

درسنامه ۱

مجموعه اعداد - بازه‌ها

مجموعه اعداد: برخی از مجموعه‌های خاص اعداد به صورت زیر است:

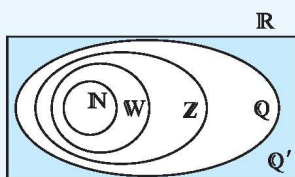
$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$: مجموعه اعداد طبیعی
 $\mathbb{W} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$: مجموعه اعداد حسابی
 $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$: مجموعه اعداد صحیح
 $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$: مجموعه اعداد گویا

$\{x \mid x \notin \mathbb{Q}\}$ = مجموعه اعدادی که نتوان عضوهای آن را به صورت نسبت دو عدد صحیح نمایش داد. \mathbb{Q}' : مجموعه اعداد گنگ

$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$: مجموعه اعداد حقیقی

نکته

۱- رابطه زیرمجموعه بودن بین این مجموعه‌ها به صورت $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ و $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ است.



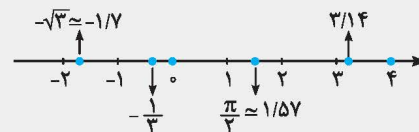
۲- هر عدد دلخواه را می‌توان روی محور اعداد نمایش داد و همچنین هر نقطه روی محور اعداد نشان‌دهنده یک عدد حقیقی مشخص است.

مثال

کدام یک از اعداد زیر گویا و کدام یک گنگ می‌باشند؟ مکان تقریبی هر یک از آن‌ها را روی محور مشخص کنید.

$-\frac{1}{3}, 3/14, \frac{\pi}{4}, -\sqrt{3}, 4, 0$

اعداد گویا: $-\frac{1}{3}, 3/14, 4, 0$ ، اعداد گنگ: $\frac{\pi}{4}, -\sqrt{3}$



پاسخ:

بازه (فاصله): زیرمجموعه‌هایی از \mathbb{R} مانند A را که مشخص‌کننده یک قطعه از محور اعداد حقیقی باشد، بازه یا فاصله می‌نامیم.

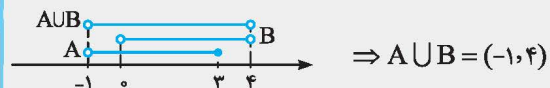
اگر a و b دو عدد حقیقی دلخواه باشند، به طوری که $a < b$ ، آن‌گاه:

نمایش هندسی	نمایش مجموعه‌ای	بازه	نوع بازه
	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	(a, b)	باز
	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	$[a, b]$	بسته
	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$	$[a, b)$	نیم‌باز (نیم‌بسته)
	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$	$(a, b]$	نیم‌باز (نیم‌بسته)

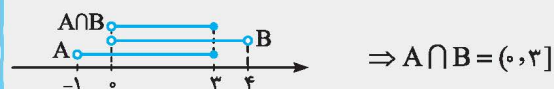
مثال

اگر $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq 3\}$ و $B = (0, 4)$ باشند، $A \cup B$ و $A \cap B$ را به صورت بازه نوشته و روی محور اعداد مشخص کنید.

پاسخ: ابتدا مجموعه‌های A و B را روی محور اعداد مشخص می‌کنیم. $A \cup B$ مجموعه‌ای است که اعضای آن یا در A یا در B و یا در هر دو باشند:



اعضای مشترک دو مجموعه A و B ، مجموعه $A \cap B$ است:



درستنامه ۱

از دو نماد $+\infty$ (مثبت بی‌نهایت) و $-\infty$ (منفی بی‌نهایت) برای نمایش بازه‌هایی که از یک طرف نامحدود هستند، استفاده می‌کنیم. فرض کنیم a یک عدد حقیقی باشد، در این صورت داریم:

نوع بازه	بازه	نمایش مجموعه‌ای	نمایش هندسی
نیم‌باز	$[a, +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$	
نیم‌باز	$(-\infty, a]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$	
باز	$(a, +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$	
باز	$(-\infty, a)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$	

توجه: $+\infty$ و $-\infty$ عدد حقیقی نیستند.

مثال اگر $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x + 1 \leq 5\}$ و $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ باشد، $A - B$ را به صورت بازه نوشته و روی محور اعداد مشخص کنید.
پاسخ: با حل نامعادله $2x + 1 \leq 5$ ، داریم $x \leq 2$. اگر عضوهای مشترک A و B را از مجموعه A حذف کنیم، مجموعه $A - B$ به دست می‌آید:



نکته

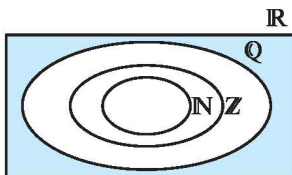
$$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$

بازه $(-\infty, +\infty)$ شامل تمام اعداد حقیقی است، به عبارت دیگر:

۱. درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.
- (الف) $-1 \in (-1, 2)$ (ب) $4 \in (3, 4)$ (پ) $0 \in \{-1, 1\}$
- (ت) $\frac{5}{6} \in (0, 1)$ (ث) $\sqrt{3} \in (1, 2)$ (ج) $[-1, 1) = (-1, 1)$
- (چ) $\emptyset \subseteq [-1, +\infty)$ (ح) $\{-1, 0, 2\} \subseteq [-1, 3]$ (خ) $(-1, 1) \subseteq [-1, 1)$
- (د) $0 \in (-2, 0) \cup (0, 1)$ (ذ) $\{0\} = \mathbb{W} - \mathbb{N}$ (ر) $\mathbb{Q}' \subseteq \mathbb{R}$
- (ز) $(1, 2) \subseteq \mathbb{Q}$ (س) $\{x \in \mathbb{Q} \mid -1 \leq x < 1\} = [-1, 1)$ (ذ) $\mathbb{R} - \mathbb{Q}' = \mathbb{Q}$
- (ش) $-6 \times 10^{23} \in (-\infty, 1)$ (ص) $6 \times 10^{-4} \in [2, +\infty)$

۲. اعداد زیر را روی شکل و در محل مناسب قرار دهید.

$$10^\circ, -2, -\frac{\pi}{4}, \sqrt{5}, \frac{1}{4}, 3/1212000$$



۳. هر یک از اعداد $-\frac{2}{3}, \frac{\pi}{4}, \sqrt{2} + \sqrt{3}, 2/4$ و 2° را روی محور مشخص کنید و بگویید کدام یک از آن‌ها گنگ هستند.

۴. هر یک از بازه‌های زیر را به صورت مجموعه نمایش دهید و نمایش هندسی آن‌ها را مشخص کنید.

- (الف) $(-2, 2)$ (ب) $[0, 2)$ (پ) $[-4, -1]$ (ت) $(1, \sqrt{5})$
- (ث) $(3, +\infty)$ (ج) $(-\infty, -2)$ (ح) $[\sqrt{2}, +\infty)$ (خ) $(-\infty, \frac{1}{4}]$

۵. نمایش هندسی دو بازه $A = [-1, 5)$ و $B = (-3, 2)$ را روی محور رسم کنید و سپس حاصل عبارتهای زیر را بنویسید.

- (الف) $A \cap B$ (ب) $A \cup B$ (پ) $A - B$ (ت) $B - A$

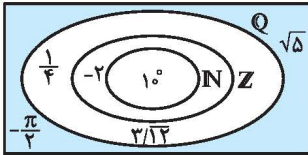
۶. حاصل هر یک از مجموعه‌های زیر را با رسم بازه‌های آن‌ها روی یک محور به دست آورید.
- (آ) $(-2, 5] \cap (-1, +\infty)$ (ب) $[-4, 0] \cap [-1, +\infty)$ (پ) $[-2, 4] \cup (0, 5]$ (ت) $(-\infty, -1) \cup [-1, +\infty)$
- (ث) $(-\infty, 2) - (0, 3)$ (ج) $(0, 5] - [2, +\infty)$ (چ) $(-1, 0] \cap [0, 2)$ (ح) $(-\infty, -1) \cup (-\infty, 3)$
۷. اگر $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x+1 \leq 2\}$ و $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \leq 0\}$ باشند، مجموعه‌های زیر را به کمک بازه نمایش دهید.
- (آ) A (ب) B (پ) $A - B$ (ت) $A \cup B$
۸. اگر $A = \{x \mid x \in \mathbb{R}, -1 < x < 3\}$ ، $B = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \leq 1\}$ و $C = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}$ باشند، حاصل $(A \cap B) \cup C$ و $B - (A \cap C)$ را به صورت بازه نوشته و روی محور نشان دهید.
۹. مجموعه‌های $\mathbb{R} - \{0\}$ ، $\mathbb{R} - \{-3, 4\}$ ، $\{4, 6\} - [3, 7]$ و $[-2, 4] - (0, 1)$ را روی محور نشان دهید و سپس هر یک از آن‌ها را به صورت اجتماع چند بازه بنویسید.
۱۰. اگر $\frac{m+1}{p} \in [-1, 4]$ باشد، حدود m را مشخص کنید.

پاسخ‌های تشریحی

ش) درست است، زیرا عدد 6×10^{23} عددی منفی است و در نتیجه از یک کوچک‌تر است. بنابراین: $-6 \times 10^{23} \in (-\infty, 1]$

ص) نادرست است، زیرا نمایش اعشاری عدد 6×10^{-4} به صورت 0.0006 می‌باشد که عددی کوچک‌تر از ۲ می‌باشد، پس: $6 \times 10^{-4} \notin [2, +\infty)$

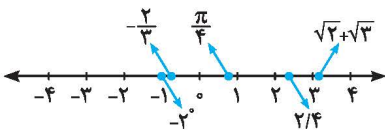
۲) عدد $10^\circ = 1$ یک عدد طبیعی، عدد -2 یک عدد صحیح منفی، اعداد $\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{3} = 0.333333...$ اعداد گویا و اعداد $\sqrt{5}$ و $-\frac{\pi}{4}$ نیز اعدادی گنگ هستند، بنابراین:



۳) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ و $\frac{\pi}{4}$ اعداد گنگ هستند و با توجه به مقدار تقریبی آن‌ها داریم:

$$\pi \approx 3.14 \Rightarrow \frac{\pi}{4} \approx 0.785$$

$$\sqrt{2} \approx 1.41, \sqrt{3} \approx 1.73 \Rightarrow \sqrt{2} + \sqrt{3} \approx 1.41 + 1.73 = 3.14$$



(آ) $(-2, 2) = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 2\}$

(ب) $[0, 2) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 2\}$

(پ) $[-4, -1] = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leq x \leq -1\}$

(ت) $(1, \sqrt{5}] = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq \sqrt{5}\}$

۱) نادرست است، زیرا بازه $[-1, 2)$ شامل تمام x هایی است که $-1 < x \leq 2$ باشد، لذا $-1 \notin (-1, 2]$

ب) درست است، زیرا انتهای بازه بسته است و در نتیجه عدد ۴ عضو این بازه است.

پ) نادرست است، زیرا مجموعه $\{-1, 1\}$ (نه بازه $(-1, 1)$)، شامل فقط دو عضو -1 و 1 می‌باشد، بنابراین $\{-1, 1\} \neq \emptyset$

ت) درست است، زیرا $0 < \frac{5}{6} < 1$ و در نتیجه $\frac{5}{6} \in (0, 1)$

ث) درست است، زیرا مقدار تقریبی $\sqrt{3}$ برابر 1.7 است و در نتیجه $2 < \sqrt{3} < 3$ پس $\sqrt{3} \in (1, 2)$

ج) نادرست است، زیرا مثلاً $-1 \in [-1, 1)$ ولی $-1 \notin (-1, 1)$ ، بنابراین دو بازه $[-1, 1)$ و $(-1, 1)$ با هم برابر نمی‌باشند.

چ) درست است، زیرا \emptyset زیرمجموعه هر مجموعه‌ای است.

ح) درست است، زیرا اعداد -1 ، 0 ، 2 عضو بازه $[-1, 3)$ می‌باشند و در نتیجه مجموعه شامل این ۳ عدد، زیرمجموعه‌ای از بازه $[-1, 3)$ است.

خ) درست است، زیرا تمام اعضای بازه $(-1, 1)$ عضوی از بازه $(-1, 1)$ می‌باشند.

د) نادرست است، زیرا عدد صفر در هیچ یک از دو بازه $(-2, 0)$ و $(0, 1)$ قرار ندارد.

ذ) درست است، زیرا: $\mathbb{W} - \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\} - \{1, 2, 3, \dots\} = \{0\}$

ر) درست است، زیرا تمام اعداد گنگ (اصم) در مجموعه اعداد حقیقی قرار دارند.

ز) نادرست است، زیرا در بازه $(1, 2)$ بی‌شمار عدد گنگ مثل $\sqrt{2} \approx 1.41$ وجود دارد که در مجموعه اعداد گویا قرار ندارند.

ژ) درست است، زیرا \mathbb{R} از اجتماع \mathbb{Q} و \mathbb{Q}' تشکیل شده است.

س) نادرست است، زیرا بازه‌ها شامل تمام اعداد حقیقی (گویا و گنگ) هستند و فقط شامل اعداد گویای بین دو عدد نمی‌باشد.



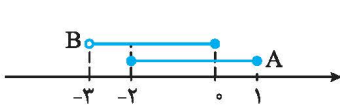
$$(-\infty, -1) \cup (-\infty, 3) = (-\infty, 3)$$

۷ (آ) با حل نامعادله‌های $-1 \leq x+1 \leq 2$ ، مجموعه‌های A را مشخص می‌کنیم:

$$-1 \leq x+1 \leq 2 \xrightarrow{-1} -2 \leq x \leq 1 \Rightarrow A = [-2, 1]$$

$$B = (-3, 0]$$

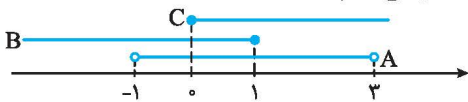
پ (ت) با نمایش مجموعه‌های A و B روی محور، مجموعه‌های $A - B$ و $A \cup B$ را مشخص می‌کنیم:



$$A - B = (0, 1]$$

$$A \cup B = (-3, 1]$$

۸ (آ) برای مشخص کردن هریک از مجموعه‌ها، ابتدا مجموعه‌های A ، B ، C و $A \cap B$ را روی محور نمایش می‌دهیم:



$$A \cap B = (-2, 0] \cap (-\infty, 0] = (-2, 0]$$

$$\Rightarrow (A \cap B) \cup C = (-2, 0] \cup [0, 3] = (-2, 3]$$



$$A \cap C = (-2, 1] \cap [0, 3] = [0, 1]$$

$$\Rightarrow B - (A \cap C) = (-3, 0] - [0, 1] = (-3, 0)$$



۹ در نمایش هندسی مجموعه $\mathbb{R} - \{0\}$ باید عدد صفر را از روی محور حذف کنیم:

$$\mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

با حذف اعداد -3 و 4 از روی محور، مجموعه $\mathbb{R} - \{-3, 4\}$ به دست می‌آید:



$$\mathbb{R} - \{-3, 4\} = (-\infty, -3) \cup (-3, 4) \cup (4, +\infty)$$

با حذف اعداد 4 و 6 از بازه $[3, 7]$ ، مجموعه $[3, 7] - \{4, 6\}$ به دست می‌آید:



$$[3, 7] - \{4, 6\} = [3, 4) \cup (4, 6) \cup (6, 7]$$

با حذف بازه $(0, 1)$ از بازه $[-2, 4]$ ، مجموعه $[-2, 4] - (0, 1)$ به دست می‌آید:



$$[-2, 4] - (0, 1) = [-2, 0] \cup [1, 4]$$

$$\frac{m+1}{2} \in [-1, 4] \Rightarrow -1 \leq \frac{m+1}{2} < 4$$

$$\xrightarrow{\times 2} -2 \leq m+1 < 8 \xrightarrow{-1} -3 \leq m < 7$$

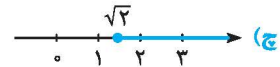
۳ (ث) $(3, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$



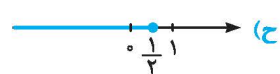
۲ (ج) $(-\infty, -2) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2\}$



۱ (چ) $[\sqrt{2}, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \sqrt{2}\}$



۴ (ح) $(-\infty, \frac{1}{2}] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{1}{2}\}$



۵ نمایش هندسی دو بازه A و B به صورت زیر است:



۱ (آ) قسمت‌های مشترک دو مجموعه A و B ، یعنی بازه $[-1, 2]$ جواب

$$A \cap B = [-1, 2]$$

است:

۲ (ب) تمام قسمت‌هایی که در A یا در B یا در هر دو وجود دارند، در

$$A \cup B = (-3, 5)$$

مجموعه $A \cup B$ قرار می‌گیرند، بنابراین:

۳ (پ) اگر قسمت‌های مشترک دو مجموعه A و B را از A حذف کنیم،

$$A - B = [2, 5)$$

مجموعه $A - B$ به دست می‌آید:

۴ (ت) اگر قسمت‌های مشترک دو مجموعه A و B را از B حذف کنیم،

$$B - A = (-3, -1)$$

مجموعه $B - A$ به دست می‌آید:



$$(-2, 5) \cap (-1, 7) = (-1, 5]$$



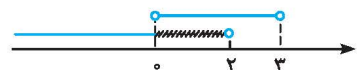
$$[-4, 0] \cap [-1, +\infty) = [-1, 0]$$



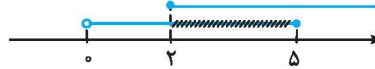
$$[-2, 4] \cup (0, 5] = [-2, 5]$$



$$(-\infty, -1) \cup [-1, +\infty) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$



$$(-\infty, 2) - (0, 3) = (-\infty, 0] \cup [3, 2)$$



$$(0, 5] - [2, +\infty) = (0, 2)$$



$$(-1, 0] \cap (0, 2) = \{0\}$$

درسنامه ۲

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی - متمم یک مجموعه

مجموعه‌های متناهی: مجموعه‌هایی که تعداد اعضای آن‌ها یک عدد حسابی می‌باشد، مجموعه‌های متناهی (با پایان) می‌نامیم.
مجموعه‌های نامتناهی: مجموعه‌هایی که تعداد اعضای آن‌ها را نتوان با یک عدد حسابی بیان کرد، مجموعه‌های نامتناهی می‌گوییم. در واقع مجموعه‌ای که متناهی نباشد را مجموعه‌ی نامتناهی می‌نامیم.
 به عنوان مثال، مجموعه اعداد اول یک رقمی یک مجموعه متناهی است، زیرا یک مجموعه ۴ عضوی می‌باشد:

$$A = \{2, 3, 5, 7\}$$

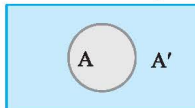
مجموعه اعداد اول یک رقمی

توجه: تعداد اعضای بعضی مجموعه‌های متناهی ممکن است بسیار زیاد باشد که با صرف وقت کافی و گاهی با بعضی امکانات می‌توان تعداد آن‌ها را به‌دست آورد، مثل تعداد سواری‌های شهر تهران.

مجموعه مرجع: در هر بحث، مجموعه‌ای را که همه مجموعه‌های مورد بحث، زیرمجموعه آن باشند، مجموعه مرجع می‌نامیم و آن را با U نشان می‌دهیم.
متمم یک مجموعه: هرگاه U مجموعه مرجع باشد و $A \subseteq U$ ، آن‌گاه مجموعه $U - A$ را متمم A می‌نامیم و آن را با نماد A' نشان می‌دهیم.

$$A' = U - A$$

به عبارت دیگر A' شامل عضوهایی از U می‌باشد که در A نیستند. در واقع: نمودار ون مجموعه A با مجموعه مرجع U به‌صورت مقابل است:



مثال فرض کنید $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ مجموعه مرجع، $A = \{1, 2, 4\}$ و $B = \{3, 4, 5, 7\}$ باشند. مجموعه‌های $A' \cup B'$ و $A' - B$ را با اعضا مشخص کنید.

پاسخ: ابتدا هر یک از مجموعه‌های A' و B' را با اعضا مشخص می‌کنیم:

$$A' = U - A = \{3, 4, 5, 6, 7\} - \{1, 2, 4\} = \{3, 5, 6, 7\}, B' = U - B = \{1, 2, 3, 6, 7\} - \{3, 4, 5, 7\} = \{1, 2, 6\}$$

$$\Rightarrow A' - B = \{3, 5, 6, 7\} - \{3, 4, 5, 7\} = \{6\}, A' \cup B' = \{3, 5, 6, 7\} \cup \{1, 2, 6\} = \{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$$

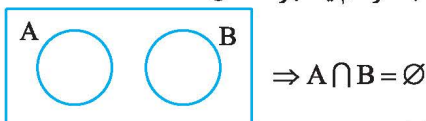
نکته

اگر A و B دو مجموعه از مجموعه مرجع U باشند، آن‌گاه:

- | | | |
|-----------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| ۱) $(A')' = A$ | ۲) $A \cap A' = \emptyset$ | ۳) $A \cup A' = U$ |
| ۴) $\emptyset' = U$ | ۵) $U' = \emptyset$ | ۶) $A - B = A \cap B'$ |
| ۷) $A - B = A - (A \cap B)$ | ۸) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ | ۹) $(A \cap B)' = A' \cup B'$ |

تذکر: روابط (۸) و (۹)، قوانین دمورگان نام دارند.

دو مجموعه جدا از هم: به هر دو مجموعه مثل A و B که فاقد عضو مشترک باشند، دو مجموعه جدا از هم یا مجزا می‌گوییم. نمودار ون دو مجموعه جدا از هم به‌صورت مقابل است:



به عنوان مثال، مجموعه اعداد طبیعی فرد و مجموعه اعداد طبیعی زوج، دو مجموعه جدا از هم هستند:

$$\left\{ \begin{array}{l} O = \{1, 3, 5, \dots\} \\ E = \{2, 4, 6, \dots\} \end{array} \right. \Rightarrow O \cap E = \emptyset \Rightarrow O \text{ و } E \text{ دو مجموعه جدا از هم هستند.}$$

تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه

قرارداد: تعداد عضوهای مجموعه متناهی A را با $n(A)$ نمایش می‌دهیم.

نکته

- اگر A و B دو مجموعه متناهی باشند، آن‌گاه تعداد عضوهای مجموعه $A \cup B$ برابر است با: $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
- اگر U یک مجموعه متناهی باشد، آن‌گاه: $n(A') = n(U) - n(A)$

درسنامه ۲

مثال

در یک کلاس ۳۰ نفره، ۱۷ نفر عضو تیم فوتبال، ۱۵ نفر عضو تیم والیبال و ۷ نفر عضو هر دو تیم هستند. (آ) چند نفر عضو حداقل یکی از این دو تیم هستند؟ (ب) چند نفر عضو هیچ یک از این دو تیم نمی‌باشند؟

پاسخ: مجموعه شامل تمام دانش‌آموزان را با U ، مجموعه دانش‌آموزان عضو تیم فوتبال را با A و مجموعه دانش‌آموزان عضو تیم والیبال را با B نشان می‌دهیم.

(آ) باید تعداد عضوهای مجموعه $A \cup B$ را به دست آوریم:

$$n(A) = 17, n(B) = 15, n(A \cap B) = 7 \Rightarrow n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 17 + 15 - 7 = 25$$

(ب) باید تعداد عضوهای مجموعه $(A \cup B)'$ را به دست آوریم:

$$n(U) = 30, n(A \cup B) = 25 \Rightarrow n((A \cup B)') = n(U) - n(A \cup B) = 30 - 25 = 5$$

نکته

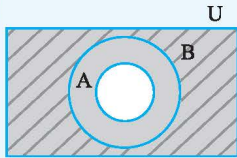
۱- اگر A و B دو مجموعه متناهی و U مجموعه مرجع باشد، آن‌گاه:

$$1) n(A \cap B') = n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$$

$$2) n(A' \cap B') = n((A \cup B)') = n(U) - n(A \cup B)$$

در فرمول شماره (۲)، U باید مجموعه‌ای متناهی باشد.

۲- اگر $A \subseteq B \subseteq U$ ، آن‌گاه $A' \subseteq B'$.



۱۱. در جاهای خالی عبارت مناسب بنویسید.

(آ) مجموعه اعداد صحیح کوچک‌تر از ۵ - یک مجموعه است. (متناهی - نامتناهی)

(ب) مجموعه اعداد طبیعی چهاررقمی یک مجموعه است. (متناهی - نامتناهی)

(پ) $A \cap A' = \dots$ ، $\emptyset' = \dots$ ، $A \cap A' = \dots$

(ت) اگر A و B دو مجموعه و $A \cap B = \emptyset$ باشد، دو مجموعه A و B را دو مجموعه می‌نامیم.

(ث) اگر A یک مجموعه نامتناهی و B یک مجموعه متناهی باشد، آن‌گاه $A - B$ یک مجموعه است.

۱۲. کدام یک از عبارتهای زیر درست و کدام یک نادرست است؟

(آ) مجموعه اعداد گویای بین ۰ و ۲ یک مجموعه متناهی است.

(ب) مجموعه اعداد صحیح بین -۲ و -۱ یک مجموعه متناهی است.

(پ) اگر A یک مجموعه متناهی و B یک مجموعه نامتناهی باشد، آن‌گاه مجموعه $A \cap B$ یک مجموعه نامتناهی است.

(ت) اگر A دارای یک زیرمجموعه متناهی باشد، آن‌گاه A یک مجموعه متناهی است.

(ث) اگر همه زیرمجموعه‌های A متناهی باشند، آن‌گاه A یک مجموعه متناهی است.

(ج) اگر A دارای یک زیرمجموعه نامتناهی باشد، آن‌گاه A یک مجموعه نامتناهی است.

(چ) اگر A و B دو مجموعه نامتناهی باشند، آن‌گاه $A - B$ مجموعه‌ای متناهی است.

(ح) اگر A و B دو مجموعه جدا از هم باشند، آن‌گاه:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

(خ) متمم مجموعه اعداد طبیعی نسبت به مجموعه اعداد صحیح، مجموعه اعداد صحیح منفی است.

۱۳. متناهی یا نامتناهی بودن مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.

(آ) مجموعه اعداد طبیعی اول و دورقمی

(ب) مجموعه تمام مربع‌ها

(ث) مجموعه اعداد گویای بین ۰ و ۱

(ج) $\{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 0\}$

(خ) $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$

(ذ) مجموعه شمارنده‌های عدد ۲۴

(ز) $\mathbb{N} \cap \mathbb{Q}$

(ب) مجموعه اعداد صحیح فرد

(ت) مجموعه خیابان‌های ایران

(ج) مجموعه اعداد گنگ بین ۰ و ۱

(ح) مجموعه مضرب‌های صحیح ۴

(د) مجموعه کسرهایی با صورت و مخرج عدد طبیعی

(ر) $\mathbb{W} - \mathbb{N}$

(ز) $\mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$

۱۴. به سوالات زیر پاسخ دهید:

- (ا) دو مجموعه نامتناهی متمایز مثال بزنید که یکی از آن‌ها زیرمجموعه دیگری باشد.
 (ب) دو مجموعه نامتناهی متمایز مثال بزنید که اشتراک آن‌ها متناهی باشد.
 (پ) دو مجموعه نامتناهی متمایز مثال بزنید که تفاضل آن‌ها نامتناهی باشد.
 (ت) دو مجموعه نامتناهی متمایز مثال بزنید که تفاضل آن‌ها متناهی باشد.

۱۵. فرض کنید U مجموعه تمام مضرب‌های طبیعی عدد ۶ باشد.

- (ا) U را با نمایش اعضای آن بنویسید.
 (ب) U متناهی است یا نامتناهی؟
 (پ) یک زیرمجموعه متناهی از U بنویسید.
 (ت) دو زیرمجموعه نامتناهی مانند C و D از U بنویسید که $C \subseteq D$
 (ث) دو زیرمجموعه نامتناهی و مجزا مانند A و B از U بنویسید که $A \cup B = U$

۱۶. مجموعه اعداد صحیح را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیرید:

- (ا) مجموعه نامتناهی A را طوری بنویسید که A' نامتناهی باشد.
 (ب) مجموعه نامتناهی A را طوری بنویسید که A' متناهی باشد.
 (پ) مجموعه متناهی A را در نظر بگیرید. A' متناهی است یا نامتناهی؟
 (ت) مجموعه متناهی A و مجموعه نامتناهی B را طوری بنویسید که A و B مجزا بوده و $Z = A \cup B$

۱۷. \mathbb{R} را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیرید و متمم هر یک از مجموعه‌های زیر را روی محور نشان دهید، سپس آن‌ها را به صورت بازه یا اجتماعی از بازه‌ها بنویسید.

- (ا) $A = (-1, 5]$ (ب) Z (پ) $B = (2, +\infty)$
 (ت) $C = (-\infty, 1]$ (ث) $(-\infty, 1) \cap (0, +\infty)$ (ج) $(-4, 1) \cup (2, 7)$

۱۸. اگر مجموعه اعداد طبیعی یک رقمی مجموعه مرجع، $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ، $B = \{2, 4, 6, 8\}$ و $C = \{3, 4, 5, 6\}$ باشند، هر یک از مجموعه‌های زیر را با اعضا بنویسید.

- (ا) A' (ب) $(A \cap B)'$ (پ) $B \cup C'$
 (ت) $(A \cup B)'$ (ث) $(A \cup B') \cap C$ (ج) $(A - B) \cup C'$

۱۹. اگر $U = \{x \in \mathbb{Z} \mid -5 \leq x \leq 4\}$ ، $A = \{x \in U \mid x \leq 0\}$ ، x مضرب ۴ است. $B = \{x \in U \mid x \leq 2\}$ و $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid -1 \leq x \leq 2\}$ باشند، هر یک از مجموعه‌های زیر را با اعضا بنویسید.

- (ا) B' (ب) $C' \cup B$ (پ) $(A \cap C) - B$ (ت) $(A' \cup B) \cap C'$

۲۰. اگر مجموعه اعداد طبیعی کوچک‌تر یا مساوی ۱۵ مجموعه مرجع، مجموعه مقسوم‌علیه‌های طبیعی عدد ۱۲ را با A و مجموعه مضرب‌های کوچک‌تر از ۱۴ عدد ۳ را با B نمایش دهیم، درستی هر یک از تساوی‌های زیر را نشان دهید.

- (ا) $(A')' = A$ (ب) $A - B = A - (A \cap B)$ (پ) $B - A = B \cap A'$
 (ت) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ (ث) $(A \cap B)' = A' \cup B'$ (ج) $A \cup (A' \cap B) = A \cup B$

۲۱. (ا) فرض کنیم $U = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ (مجموعه مرجع)، $A = \{2, 6, 10\}$ و $B = \{2, 4, 6, 10\}$ باشند. آیا $A \subseteq B$ ؟ آیا $A' \subseteq B'$ ؟
 (ب) فرض کنیم $A \subseteq B \subseteq U$ که در آن U مجموعه مرجع می‌باشد. با استفاده از نمودار ون نشان دهید $B' \subseteq A'$

۲۲. فرض کنیم U مجموعه مرجع و A و B دو مجموعه دلخواه باشند. عبارتهای زیر را ساده کنید.

- (ا) $(A \cap A') \cup B$ (ب) $((A \cup A') \cap A) \cup (A' \cap U) \cap B$

۲۳. فرض کنیم A و B زیرمجموعه‌هایی از مجموعه مرجع U هستند، به طوری که $n(U) = 50$ ، $n(A) = 35$ ، $n(B) = 20$ و $n(A \cap B) = 12$ مطلوب است:

- (ا) $n(A)$ (ب) $n(A \cup B)$ (پ) $n(A \cap B')$
 (ت) $n(A' \cap B')$ (ث) $n(A' \cup B')$ (ج) $n(A \cup B')$

۲۴. یک باشگاه ورزشی ۷۰ عضو دارد. ۴۰ نفر عضو تیم فوتبال، ۲۵ نفر عضو تیم والیبال و ۵۵ نفر حداقل در یکی از این دو رشته فعالیت می‌کنند.

(آ) چند نفر در هر دو رشته فوتبال و والیبال فعالیت می‌کنند؟

(ب) چند نفر در هیچ یک از این دو رشته فعالیت نمی‌کنند؟

(پ) چند نفر فقط فوتبال بازی می‌کنند؟

۲۵. از ۳۰ دانش‌آموز یک کلاس، ۱۷ نفر در المپیاد ریاضی و ۱۵ نفر در المپیاد فیزیک شرکت کرده‌اند. اگر ۵ نفر از دانش‌آموزان این کلاس در هیچ یک از این دو المپیاد شرکت نکرده باشند:

(آ) چند نفر در هر دو المپیاد ریاضی و فیزیک شرکت کرده‌اند؟

(ب) چند نفر در المپیاد ریاضی شرکت کرده‌اند ولی در المپیاد فیزیک شرکت نکرده‌اند؟

۲۶. در یک نظرسنجی از ۲۰۰ نفر که از اصفهان دیدن کرده‌اند، معلوم شد ۱۲۰ نفر از عالی‌قاپو و ۱۵۰ نفر از بازار اصفهان بازدید کرده‌اند. اگر ۴۰ نفر از عالی‌قاپو بازدید کرده باشند ولی از بازار اصفهان بازدید نکرده باشند:

(آ) چند نفر از هر دو مکان بازدید کرده‌اند؟

(ب) چند نفر دست‌کم از یکی از این دو مکان بازدید کرده‌اند؟

(پ) چند نفر از بازار اصفهان و از عالی‌قاپو بازدید نکرده‌اند؟

۲۷. اگر $n(A) + n(B) = 5n(A \cap B)$ باشد، حاصل $\frac{n(A \cup B)}{n(A \cap B)}$ را به دست آورید.

پاسخ‌های تشریحی

(ج) نادرست است، \mathbb{N} (مجموعه اعداد طبیعی) و O (مجموعه اعداد فرد طبیعی) مجموعه‌هایی نامتناهی‌اند و $E = \{2, 4, 6, \dots\} = \mathbb{N} - O$ نیز مجموعه‌ای نامتناهی است.

(ح) درست است، زیرا:

$$n(A \cap B) = 0 \Rightarrow A \cap B = \emptyset \Rightarrow n(A \cap B) = 0$$

$$\Rightarrow n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = n(A) + n(B)$$

(خ) نادرست است، متمم مجموعه \mathbb{N} نسبت به اعداد صحیح شامل تمام اعداد صحیح منفی و عدد صفر می‌باشد.

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\} \text{ و } \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$$

$$\Rightarrow \mathbb{N}' = \mathbb{Z} - \mathbb{N} = \{\dots, -2, -1, 0\}$$

(آ) متناهی، این مجموعه به صورت $\{1, 13, \dots, 97\}$ است که یک مجموعه متناهی می‌باشد.

(ب) نامتناهی، این مجموعه به صورت $\{1, 3, \dots, 11, 13, \dots, 3, \dots\}$ است که یک مجموعه نامتناهی می‌باشد.

(پ) نامتناهی، می‌توان هر تعداد دلخواه مربع با طول ضلع‌های مختلف رسم کرد. پس این مجموعه، نامتناهی است.

(ت) متناهی، تعداد خیابان‌های ایران ممکن است زیاد باشد، ولی بالاخره می‌توان تعداد آن‌ها را مشخص کرد. بنابراین یک مجموعه متناهی است.

(ث) نامتناهی، بین هر دو عدد می‌توان به هر تعداد دلخواه عدد گویا مشخص کرد:

$$\dots, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \dots$$

(ج) نامتناهی، بین هر دو عدد می‌توان به هر تعداد دلخواه عدد گنگ

$$\dots, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \dots$$

(آ) نامتناهی - چون مجموعه اعداد صحیح کوچک‌تر از -5 به صورت $\{-6, -7, -8, \dots\}$ است که یک مجموعه نامتناهی می‌باشد.

(ب) متناهی - چون مجموعه اعداد طبیعی چهاررقمی به صورت $\{9999, 10000, \dots, 100000\}$ است که یک مجموعه متناهی ۹۰۰۰ عضوی می‌باشد.

$$A \cap A' = \emptyset, \quad \emptyset' = U, \quad A' \cap B' = (A \cup B)'$$

(ت) جدا از هم

(ث) نامتناهی - چون اگر از یک مجموعه با بی‌شمار عضو، تعداد محدودی عضو حذف کنیم، آن‌گاه بی‌شمار عضو برای آن باقی می‌ماند.

(آ) نادرست است، زیرا بی‌شمار عدد گویا مانند $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ در

بازه $(0, 2)$ وجود دارد.

(ب) درست است، زیرا مجموعه اعداد صحیح بین -2 و -1 ، مجموعه تهی است که یک مجموعه متناهی با صفر عضو می‌باشد.

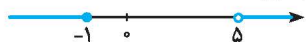
(پ) نادرست است، زیرا $A \cap B$ زیرمجموعه مجموعه A است و چون A یک مجموعه متناهی می‌باشد، پس هر زیرمجموعه آن نیز یک مجموعه متناهی می‌باشد، بنابراین $A \cap B$ یک مجموعه متناهی است.

(ت) نادرست است، به عنوان مثال، مجموعه نامتناهی \mathbb{N} دارای زیرمجموعه متناهی $\{1, 2\}$ است.

(ث) درست است، زیرا اگر A یک مجموعه متناهی باشد، چون $A \subseteq A$ و هر زیرمجموعه A متناهی است، بنابراین A متناهی می‌باشد.

(ج) درست است، زیرا اگر $B \subseteq A$ و B نامتناهی باشد، آن‌گاه تمام عضوهای مجموعه B در مجموعه A قرار دارند و در نتیجه A نامتناهی است.

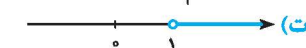
۱۷ آ) $A' = \mathbb{R} - (-1, 5] = (-\infty, -1] \cup (5, +\infty)$



ب) $Z' = \mathbb{R} - Z = \dots \cup (-2, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, 2) \cup \dots$



پ) $B' = \mathbb{R} - (2, +\infty) = (-\infty, 2]$

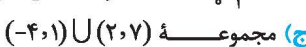


ت) $C' = \mathbb{R} - (-\infty, 1] = (1, +\infty)$



ث) $(-\infty, 1) \cap (0, +\infty) = (0, 1)$

⇒ $(0, 1)' = \mathbb{R} - (0, 1) = (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$



ج) مجموعه $(-4, 1) \cup (2, 7)$ روی محور به صورت



می باشد، بنابراین:

⇒ $((-4, 1) \cup (2, 7))' = (-\infty, -4] \cup [1, 2] \cup [7, +\infty)$



۱۸ مجموعه مرجع $U = \{1, 2, \dots, 9\}$ می باشد.

آ) $A' = U - A = \{1, 2, 3, 4\} - \{1, 2, 3, 4, 5, \dots, 9\} = \{5, 6, 7, 8, 9\}$

ب) $A \cap B = \{1, 2, 3, 4\} \cap \{2, 4, 6, 8\} = \{2, 4\}$

⇒ $(A \cap B)' = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots, 9\} - \{2, 4\} = \{1, 3, 5, 6, 7, 8, 9\}$

پ) $C' = U - C = \{1, 2, 7, 8, 9\}$

⇒ $B \cup C' = \{2, 4, 6, 8\} \cup \{1, 2, 7, 8, 9\} = \{1, 2, 4, 6, 7, 8, 9\}$

ت) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$

⇒ $(A \cup B)' = U - (A \cup B) = \{5, 7, 9\}$

ث) $B' = U - B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

⇒ $A \cup B' = \{1, 2, 3, 4\} \cup \{1, 3, 5, 7, 9\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}$

⇒ $(A \cup B') \cap C = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\} \cap \{3, 4, 5, 6\} = \{3, 4, 5\}$

ج) $A - B = \{1, 3\} \Rightarrow (A - B) \cup C'$

$= \{1, 3\} \cup \{1, 2, 7, 8, 9\} = \{1, 2, 3, 7, 8, 9\}$

۱۹ مجموعه های U, A, B, C با اعضا به صورت زیر می باشند:

$U = \{-5, -4, \dots, 3, 4\}$, $A = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0\}$

$B = \{-4, 0, 4\}$, $C = \{-1, 0, 1, 2\}$

آ) $B' = U - B = \{-5, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4\}$

ب) $C' = \{-5, -4, -3, -2, 3, 4\}$

پ) $\Rightarrow C' \cup B = \{-5, -4, -3, -2, 0, 3, 4\}$

ت) $A \cap C' = \{-5, -4, -3, -2\}$

ث) $\Rightarrow (A \cap C') - B = \{-5, -3, -2\}$

آ) $A' = \{1, 2, 3, 4\} \Rightarrow A' \cup B = \{-4, 0, 1, 2, 3, 4\}$

ب) $\Rightarrow (A' \cup B) \cap C' = \{-4, 3, 4\}$

ج) متناهی، هیچ عدد طبیعی کوچک تر یا مساوی صفر وجود ندارد، لذا مجموعه $\{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 0\} = \emptyset$ یک مجموعه متناهی است.

ح) نامتناهی، مجموعه مضرب های صحیح عدد ۴ به صورت $\{ \dots, -8, -4, 0, 4, 8, \dots \}$ است که یک مجموعه نامتناهی می باشد.

خ) نامتناهی، بی شمار عدد (گویا و گنگ) بین دو عدد -1 و $\frac{1}{2}$ وجود دارد. بنابراین مجموعه $(-1, \frac{1}{2})$ نامتناهی است.

د) نامتناهی، بی شمار عدد کسری با صورت و مخرج عدد طبیعی وجود دارد، بنابراین مجموعه نامتناهی است. $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \dots$

ذ) متناهی، مجموعه شمارنده های عدد ۲۴ به صورت $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$ است که یک مجموعه متناهی ۸ عضوی می باشد.

ر) متناهی، زیرا: $\mathbb{W} - \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\} - \{1, 2, \dots\} = \{0\}$

ز) نامتناهی، زیرا $\mathbb{N} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{N}$ و \mathbb{N} یک مجموعه نامتناهی است.

ژ) نامتناهی، زیرا $\mathbb{R} \cup \mathbb{Q}' = \mathbb{R}$ و \mathbb{R} یک مجموعه نامتناهی است.

۱۴ آ) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W}$ و دو مجموعه نامتناهی اند

ب) $A = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$, $B = \{-1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

⇒ $A \cap B = \{-1, 0, 1, 2\}$

پ) \mathbb{Q} و \mathbb{Z} دو مجموعه نامتناهی اند و $\mathbb{Q} - \mathbb{Z}$ نیز مجموعه نامتناهی است.

ت) \mathbb{W} و \mathbb{N} دو مجموعه نامتناهی اند و $\mathbb{W} - \mathbb{N} = \{0\}$ یک مجموعه متناهی است.

۱۵ آ) $U = \{6, 12, 18, 24, \dots\}$

ب) U مجموعه های نامتناهی است.

پ) $A = \{12, 18, 24\} \subseteq U$ مجموعه های متناهی است.

ت) اگر C مجموعه مضرب های ۲۴ و D مجموعه مضرب های ۱۲ باشد، آنگاه $C \subseteq D$

ث) $D = \{12, 24, 36, 48, \dots\}$, $C = \{24, 48, \dots\}$

آ) A را مضرب های فرد ۶ و B را مضرب های زوج عدد ۶ در نظر می گیریم:

$A = \{6, 18, 30, 42, \dots\}$, $B = \{12, 24, 36, \dots\} \Rightarrow A \cup B = U$

۱۶ آ) $A = \mathbb{N} \Rightarrow A' = \mathbb{Z} - \mathbb{N} = \{\dots, -2, -1, 0\}$ (نامتناهی)

ب) $A = \mathbb{Z} - \{0\} \Rightarrow A' = \{0\}$

پ) A' نامتناهی است. اگر تعداد محدودی از عضوهای مجموعه نامتناهی \mathbb{Z} را از مجموعه \mathbb{Z} حذف کنیم، آنگاه مجموعه باقی مانده نیز دارای بی شمار عضو است.

ت) $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{\dots, -2, -1, 3, 4, \dots\}$

⇒ $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = \mathbb{Z}$

۲۲ آ) $A \cap A' = \emptyset \Rightarrow (A \cap A') \cup B = \emptyset \cup B = B$
 ب) $(A \cup A') \cap A = U \cap A = A$, $A' \cap U = A'$
 $\Rightarrow (((A \cup A') \cap A) \cup (A' \cap U)) \cap B$
 $= (A \cup A') \cap B = U \cap B = B$

۲۳ آ) $n(A') = n(U) - n(A) = 50 - 35 = 15$
 ب) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 35 + 20 - 12 = 43$
 پ) $n(A \cap B') = n(A) - n(A \cap B) = 35 - 12 = 23$
 ت) $n(A' \cap B') = n((A \cup B)') = n(U) - n(A \cup B)$
 ب) $\underline{\underline{=}} 50 - 43 = 7$

ث) $n(A' \cup B') = n((A \cap B)') = n(U) - n(A \cap B)$
 $= 50 - 12 = 38$
 ج) $n(A \cup B') = n(A) + n(B') - n(A \cap B')$
 طبق قسمت ب) ، $n(A \cap B') = 23$ می باشد، بنابراین:
 $n(A \cup B') = 35 + 30 - 23 = 42$

۲۴ آ) طبق فرض داریم: $U \Rightarrow n(U) = 70$: مجموعه مرجع
 $A \Rightarrow n(A) = 40$: مجموعه اعضای تیم فوتبال
 $B \Rightarrow n(B) = 25$: مجموعه اعضای تیم والیبال
 طبق فرض ۵۵ نفر در حداقل یکی از این دو رشته فعالیت می کنند، پس:
 $n(A \cup B) = 55$

آ) باید $n(A \cap B)$ را به دست آوریم:
 $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
 $\Rightarrow 55 = 40 + 25 - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cap B) = 10$
 ب) باید تعداد اعضای مجموعه $(A \cup B)'$ را به دست آوریم:
 $n((A \cup B)') = n(U) - n(A \cup B) = 70 - 55 = 15$

پ) باید تعداد اعضای مجموعه $A - B$ را به دست آوریم:
 $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 40 - 10 = 30$

۲۵ مجموعه شامل تمام دانش آموزان را U ، دانش آموزان شرکت کننده در المپیاد ریاضی را A و دانش آموزان شرکت کننده در المپیاد فیزیک را B نشان می دهیم.
 روش اول: $(A \cup B)'$ مجموعه دانش آموزانی است که در هیچ یک از این دو رشته المپیاد شرکت نکرده اند. داریم:

$n(U) = 30$, $n(A) = 17$, $n(B) = 15$, $n((A \cup B)') = 5$
 $\Rightarrow n((A \cup B)') = n(U) - n(A \cup B) = 5$
 $\Rightarrow n(A \cup B) = 30 - 5 = 25$

۲۰ مجموعه های U, A, B را با اعضا مشخص می کنیم:

$U = \{1, 2, 3, \dots, 15\}$, $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, $B = \{3, 6, 9, 12\}$
 آ) $A' = U - A = \{5, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15\}$
 $\Rightarrow (A')' = U - A' = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\} = A$
 ب) $A - B = \{1, 2, 4\}$ (۱)

$A \cap B = \{3, 6, 12\} \Rightarrow A - (A \cap B) = \{1, 2, 4\}$ (۲)
 (۱), (۲) $\Rightarrow A - B = A - (A \cap B)$
 ب) $B - A = \{9\}$ (۱)
 (۲) $B \cap A' = \{3, 6, 9, 12\} \cap \{5, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15\} = \{9\}$ (۲)

(۱), (۲) $\Rightarrow B - A = B \cap A'$
 ت) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12\} \Rightarrow (A \cup B)' = U - (A \cup B)$
 $= \{5, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 15\}$ (۱)

$A' \cap B' = \{5, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15\}$
 $\cap \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 15\}$
 $= \{5, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 15\}$ (۲)
 (۱), (۲) $\Rightarrow (A \cup B)' = A' \cap B'$

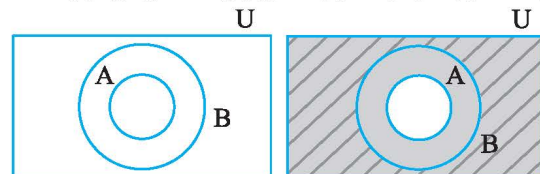
ث) $A \cap B = \{3, 6, 12\} \Rightarrow (A \cap B)' = U - (A \cap B)$
 $= \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15\}$ (۱)
 $A' \cup B' = \{5, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15\}$
 $\cup \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 15\}$
 $= \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15\}$ (۲)

(۱), (۲) $\Rightarrow (A \cap B)' = A' \cup B'$
 ج) طبق قسمت ب) ، داریم:
 $A' \cap B = B \cap A' = \{9\}$
 $\Rightarrow A \cup (A' \cap B) = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12\}$ (۱)
 $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12\}$ (۲)
 (۱), (۲) $\Rightarrow A \cup (A' \cap B) = A \cup B$

۲۱ آ) تمام اعضای مجموعه A در مجموعه B قرار دارند، بنابراین:

$A \subseteq B$
 $A' = \{4, 8, 12\}$, $B' = \{8, 12\} \Rightarrow B' \subseteq A'$
 ب) نمودار ون $A \subseteq B$ به صورت زیر است.

مجموعه A' را با سایه و B' را با هاشور زدن مشخص می کنیم:



تمام قسمت های B' که به صورت هاشور خورده است، در مجموعه A' (سایه زده شده) نیز هست، لذا:
 $B' \subseteq A'$