

C.B.C.

جمع بندی ریاضی تجربی
(کنکور جدید)

مجتبی دادبام

تقدیم به تو:

که قرار بود فقط «مادر» باشی

اما هم «پدر» بودی...

هم «مادر»...

مقدمه مؤلف

برنام خداوند لوح و قلم حقیقت محار و جود عدم

۱- چرا C.B.C.؟!

این عبارت فرنگی، مخفف Complete Blood Count می باشد که تقریباً همه ما دست کم یک بار دچارش شده ایم! آزمایش کامل خون که جهت چکاپ بیمار تجویز می گردد! انتخاب این نام هم از این جهت بوده که این کتاب به بررسی و چکاپ نهایی دانش داوطلبان عزیز رشته تجربی در درس ریاضی خواهد پرداخت. ولی پرواضح است که رسالت این کتاب صرفاً ارائه ایرادهای داوطلبان پس از چکاپ نخواهد بود بلکه به عنوان یک کتاب جمع بندی جامع به ارائه راهکارهایی کامل جهت رفع نواقصی که در سواد دانش آموزان وجود دارد تلاش خواهد نمود. از این رو واژه C.B.C. به زعم مؤلف عبارت Conquer Block Chain می باشد که ترجمه تحت الفظی آن «بلوک های زنجیره ای کنکور» می باشد! این نام از این جهت برازنده این نوع ارائه درس می باشد که به لحاظ ماهیت کتاب که از نوع جمع بندی است، درس به صورت نکات و بلوک هایی ارائه شده که باید به صورت زنجیر کلیت مطالب لازم را به هم ارتباط داده تا داوطلب را به سر منزل مقصود برساند!

۲- چه کسانی می توانند از این کتاب استفاده کنند؟! یا چه زمانی می توان از این کتاب استفاده کرد؟!

در جواب این سوال می توانم داوطلبان را به دو دسته کلی تقسیم کنم

گروه اول: کسانی که صرفاً برای جمع بندی از این کتاب استفاده می کنند، که زمان استفاده از این کتاب می تواند از بهمن ماه هر سال تا شب کنکور سراسری باشد. این نوع دوستانم که مطالب را از قبل آموزش دیده اند با این کتاب می توانند به دوره و تکمیل دانش خود در درس ریاضی بپردازند، از طرفی می توانند با دیدن نکات ریز این کتاب سرعت عمل خود را به میزان بالایی افزایش دهند. همینطور مطلبی که در این کتاب به خوبی انجام شده روند پنهانی است که به داوطلب کل تیپ بندی های مرسوم سؤالات را آموزش خواهد داد تا دانش آموز را به سادگی به یک تکنسین حل تست تبدیل نماید.

گروه دوم: کسانی که از این کتاب به عنوان ابزار دوره و تکرار در کل طول سال استفاده خواهند کرد. تا به حال حتماً بارها برایتان اتفاق افتاده است که پس از مدتی که از یادگیری و تسلط بر یک مبحث فاصله گرفته اید، حضور ذهن شما در مورد آن مطالب به مرور رو به افول گذاشته و حتی بعضی از بخش های آن را به فراموشی سپرده اید. از این جهت مرور مستمر و بررسی روش های خیره در طول سال و همچنین تکرار به دفعات این کار امری مهم به نظر می رسد که C.B.C. به بهترین نحو این مسئولیت را به دوش

گرفته و کمک شایانی در حفظ اطلاعات شما خواهد کرد. پس بزرگترین پیشنهاد مؤلف به نوجوانان عزیزم این خواهد بود که در طول سال و پس از پایان هر فصل حتما بخش مربوط به آن را از C.B.C مطالعه کنید تا هم دوره مطالب خوانده شده را انجام دهید هم اینکه با دانش دادبامیزه‌ای که در این کتاب به شما ارائه گردیده تسلط خود را به بالاترین سطح ممکن برسانید. در نهایت باید گفت که برای گروه دوم زمان استفاده از کتاب کل سال تحصیلی بوده و پس از پایان هر فصل با بازه‌های زمانی یک‌ماه به دوره فصل‌های گذشته پردازند.

۳- پس از بیست و دو سال تدریس در انواع مراکز آموزشی، در نهایت تصمیم به تولید مجموعه کتاب‌هایی با عنوان کلینیک ریاضی پزشکی گرفته‌ام که با همکاری و لطف انتشارات مبتکران اولین مولود آن پیش روی شماست. در ابتدا از مدیریت محترم انتشارات مبتکران جناب آقای یحیی دهقانی تشکر می‌کنم که در این شرایط اقتصادی خاص، اجرای پروژه کلینیک ریاضی پزشکی را در دستور کار مجموعه قرار دادند. در تولید محتوای این کتاب دانش آموز قدیم و دستیار و همکار این روزهایم امیرمحمد پروندی نازنین، همیشه همراه و کمک‌حال بنده بوده که وجود و انرژی جوانی‌اش بسیار به تولد C.B.C کمک کرده است. اما تیم تولید فوق‌العاده‌ای همراه بنده بودند که در هیچ مجموعه دیگری مشابه آن را به چشم ندیده‌ام. همراهی و همکاری جناب آقای خدایار مبین مدیریت بخش حروف‌چینی نعمتی بود که مراحل سخت تولید را برای پروژه آسان نمود. تشکر ویژه از سرکار خانم حمیده نوروزی که تبحر فوق‌العاده‌شان در تایپ و صفحه‌آرایی این اثر بسیار ارزشمند بود. همچنین تشکر از خانم مینا غلام‌احمدی که طراحی شکل‌ها و همچنین طراحی چشم‌نواز صفحات کتاب نتیجه هنر ایشان بوده است. تشکر ویژه از خانم سمانه ایمان‌فرد بابت طراحی جلد زیبای کتاب که با کمترین توضیحات بنده بالاترین مفهوم خواسته شده از نام کتاب را در طرح زیبای جلد پیاده کردند. همچنین از خانم نرگس سربندی بابت ترسیم دقیق شکل‌های کتاب تشکر ویژه دارم. در نهایت از کل دوستان عزیزم در واحد طراحی و حروف‌چینی موسوم به واحد پنج بابت تحمل اینجانب سپاسگزارم.

۴- حال که به جمع فرزندان بی‌شمار دادبام پیوسته‌اید بهتر دیدم که با تشکیل خانواده‌ای کوچکتر تحت عنوان خانواده C.B.C، اجتماعی را تشکیل دهیم تا خدمات آموزشی بیشتری مانند آزمون‌های تکمیلی و فیلم‌های کوتاه آموزشی در اختیار عزیزان قرار گیرد که در طول سال و به هنگام کنکورهای آزمایشی به کمک دانش‌آموزان عزیز بیایند.

برای عضویت در خانواده C.B.C حتما در کانال تلگرامی با آیدی @cbcmobtakeran عضو شوید!

هرگونه پیشنهاد یا نظر دوستان را از طریق پست الکترونیک زیر به گوش جان می‌شنویم.

mojtabadadbam@gmail.com

مجتبی دادبام

فروردین ۹۸

فهرست

مجموعه‌ها	۱
آزمون مجموعه‌ها	۱۱
الگو و دنباله	۱۷
آزمون الگو و دنباله	۲۹
توان‌های گویا و عبارتهای جبری	۳۷
آزمون توان‌های گویا و عبارتهای جبری	۴۷
قدر مطلق	۵۳
آزمون قدر مطلق	۶۹
تابع پله‌ای و جزء صحیح	۷۵
آزمون تابع پله‌ای و جزء صحیح	۸۳
معادله و تابع درجه دوم	۸۹
آزمون معادله و تابع درجه دوم	۱۱۶
معادلات و نامعادلات	۱۲۳
آزمون معادلات و نامعادلات	۱۴۳
هندسه تحلیلی	۱۴۹
آزمون هندسه تحلیلی	۱۶۴
تابع	۱۶۹
تابع و نمودار آن	۱۷۰
اعمال جبری و ترکیب توابع	۲۰۰
توابع یک‌به‌یک و وارون یک تابع	۲۱۵
مثلثات	۲۲۹
آزمون مثلثات	۲۵۳

تابع نمایی و لگاریتمی ۲۶۳

آزمون تابع نمایی و لگاریتمی ۲۷۳

حد و پیوستگی ۲۸۷

آزمون حد و پیوستگی ۳۱۲

مشتق ۳۱۹

آزمون مشتق ۳۴۷

کاربرد مشتق ۳۵۳

آزمون کاربرد مشتق ۳۷۹

آمار ۳۸۷

آزمون آمار ۳۹۷

شمارش بدون شمردن (آنالیز ترکیبی) ۴۰۱

آزمون شمارش بدون شمردن (آنالیز ترکیبی) ۴۱۵

احتمال ۴۱۹

آزمون احتمال ۴۳۴

بخش پذیری ۴۴۱

آزمون بخش پذیری ۴۴۵

هندسه (مقاطع مخروطی) ۴۴۷

آزمون هندسه (مقاطع مخروطی) ۴۷۵

هندسه (ترسیم و تالس) ۴۸۱

آزمون هندسه (ترسیم و تالس) ۴۹۹

بخش اول

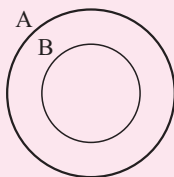


مجموعه ها

مجموعه‌ها

تعاریف و مقدمات مجموعه‌ها

۱ **مفهوم:** در ریاضیات برای نمایش دسته‌ای از اشیاء مشخص و دوبه‌دو متمایز (غیر تکراری) از مجموعه‌ها استفاده می‌شود.



۲ **زیرمجموعه:** اگر هر عضو مجموعه B ، عضوی از مجموعه A باشد، می‌گوییم مجموعه B زیرمجموعه A است و آن را با $B \subseteq A$ نمایش می‌دهیم.

هر مجموعه n عضوی دارای 2^n زیرمجموعه است.



۳ **مجموعه تهی:** مجموعه‌ای که فاقد عضو باشد و دارای نماد \emptyset یا $\{ \}$ است.

۴ **مجموعه مرجع:** مجموعه‌ای که تمام مجموعه‌های موجود در بحث، زیرمجموعه‌های آن بوده و دارای نماد U یا M است.

۵ **دو مجموعه مساوی:** دو مجموعه A و B مساوی‌اند، هرگاه تمام اعضای آنها یکسان باشد.

$$A \subseteq B, B \subseteq A \Leftrightarrow A = B$$

۶ **جبر مجموعه‌های مقدماتی:** اگر A و B دو مجموعه مفروض باشند، داریم:

نمودار ون	کلمه کلیدی	عبارت فارسی	مجموعه
	عضو هر دو	هم عضو A و هم عضو B	$A \cap B$
	حداقل عضو یکی	یا عضو A یا عضو B یا عضو هر دو	$A \cup B$

نمودار ون	کلمه کلیدی	عبارت فارسی	مجموعه
	فقط عضو A	عضو A باشند ولی عضو B نباشند	$A - B$
	فقط عضو یکی	یا فقط عضو A یا فقط عضو B باشند	$(A - B) \cup (B - A)$

مجموعه‌ها

۷ روابط جبر مجموعه‌های مقدماتی:

- ۱) $\begin{cases} A \cup A = A \\ A \cap A = A \end{cases}$
- ۲) $\begin{cases} A \cup B = B \cup A \\ A \cap B = B \cap A \end{cases}$
- ۳) $\begin{cases} A, B \subseteq A \cup B \\ A \cap B \subseteq A, B \end{cases}$
- ۴) $\begin{cases} A \cup \emptyset = A \\ A \cap \emptyset = \emptyset \end{cases}$
- ۵) $\begin{cases} A \cup U = U \\ A \cap U = A \end{cases}$
- ۶) $A \subseteq B \Rightarrow \begin{cases} A \cup B = B \\ A \cap B = A \end{cases}$



تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه $k-1$ عضوی، ۴ برابر تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه $\frac{k}{4} + 1$ عضوی می‌باشد. تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه $k-2$ عضوی کدام است؟

- ۱۲۸ (۴) ۶۴ (۳) ۳۲ (۲) ۱۶ (۱)



می‌دانیم تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه n عضوی 2^n است، در نتیجه داریم:

$$2^{k-1} = 4 \left(2^{\frac{k}{4} + 1} \right) \Rightarrow 2^{k-1} = 2^2 \times 2^{\frac{k}{4} + 1} = 2^{\frac{k}{4} + 3} \Rightarrow k-1 = \frac{k}{4} + 3 \Rightarrow \frac{k}{4} = 4$$

$$\Rightarrow 2^{k-2} = 2^6 = 64$$



تست: اگر $A = \{3k - 1 | k \in \mathbb{N}, k < 10\}$ و $B = \{4k + 3 | k \in \mathbb{N}, k \leq 7\}$ و $C = \{26 - 3k | k \in \mathbb{N}, k < 8\}$ باشند، $(A \cap B) - C$ چندعضوی است؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) صفر



ابتدا اعضای هر یک از مجموعه‌ها را مشخص می‌کنیم و سپس مجموعه‌ها خواسته شده را به دست می‌آوریم.

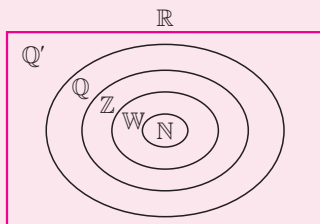
$$A = \{2/5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26\}$$

$$B = \{7, 11, 15, 19, 23, 27, 31\}$$

$$C = \{23, 20, 17, 14, 11, 8, 5\}$$

$$\Rightarrow A \cap B = \{11, 23\} \Rightarrow (A \cap B) - C = \emptyset$$

معرفی مجموعه‌های اعداد



$$N \subseteq W \subseteq Z \subseteq Q \subseteq R$$

$$Q' \subseteq R$$

$$N = \{1, 2, \dots\}$$

$$W = \{0, 1, 2, \dots\}$$

$$Z = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$$

$$Q = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in Z, b \neq 0 \right\}$$

$$Q' = \{x \mid x \notin Q\}$$

$$R = Q \cup Q'$$

۱ اعداد طبیعی:

۲ اعداد حسابی:

۳ اعداد صحیح:

۴ اعداد گویا:

۵ اعداد گنگ:

۶ اعداد حقیقی:



نکات:

۱) چون مجموعه اعداد حسابی نسبت به مجموعه اعداد طبیعی فقط عضو صفر را بیشتر دارد، داریم:

$$W = N \cup \{0\}, \quad W - N = \{0\}$$

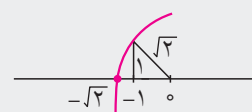
۲) مجموعه قرینه اعداد حسابی به صورت $Z - N$ و مجموعه قرینه اعداد طبیعی به صورت $Z - W$ نمایش داده می‌شوند.

۳) اگر با ماشین حساب حاصل اعداد گویا را مناسبه کنیم آنگاه یا تعداد ارقام اعشار آن محدود است و یا اعشار آنها تکرار می‌شود.

۴) اگر با ماشین حساب حاصل اعداد گنگ (رادیکالی) را مناسبه کنیم آنگاه ارقام اعشاری پس از ممیز، هرگز تمام نمی‌شوند و تکرار هم نمی‌شوند.

۵) مجموعه اعداد گویای غیر طبیعی به صورت $Q - N$ و مجموعه اعداد گویای غیر صحیح به صورت $Q - Z$ نمایش داده می‌شوند.

۶) هر عدد دلفواه باید جایی روی محور اعداد حقیقی داشته باشد و هم‌پنین هر نقطه روی این محور نشان‌دهنده یک عدد حقیقی مشخص است.



۷) برای نشان دادن اعداد گنگ به فرم \sqrt{k} روی محور، از فیثاغورس کمک می‌گیریم. به عنوان مثال برای نمایش $-\sqrt{2}$ به صورت روبه‌رو عمل می‌کنیم.

تست:

کدام یک از نتیجه گیری های زیر نادرست است؟

(۱) $N \subseteq W \subseteq Z \subseteq R$

(۲) $R - Q = Q'$

(۳) $(Q \cap Z) \cup N = Q$

(۴) اگر حاصل $\sqrt{2}$ را با ماشین حساب محاسبه کنیم، ارقام اعشاری آن تمام شده و تکرار نمی شوند.

- (۱) (۲) (۳) (۴)

هریک از گزینه ها را بررسی می کنیم:

(۱) درست است چرا که مجموعه اعداد W نسبت به N فقط عضو صفر را بیشتر دارد، مجموعه Z قرینه های W را نیز شامل می شود و مجموعه R بزرگترین و کامل ترین مجموعه است.

(۲) می دانیم $R = Q \cup Q'$ پس $R - Q = Q'$ درست است.

(۳) حاصل را بررسی می کنیم. پس نادرست است. $Q \cap Z = Z \Rightarrow Z \cup N = Z \Rightarrow$

(۴) $\sqrt{2}$ عددی گنگ است و عبارت داده شده درست است.

مجموعه ها

تست:

اگر x عددی گنگ باشد، کدام عدد ممکن است گنگ نباشد؟

(۴) $2x + 1$

(۳) $x^5 - 1$

(۲) $\frac{1}{x}$

(۱) $\frac{x+2}{x+3}$

- (۱) (۲) (۳) (۴)

در این مدل تست ها بهترین راه حل استفاده از مثال نقض است و به خاطر داشته باشیم که ابتدا به سراغ گزینه های توان دار می رویم.

$x = \sqrt[5]{2} \Rightarrow x^5 - 1 = (\sqrt[5]{2})^5 - 1 = 2 - 1 = 1$

مجموعه های متناهی و نامتناهی

۱ مجموعه متناهی (باپایان): مجموعه ای است که تعداد اعضای آن قابل شمارش است حتی اگر شمارش تعداد اعضای آن دشوار و زمان گیر باشد. به عبارت دیگر تعداد اعضای مجموعه متناهی، عددی حسابی است.

۲ مجموعه نامتناهی (بی پایان): مجموعه ای است که تعداد اعضای آن قابل شمارش نیست حتی اگر با وجود زمان و امکانات کافی همراه باشد. به عبارت دیگر تعداد اعضای مجموعه نامتناهی از هر عددی که در نظر بگیریم بزرگتر است.

نکته:

مجموعه اعداد N و W و ... همگی نامتناهی بوده و مجموعه تهی متناهی است.

۳ اعمال بر روی مجموعه‌های متناهی و نامتناهی:

وضعیت مجموعه	A و B متناهی	A و B نامتناهی	A متناهی و B نامتناهی
$A \cup B$	متناهی	نامتناهی	نامتناهی
$A \cap B$	متناهی	نامشخص	متناهی
$A - B$	متناهی	نامشخص	متناهی
$B - A$	متناهی	نامشخص	نامتناهی



- (۱) اگر مجموعه A یک زیرمجموعه نامتناهی داشته باشد، آنگاه A مجموعه‌ای نامتناهی است.
- (۲) اگر مجموعه A یک مجموعه متناهی باشد، آنگاه هر زیرمجموعه از آن هم متناهی است.



اگر A مجموعه اعداد اول و B مجموعه اعداد طبیعی فرد باشند، کدامیک از مجموعه‌های

زیر متناهی است؟

- (۱) $A \cup B$ (۲) $A \cap B$ (۳) $B - A$ (۴) $A - B$



مجموعه‌های A و B هر دو نامتناهی هستند، پس فقط می‌دانیم $A \cup B$ به طور قطعی نامتناهی است ولی برای گزینه‌های دیگر نیاز به بررسی موردی داریم.

$$A = \{2, 3, 5, \dots\} \Rightarrow \begin{cases} A \cap B = \{3, 5, 7, \dots\} & \text{نامتناهی} \\ B - A = \{1, 9, 15, \dots\} & \text{نامتناهی} \\ A - B = \{2\} & \text{متناهی} \end{cases}$$



اگر $A = \{n^2 - 4 \mid n \in \mathbb{N}, n < 5\}$ و $B = \left\{ \frac{1}{n^2 + 1} \mid n \in \mathbb{Z}, n \geq -1 \right\}$ باشد، آنگاه چه

تعداد از مجموعه‌های زیر متناهی هستند؟

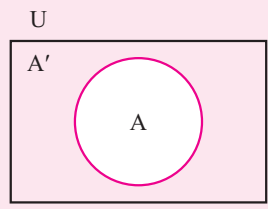
- (الف) $A \cup B$ (ب) $A \cap B$ (پ) $A - B$ (ت) $B - A$

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴



ابتدا عضوهای مجموعه‌های داده شده را مشخص می‌کنیم.
 $A = \{-3, 0, 5, 12\}$, $B = \left\{ \frac{1}{3}, 1, \frac{1}{5}, \dots \right\}$
 پس مجموعه A متناهی و مجموعه B نامتناهی است در نتیجه مجموعه‌های $A \cap B$ و $A - B$ متناهی‌اند.

متمم یک مجموعه و دو مجموعه جدا از هم



اگر U مجموعه مرجع باشد، آنگاه مجموعه $A' = U - A$ را متمم مجموعه A می‌نامیم که مجموعه A' شامل تمام عضوهایی از U است که در A حضور ندارند.

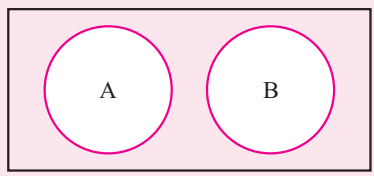
$$A' = U - A \xrightarrow{\text{نتیجه}} \begin{cases} A' \cap A = \emptyset \\ A' \cup A = U \end{cases}$$

اگر N مجموعه مربع باشد، مجموعه اعداد زوج متمم مجموع اعداد فرد است و برعکس. نکته:

اگر A و B دو مجموعه با مجموعه مرجع U باشند، آنگاه داریم:

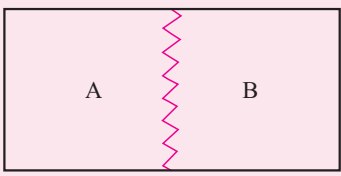
- ۱) $(A')' = A$ ۲) $U' = \emptyset$
- ۳) $\emptyset' = U$ ۴) $A - B = A \cap B'$
- ۵) $A - B = A - (A \cap B)$ ۶) $\begin{cases} (A \cap B)' = A' \cup B' \\ (A \cup B)' = A' \cap B' \end{cases}$ (دمورگان)
- ۷) $A' \subseteq B' \Leftrightarrow B \subseteq A$

اگر دو مجموعه A و B فاقد اشتراک باشند ($A \cap B = \emptyset$)، آنگاه دو مجموعه جدا از هم و یا مجزا هستند. نکته:



$$A \cap B = \emptyset \xrightarrow{\text{نتیجه}} \begin{cases} A - B = A \\ B - A = B \end{cases}$$

در حالت کلی اگر دو مجموعه A و B جدا از هم باشند آنگاه $B \subseteq A'$ و $A \subseteq B'$ است ولی در یک حالت خاص داریم: نکته:



$$A \cap B = \emptyset, \begin{cases} A' = B \\ B' = A \end{cases}$$

تست:

اگر $A \cap B = A$ ، کدام یک از روابط زیر نادرست است؟

- $A \subseteq B$ (۴) $A' \cup B' = A'$ (۳) $A \cap B' = A$ (۲) $B' \subseteq A'$ (۱)

- (۴) (۳) (۲) (۱)

چون $A \cap B = A$ در نتیجه $A \subseteq B$ است. حال هر گزینه را جداگانه بررسی می کنیم.

- ۱) $A \subseteq B \Leftrightarrow B' \subseteq A'$ ✓
 ۲) $A \cap B' = A - B = A - (A \cap B) = A - A = \emptyset$ ✗
 ۳) $A \cap B = A \xrightarrow{\text{متمم}} A' \cup B' = A'$ ✓
 ۴) $A \subseteq B$ ✓

تست:

اگر A و B دو مجموعه جدا از هم باشند، کدام یک از روابط زیر نادرست است؟

- $A \subseteq B'$ (۴) $A' \cup B' = \emptyset$ (۳) $B - A = B$ (۲) $A - B = A$ (۱)

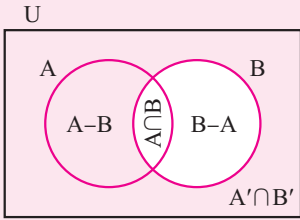
- (۴) (۳) (۲) (۱)

چون دو مجموعه A و B جدا از هم اند در نتیجه $A \cap B = \emptyset$ ، حال هر گزینه را بررسی می کنیم:

- ۱) $A - B = A - (A \cap B) = A - \emptyset = A$ ✓
 ۲) $B - A = B - (A \cap B) = B - \emptyset = B$ ✓
 ۳) $A \cap B = \emptyset \xrightarrow{\text{متمم}} A' \cup B' = U$ ✗
 ۴) $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \subseteq B'$, $B \subseteq A'$ ✓

تعداد اعضای دو مجموعه متناهی

- ۱) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ (حداقل یکی از A یا B)
 ۲) $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$ (فقط A)
 ۳) $n(A' \cap B') = n(U) - n(A \cup B)$ (هیچ کدام)
 ۴) $n(A - B) + n(B - A) = n(A) + n(B) - 2n(A \cap B)$ (فقط یکی)



.....
 حالت مهزا بودن دو مجموعه $(A \cap B = \emptyset)$ و حالتی که یک مجموعه، زیرمجموعه دیگری باشد نیز در مسائل اهمیت دارند و برای آنها داریم:

نکته:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

۱) $A \cap B = \emptyset \Rightarrow$

$$n(A - B) = n(A)$$

$$n(A \cup B) = n(B)$$

۲) $A \subseteq B \Rightarrow$

$$n(A - B) = 0$$

.....
 بسیاری از مسائل این قسمت صرفاً با نمودار ون حل می‌شوند و نیازی به روابط فوق ندارند. پس در مسائل ابتدا روش نمودار ون را امتحان می‌کنیم و اگر جواب ندر سرانجام روابط فوق می‌رویم.

نکته:

تست:

اگر A و B دو مجموعه بوده و $n(A - B) = 12$ و $n(B - A) = 14$ و $n(A \cup B) = 31$ باشند، آنگاه $n(A)$ کدام است؟

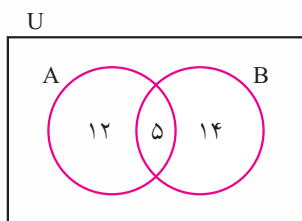
۲۳ (۴)

۲۱ (۳)

۱۹ (۲)

۱۷ (۱)

۱ ۲ ۳ ۴



سؤال را به کمک نمودار ون حل می‌کنیم:

$$n(A \cap B) = 31 - (12 + 14) = 5$$

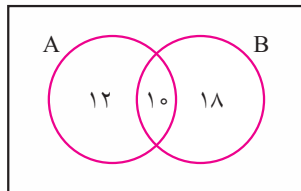
$$n(A) = 12 + 5 = 17$$

تست:

اجتماع دو مجموعه A و B دارای ۴۰ عضو است. مجموعه‌های (A - B) و (B - A) به ترتیب ۱۲ و ۱۸ عضو دارند. اگر از هر یک از مجموعه‌های A و B، ۹ عضو برداشته شود، از مجموعه اشتراک آنها ۴ عضو کم می‌شود. تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه جدید کدام است؟

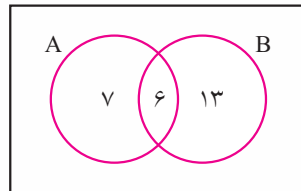
- ۲۲ (۱) ۲۳ (۲) ۲۴ (۳) ۲۶ (۴)

④ ③ ② ①



اطلاعات داده شده نمودار ون به صورت روبه‌رو می‌باشد.

$$n(A \cap B) = 40 - (12 + 18) = 10 \Rightarrow \begin{cases} n(A) = 22 \\ n(B) = 28 \end{cases}$$



حال با برداشتن ۹ عضو از هر مجموعه نمودار ون جدید به صورت روبه‌رو در خواهد آمد.

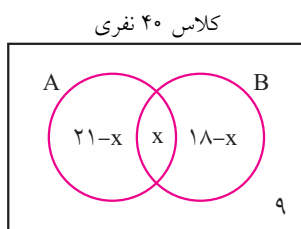
$$n(A \cup B) = 7 + 6 + 13 = 26$$

تست:

در یک کلاس ۴۰ نفری، ۱۸ نفر در برنامه‌های هنری و ۲۱ نفر در برنامه‌های علمی شرکت کرده‌اند. اگر ۹ نفر آنها در این دو برنامه شرکت نکرده باشند، چند نفر آنان در هر دو برنامه شرکت کرده‌اند؟

- ۵ (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴)

④ ③ ② ①



اطلاعات داده شده را در قالب یک نمودار ون رسم می‌کنیم و در این نمودار مجموعه A را برنامه‌های هنری و مجموعه B را برنامه‌های علمی در نظر می‌گیریم.

$$(21 - x) + (x) + (18 - x) + 9 = 40 \Rightarrow x = 8$$

مجموعه‌ها

۱. اگر $A = \{2\}$ و $B = \{2, \{2\}\}$ و $C = \{\{2\}, \{2, \{2\}\}\}$ ، کدام رابطه نادرست است؟
 (۱) $B \subseteq C$ (۲) $A \subseteq B$ (۳) $A \in B$ (۴) $B \in C$
۲. اگر $A = \{1, 2\}$ و $B = \{1, 2, \{1, 2\}\}$ و $C = \{\{1, 2, \{1, 2\}\}, 1\}$ ، کدام رابطه نادرست است؟
 (۱) $B \subseteq C$ (۲) $A \in B$ (۳) $A \subseteq B$ (۴) $B \in C$
۳. اگر $A = \{1, 2, \{1, 2, 3\}\}$ و $B = \{1, 2, 3, \{1, 2\}\}$ و $C = \{1, 2, 3\}$ باشد، کدام رابطه درست است؟
 (۱) $A - B = C$ (۲) $B - C = \emptyset$ (۳) $B - C = \{1, 2\}$ (۴) $A - B = \{C\}$
۴. اگر $A_i = \{m \in \mathbb{Z} \mid -i \leq m \leq n - i\}$ ، مجموعه $\bigcup_{i=1}^n A_i - \bigcap_{i=1}^n A_i$ چند عضو دارد؟
 (۱) ۱۳ (۲) ۱۴ (۳) ۱۵ (۴) ۱۶
۵. اگر $n \in \mathbb{N}$ و $A_n = \{m \in \mathbb{Z} \mid m > -n, 2^m \leq 2n\}$ ، مجموعه $(A_8 - A_4) \cup A_1$ چند عضو دارد؟
 (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸
۶. اگر $A \cup (B - A) = B$ باشد، آنگاه کدام درست است؟
 (۱) $A \subseteq B$ (۲) $B \subseteq A$ (۳) $A = \emptyset$ (۴) $B = \emptyset$
۷. متمم مجموعه $(B - A)' - A$ نسبت به مجموعه مرجع کدام است؟
 (۱) $A \cup B$ (۲) $A \cap B$ (۳) A (۴) B
۸. هر یک از مجموعه‌های A و B و C و D یکی از مجموعه‌های اعداد طبیعی، گویا، حقیقی و حسابی هستند. اگر گزاره $B \subseteq D \subseteq A \subseteq C$ برقرار باشد، کدام یک از مجموعه‌های زیر متناهی است؟
 (۱) $C - D$ (۲) $A - D$ (۳) $C - A$ (۴) $D - B$
۹. کدام گزینه متعلق به مجموعه $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ نیست؟
 (۱) $\frac{\pi}{3}$ (۲) $-\sqrt{51}$ (۳) $\sqrt{10\pi}$ (۴) $1/723723\dots$
۱۰. چه تعداد از عبارات زیر صحیح است؟
 الف) اجتماع دو مجموعه متناهی، مجموعه‌ای متناهی است.
 ب) اشتراک یک مجموعه متناهی با یک مجموعه نامتناهی، مجموعه‌ای نامتناهی است.
 پ) اشتراک مجموعه مضارب عدد ۵ با مجموعه مضارب عدد ۷، مجموعه‌ای متناهی است.
 ت) اگر A مجموعه‌ای متناهی و B مجموعه‌ای نامتناهی باشد، $A - B$ مجموعه‌ای نامتناهی است.
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴
۱۱. کدام یک از گزینه‌های زیر درست است؟
 (۱) اشتراک دو مجموعه نامتناهی، مجموعه‌ای الزاماً نامتناهی است.
 (۲) تفاضل دو مجموعه نامتناهی، مجموعه‌ای الزاماً نامتناهی است.
 (۳) اگر $A \subseteq B$ و B مجموعه‌ای نامتناهی باشد، آنگاه A الزاماً نامتناهی است.
 (۴) اگر $A \subseteq B$ و $A \cap B$ مجموعه‌ای نامتناهی باشد، آنگاه B الزاماً نامتناهی است.

۱۲. اگر M مجموعه مرجع و $M = \{x | x \in \mathbb{N}, x \leq 50\}$ و $A = \{x | x \in M, x \leq 15\}$ و $B' = \{x | x \in M, \sqrt{x} < 5\}$ باشد، $A' - B$ کدام است؟

(۱) $\{x | x \in M, x^2 \geq 10\}$ (۲) $\{x | x \in M, 2 < \sqrt{x} \leq 10\}$

(۳) $\{x | x \in M, 4 \leq \sqrt{x} < 5\}$ (۴) $\{x | x \in M, x \geq 4\}$

۱۳. اگر $n(A) + n(B) = \frac{3}{4}n(A \cup B)$ باشد، حاصل $\frac{n(A \cup B)}{n(A \cap B)}$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۲ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) ۳

۱۴. اگر A و B زیرمجموعه‌هایی از مجموعه مرجع U و $n(U) = 100$ و $n(A) = 45$ و $n(B) = 70$ و $n(B - A) = 50$ باشند، $n(A \cup B)'$ کدام است؟

(۱) ۵ (۲) ۱۰ (۳) ۱۵ (۴) ۲۰

۱۵. در یک هتل ۷۲ مسافر اقامت دارند. از این تعداد مسافر، ۲۳ نفر تاجر می‌باشند، ۱۲ نفر برای اولین بار سفر کرده‌اند و ۸ نفر تاجرانی هستند که برای اولین بار سفر کرده‌اند. چند مسافر در این هتل اقامت دارند که نه تاجر هستند و نه برای اولین بار سفر کرده‌اند؟

(۱) ۲۷ (۲) ۴۵ (۳) ۳۵ (۴) ۱۹

پاسخنامه

۱. (۱) (۲) (۳) (۴)

اگر a عضوی از مجموعه X باشد باید دقیقاً خود a در آن حضور داشته باشد و آنگاه می‌توان گفت $\{a\}$ زیرمجموعه X خواهد بود. حال در این سؤال چون $2 \in B$ است پس $\{2\} \subseteq B$ بوده و در نتیجه $A \subseteq B$ ، همچنین چون $\{2\} \in B$ در نتیجه $A \in B$ و چون $\{2, \{2\}\} \in C$ در نتیجه $B \in C$ است ولی B زیرمجموعه‌ای از C نیست چون 2 عضوی از B هست ولی در C حضور ندارد.

۲. (۱) (۲) (۳) (۴)

اگر عضوی از مجموعه X باشد باید دقیقاً خود a در آن حضور داشته باشد و آنگاه می‌توان گفت $\{a\}$ زیرمجموعه X خواهد بود. حال در این سؤال چون $\{1, 2\} \in B$ ، در نتیجه $A \in B$ و چون $1, 2 \in B$ ، آنگاه $A \subseteq B$ و چون $\{1, 2, \{1, 2\}\} \in C$ ، آنگاه $B \in C$ است ولی B زیرمجموعه‌ای از C نیست چون 2 عضوی از B هست ولی در C حضور ندارد.

۳. (۱) (۲) (۳) (۴)

هر یک از گزینه‌ها را محاسبه می‌کنیم.

$$1) A - B = \{\{1, 2, 3\}\} \neq C$$

$$2) B - C = \{\{1, 2\}\} \neq \emptyset$$

پس فقط گزینه ۴ درست است.

۴. (۱) (۲) (۳) (۴)

اجتماع و اشتراک ۸ مجموعه را به کمک محاسبه بزرگترین و کوچکترین مجموعه تعیین می‌کنیم.

$$A_1 = \{m \in \mathbb{Z} \mid -1 \leq m \leq 7\}$$

$$A_8 = \{m \in \mathbb{Z} \mid -8 \leq m \leq 0\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \bigcup_{i=1}^8 A_i = \{-8, -7, \dots, 7\} \\ \bigcap_{i=1}^8 A_i = \{-1, 0\} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \bigcup_{i=1}^8 A_i - \bigcap_{i=1}^8 A_i = 16 - 2 = 14$$

۵. (۱) (۲) (۳) (۴)

ابتدا مجموعه‌ها را تعیین کرده و سپس تعداد اعضای مجموعه خواسته شده را محاسبه می‌کنیم.

$$A_1 = \{m \in \mathbb{Z} \mid m > -1, 2^m \leq 2\} \\ = \{0, 1\}$$

$$A_4 = \{m \in \mathbb{Z} \mid m > -4, 2^m \leq 8\} \\ = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

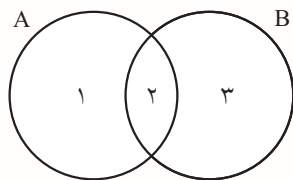
$$A_n = \{m \in \mathbb{Z} \mid m > -8, 2^m \leq 16\} \\ = \{-7, -6, \dots, 3, 4\}$$

$$\Rightarrow (A_n - A_4) \cup A_1$$

$$= \{-7, -6, -5, -4, 3, 4, 0, 1\} \Rightarrow \text{عضوی } 7$$

۶. (۱) (۲) (۳) (۴)

به کمک نمودار ون و شماره‌گذاری مجموعه‌ها داریم:



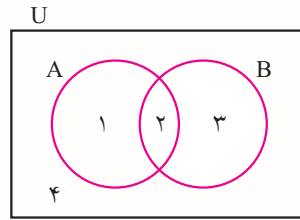
$$A \cup (B - A) = \{1, 2\} \cup (\underbrace{\{2, 3\} - \{1, 2\}}_{\{3, 1\}})$$

$$= \{1, 2, 3\} = A \cup B$$

پس $A \cup B = B$ شده است در نتیجه $A \subseteq B$ خواهد بود.

۷. (۱) (۲) (۳) (۴)

راه حل هم‌چنان نمودار ون و استفاده از شماره‌گذاری است ولی در این سؤال چون بحث متمم نیز وجود دارد باید مجموعه مرجع مفروض U را نیز در نظر بگیریم.



پ) مجموعه مضارب عدد ۵ و مجموعه مضارب عدد ۷ هر دو مجموعه‌هایی نامتناهی هستند پس اشتراک آنها (یعنی مجموعه مضارب عدد ۳۵) نامتناهی است و این عبارت نادرست است.

ت) حاصل تقاضل یک مجموعه نامتناهی از یک مجموعه متناهی، مجموعه‌ای متناهی است پس این عبارت نادرست است.

۱۱. (۱) (۲) (۳) (۴)

هر یک از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم.

۱) اشتراک دو مجموعه نامتناهی نامشخص است و نمی‌توان قطعی نظر داد.

۲) تقاضل دو مجموعه نامتناهی نامشخص است و نمی‌توان قطعی نظر داد.

۳) زیرمجموعه‌های یک مجموعه نامتناهی می‌توانند متناهی باشند.

۴) اگر $A \subseteq B$ باشد آنگاه $A \cap B = A$ و چون طبق گفته سؤال $A \cap B = A$ نامتناهی است، پس با توجه به آنکه $A \subseteq B$ ، حتماً مجموعه B (بزرگتر) نیز نامتناهی است.

۱۲. (۱) (۲) (۳) (۴)

ابتدا مجموعه‌های داده شده را با نوشتن اعضا مشخص می‌کنیم.

$$M = \{1, 2, \dots, 49, 50\}$$

$$A = \{1, 2, \dots, 14, 15\}$$

$$B' = \{1, 2, 3, \dots, 24\}$$

حال برای مجموعه خواسته شده داریم:

$$\begin{aligned} A' - B &= A' \cap B' \\ &= \{16, 17, \dots, 50\} \cap \{1, 2, \dots, 24\} \\ &= \{16, 17, \dots, 24\} \end{aligned}$$

حال با توجه به گزینه‌ها، مجموعه به دست آمده شامل اعداد است که جذر آنها بین دو عدد ۴ و ۵ است.

۱۳. (۱) (۲) (۳) (۴)

می‌دانیم:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

در نتیجه در این سؤال داریم:

$$\begin{aligned} (B - A)' &= (\{2, 3\} - \{1, 2\})' \\ &= (\{3\})' = \{1, 4, 2\} \end{aligned}$$

$$(B - A)' - A = \{1, 4, 2\} - \{1, 2\} = \{4\}$$

حال می‌دانیم ناحیه ۴ همان $A' \cap B'$ است که متمم آن طبق قانون دمورگان برابر $(A' \cap B')' = A \cup B$ خواهد بود.

۱۴. (۱) (۲) (۳) (۴)

می‌دانیم بین مجموعه اعداد گزاره $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ برقرار است و با مقایسه با گزاره صورت سؤال نتیجه می‌گیریم $B = \mathbb{N}$ و $D = \mathbb{W}$ و $A = \mathbb{Q}$ و $C = \mathbb{R}$. حال حاصل هر گزینه را محاسبه می‌کنیم.

$$۱) C - D = \mathbb{R} - \mathbb{W} =$$

(نامتناهی) مجموعه اعداد غیر صحیح

$$۲) A - D = \mathbb{Q} - \mathbb{W} =$$

(نامتناهی) مجموعه اعداد گویای غیر صحیح

$$۳) C - A = \mathbb{R} - \mathbb{Q} = \mathbb{Q}'$$

(نامتناهی) مجموعه اعداد گنگ

$$۴) D - B = \mathbb{W} - \mathbb{N} = \{0\}$$

(متناهی)

۹. (۱) (۲) (۳) (۴)

می‌دانیم مجموعه $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ همان مجموعه اعداد گنگ (\mathbb{Q}') خواهد بود و گزینه ۴ چون ارقام بعد از ممیز آن تکرار می‌شوند نمی‌تواند گنگ باشد و عددی گویا است ولی مابقی گزینه‌ها همگی گنگ هستند.

۱۰. (۱) (۲) (۳) (۴)

هر یک از عبارات را بررسی می‌کنیم.
الف) درست است.

ب) نادرست است. اشتراک یک مجموعه متناهی و یک مجموعه نامتناهی، متناهی است.