < t < 10$ مقدار شیب نمودار یعنی سرعت در حال افزایش است.

درستی گزینه «پ»: برای اینکه متحرک متوقف شود جابه‌جایی و مسافت ۸۰ متر است.

نادرستی گزینه «ت»: در لحظه $t = 8$ متحرک از مبدأ عبور می‌کند تا این لحظه سرعت متوسط صفر است.

۸۳. گزینه [۴] درستی گزینه «۱»: لحظه توقف $t = 6$ است:

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{-10}{6} = -\frac{5}{3} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

درستی گزینه «۲»: سطح زیر نمودار $v-t$ تا لحظه توقف جابه‌جایی را نشان می‌دهد.

$$S = 30 + 40 + 20$$

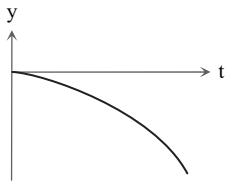
درستی گزینه «۳»: به دلیل اینکه مساحت زیر نمودار $v-t$ در کل مثبت است.

نادرستی گزینه «۴»: در بازه زمانی $4 < t < 7$ شتاب ثابت و مقدار آن $\bar{a} = \frac{-10 - 20}{7 - 4} = -10$ است.

۸۴. گزینه [۳] درستی گزینه «الف»:

$$\begin{aligned} \bar{v} &= \frac{v_{t=2} + v_{t=4}}{2} = \frac{(-gt + v_0) + (-gt + v_0)}{2} \\ &= \frac{(-20) + (-40)}{2} = -30 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{aligned}$$

نادرستی گزینه «ب»: در حرکت سقوط آزاد با گذشت زمان مقدار سرعت افزایش می‌یابد ولی شتاب ثابت است.



درستی گزینه «پ»: طبق $y = -\frac{1}{2}gt^2$ سهمی مقابل با $v_0 = 0$ خواهد بود.

درستی گزینه «ت»: چون مسیر مستقیم است و تغییر جهت نداریم.

۸۵. گزینه [۳] درستی گزینه «الف»: تمایل اجسام برای حفظ وضعیت (سکون یا حرکت) را لختی می‌نامیم.

نادرستی گزینه «ب»: واکنش وزن شخص، نیرویی است که شخص بر $\frac{(mg)'}{(mg)}$ زمین وارد می‌کند.

نادرستی گزینه «پ»: $\bar{F}_{\text{net}} = \frac{\Delta P}{\Delta t}$ آهنگ تغییر تکانه:

$$+ \downarrow mg - N = mg \Rightarrow N = 0 \quad \text{درستی گزینه «ت»:$$

$$mg - f_{\text{Air}} = ma \Rightarrow a = 0 \quad \text{درستی گزینه «ت»:$$



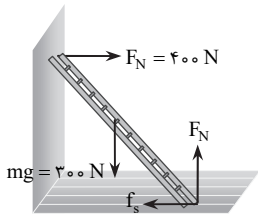
$$mg - f_{\text{Air}} = ma \Rightarrow a = g - \frac{f_{\text{Air}}}{m}$$

بنابراین شتاب هر دو گلوله از g کمتر است.

با توجه به هم‌جرم بودن گلوله‌ها، عامل مؤثر f_{Air} است.

با توجه به هم‌جرم بودن، گلوله توخالی B باید حجم بزرگتری داشته باشد، لذا مقاومت هوا بیشتر جلوی گلوله B را می‌گیرد. بنابراین شتاب گلوله A بیشتر است.

۸۷. گزینه [۴] شرط تعادل نردبان



این است که برآیند نیروها صفر باشد.

$$(F_{\text{net}})_x = 0 \Rightarrow 400 = f_s$$

$$(F_{\text{net}})_y = 0 \Rightarrow 300 = F_N$$

توجه داشته‌باشیم که نیروی سطح افقی که بر نردبان وارد می‌شود، برآیند نیروهای F_N و f_s است.

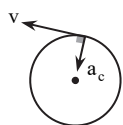
$$\sqrt{(f_s)^2 + (F_N)^2} = \sqrt{(300)^2 + (400)^2} = 500 \text{ N}$$

۸۸. گزینه [۲] درستی گزینه «۱»: شتاب مرکزگرا هم‌جهت با نیروی مرکزگراست و همواره تغییر می‌کند.

نادرستی گزینه «۲»: مقدار سرعت ثابت ولی جهت آن مماس بر دایره و متغیر است.

درستی گزینه «۳»: شتاب به طرف مرکز و سرعت

مماس بر مسیر است.



درستی گزینه «۴»:

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{r^2 \omega^2}{r} = r \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$$



۹۶. گزینه [۴] درستی گزینه «۱»: برای ایجاد پراش طول موج نور به کار رفته باید بزرگتر از پهنای مانع یا شکاف باشد.
درستی گزینه «۲»: وقتی موج فرودی روی پرده تلاقی سازنده انجام دهند نوارها (فریزهای) روشن ایجاد می‌شود.
درستی گزینه «۳»: برای تشکیل موج ایستاده بر هم‌نهی موج تابیده و بازتابیده الزامی است.
نادرستی گزینه «۴»: در موج ایستاده، شکم‌ها در اثر تلاقی سازنده بین قله‌ها و یا دره‌ها به‌وجود می‌آیند. بنابراین دامنه شکم دو برابر دامنه موج فرودی است.

۹۷. گزینه [۱]

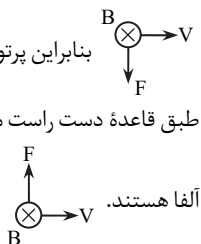
$$hf - W_0 = K_{\max} \Rightarrow \frac{hc}{\lambda} - \omega_0 = K_{\max}$$

$$\frac{1240}{248} - 4/5 = K_{\max} \Rightarrow K_{\max} = \frac{1}{2} eV = \frac{1}{2} m v_{\max}^2$$

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2K_{\max}}{m}}$$

$$\Rightarrow v_{\max} = \sqrt{\frac{(2)(1/2 \times 10^{-19})(1/2)}{(9.1 \times 10^{-31})}} = \sqrt{16 \times 10^{10}} = 4 \times 10^5 \frac{m}{s}$$

۹۸. گزینه [۲] پرتو گاما بدون بار است و در میدان مغناطیسی منحرف نمی‌شود. بنابراین پرتو B گاما است. پرتو β^- دارای بار منفی است (موردنظر است) و برخلاف قاعده دست راست منحرف می‌شود. بنابراین پرتو C، پرتو β است. پرتوهای آلفا مثبت هستند و طبق قاعده دست راست منحرف می‌شوند. بنابراین پرتوهای A از جنس



۹۹. گزینه [۱]

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{6^2} \right) = \frac{R}{12} \Rightarrow \lambda = \frac{12}{R}$$

توجه داشته باشید که اولین خط هر رشته دلتا خواه n' معادل $n = (n' + 1)$ است و برای سومین خط رشته براکت $n' = 3$ و $n = n' + 3 = 6$ قرار می‌گیرد.

۱۰۰. گزینه [۳] نادرستی گزینه «الف»: باید مربع سرعت نور مطرح شود
 $E = \Delta m c^2$

نادرستی گزینه «ب»: نفوذ ذره‌های آلفا کم است.
نادرستی گزینه «پ»:

$$N = \frac{N_0}{2^{\frac{t}{T}}} = \frac{N_0}{2^{\frac{4}{20}}} = \frac{N_0}{4}$$

هسته‌های باقی مانده

۸۹. گزینه [۴] نادرستی گزینه «۱»:

$$\frac{3T}{4} = 0.3 \Rightarrow T = 0.4 s \Rightarrow f = 2.5 \text{ Hz}$$

نادرستی گزینه «۲»:

$$x = A \cos(\omega t) \Rightarrow x = 5 \times 10^{-2} \cos\left(\frac{2\pi}{0.4} t\right)$$

نادرستی گزینه «۳»:

$$x_{T'} = 2.5 \times 10^{-2} = 5 \times 10^{-2} \cos \pi t' \Rightarrow t' = \frac{1}{15} s = \frac{T}{6}$$

$$a = -\omega^2 x \Rightarrow a = -(\frac{2\pi}{0.4})^2 (2.5 \times 10^{-2}) = -6.25 \frac{m}{s^2}$$

درستی گزینه «۴»:

$$E = \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} (200) \left(\frac{1}{10}\right)^2 = 1 J$$

گزینه [۲]

$$U = 250 mJ \Rightarrow E - U = 750 mJ = 0.75 J$$

۹۱. گزینه [۴]

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \Rightarrow g = \frac{4\pi^2 L}{T^2} \Rightarrow g = \frac{4(10)(1)}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{40}{4} = 10 \frac{m}{s^2}$$

۹۲. گزینه [۲] نادرستی گزینه «الف»: در موج عرضی فاصله دو قله مجاور یا دو دره مجاور طول موج است.
درستی گزینه «ب»: انرژی امواج مکانیکی مطابق رابطه زیر است:

$$E = 2\pi^2 m A^2 f^2$$

درستی گزینه «پ»: طبق قاعده دست عمود بر کف دست B و چهار انگشت E و انگشت شست جهت انتشار موج است.

نادرستی گزینه «ت»: بسامد نور قرمز $4 \times 10^{14} \text{ Hz}$ و نور بنفش $7.9 \times 10^{14} \text{ Hz}$ است. طبق $\lambda = \frac{v}{f}$ و $c = v = 3 \times 10^8 \frac{m}{s}$ خواهیم داشت: $\lambda_{\text{بنفش}} = 380 \text{ nm}$ و $\lambda_{\text{قرمز}} = 750 \text{ nm}$

۹۳. گزینه [۳] نادرستی گزینه «۱»: در هنگام انتشار صوت ذرات فقط در جای خود مرتعش می‌شوند.

نادرستی گزینه «۲»: اگرچه گوش انسان بسامدهای ۲۰ تا ۲۰۰۰۰ هرتز را می‌شنود ولی گوش انسان به بسامدهای ۲۰۰۰ تا ۵۰۰۰ هرتز حساس تر است.

$$\beta_2 - \beta_1 = \Delta\beta = 10 \log \frac{I_2}{I_1} - 10 \log \frac{I_1}{I_1}$$

درستی گزینه «۳»:

$$= 10 \log \frac{I_2}{I_1} = 10 \log 10^2 = 20$$

نادرستی گزینه «۴»: هرچه ماده متراکم‌تر باشد عموماً سرعت انتشار صوت در آن بیشتر می‌شود.

۹۴. گزینه [۴] تپ عرضی در برخورد با مانع به صورت وارونه بازمی‌تابد. توجه داشته باشید ملاک برای سطح ناهموار مقایسه ابعاد ناهمواری با طول موج تابیده شده است.

۹۵. گزینه [۲] بسامد موج بدون تغییر باقی می‌ماند. در اثر شکست پرتوها سرعت و طول موج تغییر می‌کند. سرعت موج در قسمت کم عمق نصف قسمت عمیق است بنابراین طبق رابطه $\lambda = \frac{v}{f}$ طول موج نیز نصف خواهد بود.

فاصله دو قله مجاور ۱۰ cm است پس طول موج اولیه ۱۰ cm خواهد بود. ولی در قسمت کم عمق طول موج ۵ cm است.





شیمی

۱۰۱. گزینه [۲] موارد الف و ب صحیح هستند.

$$\left. \begin{array}{l} e_x = e_y \\ n_x + p_x = n_y + p_y \\ \left. \begin{array}{l} e_x = p_x - b \\ e_y = p_y \end{array} \right\} \rightarrow p_x - b = p_y \end{array} \right\} \rightarrow n_x + p_x = n_y + (p_x - b)$$

$n_x = n_y - b$ در نتیجه گزینه (الف) صحیح است.

$p_x - b = p_y$ در نتیجه گزینه (ب) صحیح است.

با توجه به اینکه تعداد پروتون‌های X و Y با هم برابر نیست این دو عنصر، متفاوت هستند پس گزینه (ج) نادرست است. دلیلی برای اینکه این دو عنصر به یک دوره از جدول تعلق داشته باشند وجود ندارد.

۱۰۲. گزینه [۴]

$$\bar{M} = \frac{54/96 \times 74 + 58/96 \times 26}{100} \\ = \frac{54/96 \times 100 + 4 \times 26}{100} = \frac{5496 + 104}{100} = 56$$

۱۰۳. گزینه [۲]

الف) صحیح است.

$$\frac{4}{32} = \frac{x}{22400} \rightarrow x = 2800 \text{ mol}$$

ب) نادرست است.

$$\frac{V}{28} = \frac{x}{6.02 \times 10^{23}} \rightarrow x = 1.505 \times 10^{23} N_p \\ = 3/0 \times 10^{23} \text{ atom N}$$

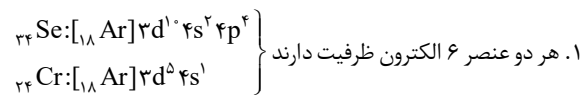
پ) صحیح است.

$$\frac{112}{22400} = \frac{x}{6.02 \times 10^{23}} \rightarrow x = 3/0 \times 10^{21} \text{ atom Ar}$$

ت) نادرست است.

$$\frac{0.46}{23} = \frac{x}{40} \rightarrow x = 0.8 \text{ g Ca}$$

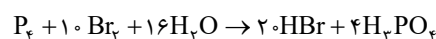
۱۰۴. گزینه [۳] عنصر ۳۴ جدول دوره‌ای سلنیم (Se) است که یک نافلز به حساب می‌آید. تحلیل سایر گزینه‌ها:



۲. ${}_{34}\text{Se}$ با دو عنصر شبه‌فلز ${}_{33}\text{As}$ و ${}_{32}\text{Ge}$ هم‌دوره است و با دو عنصر شبه‌فلز ${}_{52}\text{Te}$ و ${}_{84}\text{Po}$ هم‌گروه است و با ${}_{16}\text{S}$ (عنصر بالای آن در گروه شانزدهم جدول) تشابه خواص دارد.

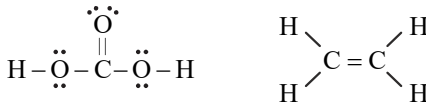
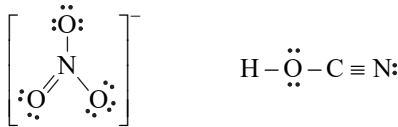
۴. عدد کوانتومی $l = 1$ مربوط به تراز فرعی p است. این عنصر دارای ترازهای $2p^6$ ، $3p^6$ و $4p^4$ در آرایش الکترونی خود است که جمعاً ۱۶ الکترون را شامل می‌شود که با شماره گروه این عنصر برابر است.

۱۰۵. گزینه [۲]



$$\frac{\text{مجموع ضرایب فرآورده‌ها}}{\text{مجموع ضرایب واکنش‌دهنده‌ها}} = \frac{24}{27} = \frac{8}{9}$$

۱۰۶. گزینه [۳]



۱۰۷. گزینه [۴] $2\text{KClO}_3(\text{s}) \rightarrow 2\text{KCl}(\text{s}) + 3\text{O}_2(\text{g})$

$$\frac{x}{2} = \frac{300}{3 \times 22400} \rightarrow x = 0.009 \text{ mol}$$

۱۰۸. گزینه [۳]

۱. آمونیوم فسفات: $(\text{NH}_4)_3\text{PO}_4$

۲. آهن (III) هیدروژن فسفات: $\text{Fe}_3(\text{HPO}_4)_2$

۳. آلومینیم نترات: $\text{Al}(\text{NO}_3)_3$

۴. پتاسیم پرمنگنات: KMnO_4

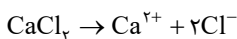
۵. باریم پراکسید: BaO_2

۶. پتاسیم پرمنگنات: KMnO_4

۷. کلسیم فسفات: $\text{Ca}_3(\text{PO}_4)_2$

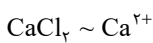
۸. آلومینیم نیتريد: AlN

۱۰۹. گزینه [۲] $d \text{ محلول} = 1 \text{ g.mL}^{-1} \rightarrow 1 = \frac{m}{50} \rightarrow m = 50 \text{ g}$



$$\frac{4 \times 10^{-3}}{40} = \frac{x}{2 \times 35.5} \rightarrow x = 71 \times 10^{-4} \text{ g Cl}^-$$

$$\text{ppm} = \frac{\text{جرم حل‌شونده}}{\text{جرم محلول}} \times 10^6 = \frac{71 \times 10^{-4}}{50} \times 10^6 = 142 \text{ ppm}$$



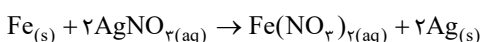
$$\frac{x}{111} = \frac{4 \times 10^{-3}}{40} \rightarrow x = 1/11 \times 10^{-2} \text{ g میلی لیتر}$$

در ۲۰۰ میلی لیتر محلول جرم حل‌شونده چهار برابر می‌شود.

$$m = 4/44 \times 10^{-2} \text{ g}$$

۱۱۰. گزینه [۴] تبدیل خیار به خیارشور مثالی از اسمز است. در اسمز وارونه، با اعمال فشار، حلال از حل‌شونده جدا می‌شود.

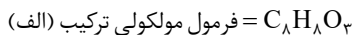
۱۱۱. گزینه [۴]



به ازای مصرف ۲ مول نقره نترات، یک مول آهن مصرف می‌شود و ۲ مول نقره تولید می‌شود. بنابراین ۵۶ گرم آهن مصرف می‌شود و ۲۱۶ گرم نقره تولید می‌شود و در نتیجه تغییر جرم جامد برابر خواهد بود با $216 - 56 = 160$. تغییر جرم تیغه $2\text{AgNO}_3 \sim$

$$\frac{C_M \times 0.2(\text{L})}{2} = \frac{\lambda}{160} \rightarrow C_M = 0.5 \text{ mol.L}^{-1}$$

۱۱۹. گزینه [۲]



جرم مولکولی $\rightarrow 8 \times 12 + 8 \times 1 + 3 \times 16 = 152$



جرم مولکولی $\rightarrow 7 \times 12 + 6 \times 1 + 3 \times 16 = 138$

تفاوت جرم مولی = $152 - 138 = 14$

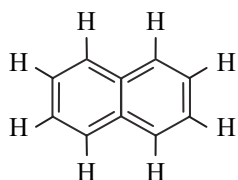
بنابراین مورد الف، درست و مورد ب، نادرست است.

هر دو ترکیب با توجه به اینکه حلقه بنزنی دارند، آروماتیک به حساب می‌آید و ۱۲ الکترون ناپیوندی (در اتم‌های اکسیژن) دارند اما ایزومر یکدیگر نیستند زیرا فرمول مولکولی آن‌ها مشابه نیست.

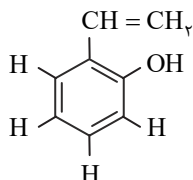
بنابراین مورد پ، نادرست است.

گروه عاملی موجود در حلقه ویتامین ث، گروه عاملی استری است که در ترکیب (الف) نیز دیده می‌شود. بنابراین مورد ت، صحیح است.

۱۲۰. گزینه [۲] الف) درست است.



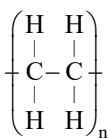
نفتالن



استیرین

هر دو ترکیب دارای ۸ اتم هیدروژن هستند و هر دو به علت داشتن حلقه بنزنی آروماتیک به حساب می‌آیند.

(ب) نادرست است. نام علمی $CH_2 = CHCl$ ، کلر و اتن است.



(پ) نادرست است. در ساختار مقابل ۵ جفت

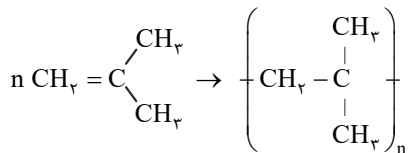
الکترون پیوندی به‌طور کامل و دو جفت الکترون

پیوندی به‌صورت نیمه دیده می‌شود یعنی جمعاً

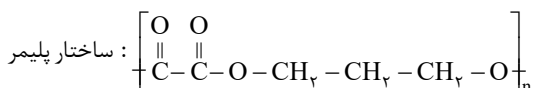
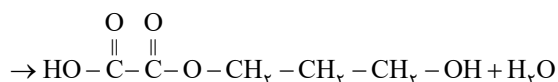
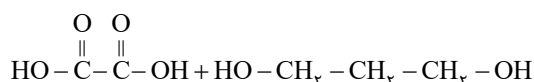
۶n جفت الکترون پیوندی

(ت) درست است. اگر به جای کلر در وینیل کلرید حلقه بنزنی قرار گیرد به استیرین تبدیل می‌شود که برای تولید پلی‌استیرین و در تهیه ظروف یکبار مصرف استفاده می‌شود.

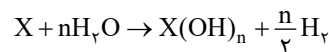
۱۲۱. گزینه [۲]



۱۲۲. گزینه [۲]



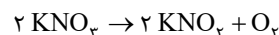
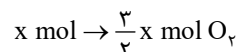
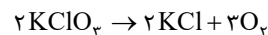
۱۱۲. گزینه [۱] فلزی که با آب واکنش می‌دهد یا قلیایی است یا قلیایی خاکی.



X به گروه ۱ تعلق دارد. $1 = \frac{11/2}{\frac{n}{2} \times 22/4} \rightarrow n = 1$

۱۱۳. گزینه [۴] شعاع اتمی در جدول دوره‌ای عناصر از بالا به پایین افزایش و از چپ به راست کاهش می‌یابد. بنابراین کم‌ترین شعاع در بین این چهار عنصر به C تعلق دارد.

۱۱۴. گزینه [۱]



$$\begin{cases} x + y = 1 \\ \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}y = \frac{24}{32} \end{cases} \rightarrow 3x + y = \frac{3}{4}$$

$$2x = \frac{1}{4} \rightarrow x = \frac{1}{8}, y = \frac{3}{8}$$

جرم پتاسیم کلرات = $\frac{1}{8} \times 122.5 = 30.625$

جرم پتاسیم نیترات = $\frac{3}{8} \times 101 = 75.75$

جرم پتاسیم نیترات
درصد خلوص پتاسیم نیترات = $\frac{75.75}{106.375} \times 100 \approx 71$

۱۱۵. گزینه [۲]

$3n + 1 =$ تعداد پیوند در آلکان

پس آلکان موردنظر باید ۹ اتم کربن داشته باشد.

$3n + 1 = 28 \rightarrow 3n = 27 \rightarrow n = 9$

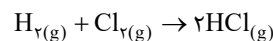
گزینه ۲ دارای ۹ اتم کربن است.

۱۱۶. گزینه [۱]

$$\Delta H = \left(\text{مجموع آنتالپی پیوندهای مواد اولیه} \right) - \left(\text{مجموع آنتالپی پیوندهای فرآورده} \right)$$

$$= 945 + 3 \times 436 - 6x = -92 \rightarrow x = 391 \text{ kJ.mol}^{-1}$$

۱۱۷. گزینه [۲]



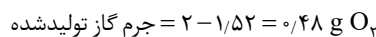
$\Delta H = (436 + 242) - (2 \times 431) = -184 \text{ kJ}$

$q = 100 \times 4/2 \times 92 = 38640 \text{ J} = 38.64 \text{ kJ}$

$\frac{x \text{ mol HCl}}{2} = \frac{38.64}{184}$

$x = 0.42 \text{ mol HCl}$

۱۱۸. گزینه [۱]



جرم گاز تولید شده = $2 - 1/52 = 0.48 \text{ g O}_2$

واکنش $\bar{R} = \frac{\bar{R}\text{O}_2}{3} = \frac{0.48}{3 \times 32 \times 5} = 0.001 \text{ mol.min}^{-1}$





۱۲۳. گزینه [۳]

(الف) صابون سدیم جامد و صابون پتاسیم و آمونیوم مایع است (نادرست)
(ب) صابون کلسیم در آب نامحلول است و صابون سدیم، پتاسیم و آمونیوم در آب محلول هستند (نادرست)
(پ) درست است.

(ت) لکه‌بری صابون در پارچه نخی بیش‌تر از پلی‌استر است. (نادرست)

۱۲۴. گزینه [۲] از بین موارد داده شده فقط CH_3COOH و SO_3 در آب خاصیت اسیدی ایجاد می‌کنند و در نتیجه کاغذ pH را به رنگ سرخ درمی‌آورند.

۱۲۵. گزینه [۱] می‌دانیم در اسیدهای ضعیف یک ظرفیتی رابطه مقابل برقرار است.

$$\alpha = \sqrt{\frac{K_a}{C_M}}$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\sqrt{\frac{10^{-4}}{0.1}}}{\sqrt{\frac{10^{-6}}{0.1}}} = \sqrt{100} = 10$$

۱۲۶. گزینه [۲] در مخلوط کردن دو محلول هم جنس مولاریته محلول را می‌توان از رابطه مقابل به دست آورد:

$$C_M \text{ کل} = \frac{\text{کل mol}}{V} = \frac{C_{M_1} \cdot V_1 + C_{M_2} \cdot V_2}{V_1 + V_2}$$

$$\text{pH} = 12 \rightarrow \text{pOH} = 2 \rightarrow [\text{OH}^-] = 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$\text{pH} = 13 \rightarrow \text{pOH} = 1 \rightarrow [\text{OH}^-] = 10^{-1} \text{ mol.L}^{-1}$$

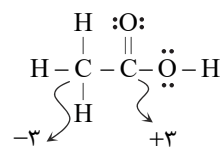
$$\text{pH} = 12.4 \rightarrow \text{pOH} = 1.6 \rightarrow [\text{OH}^-] = 10^{-1.6}$$

$$= 10^{-1} \times 10^{-0.6} = \frac{1}{4} \times 10^{-1}$$

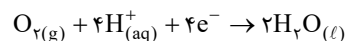
$$\frac{1}{4} \times 10^{-1} = \frac{10^{-2} \times 100 + 10^{-1} \times V}{100 + V}$$

$$40 + 4V = 100 + V \rightarrow 3V = 60 \rightarrow V = 20 \text{ mL}$$

۱۲۷. گزینه [۱]



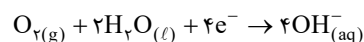
۱۲۸. گزینه [۲] فقط مورد ب نادرست است. نیم‌واکنش کاتدی در سلول سوختی هیدروژن به صورت زیر است:



۱۲۹. گزینه [۲] موارد ب و پ نادرست است.

(الف) آهن از قلع کاهنده‌تر است و در اثر ایجاد خراش، آهن خورده می‌شود.

(ب) نیم‌واکنش کاتدی در خوردگی فلزها به صورت زیر است:

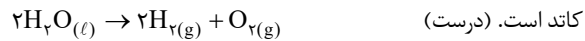


(پ) فلزهای نجیب مانند طلا و پلاتین اکسید نمی‌شوند.

(ت) آلومینیم از منگنز کاهنده‌تر است و می‌تواند آن را از خوردگی حفاظت کند.

۱۳۰. گزینه [۲]

(الف) در برقکافت آب، در اطراف آند گاز اکسیژن و در اطراف کاتد گاز هیدروژن آزاد می‌شود. بنابراین حجم گاز تولیدشده در اطراف آند نصف کاتد است. (درست)



(ب) در آبکاری قاشق آهنی به وسیله فلز نقره، به همان مقدار که فلز نقره از تیغه آند جدا می‌شود، نقره روی سطح قاشق رسوب می‌کند (درست)

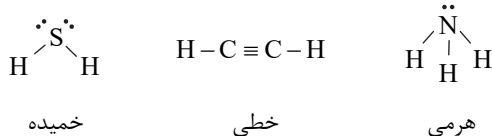
(پ) در سلول دانه، چگالی فلز (سدیم مذاب) تولیدشده از الکترولیت کم‌تر است اما در فرایند هال آلومینیم تولیدشده چگالی بیش‌تری دارد و در انتهای طرف جمع‌آوری می‌شود. (نادرست)

(ت) در سلول دانه از کلسیم کلرید به عنوان کمک ذوب استفاده می‌شود. (نادرست)

۱۳۱. گزینه [۲] فقط مورد ب نادرست است.

(ب) الماس رسانای جریان برق نیست.

۱۳۲. گزینه [۴]



۱۳۳. گزینه [۳]

$$\Delta H = \Delta H_{\text{پیوند}}(\text{AB}) - \Delta H_{\text{پیوند}}(\text{AC}) = -200 \text{ KJ}$$

$$\Rightarrow \Delta H_{\text{پیوند}}(\text{AC}) = \Delta H_{\text{پیوند}}(\text{AB}) + 200 \text{ KJ}$$

تحلیل سایر گزینه‌ها:

۱. انرژی فعال‌سازی کم‌تر از انرژی پیوند و اکسندهنده هاست زیرا فقط صرف تضعیف پیوندهای اولیه می‌شود.

۲. از واکنش نیم‌مول AC و B، ۱۰۰ کیلوژول گرما جذب می‌شود نه آزاد (واکنش برگشت)

۴. در شرایط یکسان انرژی فعال‌سازی واکنش برگشت بیش‌تر و در نتیجه سرعت آن کم‌تر است.

۱۳۴. گزینه [۱] ثابت تعادل فقط تحت تأثیر دما است و قطعاً یکی از موارد ب یا ج می‌تواند ثابت تعادل را افزایش دهد پس گزینه «۱» صحیح است. (افزایش دما باعث افزایش ثابت این تعادل می‌شود.)

۱۳۵. گزینه [۲] PET یا همان پلی‌اتیلن ترفتالات یک پلی‌استر است که از پلیمر شدن اتیلن گلیکول با ترفتالیک اسید تهیه می‌شود و برای ساخت بطری‌های آب به کار می‌رود.

اتیلن گلیکول و ترفتالیک اسید در نفت خام وجود ندارند و باید آن‌ها را به ترتیب از اتن و پارازایلن تهیه کرد.

گاز اتن در اثر واکنش با محلول آبی و رقیق پتاسیم پرمنگنات به اتیلن گلیکول تبدیل می‌شود.