کتاب آموزش

ریاضی دهم یکتا

(رشته های ریاضی و تجربی)

از مجموعه رشادت

سعید بیاتی   آرزو کامیار   بابک نهرینی

بسم الله الرحمن الرحيم

مقدمه

دوستان نادیده، سلام!

در تمام روزها و شب‌هایی که مشغول نوشتن این کتاب بودیم، یک فکرِ قوی بکگراند ذهن داشتیم، این که در این کتاب فقط دیتا ارائه ندیم و سعی کنیم منطق و مفهوم ماجرا رو برسونیم وگرنه دیتا تو ویکی پدیا هم هست! حالا چرا این موضوع برامون مهمه؟!

بچه‌ها! دنیا داره به سمتی پیش میره که روزبه‌روز باید به دانش و مهارت خودتون اضافه کنید و این مسئله مختص یک گروه سنی خاص نیست، یعنی هر آدمی که بخواد دنیا و آدمهاش رو بهتر درک کنه و منزوی نشه باید دائماً در حال یادگیری چیزهای جدید و استفاده کردن از اون چیزها باشه!

حتی یه جاهایی باید سعی کنه خودش هم چیزای جدیدی خلق کنه! حالا اون «چیز» می‌تونه ریاضی، شنا، آشپزی، شعر و... باشه، موضوع اینه که اگر به هر دلیلی دسترسی به معلم و مربی نداشتید، بلد باشین از ابزارهای یادگیری، که یکی از بهترین‌هاش کتابه، استفاده کنین؛ وقتی تو خلوت خودتون یک موضوع رو یاد بگیرید، شهود شخصیتون بهش اضافه میشه! این «شهود» چیز جالبیه! مثلاً باعث میشه به اون موضوع خاص علاقه‌مند بشید، آدمیزاد چیزی که بلد باشه رو دوست داره، بخصوص اگر خودش یاد گرفته باشه ... حالا روی صحبت با کساییکه میگن از ریاضی خوششون نمیاد، ببینیم اگه ریاضی رو بلد باشین بازم ازش بدتون میاد؟!!

خب؛ اگر فکر می‌کنید کارهایی که گفتیم وقت گیره، باید بگیم درست فکر می‌کنید! ولی صرف کردن وقت برای این کار، سرمایه‌گذاری بزرگیه. الان که پایهٔ دهم هستین وقتش رو دارین.

حالا که به هر دلیلی افتادین تو مسیری که باید ریاضی یاد بگیرید، لطفاً با دل و جون انجامش بدین! نصفه و نیمه و شل و ول بودن، آدم رو پیر و ملول می‌کنه ... به قول فروغی بسطامی:

من نمی‌گویم سمندر باش یا پروانه باش

چون به فکر سوختن افتاده‌ای مردانه باش

حالا ما با این توضیحات و تشریفات براتون یه کتاب نوشتیم: «**کتاب ریاضی دهم یکتا از مجموعه رشادت**»

از درسنامه‌ها و مثال‌های کتاب ساده نگذرید، پشت هر کدوم کلی فکر بوده. پرسش‌های تشریحی مناسب امتحانات مدرسه هستند و پرسش‌های چهارگزینه‌ای شما رو برای آزمون‌های آزمایشی و کنکور آماده می‌کنند. اکیداً توصیه می‌شود که بعد از یاد گرفتن درس و حل تست‌ها و تمرین‌ها، سراغ آزمون انتهای فصل بروید و حتماً در زمان مشخص آزمون بدین.

تشکرگاه

ـ سپاس از آقای یحیی دهقانی مدیر عامل محترم انتشارات، برای فراهم کردن بستر تألیف.

ـ درود بیکران بر مهندس هادی عزیززاده، دبیر محترم مجموعه، بابت اعتمادشان به ما و همراهی صبورانه و پدرانه‌شان در مسیر تألیف.

ـ ممنونیم از خانم‌ها آسیه فلاح و طوبی عینی‌پور بابت پیگیری‌ها و هماهنگ کردن مؤلفین و تیم اجرائی.

ـ خانم لیلا مهرعلی‌پور امور تایپ رو با بهترین دقت و بیش‌ترین سرعت انجام دادند.

ـ زیبایی کتاب زحمت خانم بهاره خدامی، گرافیست محترم مجموعه است.

ـ ویرایش علمی کار، بر عهدهٔ آقای محمد ابراهیم‌زاده بوده است، ممنون از ایشان.

ـ سپاس از تمامی مسئولین و دوستان در انتشارات خوش سابقهٔ مبتکران.

از طریق **@riaziat.yekta** با ما در ارتباط باشید.

سعید بیاتی

آرزو کامیار

بابک نهرینی

فهرست

۱

فصل اول: مجموعه، الگو و دنباله

درس ۱: مجموعه

درس ۲: الگو و دنباله

درس اول: مجموعه

۱- مجموعه چیست؟

در ریاضیات برای بیان و نمایش دسته‌ای از اشیاء مشخص (عضویت این اعضا در مجموعه کاملاً معین باشد) و متمایز (غیرتکراری) از مجموعه استفاده می‌کنیم[1]. مثلاً:

- مجموعهٔ اعداد فرد یک‌رقمی: $A=\{۱,۳,۵,۷,۹\}$
- مجموعه شمارنده‌های طبیعی عدد ۴۵: $B=\{۱,۳,۵,۹,۱۵,۴۵\}$

با توجه به تعریف مجموعه، «چهار شاعر ایرانی» یا «پنج عدد که مضرب ۳ باشند» مشخص‌کنندهٔ یک مجموعه نمی‌باشند؛ چرا که اعضای آن‌ها به‌طور دقیق مشخص نیستند.

با توجه به تعریف مجموعه، اعضای یک مجموعه باید غیرتکراری باشند. مثلاً به‌جای $A=\{۱,۲,۳,۱,۵\}$ باید بنویسیم:

$A=\{۱,۲,۳,۵\}$

هم‌چنین در نوشتن اعضای مجموعه، ترتیب اهمیتی ندارد: $\{۱۰۰,۱۰۱,۱۰۲\}=\{۱۰۲,۱۰۰,۱۰۱\}$

۲- عضو بودن در مجموعه

برای نمایش عضویت در یک مجموعه از نماد $\in$ استفاده می‌کنیم.

$A=\{۲,۴,۶,۸,۱۰\} \Rightarrow ۲\in A$ (بخوانید: ۲ عضو مجموعهٔ A است.)

$\Rightarrow ۹\notin A$ (بخوانید: ۹ عضو مجموعهٔ A نیست.)

تعداد اعضای مجموعهٔ A را با $n(A)$ نشان می‌دهیم. مثلاً:

$A=\{۲,۴,۶,۸,۱۰\} \Rightarrow n(A)=۵$ (این یعنی مجموعهٔ A، ۵ عضو دارد.)

۳- زیرمجموعه بودن

دو مجموعهٔ A و B را در نظر بگیرید.

هرگاه همهٔ اعضای B در A هم عضو باشند، می‌گوییم B زیرمجموعهٔ A است و می‌نویسیم: $B\subseteq A$. مثلاً:

$$\begin{cases} A=\{۳,۶,۹,۱۲,۱۵,۱۸,۲۱\} \\ B=\{۶,۱۲,۱۸\} \\ C=\{۳,۹,۱۵,۲۱,۲۷\} \end{cases} \Rightarrow$$

$B\subseteq A$ (بخوانید: B زیرمجموعهٔ A است.)

$C\not\subseteq A$ (بخوانید: C زیرمجموعهٔ A نیست.)

هر مجموعه‌ای زیرمجموعهٔ خودش است:

$$\begin{cases} A\subseteq A \\ B\subseteq B \\ C\subseteq C \end{cases}$$

۴- مجموعهٔ تهی

مجموعه‌ای که هیچ عضوی ندارد «تُهی» است. مجموعهٔ تُهی را با نماد $\varnothing$ یا $\{\ \}$ نمایش می‌دهند.

مثلاً مجموعهٔ «اعداد فردی که بر ۲ بخش‌پذیرند» تُهی است. (*مگه می‌شه یه عدد فرد، بر ۲ بخش‌پذیر باشه؟!*)

دقت کنید که $\{\varnothing\}$ و $\{۰\}$ تُهی نیستند؛ بلکه مجموعه‌های تک‌عضوی هستند.

مثال: اگر $A=\{۲\}$، $B=\{۲,\{۲\}\}$ و $C=\{\{۲\},\{۲,\{۲\}\}\}$ باشد، کدام رابطه نادرست است؟ (*ریاضی خارج ۸۶*)

۱) $B\subseteq C$
۲) $A\subseteq B$
۳) $A\in B$
۴) $B\in C$

حل: گزینه‌ها را تک‌تک بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ (۱): نادرست؛ اگر B زیرمجموعهٔ C باشد، باید اعضای B یعنی ۲ و $\{۲\}$ در C باشند که اینطور نیست.

---

۱. البته مفهوم مجموعه اینقدر پایه‌ای است که ارائهٔ تعریفی دقیق برای آن دشوار است.

گزینهٔ (۲): درست؛ $A \subseteq B$، زیرا تنها عضو A (یعنی ۲) در B وجود دارد.

گزینهٔ (۳): درست؛ $A \in B$، ما مجموعهٔ A، یعنی $\{۲\}$ را دقیقاً در B می‌بینیم.

گزینهٔ (۴): درست؛ $B \in C$، ما مجموعهٔ B، یعنی $\{۲,\{۲\}\}$ را دقیقاً در C می‌بینیم.

پس پاسخ، گزینهٔ (۱) می‌باشد.

مثال: تمام زیرمجموعه‌های $D = \{۳,\{۵\},\{۱,۲\}\}$ را بنویسید.

حل: می‌دانید که تُهی زیرمجموعهٔ هر مجموعه‌ای است و هر مجموعه‌ای زیرمجموعهٔ خودش است؛ اول آن‌ها را می‌نویسیم:

$\varnothing, \{۳,\{۵\},\{۱,۲\}\}$

حال زیرمجموعه‌های تک‌عضوی: $\{۳\},\{\{۵\}\},\{\{۱,۲\}\}$

(دقت! در مجموعهٔ D، $\{۱,۲\}$ یک عضو محسوب می‌شود.)

و در آخر زیرمجموعه‌های دوعضوی: $\{۳,\{۵\}\},\{۳,\{۱,۲\}\},\{\{۵\},\{۱,۲\}\}$

دیدید که مجموعهٔ D، ۸ زیرمجموعه دارد. *(بزرگ‌تر که شدید، یاد می‌گیرید که بدون نوشتن تک‌تک زیرمجموعه‌ها هم می‌توان تعداد آن‌ها را مشخص کرد.)*

مثال: اگر $P = \{m,n,l\}$، کدام درست و کدام نادرست است؟

الف) $m \in P$ ب) $n \subseteq P$ پ) $\{l\} \in P$ ت) $\{l\} \subseteq P$

حل:

دقیقاً عضو m را در مجموعهٔ P می‌بینیم. الف) $m \in P$ ✓

رابطهٔ زیرمجموعه بودن، بین «مجموعه‌ها» برقرار است؛ درحالی‌که n یک عضو است، نه مجموعه! ب) $n \subseteq P$ ×

درستش می‌شود: $\{n\} \subseteq P$.

در مجموعهٔ P، دقیقاً $\{l\}$ را نمی‌بینیم. پ) $\{l\} \in P$ ×

$\{l\}$ یکی از زیرمجموعه‌های تک‌عضوی P است. ت) $\{l\} \subseteq P$ ✓

مثال: کدام گزاره درست و کدام نادرست است؟

الف) $r \in \{\{r\},\{r,t\}\}$ ب) $\{r\} \subseteq \{\{r\},\{r,t\}\}$

پ) $\{۵,y,-۲\} \subseteq \{y,-۲,۵\}$ ت) $\{m,n\} \subseteq \{n,m\}$

حل:

اگر قرار بود r عضو این مجموعه باشد، باید دقیقاً r را در آن می‌دیدیم. الف) $r \in \{\{r\},\{r,t\}\}$ ×

$\{r\}$ یکی از اعضای مجموعه است و زیرمجموعه نیست. ب) $\{r\} \subseteq \{\{r\},\{r,t\}\}$ ×

(درستش اینه: $\{\{r\}\} \subseteq \{\{r\},\{r,t\}\}$.)

هر مجموعه‌ای زیرمجموعهٔ خودش است. پ) $\{۵,y,-۲\} \subseteq \{y,-۲,۵\}$ ✓

هر مجموعه‌ای زیرمجموعهٔ خودش است. ت) $\{m,n\} \subseteq \{n,m\}$ ✓

مثال: کدام گزاره درست و کدام نادرست است؟

الف) $\varnothing = \{\varnothing\}$ ب) $\varnothing \subseteq \{\varnothing\}$

پ) $\varnothing \in \{\varnothing\}$ ت) $\{\varnothing\} \in \{\varnothing,\{\varnothing\}\}$

حل:

∅ یعنی مجموعه‌ای بدون عضو، درحالی‌که $\{\varnothing\}$ مجموعه‌ای تک‌عضوی است. × $\varnothing = \{\varnothing\}$ **الف**

درست است. تهی زیرمجموعهٔ هر مجموعه‌ای است. ✓ $\varnothing \subseteq \{\varnothing\}$ **ب**

$\{\varnothing\}$ یک مجموعهٔ تک‌عضوی است و تنها عضو آن ∅ می‌باشد. ✓ $\varnothing \in \{\varnothing\}$ **پ**

$\{\varnothing\}$ دقیقاً در مجموعه دیده می‌شود. ✓ $\{\varnothing\} \in \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ **ت**

۵- دو مجموعهٔ مساوی

هرگاه اعضای دو مجموعهٔ A و B یکسان باشند و هر عضوی از A، عضـوی از B، و هـر عضـو از B عضـوی از A باشـد، در این‌صورت، دو مجموعهٔ A و B برابرند و می‌نویسیم: A = B. مثلاً:

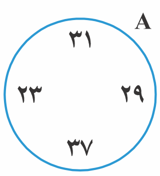
$$\left.\begin{array}{l} A = \{۳/۱۴\,,\,۳/۱۴۱\,,\,۳/۱۴۱۵\,,\,۳/۱۴۱۵۹\} \\ B = \{۳/۱۴۱۵۹\,,\,۳/۱۴۱۵\,,\,۳/۱۴۱\,,\,۳/۱۴\} \end{array}\right\} \Rightarrow A = B$$

(یادتان که نرفته؛ ترتیب اعضا در نوشتن مجموعه‌ها اهمیت ندارد.)

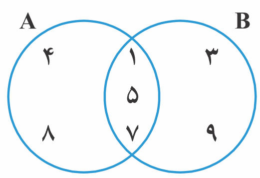
۶- نمودار وِن

مجموعه‌ها را می‌توان با استفاده از خط‌های شکستهٔ بسته نمایش داد. چندتا مثال ببینید:

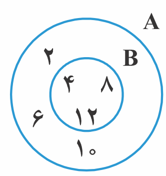
الف $A = \{۲۳, ۲۹, ۳۱, ۳۷\}$



ب $A = \{۱, ۴, ۵, ۷, ۸\}$ و $B = \{۱, ۳, ۵, ۷, ۹\}$



پ $A = \{۲, ۴, ۶, ۸, ۱۰, ۱۲\}$ و $B = \{۴, ۸, ۱۲\}$



۷- نمایش مجموعه‌ها با نماد ریاضی

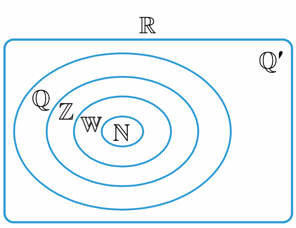
گاهی برای نمایش مجموعه‌ها از نمادهای ریاضی استفاده می‌کنیم. مثلاً مجموعهٔ $A = \{۵, ۱۰, ۱۵, ...\}$ را در نظر بگیرید. همهٔ اعضا اعداد طبیعی مضرب ۵ هستند و می‌دانیم که مضارب طبیعی ۵ را به‌صورت ۵k نمایش می‌دهند که k یک عدد طبیعی است. بنابراین می‌توانیم بنویسیم: $A = \{۵k \mid k \in \mathbb{N}\}$

و می‌خوانیم: « A برابر است با مجموعه عددهایی به شکل ۵k، به‌طوری که k متعلق به همهٔ عددهای طبیعی است.»

در زیر مجموعه‌های پرکاربرد ریاضی را آورده‌ایم:

- مجموعهٔ اعداد طبیعی: $\mathbb{N} = \{۱, ۲, ۳, ...\}$
- مجموعهٔ اعداد زوج طبیعی: $\mathbb{E} = \{۲, ۴, ۶, ...\}$
- مجموعهٔ اعداد فرد طبیعی: $\mathbb{O} = \{۱, ۳, ۵, ...\}$
- مجموعهٔ اعداد حسابی: $\mathbb{W} = \{۰, ۱, ۲, ...\}$
- مجموعهٔ اعداد صحیح: $\mathbb{Z} = \{..., -۲, -۱, ۰, ۱, ۲, ...\}$
- مجموعهٔ اعداد گویا: $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq ۰\}$
- مجموعهٔ اعداد گنگ: $\mathbb{Q}' =$ مجموعهٔ اعدادی که نتوان آن‌ها را به‌صورت نسبت دو عدد صحیح نمایش داد
- مجموعهٔ اعداد حقیقی: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$

مجموعه‌های ذکر شده را در نمودار وِن نمایش می‌دهیم:



رابطهٔ زیرمجموعه بودن را به زبان ریاضی می‌نویسیم: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

مثال: اعضای هر مجموعه را بنویسید:

الف) $A=\{x \mid x\in\mathbb{Z}\,,\,x^{۲}\le ۶۴\}$

ب) $B=\left\{\dfrac{(-۱)^n}{n+۱}\mid n\in\mathbb{N}\right\}$

پ) $C=\{x^{۲}-۵x+۶ \mid x=۲,۳\}$

ت) $D=\left\{\dfrac{a}{b}\mid a,b\in\mathbb{R}\,,\begin{matrix}۲a+b=۶\\ a-b=۳\end{matrix}\right\}$

ث) $E=\{۳^m \mid m\in\mathbb{Z}\,,\,-۳\le m<۳\}$

حل:

الف) اعضای مجموعهٔ A اعداد صحیحی هستند که مربعشان کوچک‌تر یا مساوی ۶۴ است. بنابراین:

$$A=\{x \mid x\in\mathbb{Z},x^{۲}\le ۶۴\}=\{-۸,-۷,-۶,\dots,۰,۱,۲,\dots,۶,۷,۸\}$$

ب) به‌جای n اعداد طبیعی را می‌گذاریم:

$$B=\left\{\frac{(-۱)^n}{n+۱}\mid n\in\mathbb{N}\right\}=\left\{\frac{(-۱)^{۱}}{۱+۱},\frac{(-۱)^{۲}}{۲+۱},\frac{(-۱)^{۳}}{۳+۱},\frac{(-۱)^{۴}}{۴+۱},\dots\right\}=\{\frac{-۱}{۲},\frac{۱}{۳},\frac{-۱}{۴},\frac{۱}{۵},\dots\}$$

(بد نیست یاد بگیرید که در جملهٔ $(-۱)^n$، اگر به‌جای n اعداد طبیعی را قرار دهیم، جملات به‌صورت $\dots,-۱,+۱,-۱,+۱,-۱$ می‌شود.)

پ) باید در عبارت $x^{۲}-۵x+۶$ یک‌بار ۲ و یک‌بار ۳ را قرار دهیم:

$$\left.\begin{matrix}x=۲ \Rightarrow (۲)^{۲}-۵(۲)+۶=۰\\ x=۳ \Rightarrow (۳)^{۲}-۵(۳)+۶=۰\end{matrix}\right. \Rightarrow C=\{x^{۲}-۵x+۶ \mid x=+۲,+۳\}=\{۰\}$$

ت) به‌جای این‌که مستقیماً مقدار a و b را بدهد، دو تا معادله داده، اول معادله را حل کرده و مقادیر a و b را به دست می‌آوریم؛ سپس آن‌طور که خواسته، جایگذاری می‌کنیم و اعضای مجموعه را به دست می‌آوریم:

$$+\begin{array}{l}۲a+b=۶\\ a-b=۳\\ \hline ۳a=۹ \Rightarrow a=۳\,,\,b=۰\end{array}$$

(برای حل، هر دو معادله را با هم جمع کردیم، a به دست آمد. با جایگذاری $a=۳$ در یکی از معادله‌ها، b هم به دست آمد.)

$$D=\left\{\frac{a}{b}\mid a,b\in\mathbb{R},۲a+b=۶\,,\,a-b=۳\right\}=\{\frac{۳}{۰}\}=\varnothing$$

در ریاضیات، کسری که مخرجش صفر باشد، تعریف نشده است *(آموزه‌های مهد کودک!)*. بنابراین مجموعهٔ D تهی است.

ث) کافی است به‌جای m، اعداد صحیح موردنظر سؤال را قرار دهیم.

$$E=\{۳^m \mid m\in\mathbb{Z},-۳\le m<۳\}=\{۳^{-۳},۳^{-۲},۳^{-۱},۳^{۰},۳^{۱},۳^{۲}\}=\{\frac{۱}{۲۷},\frac{۱}{۹},\frac{۱}{۳},۱,۳,۹\}$$

مثال: هر مجموعه را با نماد ریاضی نمایش دهید.

الف) $A=\{۱,۲,۴,۸,\dots\}$

ب) $B=\{\frac{۱}{۲},\frac{۲}{۳},\frac{۳}{۴},\dots\}$

پ) $C=\{\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۶},\frac{۱}{۱۲},\frac{۱}{۲۰},\dots\}$

ت) $D=\{\frac{۳}{۴},\frac{۵}{۶},\frac{۷}{۱۲},\frac{۹}{۲۰},\dots\}$

حل:

الف) روشن است که اعضای مجموعهٔ A توان‌های حسابی عدد ۲ هستند.

$$A=\{۱,۲,۴,۸,\dots\}=\{۲^k \mid k\in w\}$$

ب) یک سری کسر می‌بینیم که اولاً صورت‌ها با هم و مخرج‌ها با هم متوالی هستند، ثانیاً صورت از مخرج یک واحد کم‌تر است؛ یعنی:

$$\frac{n}{n+۱}$$

$$B=\{\frac{۱}{۲},\frac{۲}{۳},\frac{۳}{۴},\dots\}=\{\frac{n}{n+۱}\mid n\in\mathbb{N}\}$$

پ) مخرج‌ها را می‌توان به‌صورت حاصل‌ضرب دو عدد متوالی نوشت:

$$\frac{۱}{۱\times۲},\frac{۱}{۲\times۳},\frac{۱}{۳\times۴},\frac{۱}{۴\times۵},\frac{۱}{۵\times۶},\dots$$

یاد بگیرید که حاصل‌ضرب دو عدد متوالی را به‌صورت $n(n+۱)$ نمایش می‌دهند. بنابراین:

$$C=\{\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۶},\frac{۱}{۱۲},\frac{۱}{۲۰},\dots\}=\{\frac{۱}{n(n+۱)}\mid n\in\mathbb{N}\}$$

ت) مثل قسمت قبل، مخرج را می‌توان به‌صورت ضرب دو عدد متوالی نوشت.

در مورد صورت هم اگر دقت کنید می‌بینید که همان دو عدد متوالی با هم جمع شده‌اند:

$$\frac{1+2}{1\times 2},\frac{2+3}{2\times 3},\frac{3+4}{3\times 4},\frac{4+5}{4\times 5},\ldots \Rightarrow \frac{n+n+1}{n(n+1)}=\frac{2n+1}{n(n+1)}$$

$$D=\{\frac{3}{4},\frac{5}{6},\frac{7}{12},\frac{9}{20},\ldots\}=\{\frac{2n+1}{n(n+1)}\mid n\in\mathbb{N}\}$$

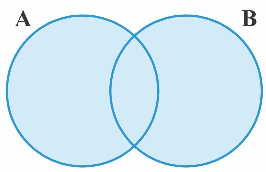
۸- اجتماع، اشتراک و تفاضل مجموعه‌ها

اجتماع: دو مجموعهٔ A و B را در نظر بگیرید. به مجموعه‌ای که اعضای آن عضو A یا B یا هر دو باشند، اجتماع A و B می‌گویند و با $A\cup B$ نمایش می‌دهند. این حرف‌ها به زبان ریاضی می‌شود:

$$A\cup B=\{x\mid x\in A \underset{\downarrow}{\text{یا}} x\in B\}$$

(به یا توجه کنید.)

نمودار وِن $A\cup B$ را هم ببینید:



$A\cup B$

مثال: اگر $A=\{2,4,\ldots,14\}$ و $B=\{3,6,\ldots,15\}$ باشد، $A\cup B$ چند عضو دارد؟

حل: اعضای دو مجموعه را می‌نویسیم: $A=\{2,4,6,8,10,12,14\}$ و $B=\{3,6,9,12,15\}$

حالا A و B را روی هم می‌ریزیم و $A\cup B$ را تشکیل می‌دهیم:

$A\cup B=\{2,3,4,6,8,9,10,12,14,15\} \Rightarrow$ ‏$A\cup B$، ۱۰ عضو دارد.

مجموعهٔ A، ۷ عضو و مجموعهٔ B، ۵ عضو دارد. $7+5=12$، پس $A\cup B$ باید ۱۲ عضو داشته باشد!

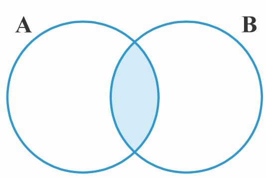
ولی دقت کنید که قرار شد عضو تکراری نداشته باشیم. ۶ و ۱۲ هم در A هستند و هم در B، ولی در نوشتن $A\cup B$ تنها یک‌بار می‌آیند.

اشتراک: اگر A و B دو مجموعهٔ دلخواه باشند، اشتراک آن‌ها مجموعه‌ای است که اعضایش هم در A هستند، هم در B و آن را به‌صورت $A\cap B$ نمایش می‌دهند:

$$A\cap B=\{x\mid x\in A \underset{\downarrow}{\text{و}} B\}$$

(به و توجه کنید.)

نمودار وِن $A\cap B$ را ببینید.



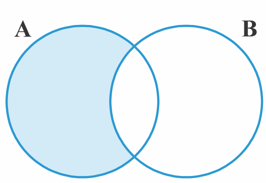
$A\cap B$

مثلاً $\mathbb{Z}\cap \mathbb{W}=\{0\}$ یعنی تنها عضو مشترک مجموعه اعداد حسابی و اعداد صحیح، عدد صفر است.

تفاضل: تفاضل دو مجموعهٔ A و B را با $A-B$ نمایش می‌دهند. $A-B$ یعنی همهٔ اعضای A که در B نیستند! به‌عبارتی باید از مجموعهٔ A، $A\cap B$ را برداریم:

$$A-B=\{x\mid x\in A, x\neq B\} \qquad A-B=A-(A\cap B)$$

$A-B$ را روی نمودار وِن نمایش دادیم.



A-B

(دقت! $A-B$ با $B-A$ فرق دارد!)

مثال: اگر $A=\{\frac{۲^x}{۲}\mid x\in\mathbb{W},۰\le x\le ۶\}$ و $B=\{۲^{k+۲}\mid k\in\mathbb{W},۰\le k\le ۵\}$ باشند. $A\cup B$ ، $A\cap B$ ، $A-B$ و $B-A$ را به‌دست آورید.

حل: اول باید اعضای دو مجموعه را پیدا کرد:

$$A=\{\frac{۲^x}{۲}\mid x\in\mathbb{W},۰\le x\le ۶\}=\{\frac{۲^۰}{۲},\frac{۲^۱}{۲},\frac{۲^۲}{۲},\frac{۲^۳}{۲},\frac{۲^۴}{۲},\frac{۲^۵}{۲},\frac{۲^۶}{۲}\}=\{\frac{۱}{۲},۱,۲,۴,۸,۱۶,۳۲\}$$

$$B=\{۲^{k+۲}\mid k\in\mathbb{W},۰\le k<۵\}=\{۲^{۰+۲},۲^{۱+۲},۲^{۲+۲},۲^{۳+۲},۲^{۴+۲}\}=\{۴,۸,۱۶,۳۲,۶۴\}$$

$A\cup B$ یعنی هر آنچه در A و B هست: $A\cup B=\{\frac{۱}{۲},۱,۲,۴,۸,۱۶,۳۲,۶۴\}$

$A\cap B$ یعنی آن چیزی که هم در A هست هم در B: $A\cap B=\{۴,۸,۱۶,۳۲\}$

$A-B$ یعنی آنچه که در A هست ولی در B نیست: $A-B=\{\frac{۱}{۲},۱,۲\}$

$B-A$ یعنی آنچه که در B هست ولی در A نیست: $B-A=\{۶۴\}$

مثال: اگر $A=\{۳۰,۳۲,۳۴,...,۹۰\}$ و $B=\{\frac{n}{۲}-۵\mid n\in A\}$ باشند. $B-A$ چند عضو دارد؟

حل: اعضای B را به دست می‌آوریم. باید اعضای A را نصف کرده و منهای ۵ کنیم:

$$B=\{\underbrace{\frac{۳۰}{۲}-۵}_{۱۰},\underbrace{\frac{۳۲}{۲}-۵}_{۱۱},\underbrace{\frac{۳۴}{۲}-۵}_{۱۲},...,\underbrace{\frac{۹۰}{۲}-۵}_{۴۰}\}=\{۱۰,۱۱,۱۲,...,۴۰\}$$

$B-A$ یعنی اعضایی که در B هستند ولی در A نیستند. (باید اشتراک A و B را از B کم کنیم).

B مجموعهٔ اعداد طبیعی ۱۰ تا ۴۰ است و A مجموعهٔ اعداد زوج ۳۰ تا ۹۰ است. پس:

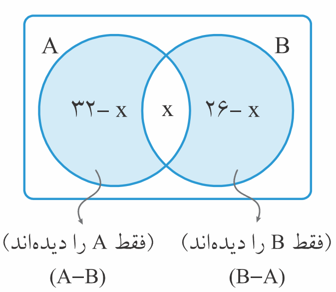
$$A\cap B=\{۳۰,۳۲,۳۴,۳۶,۳۸,۴۰\}$$

A و B، ۶ عضو مشترک دارند، خود B هم ۳۱ عضو دارد: $(\text{اولی}-\text{آخری})+۱=۴۰-۱۰+۱=۳۱$

بنابراین $B-A$، $۳۱-۶=۲۵$ عضو دارد.

مثال: از ۵۳ نفر در مورد تماشای دو فیلم سینمایی A و B سؤال کردیم. ۳۲ نفر فیلم A و ۲۶ نفر فیلم B را دیده‌اند. ۷ نفر هم هیچ‌کدام از این دو فیلم را ندیده‌اند. چند نفر دقیقاً یکی از این دو فیلم را دیده‌اند؟

حل: اول خواستهٔ سؤال را تفسیر کنیم؛ گفته «چند نفر دقیقاً یکی از این دو فیلم را دیده‌اند»، یعنی یا فقط فیلم A را دیده باشند یا فقط فیلم B را. پس قسمت رنگی در نمودار وِن را می‌خواهد.



تعداد افرادی که هم فیلم A را دیده‌اند، هم فیلم B را، x در نظر بگیریم، و با توجه به این‌که ۷ نفر هیچ‌کدام از دو فیلم را ندیده‌اند، پس:

$$n(A\cup B)=۵۳-۷=۴۶$$

$$۳۲-x\cancel{+x}+۲۶\cancel{-x}=۴۶\Rightarrow ۵۸-x=۴۶\Rightarrow x=۱۲$$

$$\text{افرادی که دقیقاً یکی از دو فیلم را دیده‌اند}=n((A-B)\cup(B-A))$$

$$=n(A-B)+n(B-A)=۳۲-x+۲۶-x\xrightarrow{x=۱۲}۳۲-۱۲+۲۶-۱۲=۳۴$$

(بزرگ‌تر که شدین، یاد می‌گیرید که $(A-B)\cup(B-A)$ اسمش «تفاضل متقارن» است و برابر است با: $(A\cup B)-(A\cap B)$

البته خیلی واضح در نمودار وِن مشخصه!)

۹- تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه

اگر دو مجموعهٔ A و B را داشته باشیم، تعداد عضوهای اجتماع آن‌ها از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\underbrace{n(A\cup B)}_{\text{تعداد اعضای اجتماع}} = \underbrace{n(A)}_{\text{تعداد اعضای A}} + \underbrace{n(B)}_{\text{تعداد اعضای B}} - \underbrace{n(A\cap B)}_{\text{تعداد اعضای اشتراک}}$$

دقت کنید که وقتی تعداد اعضای مجموعه‌های A و B را با هم جمع کنیم، عضوهای مشترک دو مرتبه شمرده می‌شوند، به‌همین دلیل، تعداد عضوهای مشترک را یک مرتبه کم می‌کنیم.

مثال: **در یک کلاس ۳۷ نفری، تعداد ۱۵ نفر از دانش‌آموزان عضو گروه سرود و ۲۱ نفر آن‌ها عضو گروه تئاتر هستند. اگر ۶ نفر عضو هیچ یک از دو گروه نباشند، چه تعداد از دانش‌آموزان فقط در گروه سرود هستند؟**

حل: تعداد اعضای گروه سرود را با $n(A)$ و تعداد اعضای گروه تئاتر را با $n(B)$ نشان می‌دهیم:

$n(A)=۱۵ \quad , \quad n(B)=۲۱$

سؤال گفته ۶ نفر عضو هیچ‌یک از دو گروه نیستند، پس تعداد افرادی که دست‌کم عضو یک گروه هستند برابر است با:

$$\underbrace{۳۷}_{\text{کل کلاس}} - \underbrace{۶}_{\text{افرادی که در هیچ گروهی نیستند}} = ۳۱$$

این ۳۱ نفر یا در گروه سرود (A) یا در گروه تئاتر (B) یا در هر دو گروه هستند؛ بنابراین: $n(A\cup B)=۳۱$

حالا رابطهٔ اجتماع را می‌نویسیم:

$$\underbrace{n(A\cup B)}_{۳۱} = \underbrace{n(A)}_{۱۵} + \underbrace{n(B)}_{۲۱} - \underbrace{n(A\cap B)}_{\text{هم در گروه سرود و هم در گروه تئاتر=؟}} \Rightarrow ۳۱ = \underbrace{\cancel{۱۵+۲۱}}_{۳۶} - n(A\cap B) \Rightarrow n(A\cap B)=۵$$

از ۱۵ نفری که در گروه سرود هستند، ۵ نفرشان در کلاس تئاتر هم هستند، پس تنها $۱۵-۵=۱۰$ نفر فقط در گروه سرود می‌باشند.

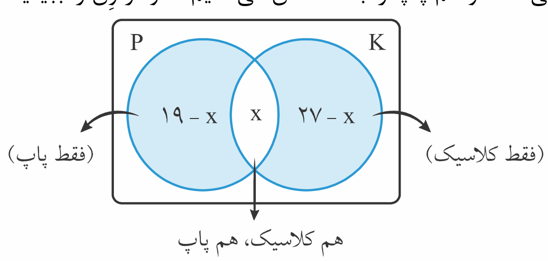
مثال: **در یک نظرسنجی از ۴۲ نفر در مورد نوع موسیقی که در شبانه‌روز گوش می‌دهند، سؤال شده است. از این تعداد، ۱۹ نفر موسیقی پاپ و ۲۷ نفر موسیقی کلاسیک گوش می‌دهند و ۶ نفر به سایر موسیقی‌ها گوش می‌دهند. چند نفر به هر دو نوع موسیقی کلاسیک و پاپ گوش می‌دهند؟**

حل: *(این سؤال هم دقیقاً مثل سؤال قبل است، ولی از روش دیگر حل می‌کنیم که حالش را ببرید.)*

تعداد افرادی که موسیقی پاپ گوش می‌دهند را با $n(p)$ و تعداد افرادی که موسیقی کلاسیک گوش می‌دهند را با $n(k)$ نشان می‌دهیم.

چون ۶ نفر نه پاپ گوش می‌دهند نه کلاسیک، پس: $n(p\cup k)=۴۲-۶=۳۶$

تعداد افرادی که هم کلاسیک گوش می‌دهند و هم پاپ را با x نشان می‌دهیم. نمودار وِن را ببینید:

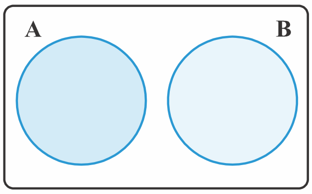


جمع سه قسمت مشخص شده، یعنی $(۲۷-x)$، x و $(۱۹-x)$ می‌شود، اجتماع k و p و گفتیم که $n(p\cup k)=۳۶$:

$$۲۷-x\cancel{+x}+۱۹\cancel{-x}=۳۶ \Rightarrow ۴۶-x=۳۶ \Rightarrow x=۱۰$$

۱۰ نفر هم موسیقی کلاسیک گوش می‌دهند، هم موسیقی پاپ.

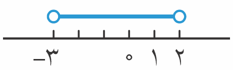
۱۰- دو مجموعه جدا از هم



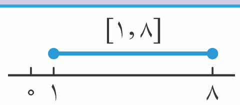
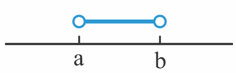
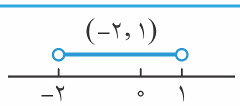
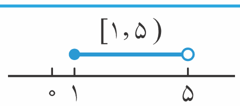
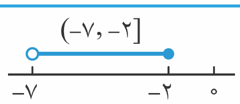
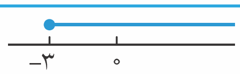
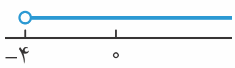
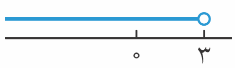
هرگاه دو مجموعه هیچ اشتراکی نداشته باشند، دو مجموعه «جدا از هم» هستند.
A و B هیچ اشتراکی ندارند، پس «جدا از هم» هستند. در چنین حالتی برای محاسبهٔ تعداد اعضای $(A\cup B)$ کافی است $n(A)$ و $n(B)$ را جمع بزنیم.
($A\cap B$ تُهی است، پس $n(A\cap B)=۰$).

۱۱- بازه‌ها

فرض کنید مجموعهٔ B شامل تمام اعداد حقیقی بین دو عدد ۳- و ۲+ باشد. می‌دانید که نمایش آن با نماد ریاضی به‌صورت $B=\{x \mid x\in\mathbb{R}\,,-۳<x<+۲\}$ است.
آیا می‌توان اولین عدد حقیقی بزرگ‌تر از ۳- را مشخص کرد؟ آیا می‌توان بزرگ‌ترین عدد حقیقی کم‌تر از ۲+ را تعیین کرد؟ آیا می‌توان تعداد اعضای مجموعهٔ B را شمارش کرد؟
پاسخ هر سه سؤال منفی است. به چنین زیرمجموعه‌هایی از اعداد حقیقی که مشخص‌کنندهٔ یک بخش از محور اعداد حقیقی هستند، «بازه» یا «فاصله» می‌گوییم.
نمایش مجموعهٔ B روی محور اعداد حقیقی به‌صورت مقابل است:



بازهٔ B را به شکل $(-۳,+۲)$ می‌نویسند.
در جدول زیر انواع بازه‌ها آموزش داده شده‌اند (a و b اعداد حقیقی هستند و $a<b$):

نوع بازه	بازه	نمایش مجموعه‌ای	نمایش هندسی	مثال
بسته	$[a,b]$	$\{x\in\mathbb{R} \mid a\le x\le b\}$	 a b	 $[۱,۸]$ ۰ ۱ ۸
باز	(a,b)	$\{x\in\mathbb{R} \mid a< x< b\}$	 a b	 $(-۲,۱)$ ۲- ۰ ۱
نیم‌باز	$[a,b)$	$\{x\in\mathbb{R} \mid a\le x< b\}$	 a b	 $[۱,۵)$ ۰ ۱ ۵
نیم‌باز	$(a,b]$	$\{x\in\mathbb{R} \mid a< x\le b\}$	 a b	 $(-۷,-۲]$ ۷- ۲- ۰
نیم‌باز	$[a,+\infty)$	$\{x\in\mathbb{R} \mid x\ge a\}$	 a	 ۳- ۰
نیم‌باز	$(-\infty,b]$	$\{x\in\mathbb{R} \mid x\le b\}$	 b	 ۰ ۵
باز	$(a,+\infty)$	$\{x\in\mathbb{R} \mid x> a\}$	 a	 ۴- ۰
باز	$(-\infty,b)$	$\{x\in\mathbb{R} \mid x< b\}$	 b	 ۰ ۳

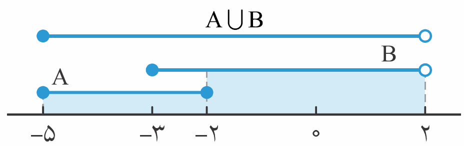
(دقت! به استفاده از علائم کروشه و پرانتز در بازه‌ها توجه کنید.)

مثال: اگر $A=[-۵,-۲]$ و $B=[-۳,+۲)$ باشد، بازه‌های زیر را روی محور اعداد حقیقی مشخص کنید:

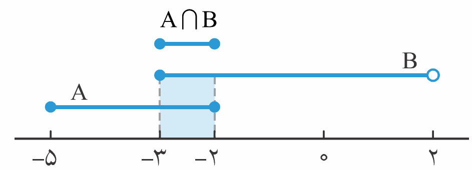
$A\cup B$ ، $A\cap B$ ، $A-B$ ، $B-A$

حل: در هر مرحله ابتدا A و B را روی محور نمایش می‌دهیم:

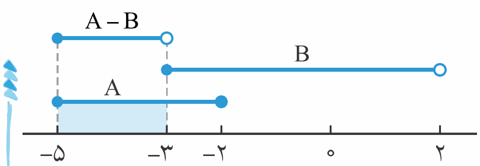
$A\cup B=[-۵,+۲)$:



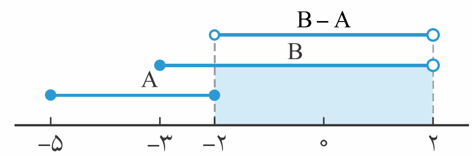
$A\cap B=[-۳,-۲]$:



$A-B=[-۵,-۳)$:



$B-A=(-۲,+۲)$:



(به پرانتزها و کروشه‌ها دقت کنید!)

مثال: اگر n عدد طبیعی و $A_n=((-۱)^n.n,۲n)$ باشد، چند عدد صحیح به $\bigcup_{n=۱}^{۴} A_n$ تعلق دارد؟ *(سراسری ریاضی ۸۴)*

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

حل: از قیافهٔ سؤال نترسید!

$\bigcup_{n=۱}^{۴} A_n$ یعنی $A_۱\cup A_۲\cup A_۳\cup A_۴$؛ یعنی در $A_n=((-۱)^n.n,۲n)$. به‌ترتیب به جای n، اعداد ۱ تا ۴ را قرار دهیم و ۴ تا بازه پیدا کنیم.

سپس اجتماع ۴ بازه را به دست بیاوریم.

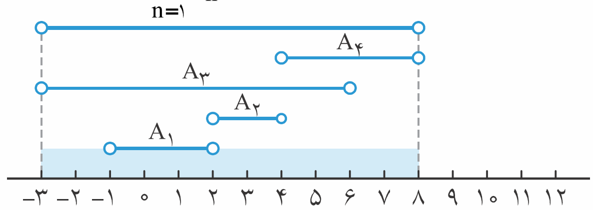
$A_۱=((-۱)^۱.۱,۲\times۱)=(-۱,۲)$

$A_۲=((-۱)^۲.۲,۲\times۲)=(۲,۴)$

$A_۳=((-۱)^۳.۳,۲\times۳)=(-۳,۶)$

$A_۴=((-۱)^۴.۴,۲\times۴)=(۴,۸)$

$\bigcup_{n=۱}^{۴} A_n=(-۳,۸)$



حالا باید ببینیم چند عدد صحیح در بازهٔ $(-۳,۸)$ قرار دارند: $\{-۲,-۱,۰,۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷\}$. ده تا. پس پاسخ گزینهٔ (۳) می‌باشد.

(به‌جای $\bigcup_{n=۱}^{۴} A_n$ ممکن است بگویند $\bigcap_{n=۱}^{۴} A_n$ که به‌معنی اشتراک گرفتن بین $A_۱$ تا $A_۴$ است.)

مثال: اگر $i\in\{۱,۲,...,۹\}$ و $A_i=[-i,\frac{۹-i}{۲}]$، آن‌گاه مجموعهٔ $(A_۲\cap A_۵)-(A_۱\cap A_۷)$ به کدام صورت است؟ *(سراسری ۹۲)*

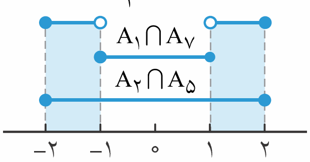
۱) $[-۲,-۱)\cup(۱,۲]$ ۲) $[-۲,-۱]\cup[۱,۲]$ ۳) $[-۱,۱]$ ۴) $\varnothing$

حل: $A_۲\cap A_۵$ یعنی به‌جای i یکبار عدد ۲ و یکبار عدد ۵ را قرار دهیم و بین دو بازهٔ به دست آمده اشتراک بگیریم.

$$\left.\begin{array}{l} A_۲=[-۲,\frac{۹-۲}{۲}]=[-۲,۳/۵] \\ A_۵=[-۵,\frac{۹-۵}{۲}]=[-۵,۲] \end{array}\right\} \Rightarrow A_۲\cap A_۵=[-۲,۲]$$

$A_۱ \cap A_۷$ یعنی یک‌بار به‌جای i، عدد ۱ و بار دیگر عدد ۷ را قرار دهیم و اشتراک بگیریم:

$$\left.\begin{array}{l} A_۱=[-۱,\frac{۹-۱}{۲}]=[-۱,۴] \\ A_۷=[-۷,\frac{۹-۷}{۲}]=[-۷,۱] \end{array}\right\} \Rightarrow A_۱ \cap A_۷=[-۱,۱]$$



از ما تفاضل این دو تا را خواسته:

$$(A_۲ \cap A_۵)-(A_۱ \cap A_۷)=[-۲,۲]-[-۱,۱]=[-۲,-۱) \cup (۱,۲]$$

پس پاسخ گزینهٔ (۱) می‌باشد.

۱۲- مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

سؤال: مجموعهٔ $A=\{۲,۴,...,۹۸\}$ چند عضو دارد؟ پاسخ: ۴۹ تا (چرا؟)

مجموعهٔ $B=\{۲,۴,۶,...\}$ چند عضو دارد؟ نمی‌دانیم!

به هر مجموعه‌ای مثل A که تعداد اعضای آن یک عدد حسابی باشد، مجموعهٔ متناهی می‌گویند.

و به هر مجموعه‌ای مثل B که نتوانیم تعداد اعضای آن را با یک عدد مشخص کنیم، مجموعهٔ نامتناهی می‌گویند.

(دقت! بازه‌های اعداد حقیقی همگی نامتناهی هستند، چرا که نمی‌توان تعداد اعضای آن‌ها را مشخص کرد. مثلاً چند عدد در بازهٔ $[-۱,۵)$ وجود دارد؟ خدا می‌دونه!)

مثال: کدام مجموعه متناهی است؟

۱) $\{\frac{n^۲+۱}{n^۲-۱} \mid n \in \mathbb{N}, n \geq ۲\}$

۲) $\{(-۱)^k.k \mid k \in \mathbb{W}\}$

۳) $\{x+\frac{۱}{x}=-۱ \mid x \in \mathbb{R}\}$

۴) $\{\frac{۵x-۱}{۲x+۳} \mid x \in \mathbb{R}, -۱ \leq x \leq ۱\}$

حل: تک‌تک بررسی می‌کنیم:

(۱) $\{\frac{n^۲+۱}{n^۲-۱} \mid n \in \mathbb{N}, n \geq ۲\}=\{\frac{۵}{۳},\frac{۱۰}{۸},\frac{۱۷}{۱۵},...\}$ $\Rightarrow$ نامتناهی

(۲) $\{(-۱)^k.k \mid k \in \mathbb{W}\}=\{۰,-۱,۲,-۳,...\}$ $\Rightarrow$ نامتناهی

(۳) $\{x+\frac{۱}{x}=-۱ \mid x \in \mathbb{R}\}=\varnothing$ $\Rightarrow$ متناهی

$x+\frac{۱}{x}$ یعنی جمع یک عدد با معکوسش؛ یاد بگیرید که جمع یک عدد با معکوسش همیشه بزرگ‌تر یا مساوی ۲ و یا کوچک‌تر یا مساوی ۲- است. بستگی به علامت دارد:

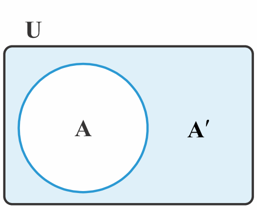
$A<۰ \ , \ A+\frac{۱}{A} \leq -۲$ $\qquad$ $A>۰ \ , \ A+\frac{۱}{A} \geq ۲$

اینجا گفته جای x چه عددی بگذاریم که $x+\frac{۱}{x}$ برابر ۱- شود؛ هیچ عددی!

x یک عدد حقیقی است، پس گزینهٔ ۴ زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی است که نامتناهی می‌باشد.

پس گزینهٔ (۳) صحیح می‌باشد.

۱۳- مجموعهٔ مرجع، متمّم یک مجموعه



مجموعهٔ مرجع یعنی مجموعه‌ای که همهٔ مجموعه‌های مورد بحث، زیرمجموعهٔ آن باشند.

مجموعهٔ مرجع را با U نمایش می‌دهند (گاهی به مجموعهٔ مرجع، مجموعهٔ جهانی هم می‌گویند).

بنا به نیاز، هرکدام از مجموعه‌های $\mathbb{N}$، $\mathbb{W}$، $\mathbb{Z}$، $\mathbb{Q}$ و ... می‌توانند مجموعهٔ مرجع باشند.

فرض کنید U مجموعهٔ مرجع و $A \subseteq U$ باشد؛ به $U-A$ متمم A می‌گویند و با A' (بخوانید: آپریم) نمایش می‌دهند (A' یعنی هر چیزی به‌غیر از A). در نمودار وِن روبه‌رو، A' را رنگ کرده‌ایم.

مثال: اگر $U=\{۲,۵,۷,۹,۱۱,۸۲\}$ مجموعهٔ مرجع و $A=\{۲,۹,۱۱,۸۲\}$ باشد، A' را تعیین کنید.

حل: گفتیم A' یعنی هر چیزی به‌جز A (البته نباید از حدود مجموعهٔ مرجع خارج شویم):

(فکر نکنید مجموعهٔ جهانی حتماً باید خیلی بزرگ باشد.)

$A'=U-A=\{۵,۷\}$

مثال: اگر $U=\{۴,۳,۲,\{۲,۳\},\{۲,۳,۴\}\}$، $A=\{۴,۲,۳,\{۲,۳\}\}$، $B=\{۲,۳,\{۲,۳\}\}$ و $C=\{۴,\{۲,۳,۴\}\}$ باشد، موارد خواسته شده را به‌دست آورید.

الف) $(B')'$ **ب)** $(A\cap C)'$ **پ)** $(B\cup C)'$

حل:

الف) اول B' را می‌نویسیم: $B'=\{۴,\{۲,۳,۴\}\}$

حالا $(B')'$ را تشکیل می‌دهیم: $(B')'=\{۲,۳,\{۲,۳\}\}$

(دیدید چی شد؟ $(B')'$ همان B شد! *پس اینو به‌عنوان یه نکته داشته باشید:* $(A')'=A$)

ب) اول $A\cap C$ را تشکیل می‌دهیم: $A\cap C=\{۴\}$

سؤال $(A\cap C)'$ را خواسته: $(A\cap C)'=\{۳,۲,\{۲,۳\},\{۲,۳,۴\}\}$

پ) اول $B\cup C$ و سپس $(B\cup C)'$ را تشکیل می‌دهیم: $B\cup C=\{۲,۳,۴,\{۲,۳\},\{۲,۳,۴\}\}$

$(B\cup C)'=\varnothing$

مثال: اگر مجموعهٔ مرجع، مجموعهٔ اعداد صحیح و $A'=\{۱,۲,۳\}$ و $B'=\{۲,۳,۴,۵\}$ باشد، آن‌گاه $(A\cup B)'$ را تشکیل دهید.

حل: دو تا رابطهٔ جدید یاد بگیرید که خیلی‌خیلی به درد می‌خورند:

(یعنی متمم اجتماع دو مجموعه، می‌شود اشتراک متمم‌های آن‌ها) $\boxed{(A\cup B)'=A'\cap B'}$

(یعنی متمم اشتراک دو مجموعه، می‌شود اجتماع متمم‌های آن‌ها) $\boxed{(A\cap B)'=A'\cup B'}$

حالا با استفاده از رابطهٔ اولی، سؤال را حل می‌کنیم: $(A\cup B)'=A'\cap B'=\{۱,۲,۳\}\cap\{۲,۳,۴,۵\}=\{۲,۳\}$

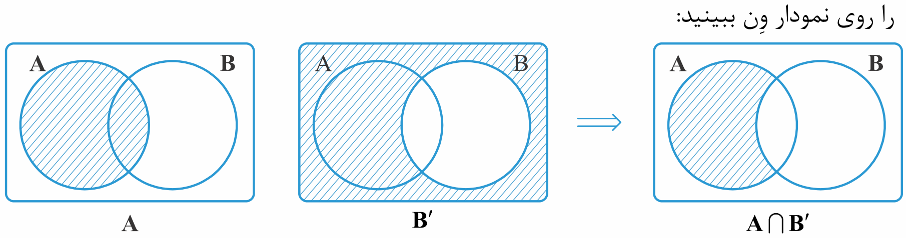
مثال: فرض کنیم A و B زیرمجموعه‌هایی از مجموعهٔ مرجع U باشند، به‌طوری‌که $n(U)=۱۰۰$، $n(A)=۶۰$، $n(B)=۴۰$ و $n(A\cap B)=۲۰$؛ مطلوب‌است:

الف) $n(A\cap B')$ **ب)** $n(A'\cap B)$ **پ)** $n(A'\cap B')$

حل: این سؤال دقیقاً مثال کتاب درسی‌تان است.

الف) $n(A\cap B')$: B' یعنی هر چیزی به‌غیر از B، ($B'=U-B$).

اشتراک B' با A را روی نمودار وِن ببینید:



قسمت هاشورخورده همان $A-B$ است، پس یاد بگیرید: $\boxed{B\cap A'=B-A}$ ، $\boxed{A\cap B'=A-B}$

$n(A\cap B')=n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)=۶۰-۲۰=۴۰$

ب می‌دانید که: $B \cap A' = A' \cap B$:

$$n(A' \cap B) = n(B \cap A') = n(B - A) = n(B) - n(A \cap B) = 40 - 20 = 20$$

پ

$$n(A' \cap B') = n(A \cup B)' = n(U) - n(A \cup B) = n(U) - [n(A) + n(B) - n(A \cap B)] = 100 - [\overset{80}{\cancel{60+40}} - 20] = 20$$

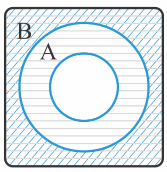
دقت کردید که: همان‌طور که $A' = U - A$، $n(A') = n(U) - n(A)$. به‌جای A هر مجموعهٔ دیگری (مثلاً $A \cup B$) می‌تواند قرار بگیرد.

مثال: اگر $A \subseteq B \subseteq U$ باشد، آن‌گاه کدام گزینه نادرست است؟

۱ $B' \subseteq A'$ **۲** $A' \cup B = U$ **۳** $A \cap B' = \varnothing$ **۴** $A' \cap B = \varnothing$

حل: فرض کنید $A \subseteq B$ باشد. A' و B' را در نمودار وِن هاشور زدیم. می‌بینید که $A' \subseteq B'$، پس یاد بگیرید:

$\boxed{A \subseteq B \Leftrightarrow B' \subseteq A'}$



پس با توجه به چیزی که گفتیم، گزینهٔ ۱ درست است.

گزینه‌های ۲ و ۳ هم با توجه به نمودار وِنِ رسم‌شده درست هستند.

اما گزینهٔ ۴ نادرست است. پس یاد گرفتید که:

$\boxed{A' \cap B = B \cap A' = B - A \neq \varnothing}$

این بخش را با چند تا جملهٔ مهم به پایان می‌بریم:

۱- اگر $A \subseteq B$، آن‌گاه $A \cup B = B$ و $A \cap B = A$

یعنی اگر رابطهٔ زیرمجموعه بودن بین دو مجموعه برقرار باشد، اجتماع آن‌ها برابر با مجموعهٔ بزرگ‌تر است. طبیعتاً اشتراک آن‌ها هم برابر با مجموعهٔ کوچک‌تر می‌باشد.

۲- $A \cup \varnothing = A$ و $A \cap \varnothing = \varnothing$

خیلی روشنه! اجتماع یک مجموعه با تُهی می‌شود خود مجموعه، و اشتراک آن با تُهی می‌شود تُهی.

۳- $A \cup U = U$ و $A \cap U = A$

اجتماع هر مجموعه با مجموعهٔ مرجع، برابر با مجموعهٔ مرجع است و اشتراک هر مجموعه با مجموعهٔ مرجع برابر با خود مجموعه است.

۴- $U' = \varnothing$ و $\varnothing' = U$

یعنی هر چیزی به جز مجموعهٔ مرجع، تُهی است و هر چیزی به جز تُهی، مجموعهٔ مرجع است.

پرسش‌های تشریحی

۱. مشخص کنید کدام‌یک از اعداد زیر گنگ است؟

الف) $\frac{۱}{۲}$ ب) $\frac{(\sqrt{۲}+۱)(\sqrt{۲}-۱)}{۳}$ پ) $\frac{۳/۱۴}{\pi}$ ت) $\frac{\sqrt{۴۹}}{(-۹)^۲}$

۲. اگر $A=\{x \mid x=\frac{۱}{k}, x\in\mathbb{N}, k\in\mathbb{Z}\}$ آن‌گاه A چند عضو دارد؟

۳. S را با کدام‌یک از مجموعه‌های $\mathbb{N}$، $\mathbb{Z}$، $\mathbb{W}$ و $\mathbb{Q}$ جایگزین کنیم تا تساوی $\{x\in S \mid -۱\le x\le ۱\}=\{۱\}$ برقرار شود؟ پاسخ خود را توضیح دهید.

۴. اگر $A=\{۱\}$، $B=\{۱,\{۱\}\}$ و $C=\{\{۱\},\{۱,\{۱\}\}\}$ باشد، کدام‌یک از روابط زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟

الف) $A\subseteq B$ ب) $A\in B$

پ) $B\subseteq C$ ت) $B\in C$

ث) $A\subseteq C$

۵. اگر $A=\{-۳,-۱\}$ و $A\cup B=\{-۵,۴\}$ باشند، کوچک‌ترین مجموعهٔ B دارای چند عضو صحیح است؟

۶. در یک کلاس ۷۰ نفری، ۶ نفر فیزیک و شیمی و ریاضی و ۸ نفر فیزیک و شیمی و ۱۱ نفر شیمی و ریاضی و ۹ نفر فیزیک و ریاضی و ۲۷ نفر شیمی و ۲۴ نفر ریاضی می‌خوانند. در این کلاس، چند نفر فقط فیزیک و چند نفر فقط شیمی می‌خوانند؟

۷. اگر $-۱<x<۰$ باشد، حاصل $(\frac{۱}{x},\frac{-۱}{x})\cap(\frac{-۱}{x^۲},\frac{۱}{x^۲})$؟

۸. اگر $B\cap C=C$ و $A\cap B=B$ باشد، چندتا از عبارات زیر درست است؟

الف) $A\subseteq B\subseteq C$ ب) $C\subseteq B\subseteq A$ پ) $A\cup B=A$ ت) $A=B=C$

۹. اگر $A=\{x\in\mathbb{R} \mid -۳\le x\le ۳\}$، $B=\{x\in\mathbb{R} \mid x\le ۲\}$ و $C=\{x\in\mathbb{R} \mid x>۱\}$، آن‌گاه بازه‌هایی را که با مجموعه‌های زیر تعریف شده‌اند، مشخص کنید.

الف) $(A-B)\cap C$ ب) $(A\cup C)-B$ پ) $(A-C)\cup(B-A)$

۱۰. سادهٔ شدهٔ عبارت $((۱,+\infty)\cup(-\infty,۰))\cap((-۲,+\infty)\cap(-\infty,۳))$ را به دست آورید.

۱۱. از موارد زیر کدام‌یک درست و کدام‌یک نادرست است؟ دلیل را توضیح دهید.

الف) $(\mathbb{Q}\cap\mathbb{Z})\cap\mathbb{N}=\mathbb{N}$ ب) $(\mathbb{R}\cup\mathbb{Z})\cap\mathbb{N}=\mathbb{N}$ پ) $(\mathbb{N}\cup\mathbb{Z})\cap\mathbb{R}=\mathbb{Z}$ ت) $(\mathbb{Q}\cap\mathbb{Z})\cup\mathbb{N}=\varnothing$

۱۲. اگر $A=[-۲,۵]$ و $B=\{x\in\mathbb{R} \mid (-x)\in A\}$، آن‌گاه مجموعهٔ $A-B$ را به دست آورید.

۱۳. اگر $A=[-۳,۱]$ و $A\cup B=[-۵,۴]$ باشد، کوچک‌ترین مجموعهٔ B دارای چند عضو صحیح است؟

۱۴. اگر $A=\{۱,۲,۳,۴\}$، $B=\{۲,۳,۴,۵\}$ و $A\cap B\subset X\subset(A\cup B)$، تعداد مجموعه‌های X را به دست آورید.

۱۵. کدام‌یک از مجموعه‌های زیر متناهی و کدام یک نامتناهی است؟

الف) $A=\{x \mid x=۴n-۱, n\in\mathbb{N}\}$ ب) $B=\{x \mid x=\frac{۱}{n}, n\in\mathbb{N}\}$

پ) $C=\{x \mid x=(-۱)^{n-۱}, n\in\mathbb{N}\}$ ت) $D=\{x \mid \frac{(-۱)^n}{n}, n\in\mathbb{N}\}$

ث) $E=\{x \mid x=\frac{(-۲)^n}{۲}, n\in\mathbb{N}\}$

۱۶. در یک کلاس ۴۰ نفری، ۱۱ نفر فقط در درس فیزیک و ۱۳ نفر فقط در درس ریاضی افتاده‌اند و فقط ۹ نفر در هر دو درس قبول شده‌اند، چند نفر در هر دو درس افتاده‌اند؟

۱۷. در یک کلاس ۲۰ نفری، ۱۲ نفر درس فیزیک و ۱۴ نفر درس شیمی را افتاده‌اند و فقط ۵ نفر در هر دو درس قبول شده‌اند.

الف) چند نفر فقط فیزیک را افتاده‌اند؟ ب) چند نفر فقط شیمی را افتاده‌اند؟