ریاضی هفتم

(اول متوسطه)

مؤلفان:
حسین انصاری
سیامک قادر

مقدمه

سپاس فراوان خداوندی را که به ما جان داد و به جسم و جان ما نیرو، و به نیروی ما حرکت و به حرکت ما جهت و به جهت ما هدف، که همانا هدف غایی خود اوست.

به دنبال استقبال دانش‌آموزان هوشمند و خانواده‌های محترمشان از کتاب‌های دوره‌ی ابتدایی مبتکران، به لطف الهی کتاب سال هفتم را نیز به رشته‌ی تحریر درآوردیم. در رابطه با شیوه‌ی نگارش کتاب مطالبی به عرض می‌رسانیم.

در این کتاب موضوعات درسی در هر فصل به‌طور کامل شرح داده شده و برای هر موضوع مثال‌های متنوعی آورده شده است که به تفهیم مطلب کمک به‌سزایی می‌کند. در پایان هر فصل نیز تمرین‌های زیادی برای ممارست عزیزان دانش‌آموز قرار داده شده است.

در این قسمت تمرین‌های مشکل‌تر را با علامت * مشخص کرده‌ایم که مختص دانش‌آموزان سرآمد می‌باشد و حل آن‌ها نیازمند ورزیدگی بیش‌تر در ریاضیات است. لذا حل آن‌ها به عموم دانش‌آموزان توصیه نمی‌شود.

به‌طور کلی در تدوین این کتاب که حاصل چندین سال تدریس مؤلفان در مراکز تیزهوشان می‌باشد اهداف زیر را مدنظر داشته‌ایم:

دانش‌آموزانی که همه‌ساله با آزمون‌های سخت وارد مراکز تیزهوشان می‌شوند همگی دارای یک بهره‌ی هوشی نیستند لذا قدرت یادگیری آن‌ها متفاوت است. درسی که در کلاس ارائه می‌شود قابل استفاده‌ی اکثریت دانش‌آموزان است اما دانش‌آموزان خیلی قوی و عده‌ی قلیلی دانش‌آموز نسبتاً ضعیف بهره‌ی کافی را از کلاس درسی نمی‌برند و کلاس برای این دو دسته ملال‌آور و خسته‌کننده است. این کتاب به سبب داشتن مثال‌ها و مسائل حل شده‌ی زیاد و هم‌چنین تمرین‌های ستاره‌دار، نیاز هر دو دسته‌ی فوق را برآورده می‌کند. از طرف دیگر خانواده‌های محترم دانش‌آموزان سرآمد عموماً درخواست معرفی کتابی را دارند که حاوی تمرینات زیادی باشد و موجب فعالیت بیش‌تر فرزندانشان شود. امیدواریم که به درخواست این گرامیان نیز جامه‌ی عمل پوشانده باشیم.

در این‌جا لازم می‌دانیم از جناب آقای یحیی دهقانی مدیرعامل محترم شرکت آموزشی، فرهنگی و انتشاراتی مبتکران و هم‌چنین آقای مبیّن مدیر حروف‌چینی و گرافیک مبتکران تشکر کنیم.

حسین انصاری

سیامک قادر

فهرست مطالب

عنوان		صفحه
فصل اوّل	راهبردهای حلّ مسئله	۷
فصل دوم	اعداد صحیح	۲۷
فصل سوم	جبر و معادله	۴۱
فصل چهارم	هندسه و استدلال	۶۱
فصل پنجم	شمارنده و اعداد اول	۹۵
فصل ششم	سطح و حجم	۱۲۵
فصل هفتم	توان و جذر	۱۴۷
فصل هشتم	بردار و مختصات	۱۷۵
فصل نهم	آمار و احتمال	۱۹۵
	پرسش‌های چهارگزینه‌ای	۲۱۱
	پاسخ تمرین‌ها	۲۵۷
	پاسخ‌نامه‌ی کلیدی	۲۶۷

فصل ۱

راهبردهای حل مسئله

۱ راهبردهای حل مسئله

کشیدن یک شکل یا نمودار

اگر مسئله‌ای فاقد شکل باشد گاهی اوقات کشیدن یک شکل برای حل آن مسئله مفید است. یک نمایش تصویری از وضعیت مسئله می‌تواند راه‌های جدیدی را به شما نشان دهد. استفاده از نمادها برای نشان دادن شرایط می‌تواند به روشن کردن مسئله برای شما کمک کند.

هم‌چنین کشیدن یک شکل یا نمودار برای پیگیری مسائل چند مرحله‌ای و پیدا کردن یک استراتژی مؤثر مفید است.

مثال ۱: **هشت تیم از لیگ فوتبال شهری یک تورنومنت بین خود برگزار می‌کنند. این مسابقات به‌صورت تک‌حذفی است (یعنی اگر هر تیم یک‌بار ببازد از دور مسابقات حذف می‌شود). قهرمان این مسابقات چند بازی باید انجام دهد؟**

حل: یک راه مفید برای حل مسئله، کشیدن نموداری برای نشان دادن فرآیند این تورنمنت و استفاده از نمادهایی مانند × برای نشان دادن هر تیم است.

نمودار بالا نشان می‌دهد برنده‌ی مسابقات باید ۳ بازی انجام دهد.

به عبارتی تعداد دورهای بازی، تعداد بازی‌های قهرمان را نیز مشخص می‌کند.

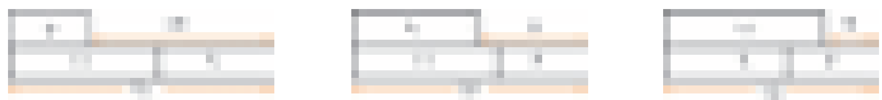
$۸ \div ۲ = ۴$

$۴ \div ۲ = ۲$

$۲ \div ۲ = ۱$

مثال ۲: **سه میله به طول‌های ۶ ، ۹ و ۱۱ سانتی‌متر داریم. چگونه می‌توان به کمک این میله‌ها ۱۴ سانتی‌متر را اندازه گرفت؟**

حل: جاگیری‌های مختلف میله‌ها را نسبت به هم رسم می‌کنیم تا به سریع‌ترین شکل ممکن پاسخ مسئله را بیابیم.



(ج) (ب) (الف)

نمودار (ج) نحوه‌ی قرار گرفتن میله‌ها برای اندازه‌گیری ۱۴ سانتی‌متر را نشان می‌دهد.

تهیه‌ی یک فهرست طبقه‌بندی شده

یک استراتژی کارآمد در حل مسئله، درست کردن یک فهرست از اطلاعات طبقه‌بندی شده است که می‌تواند اهداف متفاوتی داشته باشد. وقتی که حل یک مسئله مستلزم تولید حجم زیادی از داده‌ها باشد درست کردن یک فهرست طبقه‌بندی شده می‌تواند شما را در محاسبه‌ی احتمالات و جلوگیری از تکرار در شمارش کمک کند.

مثال ۳: سه دارت به سمت هدف مقابل پرتاب شده‌اند. فرض کنید همه‌ی دارت‌ها به هدف می‌خورند ولی ممکن است به یکی از حلقه‌ها یا مرکز آن برخورد کنند. پرتاب‌کننده چه امتیازهایی می‌تواند کسب کند؟

حل: حالات مختلف را بررسی می‌کنیم:

۱) سه دارت به مرکز برخورد کنند:

۹ + ۹ + ۹ = ۲۷

۲) دو دارت به مرکز برخورد کنند:

۹ + ۹ + ۴ = ۲۲

۹ + ۹ + ۳ = ۲۱

۳) یک دارت به مرکز برخورد کند:

۹ + ۴ + ۴ = ۱۷

۹ + ۴ + ۳ = ۱۶

۹ + ۳ + ۳ = ۱۵

۴) هیچ دارتی به مرکز برخورد نکند.

۴ + ۴ + ۴ = ۱۲

۴ + ۴ + ۳ = ۱۱

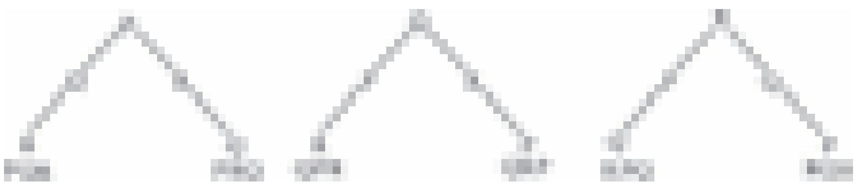
۴ + ۳ + ۳ = ۱۰

۳ + ۳ + ۳ = ۹

بنابراین ملاحظه می‌گردد ۱۰ نوع امتیاز متفاوت می‌تواند به دست آید.

مثال ۴: اگر تکرار حروف مجاز نباشد، چند واژه‌ی متفاوت می‌توان با سه حرف P ، Q و R ساخت؟

حل: با استفاده از یک نمودار خاص (همان‌طور که در شکل پایین ملاحظه می‌کنید) که به آن نمودار درختی می‌گویند، تمام واژگان ممکن را می‌یابیم. این روش شمارش مفید است، به این دلیل که هر خط «درخت» به شکل دیداری باعث شمارش تعداد واژه‌های ممکن می‌شود. توجه کنید که در این مسئله ترتیب قرارگیری حروف در کلمه مهم است و در کلمات تفاوت ایجاد می‌کند.



ملاحظه می‌گردد که ۶ واژه‌ی متفاوت می‌توان ساخت.

رسم یک جدول

وقتی یک مسئله شامل داده‌هایی در بیش از یک موضوع است یکی از راهبردهای مفید برای حل مسئله، طبقه‌بندی داده‌ها و استفاده از یک جدول است. از روی جدول داده‌هایی که لازم داریم به راحتی آشکار می‌شوند.
جدول راه بسیار خوبی برای ثبت نمودن تلاش‌ها و نتایج و جلوگیری از مطالب تکراری است. یک جدول هم‌چنین می‌تواند در پیدا کردن الگوها مؤثر باشد.

مثال ۵: دو تاس پرتاب می‌شوند. در چند حالت مجموع اعداد روشده ۸ می‌شود؟

حل: روی هر وجه تاس یک، دو، سه، چهار، پنج یا شش نقطه حک شده است که مجموع اعداد روی وجه‌هایی که رو می‌شوند را در جدول زیر مشخص کرده‌ایم.

+	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱
۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲

ملاحظه می‌کنید که تاس‌ها به ۳۶ حالت مختلف ممکن است قرار بگیرند که از این ۳۶ حالت در ۵ حالت مجموع اعداد رو شده ۸ است.

مثال ۶: در مزرعه‌ای ۱۸ حیوان وجود دارد که تعدادی از آن‌ها مرغ و بقیه گاو هستند. تعداد کل پاها ۵۰ عدد است. در این مزرعه چند گاو و چند مرغ وجود دارد؟

حل: بیایید جدولی درست کنیم و در آن برخی از حالاتی را که ۱۸ حیوان دو پا و چهار پا می‌توانند وجود داشته باشند را بررسی کنیم. هم‌چنین تعداد کل پاها را نیز حساب کنیم.

تعداد مرغ‌ها	۰	۱	۲	۳	۴	۵	...	؟
تعداد گاوها	۱۸	۱۷	۱۶	۱۵	۱۴	۱۳	...	؟
تعداد پاها	۷۲	۷۰	۶۸	۶۶	۶۴	۶۲	...	۵۰

با بررسی داده‌های درون جدول، الگو کم‌کم نمایان می‌گردد. اگر از چپ به راست بخوانیم، هر بار که یک گاو را با یک مرغ عوض می‌کنیم، ۲ پا کم می‌شود. بنابراین برای آن‌که از ۷۲ به ۵۰ برسیم باید ۱۱ گاو را با مرغ تعویض کنیم، که در این صورت ۲۲ = ۲ × ۱۱ پا از تعداد پاها کم شده و به ۵۰ می‌رسد. پس در این مزرعه ۷ گاو و ۱۱ مرغ وجود دارد.

حل یک مسئله‌ی ساده‌تر و مرتبط

وقتی با یک مسئله که پیچیده به نظر می‌آید روبه‌رو می‌شویم، حل یک یا چند مسئله با شرایط ساده‌تر می‌تواند مفید باشد. گاهی اوقات ممکن است راه حل مسئله‌ی ساده‌تر، ما را به سمت راه حل مسئله‌ی پیچیده‌تر هدایت کند. در سایر مواقع حل چند مسئله ساده‌تر می‌تواند ما را به یک الگو برساند که پایه‌ای برای حل مسئله‌ی اصلی باشد.

مثال ۷: خانه‌های در امتداد یک خیابان اصلی به‌طور متوالی از ۱ تا ۱۵۰ شماره‌گذاری شده‌اند. پلاک چند خانه شامل حداقل یک رقم ۷ است؟

حل: بدیهی است که شما می‌توانید هر یک از خانه‌ها را جداگانه بررسی کنید ولی این کار وقت‌گیر است. باید ببینیم چگونه می‌توانیم این مسئله را به دو مسئله‌ی ساده‌تر تبدیل کنیم؟

پلاک چند خانه در مرتبه‌ی یکان رقم ۷ دارد؟ در بین ۱۰ عدد متوالی یک عدد این ویژگی را دارد. در بین اعداد ۱ تا ۱۵۰، ۱۵ گروه ۱۰ تایی متمایز از اعداد متوالی وجود دارد. بنابراین ۱۵ پلاک خانه با رقم ۷ در مرتبه‌ی یکان داریم. پلاک چند خانه در مرتبه‌ی دهگان رقم ۷ دارد؟ ده عدد با این ویژگی از ۷۰ تا ۷۹ وجود دارند. اما توجه کنید که عدد ۷۷ را در شمارش خانه‌ها با یکان هفت شمرده‌ایم. پس در کل ۹ عدد با دهگان هفت داریم. ۱۵ + ۹ = ۲۴

مثال ۸: ماشین حساب بهروز یک دکمه‌ی مخصوص به شکل لوزی دارد که از دو قانون پیروی می‌کند.

۱) اگر ورودی یک عدد یک رقمی باشد، دو برابر آن چاپ می‌شود.

۲) اگر ورودی یک عدد دو رقمی باشد، مجموع دو رقم آن را چاپ می‌کند.

فرض کنید بهروز عدد ۱ را در ماشین حساب وارد می‌کند و این دکمه را ۵۰ بار متوالی می‌فشارد. خروجی ماشین چه خواهد بود؟

حل: برای حل مسئله‌ای به این‌صورت باید آن‌قدر اعداد متفاوت را بررسی کرد تا به یک الگو رسید. پس از این‌که بهروز عدد ۱ را وارد کرد، عملگر لوزی به ترتیب اعداد ۲ ، ۴ ، ۸ ، ۱۶ ، ۷ ، ۱۴ ، ۵ ، ۱۰ و سپس دوباره ۱ را چاپ می‌کند. بنابراین اگر دکمه‌ی لوزی به‌طور متوالی فشرده شود دنباله‌ی ۹ عدد ۲ ، ۴ ، ۸ ، ۱۶ ، ۷، ۱۴ ، ۵ و ۱۰ به‌طور متوالی تکرار می‌شوند. بنابراین عدد ۱۰ ، نهمین، هجدهمین ، بیست و هفتمین، سی و ششمین و چهل و پنجمین عدد این دنباله خواهد بود. بهروز عدد ۱ را وارد کرد و دکمه‌ی لوزی را ۵۰ بار فشرد. بنابراین ۵۱ عدد نمایش داده شدند. پنجاه و یکمین عددی که نمایش داده می‌شود درواقع ششمین عدد در دنباله‌ی اعداد و پس از نمایش دادن ۱۰ به عنوان چهل و پنجمین عدد است. بنابراین پس از ۵۰ بار فشار دادن دکمه‌ی لوزی عدد ۷ نمایش داده خواهد شد.

پیدا کردن یک الگو

یکی از متداول‌ترین راهبردهای حل مسئله، یافتن و گسترش دادن یک الگو است. همان‌طور که خواهیم دید در موارد بسیار این روش به همراه روش‌های دیگر گفته شده قابل استفاده می‌باشد.

مثال ۹: حاصل‌جمع مقابل چه‌قدر است؟ $۱+۳+۵+\cdots+۹۷+۹۹$

حل: به‌جای انجام این جمع طولانی بیایید ابتدا چند دنباله‌ی کوچک‌تر را جمع نماییم. اطلاعاتی را که به دست می‌آید فهرست کنیم و به دنبال یک الگو باشیم. جدول مقابل از دنباله‌های کوچک‌تر دارای یک الگو می‌باشد. ملاحظه می‌گردد که مجموع اعداد هر یک از دنباله‌ها برابر با مربع یک عدد طبیعی می‌باشد (برای عددی مانند x مربع x یعنی $x\times x$).

جمع	سری‌ها
۱	۱
۴	$۱+۳$
۹	$۱+۳+۵$
۱۶	$۱+۳+۵+۷$
۲۵	$۱+۳+۵+۷+۹$

این اعداد از ۱ شروع شده و به‌طور متوالی زیاد می‌شوند. توجه کنید که اوّلین عدد ۱ ، مجموع اوّلین دو عدد فرد $۴=۲\times۲$. مجموع اوّلین سه عدد فرد $۹=۳\times۳$ ، مجموع اوّلین چهار عدد فرد $۱۶=۴\times۴$ است و مجموع اوّلین پنج عدد فرد $۲۵=۵\times۵$ است. بنابراین اگر این الگو ادامه یابد، حاصل عبارت $۱+۳+۵+\cdots+۹۹$ که شامل ۵۰ عدد فرد اوّلیه است $۵۰\times۵۰=۲۵۰۰$ می‌باشد.

مثال ۱۰: پانزده نقطه روی محیط یک دایره قرار دارند. اگر این نقاط را دو به دو به هم وصل کنیم، چند پاره‌خط پدید می‌آید؟

حل: یکی از راه‌های مناسب برای پیدا کردن یک الگو، بررسی موارد ساده‌تر و ثبت و جمع‌بندی نتایج آن در یک جدول است. یک دایره رسم کنید. اوّلین نقطه را روی دایره قرار دهید. هیچ پاره‌خطی پدید نمی‌آید، زیرا برای رسم یک خط حداقل به دو نقطه نیاز است. نقطه‌ی دوم را قرار دهید و آن را با پاره‌خطی به نقطه‌ی اوّل وصل کنید تا اوّلین پاره‌خط پدید آید.

سپس نقطه‌ی سوم را رسم کنید و آن را به دو نقطه‌ی قبلی وصل کنید تا دو پاره‌خط جدید پدید آید و درنهایت ۶ پاره‌خط داشته باشیم. این کار را آن‌قدر ادامه دهید تا به اطلاعاتی که در جدول زیر وجود دارد برسید. توجه کنید که نقطه‌ی پانزدهم، ۱۴ پاره‌خط به تعداد کل پاره‌خط‌ها می‌افزاید.

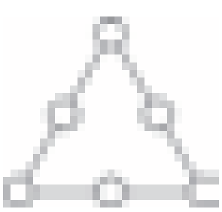
تعداد نقاط روی دایره	۱	۲	۳	۴	۵	۶	...	۱۵
تعداد پاره‌خط‌های جدید	۰	۱	۲	۳	۴	۵	...	۱۴
تعداد کل پاره‌خط‌ها	۰	۱	۳	۶	۱۰	۱۵	...	؟

تعداد کل پاره‌خط‌های پدید آمده از دو به دو به هم وصل کردن ۱۵ نقطه روی یک دایره همان‌طور که در سطر دوم جدول بالا نشان داده شده با مجموع اعداد ۱ تا ۱۴ برابر است. بنابراین از به هم وصل کردن ۱۵ نقطه روی محیط یک دایره ۱۰۵ پاره‌خط پدید می‌آید.

آزمون و خطا

یک راه مؤثر برای حل برخی مسائل، تولید یک حدس منطقی و مقایسه‌ی آن با شرایط مسئله است. برخی اوقات پاسخ نخست شما جواب صحیح مسئله است و برخی اوقات شما باید حدس‌های زیادی بزنید تا پاسخ را بیابید. اگرچه حتی پاسخ نادرست هم یک موفقیت است، زیرا شما یک پاسخ ممکن را رد می‌کنید و یک قدم به پاسخ صحیح نزدیک می‌شوید. به این روش «آزمون و خطا» گفته می‌شود.

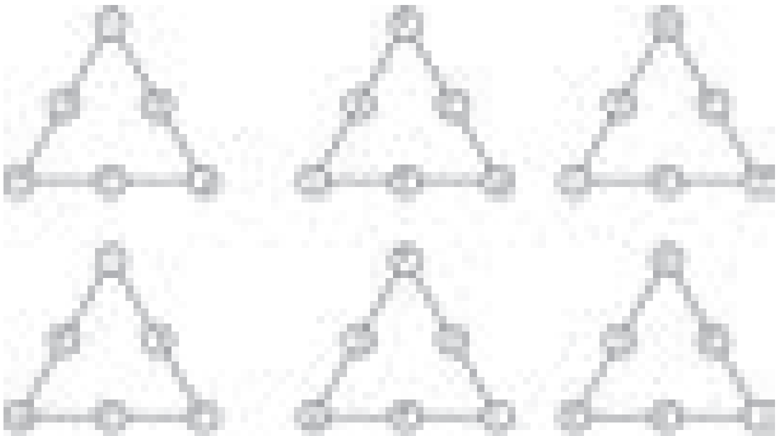
مثال ۱۱: **اعداد ۱ تا ۶ را طوری در دایره‌های مثلث زیر بچینید که مجموع اعداد هر ضلع برابر با ۱۰ شود.**



حل: چند حدس باید شما را به این سمت هدایت کند که در بین این اعداد تنها سه مجموعه‌ی عددی وجود دارند که مجموعشان ۱۰ است.

۱+۳+۶ , ۱+۴+۵ , ۲+۳+۵

که اعداد ۱ ، ۳ و ۵ دو بار تکرار شده‌اند و بنابراین این اعداد باید در رأس‌های مثلث قرار بگیرند. اعداد ۲ ، ۴ و ۶ نیز می‌توانند در بقیه‌ی دوایر قرار بگیرند.



ملاحظه می‌گردد که هر یک از ۶ چینش بالا صحیح می‌باشند. توجه کنید که همه‌ی ۶ حالت بالا از یک چینش پایه به وجود آمده‌اند.

مثال ۱۲: چگونه می‌توانید از چهار تا ۴ برای ساختن عبارتی که حاصل آن ۱ شود استفاده کنید؟

حل: حل کردن این سؤال در ابتدا ممکن است که غیرممکن به نظر برسد. اما فراموش نکنید که شما می‌توانید از انواع زیادی عملگر محاسباتی استفاده کنید. جمع، تفریق، ضرب، تقسیم، مربع کردن، جذر، به توان ۴ رساندن و... می‌توانید حالات مختلف را آزمایش کنید.

الف) $(۴-۴)+(۴\div۴)=۱$

ب) $\frac{۴+۴}{۴+۴}=۱$

ج) $\frac{۴\times۴}{۴\times۴}=۱$

د) $۴۴\div۴۴=۱$

تجربه کردن

مسائلی که دارای ساختار هندسی یا ارتباطات فضایی می‌باشند گاهی اوقات به کمک در نظر گرفتن یک مدل فیزیکی حل می‌شوند.

مثال ۱۳: شکل مقابل ۱۲ چوب‌کبریت را نشان می‌دهد که سه مربع را پدید آورده‌اند.

چگونه می‌توانید با جابه‌جا کردن فقط سه چوب‌کبریت ۵ مربع به وجود آورید؟

حل: این مسئله علاوه بر جابه‌جا کردن اشیاء داده شده، نیازمند بررسی دقیق ارتباطات هندسی نیز هست. برای خیلی‌ها ساده‌ترین راه برای حل این مسئله، چیدن تعدادی چوب‌کبریت به شکل داده شده و تجربه کردن است. توجه کنید که یکی از مربع‌ها از مرز خارجی مربع‌های دیگر پدید آمده است.

عمل به مسئله

عمل کردن به مسئله به‌صورت فیزیکی گاهی اوقات برای درک مسئله مفید است. شما می‌توانید از اشیاء برای نشان دادن افراد یا اجسام استفاده کنید. عمل کردن به مسئله ممکن است شما را به‌صورت مستقیم به جواب هدایت کند و یا این‌که به شما در پیدا کردن راهبرد حل مسئله کمک کند.

مثال ۱۴: تعداد افراد یک کلاس ۳۲ نفره را می‌شماریم. هر کس که شماره‌ی زوجی داشته باشد باید بایستد. سپس افراد نشسته را دوباره از یک می‌شماریم و باز هم افرادی که شماره‌ی زوجی داشته باشند باید بایستند. در پایان چند نفر نشسته باقی می‌مانند؟

حل: از آن‌جایی که نصف ۳۲ نفر دارای شماره‌ی فرد می‌باشند، در شمارش اوّل ۱۶ نفر می‌ایستند. در شمارش دوم نصف ۱۶ نفر باقی‌مانده برمی‌خیزند که برابر است با ۸ نفر. بنابراین پس از شمارش دوم، هشت نفر نشسته باقی می‌مانند.

مثال ۱۵: بهروز به هر یک از امین و مهبد به همان اندازه که پول داشتند داد. سپس امین به مهبد و بهروز همان اندازه که پول داشتند داد. و در آخر مهبد به امین و بهروز به همان اندازه که هر یک پول داشتند داد. پس از این کار هر یک از سه نفر ۲۴ هزار تومان داشتند. پول اوّلیه‌ی هر کدام چه‌قدر بوده است؟

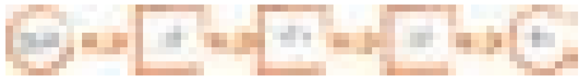
حل: تنها مقدار پولی که می‌دانیم، مقدار پول در مرحله‌ی چهارم است که خروجی نهایی مسئله است. بنابراین سعی کنیم حل مسئله را از همان‌جا آغاز کنیم و در جهت عکس کار کنیم. فرض کنید مراحل به ترتیب عکس انجام شوند و با ساختن جدول زیر این بررسی را انجام دهیم که در هر مرحله از ۳ تا ۱، هر یک چه‌قدر پول دارند؟

همین‌طور که برعکس کار می‌کنیم دو چیز را به خاطر داشته باشیم. هر بار که یک نفر به دو نفر دیگر به اندازه‌ی پولی که دارند پول می‌دهد، هر یک از دو نفر نصف پول مرحله‌ی بعد به پولش اضافه می‌گردد. هم‌چنین توجه داشته باشیم که کل پول در هر مرحله ثابت است $(۲۴ \times ۳ = ۷۲)$.

شماره‌ی مرحله	فعالیت	بهروز	امین	مهبد	جمع
۴	هر کدام ۲۴ هزار تومان دارند.	۲۴۰۰۰	۲۴۰۰۰	۲۴۰۰۰	۷۲۰۰۰
۳	مهبد به امین و بهروز به اندازه‌ای که پول دارند پول می‌دهد.	۱۲۰۰۰	۱۲۰۰۰	۴۸۰۰۰	۷۲۰۰۰
۲	امین به مهبد و بهروز به اندازه‌ای که داشته‌اند پول می‌دهد.	۶۰۰۰	۴۲۰۰۰	۲۴۰۰۰	۷۲۰۰۰
۱	بهروز به مهبد و امین به اندازه‌ای که داشته‌اند پول می‌دهد.	۳۹۰۰۰	۲۱۰۰۰	۱۲۰۰۰	۷۲۰۰۰

بنابراین بهروز در ابتدا ۳۹۰۰۰ تومان، امین ۲۱۰۰۰ تومان و مهبد ۱۲۰۰۰ تومان داشته‌اند.

مثال ۱۶: در شکل زیر چه عددی باید در خانه‌ی شروع قرار گیرد؟



حل: بهترین راه برای حل این مسئله، برعکس عمل کردن است. در هر مرحله برعکس عملیات گفته شده را انجام می‌دهیم.

$۴۰ \times ۲ = ۸۰$

$۸۰ - ۲۰ = ۶۰$

$۶۰ \div ۳ = ۲۰$

نوشتن یک معادله

در جبر از حروف برای نشان دادن کمیت‌های مختلف و ارتباط میان آن‌ها استفاده می‌شود. معمولاً مقدار این حروف را نمی‌دانیم و شرایط مسئله با یک معادله یا نامساوی نشان داده می‌شود. این نامساوی یا معادله ما را به سمت راه حل مسئله هدایت می‌کند.

مثال ۱۷: سه برابر چه عددی از خود آن عدد ۱۶ واحد بزرگ‌تر است؟

حل: برای این مسئله یک معادله به‌صورت مقابل در نظر بگیرید. $۳x = x + ۱۶$

از دو طرف معادله x را کم کنید. $۳x - x = x + ۱۶ - x$

دو طرف را ساده کنید. $۲x = ۱۶$

دو طرف را بر ۲ تقسیم می‌کنیم. $\boxed{x = ۸}$

مثال ۱۸: وزن دو سیب برابر با وزن یک موز و یک آلبالو است. وزن یک موز برابر وزن ۹ آلبالو است. وزن یک سیب برابر وزن چند آلبالو است؟

حل: این‌بار ما مقدار سه کمیت را نمی‌دانیم. بیایید وزن ۱ سیب، ۱ موز و ۱ آلبالو را به ترتیب با متغیرهای a و b و c نشان دهیم. در این‌صورت می‌توانیم اطلاعات داده شده را با ۲ معادله نشان دهیم.

وزن ۲ سیب برابر وزن ۱ موز و ۱ سیب است. $۲a = b + c$

وزن ۱ موز برابر وزن ۹ آلبالو است. $b = ۹c$

اگرچه تعداد متغیرها و معادلات زیاد است اما ممکن است یادتان باشد که در جبر می‌توانیم یک عبارت را با یک عبارت مساوی جایگزین کنیم. از آن‌جایی که $b = ۹c$ است، می‌توانیم b را در معادله‌ی $۲a = b + c$ با $۹c$ عوض کنیم. سپس می‌توانیم معادله‌ی حاصل را حل کنیم و مقدار a را برحسب c به دست آوریم.

$۲a = ۹c + c$

$۲a = ۱۰c$

$a = ۵c$

معادله‌ی آخر وزن ۱ سیب را برحسب وزن ۱ آلبالو مشخص می‌کند.

دیدگاه خود را عوض کنید.

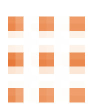
گاهی اوقات ممکن است به این نتیجه برسید که تلاش‌های شما برای حل یک مسئله فایده‌ای ندارد. ممکن است این باور به دلیل توسعه دادن یک نوع طرز تفکر پدید آمده باشد. شاید تصور کنید که تنها یک راه برای حل مسئله وجود دارد و یا این‌که از فرض غلطی براساس داده‌های مسئله استفاده کرده باشید. وقتی این اتفاق می‌افتد معمولاً دوباره‌خوانی صورت مسئله و سعی در تغییر دیدگاه می‌تواند مفید باشد.

مثال ۱۹: شما ۴ تکه زنجیر دارید که هر کدام از ۳ قطعه تشکیل شده است. یک جواهرفروش از شما ۲ هزار تومان می‌گیرد تا یک قطعه را باز کند و ۳ هزار تومان می‌گیرد تا یک قطعه را ببندد. چگونه می‌توانید تنها با ۱۵ هزار تومان این قطعات را به یک‌دیگر متصل کنید و یک زنجیر یک‌تکه دایره‌ای به وجود آورید؟

حل: اغلب دانش‌آموزان در نگاه اوّل با ۴ برش و ۴ جوش دادن این کار را انجام می‌دهند. یعنی:

$۴ \times ۵۰۰۰ = ۲۰۰۰۰$ تومان

اما اگر یکی از زنجیرها را به سه تکه تبدیل کنیم، از آن‌ها می‌توانیم به عنوان اتصال قطعات دیگر استفاده کنیم که هزینه $۳ \times ۵۰۰۰ = ۱۵۰۰۰$ تومان است.



مثال ۲۰: چگونه می‌توانید ۹ نقطه‌ی مقابل را با ۴ خط راست و بدون برداشتن دست از روی کاغذ به هم وصل کنید.

حل: تقریباً هر کس که برای حل این مسئله تلاش می‌کند به دلیل این فرض غلط که حتماً خطوط باید داخل مربع ۳×۳ رسم شوند، ناامید می‌شود. پرهیز از این فرض غلط درها را به سوی راه حل صحیح باز می‌کند.

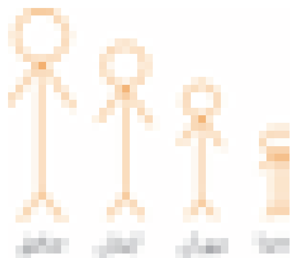
مثال ۲۱: حیوانات جنگلی تصمیم گرفتند به دستور سلطان جنگل یک دوره مسابقه بسکتبال ترتیب دهند. قرار است هر دو تیم سه بار با یک‌دیگر مسابقه دهند. تیم آهوها، خرس‌ها، روباه‌ها، شغال‌ها، بزها، گرگ‌ها و بچه‌شیرها در این مسابقات شرکت کرده‌اند. چند بازی باید انجام شود تا مسابقات به پایان برسد و قهرمان مشخص گردد؟

حل: اگر این تیم‌ها را نقاطی که هیچ سه تای آن‌ها روی یک خط راست نباشند در نظر بگیریم، تعداد پاره‌خط‌هایی که از به هم وصل کردن دو به دو این نقاط به دست می‌آید برابر است با:

$$\frac{۷ \times ۶}{۲} = ۲۱$$

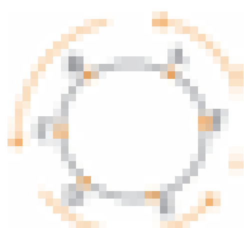
با توجه به این‌که هر دو تیم سه بار بازی می‌کنند، بنابراین تعداد کل بازی‌ها $۲۱ \times ۳ = ۶۳$ می‌باشد.

مثال ۲۲: صادق، مهران، رضا و ایمان چهار نفر اوّل رشته‌ی تنیس روی میز مدرسه هستند. مهارت ایمان از رضا بیش‌تر است. صادق از همه برتر است و مهران بالاتر از رضا قرار دارد. رتبه‌ی اعضای تیم مدرسه را تعیین کنید.



حل: می‌توان نمادهایی را برای این افراد در نظر گرفت. بنابراین ملاحظه می‌شود که افراد بنابر مهارتشان به صوت: ۱– صادق ۲– ایمان ۳– مهران ۴– رضا رتبه‌بندی می‌شوند.

مثال ۲۳: مسیر ریل قطار اسباب‌بازی کاوه، دایره‌ای‌شکل است. ۶ تیرچه خطوط ارتباط تلفن به فاصله‌های یکسان دور مسیر قرار دارند. ۱۰ ثانیه طول می‌کشد تا قطار از تیرچه‌ی اوّل به تیرچه‌ی سوم برسد. چه‌قدر طول می‌کشد تا قطار کل مسیر را دور بزند؟



حل: ملاحظه می‌شود که کل مسیر می‌تواند به سه قسمت ABC ، CDE و EFA تقسیم شود. بنابراین ۳۰ = ۱۰×۳ ثانیه طول می‌کشد تا کل مسیر طی شود.

مثال ۲۴: کرمی در پایین دیوار ۱۲ متری می‌خزد. کرم هر روز ۳ متر به طرف بالا می‌خزد ولی هنگام شب سُر می‌خورد و ۲ متر پایین می‌آید. چند روز طول می‌کشد تا این کرم به بالای دیوار برسد؟

حل: کرم در پایان هر روز ۱ = ۲ – ۳ متر از دیوار بالا می‌رود. در پایان روز نهم این کرم ۹ = ۱×۹ متر بالا رفته. بنابراین در روز بعد یعنی روز دهم ۳ متر بالا رفته و به بالای دیوار می‌رسد.

مثال ۲۵: چه تعداد سرامیک مربع‌شکل به ضلع ۲۲/۵ سانتی‌متر برای پوشاندن کف سالنی مستطیل‌شکل به طول ۴/۵ متر و عرض ۳/۶ متر لازم است؟

حل: طول مستطیل ۴۵۰ = ۱۰۰×۴/۵ سانتی‌متر و عرض آن ۳۶۰ = ۱۰۰×۳/۶ سانتی‌متر است.

۲۰ = ۲۲/۵ ÷ ۴۵۰

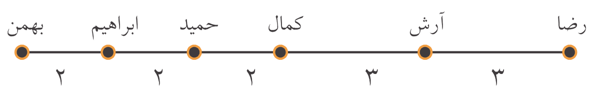
۱۶ = ۲۲/۵ ÷ ۳۶۰

۳۲۰ = ۱۶×۲۰

مثال ۲۶: بهمن، کمال، ابراهیم، حمید، آرش و رضا در یک مسابقه‌ی دو ۸۰۰ متر شرکت کردند. در پایان، آرش ۷ متر جلوتر از ابراهیم بود. بهمن ۱۲ متر عقب‌تر از رضا بود. آرش ۵ متر از حمید جلوتر بود ولی ۳ متر از رضا عقب‌تر بود. فاصله‌ی کمال از نفر اوّل و نفر آخر به یک اندازه بود. آن‌ها با چه ترتیبی مسابقه را تمام کردند؟ فاصله‌ی بین هر دو نفر آن‌ها چه‌قدر بوده است؟

حل: ابتدا طبق گفته‌های مسئله عمل کرده و یک چیدمان برای این افراد در نظر می‌گیریم. (فرض کنیم دونده‌ها از سمت چپ به راست می‌دوند.)

اینک می‌توان فاصله‌ها را کمی واقعی‌تر کشید.



ملاحظه می‌گردد رضا نفر اوّل، آرش دوم، کمال سوم، حمید چهارم، ابراهیم پنجم، بهمن ششم می‌باشند. فاصله‌ی هر دو نفر را در جدول زیر آورده‌ایم.

رضا	آرش	حمید	ابراهیم	کمال	بهمن	
۱۲	۹	۴	۲	۶	۰	بهمن
۶	۳	۲	۴	۰	۶	کمال
۱۰	۷	۲	۰	۴	۲	ابراهیم
۸	۵	۰	۲	۲	۴	حمید
۳	۰	۵	۷	۳	۹	آرش
۰	۳	۸	۱۰	۶	۱۲	رضا

مثال ۲۷: **بهنام و سامان یک دسته کارت دارند که روی هر کدام شماره‌های ۱ ، ۲ ، ... و ۱۰۰ نوشته شده. بهنام از مادرش یک مشت نخود برای خودش و یک مشت لوبیا برای سامان می‌گیرد و کارت‌ها را به‌صورت زیر کنار هم روی زمین می‌چینند.**

۱	۲	۳	۴	...	۹۵	۹۶	۹۷	۹۸	۹۹	۱۰۰

بهنام با شروع از کارت شماره‌ی ۱ بالای کارت‌های شماره‌ی ... , ۱۰ , ۷ , ۴ , ۱ یک نخود می‌گذارد و به سامان نیز می‌گوید تا با شروع از عدد ۱۰۰ پایین کارت‌های شماره‌ی ... , ۸۸ , ۹۲ , ۹۶ , ۱۰۰ یک لوبیا بگذارد.

الف) نخود بیش‌تری مصرف می‌شود یا لوبیا؟

ب) چند کارت هم لوبیا دارد و هم نخود؟

ج) چند کارت نه لوبیا دارد و نه نخود؟

د) وضعیت کارت شماره‌ی ۴۷ چیست؟

ه) مجموعاً چند نخود و لوبیا مصرف شده است؟

حل: با دقت در شماره‌ی کارت‌هایی که بهنام بالای آن‌ها نخود قرار داده، ملاحظه می‌گردد که شماره‌ی این کارت‌ها اعدادی هستند که باقی‌مانده‌ی تقسیم آن‌ها بر ۳ برابر یک می‌باشند. ۱۰۰ , ... , ۱۰ , ۷ , ۴ , ۱

که تعداد آن‌ها برابر است با: $\frac{۱۰۰-۱}{۳}+۱=۳۳+۱=۳۴$

هم‌چنین شماره‌ی کارت‌هایی که سامان پایین آن‌ها لوبیا قرار داده مضرب ۴ می‌باشد.

$$۱۰۰ , ۹۶ , ۹۲ , ۸۸ , \dots , ۴$$

که تعداد آن‌ها $۲۵ = ۱ + ۲۴ = ۱ + \frac{۹۶}{۴} = ۱ + \frac{۱۰۰ - ۴}{۴}$ است. بنابراین:

الف) نخود بیش‌تری مصرف شده.

ب) کارت‌های شماره‌ی ۴ ، ۱۶ ، ۲۸ ، ۴۰ ، ۵۲ ، ۶۴ ، ۷۶ ، ۸۸ و ۱۰۰ هم بالا سرشان نخود است و هم پایین آن‌ها لوبیا!
تعداد این کارت‌ها ۹ تا می‌باشد. ملاحظه می‌کنید که شماره‌ی این کارت‌ها مضرب‌هایی از $۱۲ + ۴$ می‌باشند.

ج) تعداد کارت‌هایی که یا نخود دارند یا لوبیا و یا هر دو آن‌ها عبارت است از:

$$۳۴ + ۲۵ - ۹ = ۵۹ - ۹ = ۵۰$$

بنابراین $۵۰ = ۵۰ - ۱۰۰$ کارت هست که نه نخود دارند و نه لوبیا.

د) عدد ۴۷ مضرب ۴ نیست و باقی‌مانده‌ی آن بر ۳ برابر یک نمی‌باشد بنابراین در کنار این کارت نخود و لوبیا وجود ندارد.

هـ) $۳۴ + ۲۵ = ۵۹$